|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Задачи с решениями по теме «Математическая стастистика»****ЗАДАЧА 1 .****Дана выборка, представленная статистическим рядом.** **Построить гистограмму и полигон относительных частот, найти выборочные математическое ожидание и дисперсию.**https://matica.org.ua/images/stories/Prim04021/image023.jpgРешениеТаблица для расчета показателей.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Xi | Кол-во, fi | Xi \* fi | Накопленная частота, S | |x - xср|\*f | (x - xср)2\*f | Частота, fi/n |
| 45 | 4 | 180 | 4 | 66.8 | 1115.56 | 0.04 |
| 50 | 6 | 300 | 10 | 70.2 | 821.34 | 0.06 |
| 55 | 10 | 550 | 20 | 67 | 448.9 | 0.1 |
| 60 | 40 | 2400 | 60 | 68 | 115.6 | 0.4 |
| 65 | 20 | 1300 | 80 | 66 | 217.8 | 0.2 |
| 70 | 12 | 840 | 92 | 99.6 | 826.68 | 0.12 |
| 75 | 8 | 600 | 100 | 106.4 | 1415.12 | 0.08 |
|  | 100 | 6170 |  | 544 | 4961 | 1 |

1. Выборочное математическое ожиданиеВыборочное математическое ожидание показывает среднее значение выборки. По формуле https://matica.org.ua/images/stories/Prim04021/image024_2.gif, Имеем: https://matica.org.ua/images/stories/Prim04021/image025_2.gif2. Выборочная дисперсияВыборочная дисперсия показывает насколько значения выборки отдалены от ее математического ожидания. Чем значение больше, тем данные более разбросаны. По формуле https://matica.org.ua/images/stories/Prim04021/image026_2.gif. Имеем: https://matica.org.ua/images/stories/Prim04021/image027_2.gifПостроим полигон относительных частот:https://matica.org.ua/images/stories/Prim04021/image030_0.jpg |

|  |
| --- |
|  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Задача 2.** Произведено *N* наблюдений над непрерывной случайной величиной *X*. диапазон изменения величины *X* разбит на 8 отрезков. Отрезки и число наблюдений *Ni*, попавших в каждый из них, указаны в следующей таблице.Требуется:А)  построить гистограмму;Б)  вычислить выборочное среднее значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| G*I-*1; g*I* | [4,5;6,5] | [6,5;8,5] | [8,5;10,5] | [10,5;12,5] | [12,5;14,5] | [14,5;16,5] | [16,5;18,5] | [18,5;20,5] |
| *Ni* | 15 | 15 | 30 | 80 | 50 | 35 | 15 | 10 |

[Решение](http://matica.org.ua/sdelat-zakaz): Вычислим для каждого интервала относительные частоты, разделив частоты на общую сумму частот.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| G*I-*1; g*I* | *Ni* | *Wi* |
| 4,5 - 6,5 | 15 | 0,06 |
| 6,5 - 8,5 | 15 | 0,06 |
| 8,5 - 10,5 | 30 | 0,12 |
| 10,5 - 12,5 | 80 | 0,32 |
| 12,5 - 14,5 | 50 | 0,20 |
| 14,5 - 16,5 | 35 | 0,14 |
| 16,5 - 18,5 | 15 | 0,06 |
| 18,5 - 20,5 | 10 | 0,04 |
| S | 250 |  |

По полученным данным построим гистограмму относительных частот.https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image001_7.gifПреобразуем ряд в дискретный, вычислив для каждого интервала его середину.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| G*I-*1; g*I* | *Ni* | *Wi* | Середина интервала |
| 4,5 - 6,5 | 15 | 0,06 | 5,5 |
| 6,5 - 8,5 | 15 | 0,06 | 7,5 |
| 8,5 - 10,5 | 30 | 0,12 | 9,5 |
| 10,5 - 12,5 | 80 | 0,32 | 11,5 |
| 12,5 - 14,5 | 50 | 0,20 | 13,5 |
| 14,5 - 16,5 | 35 | 0,14 | 15,5 |
| 16,5 - 18,5 | 15 | 0,06 | 17,5 |
| 18,5 - 20,5 | 10 | 0,04 | 19,5 |
| S | 250 |  |  |

