**Тема№1. Комбинаторика**

1.Размещение с повторением.

Пусть даны различных видов предметов, которые можно разместить по различным местам, причем выбирать предметы можно с повторениями (т.е. можно выбрать несколько предметов одного вида). Такие выборки называются размещениями с повторениями, а их количество вычисляется по формуле: .

2.Размещение без повторений.

Подсчитаем количество способов расположить различных элементов поразличным позициям (). Такие расположения называются размещениями, а их количество, от французского слова*arrangement* обозначается . В случае, есликоличество предметов совпадает с количеством имеющихся мест, и это уже изученная задача о числе перестановок.

Если из объектов выбираютштук, то число выборов последнего объекта естьневыбранных объектов, что означает наличиевозможности выбора последнего выбранного объекта. То же, другими словами: после выбора первыхэлемента остается выбратьэлемент.

**Теорема:** число размещений различных элементов поразличным позициям есть

,

или, в терминах факториалов, 

.

*Примечание:* заметим, что в случае, когда число мест, по которым размещают предметы, совпадает с количеством самих предметов, т. е. когда , рассматриваемая задача становится задачей о числе перестановок. В нашем случае при этом мы получаем в знаменателе дроби ноль факториал, и для того, что бы разные формулы, соответствующие одной и той же задаче, приводили к одинаковым результатам, полагают, что.

3.Перестановки.

* **Перестановки** из n элементов - частный случай размещения элементов из Е по k, при k=n. Иными словами, *перестановками называют размещения без повторений из n элементов, в которые входят все элементы.* Можно также сказать, что перестановками из n элементов называют всевозможные n-расстановки, каждая из которых содержит все эти элементы по одному разу, и которые отличаются друг от друга лишь порядком элементов.

Число перестановок вычисляется по формуле: Pn=Ann=n·(n-1)·...·2·1=n!

Алгоритм генерации перестановок в лексикографическом порядке:

1. Просматриваем а1, ..., аn с конца до тех пор, пока не попадется ai<ai+1. Если таковых нет, то генерация закончена.  2. Рассматриваем ai+1, ai+2, ..., an. Найдем первый с конца amбольший ai и поменяем их местами.  3. ai+1, ai+2, ..., an переставим в порядке возрастания (для этого достаточно её переписать с конца).  4. Печатаем найденную перестановку.  5. Возвращаемся к пункту 1.

Первой при этом будет перестановка <1, 2, ..., n>, последней - <n, ..., 2, 1>.

4.Сочетания.

Подсчитаем количество способов, которыми можно выбрать изразличных предметов. Такие выборки называются сочетаниями, а их количество обозначается.

При , выбрать*k* предметов из n можно способами, переставляя ихспособами:

.

Рекуррентная формула: .

Свойства сочетаний: ;.

**Тема№2.Случайные события и вероятность**

5.Случайные события и их классификация.

***Событием*** называется любой факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Примеры случайных событий: выпадение шестерки при подбрасывании игральной кости, отказ технического устройства, искажение сообщения при передаче его по каналу связи. С событиями связываются некоторые ***числа***, характеризующие степень объективной возможности появления этих событий, называемые***вероятностями событий***.

***Достоверным*** называется событие W, которое происходит в каждом опыте.

***Невозможным*** называется событие Æ, которое в результате опыта произойти не может.

***Несовместными*** называются события, которые в одном опыте не могут произойти одновременно.

***Суммой*** (объединением) двух событий *A* и *B* (обозначается *A*+*B*, *A*È*B*) называется такое событие, которое заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий, т.е. *A* или *B*, или оба одновременно.

***Произведением*** (пересечением) двух событий *A* и *B* (обозначается *A*×*B*,*A*Ç*B*) называется такое событие, которое заключается в том, что происходят оба события *A* и *B* вместе.

***Противоположным*** к событию *A* называется такое событие , которое заключается в том, что событие *A* не происходит.

События *Ak*(*k*=1, 2, ..., *n*) образуют ***полную группу***, если они попарно несовместны и в сумме образуют достоверное событие.

При преобразовании выражений можно пользоваться следующими тождествами:



.

6.Алгебра событий.

События называются несовместными, если они вместе не могут наблюдаться в одном и том же опыте. Так, наличие двух и трех автомашин в одном магазине для продажи в одно и то же время — это два несовместных события.

**Суммой** событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий



В качестве примера суммы событий можно назвать наличие в магазине хотя бы одного из двух товаров.

**Произведением** событий называется событие, состоящее в одновременном появлении всех этих событий



Событие, состоящее в появлении одновременно в магазине двух товаров является произведением событий: -появление одного товара, —появление другого товара.

События образуют полную группу событий, если хотя бы одно из них обязательно произойдет в опыте.

**Пример.** В порту имеется два причала для приема судов. Можно рассмотреть три события: — отсутствие судов у причалов,— присутствие одного судна у одного из причалов,— присутствие двух судов у двух причалов. Эти три события образуют полную группу событий.

**Противоположными** называются два единственно возможных события, образующих полную группу.

Если одно из событий, являющихся противоположными, обозначить через , то противоположное событие обычно обозначают через.

