Лекция 2. Операции с событиями, формула сложения вероятностей, независимые события. Условная вероятность

Курбацкий А. Н.

МШЭ МГУ

11,18 сентября 2020

Содержание

Операции с событиями

Со случайными событиями, связанными с одним и тем же случайным экспериментом можно совершать различные теоретико - множественные операции, а именно, рассматривать дополнение события A до всего Ω, пересечение и объединение двух или нескольких событий.

Важно!

При этом вычисление вероятностей полученных в результате событий можно осуществлять не только напрямую, изучая полученные множества элементарных исходов, но и по вероятностям событий, которые используются в подобных действиях.

Объеденение и пересечение событий, обратное событие

- Дополнением $\bar{A}$ события A до всего пространства элементарных исходов называется такое событие, которое включает все элементарные исходы из Ω не входящие в A.

Важно!

Согласно определению: $A \cap \bar{A} = \emptyset$ *и* $A \cup \bar{A} = \Omega$. *Ясно, что* $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

- Пересечением событий A и B называется такое событие $C = A \cap B$, включающее те и только те элементарные исходы, которые одновременно принадлежат и событию A, и событию B.
- Объединением событий A и B называется такое событие $C = A \cup B$, которое включает все исходы события A, все исходы события B, включая и те что одновременно принадлежат A и B.

Формула сложения вероятностей

Формула сложения вероятностей говорит как вычислить вероятность объединения двух событий A и B, если известны вероятности этих событий и вероятность их пересечения:

Важно!

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Если события A и B не пересекаются, то формула сложения вероятностей принимает более простой вид: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Содержание

Независимые события

На практике представляет интерес вопрос о том как может измениться вероятность события A если уже известно, что произошло событие B. Для начала мы введем понятие независимых событий, то есть таких, что наступление одного из них никак не влияет на вероятность наступления другого.

Важно!

Два события A и B называются независимыми, если выполняется условие:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

В противном случае события A и B называются зависимыми.

Пример на независимость

Пример

Игральную кость бросили один раз. Событие A - выпало четное, событие B - выпало кратное 3. Являются ли события A и B независимыми?

Пример на независимость

Пример

Игральную кость бросили один раз. Событие A - выпало четное, событие B - выпало кратное 3. Являются ли события A и B независимыми?

Пример на независимость

Пример

Игральную кость бросили один раз. Событие A - выпало четное, событие B - выпало кратное 3. Являются ли события A и B независимыми?

Решение

Событие A включает 3 элементарных исхода: 2, 4, 6, а событие B - два: 3 и 6. Пересечение событий A и B содержит один исход 6. Отсюда получаем вероятности событий A, B и $P(A \cap B)$:

$$P(A) = 1/2; P(B) = 1/3; P(A \cap B) = 1/6.$$

Легко видеть, что $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, то есть события A и B являются независимыми.

Свойства независимых событий

Перечислим некоторые элементарные свойства независимых событий:

- Если события A и B не пересекаются и их вероятности не равны нулю, то события A и B зависимы.
- Если события A и B - независимы, то независимы и любые пары событий: A и $\bar{B}$; $\bar{A}$ и B; $\bar{A}$ и $\bar{B}$.
- Для независимых событий A и B формула сложения вероятностей имеет вид:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

Пример

Пример

Бросаем 2 кости. Событие $A=\{$ *на первой кости выпало больше трех*$\}$, *событие* $B=\{$ *на обеих костях в сумме более четырех*$\}$. *Являются ли события независимыми? Найти* $P(A \cup B)$.

Пример

Пример

Бросаем 2 кости. Событие A=\{ на первой кости выпало больше трех\}, событие B=\{ на обеих костях в сумме более четырех\}. Являются ли события независимыми? Найти $P(A \cup B)$.

Решение

Общее число исходов в данном эксперименте составляет 36. Событие A состоит из 18 исходов ($(4; x)$, $(5; x)$, $(6; x)$), где x – число очков на второй кости, поэтому вероятность $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Событию B не удовлетворяют только исходы $(1; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 1)$, $(2; 2)$, $(3; 1)$, $(1; 3)$, поэтому $P(B) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$.