Для расчета средней и дисперсии составим вспомогательную таблицу.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| G*I-*1; g*I* | *Ni* | Середина интервала | https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image002_6.gif | https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image003_7.gif |
| 4,5 - 6,5 | 15 | 5,5 | 82,5 | 693,6 |
| 6,5 - 8,5 | 15 | 7,5 | 112,5 | 345,6 |
| 8,5 - 10,5 | 30 | 9,5 | 285,0 | 235,2 |
| 10,5 - 12,5 | 80 | 11,5 | 920,0 | 51,2 |
| 12,5 - 14,5 | 50 | 13,5 | 675,0 | 72,0 |
| 14,5 - 16,5 | 35 | 15,5 | 542,5 | 358,4 |
| 16,5 - 18,5 | 15 | 17,5 | 262,5 | 405,6 |
| 18,5 - 20,5 | 10 | 19,5 | 195,0 | 518,4 |
| S | 250 |  | 3075,0 | 2680 |

Вычислим выборочное среднее значение:https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image004_7.gif= 3075 : 250 = 12,3.Выборочную дисперсию вычислим по формулеhttps://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image005_7.gif= 2680 : 250 = 10,72.Вычислим выборочное среднее квадратическое отклонение:https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image006_7.gif= 3,27.**Задача 3.** Заданы среднее квадратическое отклонение s нормально распределенной случайной величины, выборочное среднее https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image007_7.gifИ объем выборки *N*. Найти доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью g.S = 4; https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image007_7.gif= 24; *N* = 36; g = 0,87.[Решение](http://matica.org.ua/sdelat-zakaz): Найдем доверительный интервал математического ожидания для нормального распределения и неизвестной дисперсии. Воспользуемся формулой:https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image008_7.gifЗначение *T*(g;k) найдем по таблицам *T*-распределения Стьюдента.https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image009_7.gif= 1 – 0,87 = 0,13 и *K* = 36 – 1 = 35.Получим: https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image010_7.gif= *T*0,065;35 = 1,905.https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image011_7.gif= 1,27.Получим: 24 – 1,27 < *A* < 24 + 1,27 или 22,73 < *A* < 25,27**Задача 4.** Диапазон изменения случайной величины *X* разбит на 6 интервалов. Интервалы и количество наблюдений *Ni*, попавших в каждый из интервалов, заданы следующей таблицей.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| G*I-*1; g*I* | [-¥; -1,0] | [-1,0; -0,5] | [-0,5; 0] | [0; 0,5] | [0,5; 1,0] | [1,0; +¥] |
| *Ni* | 30 | 30 | 40 | 40 | 30 | 30 |

При уровне значимости a0 = 0,1 проверить гипотезу *H*0, состоящую в том, что случайная величина *X* имеет стандартное нормальное распределение *N*{0; 1}.Решение: Проверим гипотезу о стандартном нормальном распределении исследуемой случайной величины с помощью критерия Пирсона.https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image012_6.gif, где https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image013_6.gif– эмпирические частоты, https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image014_7.gif– теоретические частоты нормального закона распределения.Теоретические частоты вычислим по формуле:https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image015_7.gif, где https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image016_7.gif= 30+30+40+40+30+30 = 200.https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image017_7.gif= 32;https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image018_7.gif= 30;https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image019_7.gif= 38;https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image020_6.gif= 38;https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image021_7.gif= 30;https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image022_7.gif= 32.Составим вспомогательную таблицу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image013_6.gif | https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image014_7.gif | https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image023_7.gif |
| 30 | 32 | 0,1250 |
| 30 | 30 | 0,0000 |
| 40 | 38 | 0,1053 |
| 40 | 38 | 0,1053 |
| 30 | 30 | 0,0000 |
| 30 | 32 | 0,1250 |
| 200 | 200 | 0,4606 |

Итак, https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image024_7.gif= 0,4606.По таблице критических точек распределения https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image025_6.gifпо уровню значимости, равному 0,1 и числу степеней свободы, равному 6 – 1 – 2 = 3 найдем https://matica.org.ua/images/stories/Kat1/image026_6.gif= 6,251.Поскольку наблюдаемое значение критерия меньше критического значения, то степень расхождения теоретических и эмпирических частот незначима и гипотезу о нормальном распределении случайной величины *Следует принять*. |