7.Полная группа событий. Вероятность случайного события.

**По́лной гру́ппой(системой) собы́тий** в теории вероятностей называется система случайных событий такая, что в результате произведенного случайного эксперимента непременно произойдет одно и только одно из них. Сумма вероятностей всех событий в группе всегда равна 1.

Определение

Пусть {\displaystyle (\Omega ,{\mathcal {F}},\mathbb {P} )} есть вероятностное пространство. Любое разбиение множества {\displaystyle \Omega } элементами сигма-алгебры {\displaystyle {\mathcal {F}}} называется полной группой событий.

Пример

Предположим, проводится подбрасывание монеты. В результате этого эксперимента обязательно произойдет одно из следующих событий:

* {\displaystyle A}монета упадет орлом;
* {\displaystyle B}монета упадет решкой;
* {\displaystyle C} монета упадет на ребро;

Таким образом, система {\displaystyle \{A,B,C\}} является полной группой событий.

Под *вероятностью* случайного события понимают меру возможности осуществления данного события в конкретных условиях эксперимента (испытания). При классическом определении за вероятность события *А* принимается отношение числа благоприятствующих этому событию элементарных исходов к общему числу возможных исходов:

.

Поскольку в общем случае , то из этого определения следует, что вероятность произвольного случайного события принимает значения из отрезка [0, 1].

8.Определение вероятности (классическое, геометрическое, статистическое).

Классическое определение

Классическое «определение» вероятности исходит из понятия*равновозможности* как объективного свойства изучаемых явлений. Равновозможность является неопределяемым понятием и устанавливается из общих соображений симметрии изучаемых явлений. Например, при подбрасывании монетки исходят из того, что в силу предполагаемой симметрии монетки, однородности материала и случайности (непредвзятости) подбрасывания нет никаких оснований для предпочтения «решки» перед «орлом» или наоборот, то есть выпадение этих сторон можно считать равновозможными (равновероятными).

Наряду с понятием равновозможности в общем случае для классического определения необходимо также понятие элементарного события (исхода), благоприятствующего или нет изучаемому событию A. Речь идет об исходах, наступление которых исключает возможность наступления иных исходов. Это несовместимые элементарные события. К примеру при бросании игральной кости выпадение конкретного числа исключает выпадение остальных чисел.

Классическое определение вероятности можно сформулировать следующим образом:

*Вероятностью случайного события* A *называется отношение числа* n *несовместимых равновероятных элементарных событий, составляющих событие* A*, к числу всех возможных элементарных событий* N*:*

Р(А) = n/N{\displaystyle P(A)={\frac {n}{N}}}

Например, пусть подбрасываются две кости. Общее количество равновозможных исходов (элементарных событий) равно 36 (так как на каждый из 6 возможных исходов одной кости возможно по 6 вариантов исхода другой). Оценим вероятность выпадения семи очков. Получить 7 очков можно лишь при следующих сочетаниях исходов броска двух костей: 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1. То есть всего 6 равновозможных исходов, благоприятствующих получению 7 очков, из 36 возможных исходов броска костей. Следовательно, вероятность будет равна 6/36 или, если сократить, 1/6. Для сравнения: вероятность получения 12 очков или 2 очков равна всего 1/36 — в 6 раз меньше.

Геометрическое определение

Несмотря на то, что классическое определение является интуитивно понятным и выведенным из практики, оно, как минимум, не может быть непосредственно применено в случае, если количество равновозможных исходов бесконечно. Ярким примером бесконечного числа возможных исходов является ограниченная геометрическая область G, например, на плоскости, с площадью S. Случайно «подброшенная» «точка» с равной вероятностью может оказаться в любой точке этой области. Задача заключается в определении вероятности попадания точки в некоторую подобласть g с площадью s. В таком случае, обобщая классическое определение, можно прийти к геометрическому определению вероятности попадания в подобласть g{\displaystyle g}:

Р(А) = s/S{\displaystyle P(A)={\frac {n}{N}}}

{\displaystyle P(A)={\frac {s}{S}}}

В виду равновозможности вероятность эта не зависит от формы области g, она зависит только от её площади. Данное определение естественно можно обобщить и на пространство любой размерности, где вместо площади использовать понятие «объёма». Более того, именно такое определение приводит к современному аксиоматическому определению вероятности. Понятие объёма обобщается до понятия меры некоторого абстрактного множества, к которой предъявляются требования, которыми обладает и «объём» в геометрической интерпретации — в первую очередь, это неотрицательность и аддитивность.

Стр 1 из 3

Частотное (статистическое) определение

Классическое определение при рассмотрении сложных проблем наталкивается на трудности непреодолимого характера. В частности, в некоторых случаях выявить равновозможные случаи может быть невозможно. Даже в случае с монеткой, как известно, существует явно не равновероятная возможность выпадения «ребра», которую из теоретических соображений оценить невозможно (можно только сказать, что оно маловероятно и то это соображение скорее практическое). Поэтому еще на заре становления теории вероятностей было предложено альтернативное «частотное» определение вероятности. А именно, формально вероятность можно определить как предел частоты наблюдений события A, предполагая однородность наблюдений (то есть одинаковость всех условий наблюдения) и их независимость друг от друга:

Р(А) = lim (N->беск) n/N{\displaystyle P(A)={\frac {n}{N}}}

{\displaystyle P(A)=\lim \_{N\rightarrow \infty }{\frac {n}{N}},}

где {\displaystyle N} — количество наблюдений, а {\displaystyle n} — количество наступлений события {\displaystyle A}.