Так как из события A следует событие B, то есть $A \subset B$, поэтому $P(A \cap B) = P(A) \neq P(A) \cdot P(B)$, а значит, события не являются независимыми.

Чтобы найти вероятность $P(A \cup B)$ воспользуемся формулой $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) = P(B) = \frac{5}{6}$.

Содержание

Что такое условная вероятность?

Определение

Условной вероятностью события A *при условии, что произошло событие* B *называется величина*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

при том, что $P(B)$ *не равно нулю.*

Что такое условная вероятность?

Определение

Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B называется величина

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

при том, что $P(B)$ не равно нулю.

Какова вероятность встретить крокодила? Родить двух мальчиков? и т.п.

Что такое условная вероятность?

Определение

Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B называется величина

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

при том, что $P(B)$ не равно нулю.

Какова вероятность встретить крокодила? Родить двух мальчиков? и т.п.А если мы в зоопарке? А если первый родился мальчик? А если первой была девочка?

Пример

очень простой

Задача

Вероятность, что человек доживет до 60 лет, равна 0.7, а вероятность дожить до 40 - 0.9. Найдите вероятность того, что 50-тилетний человек доживет до 60 лет.

Пример

очень простой

Задача

Вероятность, что человек доживет до 60 лет, равна 0.7, а вероятность дожить до 40 - 0.9. Найдите вероятность того, что 50-тилетний человек доживет до 60 лет.

Решение

1. *Рассмотрим события A={человек доживёт до 60} и B={человек доживёт до 40}.*
2. *Так как человеку 50 лет, то до 40 он дожил! Поэтому нам надо найти вероятность* $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Пример

очень простой

Задача

Вероятность, что человек доживет до 60 лет, равна 0.7, а вероятность дожить до 40 - 0.9. Найдите вероятность того, что 50-тилетний человек доживет до 60 лет.

Решение

1. *Рассмотрим события* A=*{человек доживёт до 60}* и B=*{человек доживёт до 40}.*
2. *Так как человеку 50 лет, то до 40 он дожил! Поэтому нам надо найти вероятность* $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$.
3. *Но* $A \cap B = A$! *Поэтому*

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0.7}{0.9} = \frac{7}{9}.$$

Пример

В случайном эксперименте игральную кость бросают один раз. Событие A - выпало четное. Событие B - выпало больше 3. Найти условную вероятность $P(A|B)$.

Пример

В случайном эксперименте игральную кость бросают один раз. Событие A - выпало четное. Событие B - выпало больше 3. Найти условную вероятность $P(A|B)$.

Решение

Событие A включает 3 элементарных исхода: $A = \{2, 4, 6\}$, событие также включает 3 элементарных исхода $B = \{4, 5, 6\}$ и $P(B) = 1/2$. Тогда событие $A \cap B = \{4, 6\}$ и его вероятность равна $P(A \cap B) = 2/6 = 1/3$. По определению

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{(1/3)}{(1/2)} = 2/3.$$

Пересмотр вероятности при дополнительной информации

Заметим, что условная вероятность события A не равна его безусловной вероятности $P(A) = 1/2$. Условная вероятность события A при условии B возросла, то есть дополнительная информация (событие B) позволило нам пересмотреть вероятность того, что произойдет событие A.

Важно!

Если события A и B независимы, то $P(A|B) = P(A)$. Другими словами информация о том, что произошло событие B не меняет вероятность того, что произойдет A, если A и B независимы. Иногда это свойство используют в качестве определения независимости событий.

Про козла

За одной из трех дверей находится приз. Конкурс заключается в том, что человек должен выбрать одну из дверей, затем ведущий, не открывая двери, выбранной участником, открывает другую дверь, за которой ничего нет. Затем предлагает участнику сделать выбор, либо открыть уже выбранную дверь, либо поменять свой выбор и открыть оставшуюся дверь. Что лучше?