Несмотря на то, что данное определение скорее указывает на способ оценки неизвестной вероятности — путём большого количества однородных и независимых наблюдений — тем не менее в таком определении отражено содержание понятия вероятности. А именно, если событию приписывается некоторая вероятность, как объективная мера его возможности, то это означает, что при фиксированных условиях и многократном повторении мы должны получить частоту его появления, близкую к {\displaystyle p} (тем более близкую, чем больше наблюдений). Собственно, в этом заключается исходный смысл понятия вероятности. В основе лежит объективистский взгляд на явления природы. Ниже будут рассмотрены так называемые законы больших чисел, которые дают теоретическую основу (в рамках излагаемого ниже современного аксиоматического подхода) в том числе для частотной оценки вероятности.

**Тема№3.Основные теоремы теории вероятностей**

9.Сумма и произведение событий, и соотношение между ними.

При разработке аппарата и методики исследования случайных событий в теории вероятностей очень важным является понятие суммы и произведения событий.

***Суммой, или объединением, нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.***

Сумма S событий A,B,C,…,N обозначается так: S=A+B+C+…+N

Например, если событие A есть попадание в цель при первом выстреле, событие B

 — при втором, то событие C=A+B есть попадание в цель вообще, безразлично, при каком выстреле — первом, втором или при обоих вместе.

***Произведением, или пересечением, нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.***

Произведение S событий A,B,C,…,N обозначаетсяS=ABC…N

Например, если событие A есть попадание в цель при первом выстреле, событие B — при втором, то событие C=AB

 состоит в том, что в цель попали при обоих выстрелах.

Понятия суммы и произведения событий имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Пусть событие A состоит в попадании точки в область A, событие B — в попадании в область B

, тогда событие A+B состоит в попадании точки в область, заштрихованную на рис. 1, и событиеAB

 — в попадании точки в область, заштрихованную на рис. 2.



10.Теорема сложения вероятностей.

**Теорема сложения вероятностей**

Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:

**Р (А + В) = Р (А) + Р (В)**.

В случае, когда события **А** и **В** совместны, вер-ть их суммы выражается формулой

**Р (А +В) = Р (А) + Р (В) – Р (АВ)**,

где **АВ** – произведение событий **А** и **В**.

Два события называются **зависимыми**, если вероятность одного из них зависит от наступления или не наступления другого. в случае зависимых событий вводится понятие условной вероятности события.

**Условной вероятностью Р(А/В)** события **А** называется вероятность события **А**, вычисленная при условии, что событие **В** произошло. Аналогично через **Р(В/А)** обозначается условная вероятность события **В** при условии, что событие **А** наступило.

**Произведением двух событий *А и В*** называется событие **С**, состоящее в совместном появлении события **А** и события **В**.

11.Зависимые и независимые события.

Событие A называется независимым от события B, если возможность наступления события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

В противном случае события являются зависимыми. *Условной вероятностью*события B при наличии A называется величина

(2.8)

(при этом полагается, что P(A) не равно 0).

*Условную вероятность* события *P(B/A)* можно трактовать как вероятность события B, вычисленная *при условии, что событие A произошло*.

Заметим, что если имеется несколько событий A1, A2, …, An, то их попарная независимость (т.е. независимость любых двух событий Aiи Aj, *i≠j*) еще не означает их независимости в совокупности.

12.Теорема умножения вероятностей.

Вероятность произведения двух событий равна вер-ти одного из них, умноженной на условную вероятность другого при наличии первого:

**Р (АВ) = Р(А) · Р(В/А)**, или **Р (АВ) = Р(В) · Р(А/В)**.

**Следствие.** Вероятность совместного наступления двух независимых  событий **А** и **В** равна произведению вероятностей этих событий:

**Р (АВ) = Р(А) · Р(В).**

**Следствие**. При производимых **n** одинаковых независимых испытаниях, в каждом из которых события **А** появляется с вероятностью **р**, вероятность появления события **А** хотя бы один раз равна**1 - (1 - р)n**

13.Вероятность суммы совместных событий.

**Теорема.** *Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения, т.е.*

*р*(*А+В*) = *р*(*А*) + *р*(*В*) – *р*(*А∙В*) . (1.11)

Доказательство. Действительно, представим событие *А + В* , состоящее в наступлении хотя бы одного из двух событий *А* и *В*, в виде суммы трёх несовместных событий:

*А+В* = *А∙+∙В+А∙В*.

Тогда по теореме сложения: *р*(*А+В*) = *р*(*А*∙) + *р*(∙*В*) + *р*(*А∙В*).

Учитывая, что *А = А∙+А∙В*, *р*(*А*) = *р*(*А∙*) + *р*(*А∙В*), получим *р*(*А∙*) = *р*(*А*) – –*р*(*А∙В*). Аналогично, *В = ∙ В + А∙В,* *р*(∙*В*) = *р*(*В*) – *р*(*А∙В*). Подставляя выражения для *р*(*А∙*) и *р*(∙*В*) в выражение для *р*(*А + В*), получим:

*p*(*А + В*) = *p*(*А*) – *p*(*А∙В*) + *p*(*В*) – *p*(*А∙В*) + *p*(*А∙В*) = *p*(*А*) + *p*(*В*) – *p*(*А∙В*). Чт.и.д.

Расчленение суммы двух зависимых событий поясняется на рисунке ниже.

 

*А+В = А∙ + ∙ В + А∙В.*

**Замечание.** Для суммы трёх и более совместных событий формула вероятности суммы *р*(*А*1 + *А*2 + … + *А*n) является очень громоздкой, поэтому при расчёте вероятности такой совокупности переходят к противоположному событию :

 = = ∙ ∙ … ∙ 

Тогда

*р*(*А*1 + *А*2 + … + *А*n) = 1– *р*() или *р*(*А*1 + *А*2 + … + *А*n) = 1– *р*(*А*1 ∙ *А*2 ∙ *А*3 … *А*n),

т.е. вероятность суммы нескольких совместных событий *А*1, *А*2, … , *А*n равна разности между единицей и вероятностью произведения противоположных событий , , … , . Если события *А*1, *А*2, … , *А*n – независимые, то

*р*(*А*1 + *А*2 + … + *А*n) = 1 – *р*( ) ∙ *р*()∙ … ∙ *р*(). ( 1.12 )

В частном случае, когда вероятности независимых событий одинаковы, то вместо формулы (1.12) имеет место формула

*р*(*А*1 +*А*2 +… +*А*n) = 1 – ( 1 – *р* )n . (1.13)

14.Формула полной вероятности.

Предположим, что событие может осуществляться только с одним из несовместных событий . Например, в магазин поступает одна и та же продукция от трех предприятий в разном количестве. Существует разная вероятность выпуска некачественной продукции на разных предприятиях. Случайным образом отбирается одно из изделий. Требуется определить вероятность того, что это изделие некачественное (событие ). Здесь события — это выбор изделия из продукции соответствующего предприятия.

В этом случае вероятность события можно рассматривать как сумму произведений событий



По теореме сложения вероятностей несовместных событий получаем



Используя теорему умножения вероятностей, находим

 (3.1)

Формула (3.1) носит название **формулы полной вероятности**.

15.Теорема гипотез (формула Байеса).

ФОРМУЛА ВЕРОЯТНОСТЕЙ ГИПОТЕЗ (ФОРМУЛА БАЙЕСА) —

формула, имеющая вид: 

где a1, А2,..., *Ап****—***несовместимые события, Общая схема применения Ф. в. г.: если событие Вможет происходить в разл. условиях, относительно которых сделано*п* гипотез А1, А2, ..., Аn с известными доопыта *вероятностями P(A1), P(A2), ..., Р(Аn)* и известны *условные вероятности P(B/Ai),* то после опыта, гденаступило событие *В.* происходит переоценка вероятностей гипотез (в силу чего эту формулу называют Ф. в.г.). Формула Байеса может быть использована для оценки перспективности территорий, оценкипалеогеографических реконструкций, направления разведки и т. п.

**Тема№4.Последовательные независимые испытания**

16.Формула Бернулли. Формула Пуассона, как предельный случай формулы Бернулли.

  Предположим, что производится *n* независимых испытаний, в результате каждого из которых может наступить или не наступить событие *A*. Пусть вероятность наступления события *A* при каждом испытании равна *p*. Рассмотрим случайную величину — число наступлений события*A* при *n* независимых испытаниях. Область изменения состоит из всех целых чисел от*0* до *n* включительно. Закон распределения вероятностей *р(m)* определяется формулой Бернулли (13'):



   Закон распределения вероятностей по формуле Бернулли часто называют *биномиальным*, так как *Pn(m)* представляет собой *m*-й член разложения бинома .    Пусть случайная величина может принимать любое целое неотрицательное значение, причем

|  |  |
| --- | --- |
| https://studfile.net/html/3971/448/html_ofVD4B9wna.G3xS/img-_X9bbo.png | (17) |

   где — некоторая положительная постоянная. В этом случае говорят, что случайная величинараспределена по*закону Пуассона*, Заметим, что при *k=0* следует положить *0!=1*.     Как мы знаем, при больших значениях числа *n* независимых испытаний вероятность *Pn(m)* наступления *m* раз события *A* удобнее находить не по формуле Бернулли, а по формуле Лапласа [см. формулу (15)]. Однако последняя дает большие погрешности при малой вероятности *р* появления события *А* в одном испытании. В этом случае для подсчета вероятности *Pn(m)* удобно пользоваться формулой Пуассона, в которой следует положить .    Формулу Пуассона можно получить как предельный случай формулы Бернулли при неограниченном увеличении числа испытаний *n* и при стремлении к нулю вероятности .17.Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

Вероятность того, что в независимых испытаниях с вероятностью появления события равной событие наступит ровно раз (безразлично в какой последовательности) определяется по приближенной формуле



где

– Функция Гаусса,

– аргумент функции Гаусса;

– вероятность противоположного события .

Формулу называют локальной формулой Лапласа.

Функция обладает следующими свойствами:

1) она является четной функцией ;

2) для значений аргумента больше четырех она сколь угодно мала 

Теорему Лапласа рекомендуется применять при значениях произведения больше девяти



ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Вероятность, что в независимых испытаниях событие с вероятностью появления наступит не менее раз и не более (независимо от последовательности появления) приближенно определяется зависимостью



где– интегральная функция Лапласа;

– аргументы интегральной функции распределения;

 – вероятность невыполнения события .

Функция обладает следующими свойствами:

1) она является нечетной функцией



2) для аргументов больше пяти она равна 0,5



Значение обеих функций находят из таблиц в которых функции с достаточной точностью протабульовани.

**Тема№5.Случайные величины и их числовые характеристики**

18.Случайные величины, их классификация и способы описания.

Переменная величина называется ***случайной***, если в результате опыта она может принимать действительные значения с определёнными вероятностями.

Случайная величина  *Х*  называется ***дискретной***, если существует такая неотрицательная функция



которая ставит в соответствие значению  *хi*  переменной  *Х*  вероятность  *рi*  , с которой она принимает это значение. Дискретные случайные величины  *X*  и  *Y*  называются***независимыми***, если события  *Х* = *хi* и*Y* = *yj*при произвольных  *i* и  *j*  являются независимыми.

Случайная величина  *Х*  называется ***непрерывной***, если для любых   *a <  b*  существует такая неотрицательная функция  *f* ( *x* ), что



Функция   *f* ( *x* ) называется ***плотностью распределения*** непрерывной случайной величины.

Вероятность того, что случайная величина *Х*  принимает значение меньшее  *х* , называется ***функцией распределения*** случайной величины *Х*  и обозначается *F* ( *x* ) :

*F* ( *x* ) = *Р*( *X*  *x*) .

***Общие свойства функции распределения:***

Описание:

Частично задать случайную величину, описав этим все её вероятностные свойства как отдельной случайной величины, можно с помощью функции распределения, плотности вероятности и характеристической функции, определяя вероятности возможных её значений. Функция распределения F(x) является вероятностью того, что значения случайной величины меньше вещественного числа x. Если случайная величина дискретная, то полное и однозначное математическое описание её распределения определяется указанием вероятностей {\displaystyle p\_{k}=P(\xi =x\_{k})} всех возможных значений этой случайной величины.

19.Закон распределения дискретной случайной величины.

**Определение**: ***Законом распределения дискретной случайной величины*** называют соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями. Закон распределения дискретной случайной величины Х может быть задан в виде таблицы, в первой строке которой указаны в порядке возрастания все возможные значения случайной величины, а во второй строке соответствующие вероятности этих значений, т.е.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x1 | x2 | х3 | … | хn |
| p | р1 | р2 | р3 | ... | рn |

где р1+ р2+…+ рn=1 Такая таблица называется рядом распределения дискретной случайной величины. Если множество возможных значений случайной величины бесконечно, то ряд р1+ р2+…+ рn+… сходится и его сумма равна 1. Закон распределения дискретной случайной величины Х можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят ломаную, соединяющую последовательно точки с координатами (xi;pi), i=1,2,…n. Полученную линию называют ***многоугольником распределения:***



Закон распределения дискретной случайной величины Х может быть также задан аналитически (в виде формулы): P(X=xi)=φ(xi),i =1,2,3…n

20.Функция распределения и ее свойства.

Функцией распределения вероятностей F(x) случайной величины Х в точке х называется вероятность того, что в результате опыта случайная величина примет значение, меньше, чем х, т.е. F(x)=P{X < х}.  Рассмотрим свойства функции F(x).

1. F(-∞)=lim(x→-∞)F(x)=0. Действительно, по определению, F(-∞)=P{X < -∞}. Событие (X < -∞) является невозможным событием: F(-∞)=P{X < - ∞}=p{V}=0.

2. F(∞)=lim(x→∞)F(x)=1, так как по определению, F(∞)=P{X < ∞}. Событие Х < ∞ является достоверным событием. Следовательно, F(∞)=P{X < ∞}=p{U}=1.

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала [Α Β] равна приращению функции распределения вероятностей на этом интервале. P{Α ≤X<Β}=F(Β)-F(Α).

4. F(x2)≥ F(x1 ), если x2, > x1, т.е. функция распределения вероятностей является неубывающей функцией.

5. Функция распределения вероятностей непрерывна слева. FΨ(xo-0)=limFΨ(x)=FΨ(xo) при х→ xo

21.Плотность распределения и ее свойства.

***Плотностью распределения*** (или плотностью вероятности) непрерывной случайной величины *X* в точке *x* называется производная ее функции распределения в этой точке и обозначается *f*(*x*). График плотности распределения называется кривой распределения.

Пусть имеется точка *x* и прилегающий к ней отрезок *dx*. Вероятность попадания случайной величины *X* на этот интервал равна *f*(*x*)*dx*. Эта величина называется **элементом вероятности.**

Вероятность попадания случайной величины *X* на произвольный участок [*a*,*b*[ равна сумме элементарных вероятностей на этом участке:

(5.7)

В геометрической интерпретации P{α≤X<β} равна площади, ограниченной сверху кривой плотности распределения *f*(*x*) и опирающейся на участок (α,β) (рис. 5.4).

Это соотношение позволяет выразить функцию распределения *F*(*x*) случайной величины *X* через ее плотность:

 (5.8)

В геометрической интерпретации *F*(*x*) равна площади, ограниченной сверху кривой плотности распределения *f*(*x*) и лежащей левее точки *x*(рис. 5.5).

***Основные свойства плотности распределения:***

1. Плотность распределения неотрицательна: *f*(*x*) ³ 0.

Это свойство следует из определения *f(x)* – производная неубывающей функции не может быть отрицательной.

2. Условие *нормировки:* Это свойство следует из формулы (5.8), если положить в ней*x*=∞.

Геометрически основные свойства плотности *f(x)* интерпретируются так:

1. вся кривая распределения лежит не ниже оси абсцисс;
2. полная площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

22.Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины.

***Математическим ожиданием*** дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:



***Свойства математического ожидания:***

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:



2. Постоянный  можно выносить за знак математического ожидания:



3. Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:



4. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:



(для разности аналогично)

Характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат, в частности, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

***Дисперсией***случайной величины Х называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:



Дисперсию удобно вычислять по формуле:



***Свойства дисперсии:***

**1.** Дисперсия постоянной равна нулю:



**2.** Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:



**3.** Дисперсия суммы (разности) независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:



**4.**                                                                                                          

***Средним квадратическим отклонением*** случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:



23. Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение непрерывной случайной величины.

**Математическое ожидание** непрерывной случайной величины *Х*, возможные значения которой принадлежат всей оси *Ох*, определяется равенством:



Предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

Частный случай. Если значения случайной величины принадлежат интервалу (*a,b*), то:



*f(x)* – плотность распределения случайной величины.

**Дисперсия**непрерывной случайной величины *Х*, возможные значения которой принадлежат всей оси, определяется равенством:



Частный случай. Если значения случайной величины принадлежат интервалу (*a,b*), то:



Вероятность того, что непрерывная случайная величина *Х* примет значения, принадлежащие интервалу (*a,b*), определяется равенством:

 .

***Средним квадратическим отклонением*** случайной величины *Х* называется арифметический корень из дисперсии, т.е.       σ(*X*) =.

**Тема№6.Одномерные распределения вероятностей системы двух случайных величин**

24.Биномиальный закон распределения дискретных случайных величин.

  Закон биноминального распределения случайной величины

  Распределение вероятностей, вычисляемых по формуле Бернулли,

  

называется биномиальным.

  Математическое ожидание и дисперсия для этого распределения имеют вид:

  M(X)=n\*p

  D(X)=n\*p\*q



25.Закон Пуассона распределения дискретных случайных величин.

Дискретная случайная величина *Х*имеет *распределение Пуассона*, если она имеет бесконечное счетное множество возможных значений 0, 1, 2, ... , *m*, …,  а соответствующие им вероятности определяются формулой:



Закон распределения Пуассона (23) зависит от одного параметра *а*, который одновременно  является и математическим ожиданием, и дисперсией случайной величины *Х*, распределенной по закону Пуассона. Таким образом, для распределения Пуассона имеют место следующие основные числовые характеристики:



26.Равномерное распределение непрерывных случайных величин.

Непрерывная величина  *Х  распределена равномерно* на интервале (*a*, *b*), если все ее возможные значения находятся на этом интервале и плотность распределения вероятностей постоянна:

            (29)

Для случайной величины *Х* , равномерно распределенной в интервале (*a*, *b*) (рис. 4), вероятность попадания в любой интервал (*x*1, *x*2), лежащий внутри интервала (*a*, *b*), равна:

           (30)   Рис. 4. График плотности равномерного распределения

27.Экспоненциальное (показательное) распределение.

Непрерывная случайная величина  *Х*имеет *показательное распределение*, если плотность распределения ее вероятностей выражается формулой:

          (31)

График плотности распределения вероятностей (31) представлен на рис. 5.

  Рис. 5. График плотности показательного распределения

28.Нормальный закон распределения.

Случайная величина  *Х*  имеет *нормальное* *(гауссово) распределение*, если плотность распределения ее вероятностей определяется зависимостью:

            (32)

где *m* = *M*(*X*) , .

При ** нормальное распределение называется *стандартным*.

График плотности нормального распределения (32) представлен на рис. 6.

  Рис. 6. График плотности нормального распределения

**Тема№7.Выборочный метод. Статистические оценки параметров распределения**

32. Генеральная совокупность, выборка.

Генеральной совокупностью называют полную совокупность объектов, из которых производится выборка.

Выборкой называют совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

Объемом выборки называют число объектов этой выборки.

Если результаты выборки представлены числовыми значениями, то размах выборки - это разность между самым большим и самым малым значениями выборки.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем числовое значение x1 наблюдалось n1 раз, x2 – n2 раза, … , xr – nr раз. Тогда объем выборки

. (1)

33.Вариационный ряд, статистическое распределение выборки.

Наблюдаемые значения xi выборки называют вариантами, а их последовательность, записанная в возрастающем порядке, - вариационным рядом. Числа ni называют частотами соответствующих вариантов, wi = ni/n – относительными частотами.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариантов и соответствующих им частот. Таким образом, статистическое распределение выборки задается в виде двух строк:

x1, x2, … , xr (2)

n1, n2, … , nr

или в виде таблицы, состоящей из двух строк (столбцов):

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| xi:c | x1 | x2 | … | xr |
| ni: | n1 | n2 | … | nr |

34.Полигон, гистограмма.

Графиком эмпирической функции распределения называют график функции F\*(x). График строится на двух осях: на оси OX откладываются значения вариантов xi, а на оси OY – значения функции F\*(x), подсчитываемые по формуле (4). График представляет ступенчатую фигуру, начинающуюся с 0 для x ≤ x1, и монотонно поднимающуюся до значения 1 при xr < x.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x1;n1), (x2;n2), … , (xr;nr).

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x1, w1), (x2, w2), … , (xr, wr).

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы ∆i длиной h и высотой ni/h (плотность частот).

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы ∆i длиной h и высотой wi/h (плотность относительных частот).

35.Эмпирическая функция распределения.

**Определение:** *Эмпирической функцией распределения* (функцией распределения выборки) называют функцию, определяющую для каждого значенияотносительную частоту события:

 — число вариант, меньших ;— объем выборки.

Графиком эмпирической функции распределения называют график функции F\*(x). График строится на двух осях: на оси OX откладываются значения вариантов xi, а на оси OY – значения функции F\*(x), подсчитываемые по формуле (4). График представляет ступенчатую фигуру, начинающуюся с 0 для x ≤ x1, и монотонно поднимающуюся до значения 1 при xr < x.

36.Выборочное среднее и дисперсия.

Выборочной средней xв называют среднее арифметическое значение вариантов выборки. Если значения вариант x1, x2, … , xr имеют соответственно частоты n1, n2, … , nr, то

. (5)

Выборочной дисперсией Dв называют среднее арифметическое квадратов отклонений вариантов xi от их среднего значения xв, т.е.

. (6)

Выборочным средним квадратическим отклонением σв называют квадратный корень из выборочной дисперсии Dв

. (7)

37.Точечные и интервальные оценки.

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. Точечные оценки обычно используют в тех случаях, когда число наблюдений велико.

Интервальной называют оценку, которая задается в виде интервала. Интервальные оценки удобно использовать в тех случаях, когда число наблюдений n относительно невелико.

38. Доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии при известном и не известном среднеквадратическом отклонении.

Доверительным интервалом для параметра θ называют интервал (θ\* - δ, θ\* + δ), который покрывает неизвестный параметр θ с вероятностью γ:

P[θ\* - δ <X < θ\* + δ] = γ.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по результатам выборки с заданной надежностью γ.

Доверительный интервал с уровнем надежности γ для математического ожидания a признака X, распределенного нормально, при неизвестном среднем квадратическом отклонении определяется как

, (10)

где xв – выборочное среднее; s – исправленное среднее квадратическое отклонение выборки; n – объем выборки. Точность оценки δ в этом случае . Значение tγ = t(γ,n) можно найти из справочной таблицы ”Таблица значений tγ = t(γ,n)” для распределения Стьюдента.

Доверительный интервал с уровнем надежности γ для среднего квадратического отклонения σ признака X, распределенного нормально, определяется как

, (11)

где s – исправленное среднее квадратическое отклонение выборки; n – объем выборки. Значение q = q(γ,n) можно найти из справочной таблицы ”Таблица значений q = q(γ,n)” для распределения χ2.

В случае, когда q >1 доверительный интервал имеет вид .(11')

**Тема№8.Статистическая проверка гипотез**

39.Статистическая гипотеза, статистический критерий.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ГИПОТЕЗА

определенное предположение о свойствах распределениявероятностей, лежащего в основе наблюдаемых случайных явлений. Результаты наблюденийпредставляются обычно в виде реализации нек-рой совокупности случайных величин, конечной плибесконечной. При этом совместное распределение этих случайных величин известно не полностью, и С. г.предполагает принадлежность его к нек-рому определенному классу распределений. В такой ситуацииставится задача *статистических гипотез проверки.*

**Статистический критерий** — строгое математическое правило, по которому принимается или отвергается та или иная статистическая гипотеза с известным уровнем значимости. Построение критерия представляет собой выбор подходящей функции от результатов наблюдений (ряда эмпирически полученных значений признака), которая служит для выявления меры расхождения между эмпирическими значениями и гипотетическими.

40.Критическая область. Ошибки первого и второго рода.

При проверке статистических гипотез можно допустить ошибки первого или второго рода

Ошибкой первого рода называется ошибка, состоящая в опровержении верной гипотезы.

Ошибкой второго рода называется ошибка, состоящая в принятии ложной гипотезы.

Уровнем значимости*а* называется вероятность совершения ошибки первого рода.

Значение уровеня значимости *а* обычно задаётся близким к нулю (например, 0,05; 0,01;0,02 и т. д.), потому что чем меньше значение уровеня значимости, тем меньше вероятность совершения ошибки первого рода, состоящую в опровержении верной гипотезы *Н0*.

Вероятность совершения ошибки второго рода, т. е. принятия ложной гипотезы, обозначается

При проверке нулевой гипотезы *Н0*возможно возникновение следующих ситуаций:



Критической областью называется множество возможных значений статистического критерия, при которых основная гипотеза отвергается.

Областью принятия гипотезы или областью допустимых значений называется множество возможных значений статистического критерия, при которых основная гипотеза принимается.

Если наблюдаемое значение статистического критерия, рассчитанное по данным выборочной совокупности, принадлежит критической области, то основная гипотеза отвергается. Если наблюдаемое значение статистического критерия принадлежит области принятия гипотезы, то основная гипотеза принимается.

Критическими точками или квантилями называются точки, разграничивающие критическую область и область принятия гипотезы.

Критические области могут быть как односторонними, так и двусторонними.

41.Проверка гипотезы о значении параметра (критерий Стьюдента, Фишера).

# Критерий Стьюдента

Проверка гипотезы о существенности или несущественности различия двух выборочных средних - одна из часто встречающихся процедур в исследовательской работе. В этом случае можно применить критерий Стьюдента (при условии достаточно больших объёмов выборок (n≥30), или убедившись, что статистические ряды близки к нормальному закону распределения). t-критерий применяется в двух вариантах – когда сравниваемые выборки независимы (не связаны) и когда они зависимы (связаны).

         Уровень значимости t-критерия равен вероятности ошибочно отвергнуть гипотезу о равенстве выборочных средних двух выборок, когда в действительности эта гипотеза имеет место.        При проверке разности двух средних с помощью t-критерия Стьюдента используется следующий алгоритм:

1.     Записать вариационный ряд результатов Х экспериментальной группы.

2.     Записать вариационный ряд результатов Y контрольной группы.

3.     Найти выборочные средние двух выборок и .

4.     Найти выборочные дисперсии Dx и Dy.

5.     Вычислить эмпирическое значение критической статистики



6.     Определить по таблице критическое значение  для соответствующего уровня значимостиa и данного числа степеней свободы .

Если , то различия между средними значениями экспериментальной и контрольной групп существенны на данном уровне значимости.

*F - критерий Фишера* является параметричесикм критерием и используется для сравнения дисперсий двух вариационных рядов. Эмпирическое значение критерия  вычисляется по формуле:



где - большая дисперсия,- меньшая дисперсия рассматриваемых вариационных рядов.

         Если вычисленное значение критерия Fэмп больше критического для определенного уровня значимости и соответствующих чисел степеней свободы для числителя и знаменателя, то дисперсии считаются различными. Иными словами, проверяется гипотеза, состоящая в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой: H0={Dx=Dy}.

         Критическое значение критерия Фишера следует определять по специальной таблице, исходя из уровня значимости α и степеней свободы числителя (n1-1) и знаменателя (n2-1).

         Проиллюстрируем применение критерия Фишера на следующем примере. Дисперсия такого показателя, как стрессоустойчивость для учителей составила 6,17 (n1=32), а для менеджеров 4,41 (n2=33). Определим, можно ли считать уровень дисперсий примерно одинаковым для данных выборок на уровне значимости 0,05.

         Для ответа на поставленный вопрос определим эмпирическое значение критерия:При этом критическое значение критерия Fкр(0,05;31;32)=2.

         Таким образом, Fэмп=1,4<2=Fкр, поэтому нулевая гипотеза о равенстве генеральных дисперсий на уровне значимости 0,05 принимается.



42. Проверка гипотезы о законе распределения случайной величины (критерий Пирсона).

Критерий согласия Пирсона позволяет осуществлять проверку эмпирического и теоретического (либо другого эмпирического) распределений одного признака. Данный критерий применяется, в основном, в двух случаях:

- Для сопоставления эмпирического распределения признака с теоретическим распределением (нормальным, показательным, равномерным либо каким-то иным законом);

- Для сопоставления двух эмпирических распределений одного и того же признака.

         Идея метода – определение степени расхождения соответствующих частот ni и ; чем больше это расхождение, тем больше значение



Объемы выборок должны быть не меньше 50 и необходимо равенство сумм частот

         Нулевая гипотеза H0={два распределения практически не различаются между собой}; альтернативная гипотеза – H1={расхождение между распределениями существенно}.

         Приведем схему применения критерия для сопоставления двух эмпирических распределений:

