Министерство образования Российской Федерации

Московский физико-технический институт
Кафедра высшей математики

Методические указания

по математическому анализу
для студентов второго курса

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Второе издание

Москва 2001

Составитель: Л.И.Коваленко

УДК 517

Методические указания по математическому анализу для студентов второго курса. Элементы векторного анализа. МФТИ, 2001.

Излагаются основные понятия векторного анализа, формулы Остроградского–Гаусса и Стокса, приемы набла-техники. Доказываются первая и вторая формулы Грина в пространстве. Все демонстрируется на задачах, решение которых приводится. Система координат предполагается декартовой прямоугольной, причем правой.

В настоящее издание добавлено несколько задач, требующих умения работать с терминами поля как в векторной, так и в координатной форме. Внесены другие изменения.

Автор выражает глубокую благодарность чл.-корр. РАН Л.Д. Кудрявцеву, проф. М.И. Шабунину, чл.-корр. РАО Г.Н. Яковлеву, чьи отличные лекционные курсы математического анализа послужили основой для написания данного учебного пособия.

Автор благодарит О.А.Пыркову и Д.А.Терешина за предложения и замечания, которые были учтены при подготовке этого издания.

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Скалярные и векторные поля. Производная по направлению и градиент скалярного поля

Определение 1. Говорят, что в области G задано *скалярное* (или *векторное*) поле, если каждой точке $M \in G$ поставлено в соответствие некоторое число $F(M)$ (или вектор $\mathbf{a}(M)$).

Поле температуры внутри некоторого нагретого тела — это скалярное поле. Поле гравитационное — векторное поле.

Если дано некоторое скалярное или векторное поле в области $G \subset \mathbb{R}^3$, то, введя систему координат, можно представить скалярное поле в виде некоторой функции $F(x, y, z)$, а векторное поле — в виде вектор-функции $\mathbf{a} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задано скалярное поле $f(M)$.

Проведем луч через точку $M_0 \in G$ в направлении вектора $\mathbf{l}$, $|\mathbf{l}| = 1$.

Определение 2. *Производной* скалярного поля f в точке M_0 *по направлению* $\mathbf{l}$ называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(M_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(M) - f(M_0)}{t}, \quad \overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{l}, \quad t > 0, \quad (1)$$

если он существует.

Введя систему координат, представим заданное скалярное поле в виде функции $f(x, y, z)$.

Величину, задаваемую формулой (1), называют *производной функции $f(x, y, z)$ по направлению* $\mathbf{l}$.

Утверждение 1. *Если функция $f(x, y, z)$ в точке M_0 дифференцируема, то она в этой точке имеет производную по любому направлению* $\mathbf{l}$ *и эта производная находится по формуле*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cos\gamma, \quad (2)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *— направляющие косинусы вектора* $\mathbf{l}$.

Пусть функция $f(x,y,z)$ дифференцируема в области G.

Определение 3. Вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ называется *градиентом скалярного поля* f, или *градиентом функции* $f(x,y,z)$, и обозначается $\operatorname{grad} f$.

Операцию перехода от скалярного поля f к $\operatorname{grad} f$ обозначают, следуя Гамильтону, символом ∇ (читается «набла») и называют *оператором «набла»*, или *оператором Гамильтона*. Таким образом, по определению

$$\nabla f = \operatorname{grad} f. \quad (3)$$

Формулу (2) можно переписать в следующем виде, учитывая, что $|\mathbf{l}| = 1$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(M_0) = (\mathbf{l}, \nabla f) = |\nabla f|\cos\varphi, \quad (4)$$

где φ — угол, образованный $\mathbf{l}$ и $\operatorname{grad} f$ в точке M_0. Отсюда следует, что если $|\operatorname{grad} f(M_0)| \neq 0$, то в точке M_0 производная функции f по направлению достигает наибольшего значения только по направлению $\operatorname{grad} f$ ($\cos\varphi = 1$), при этом

$$\max \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(M_0) = |\nabla f(M_0)|.$$

Итак, в каждой точке, в которой $|\operatorname{grad} f|$ не равен нулю, направление $\operatorname{grad} f$ — это направление наибольшего роста f (оно единственно), а длина его равна скорости возрастания f по этому направлению.

Если $|\operatorname{grad} f| = 0$ в данной точке, то в этой точке производные функции f по всем направлениям равны нулю.

Таким образом, установлено, что градиент скалярного поля зависит лишь от самого поля, но не от выбора системы координат.

Пусть $|\nabla f(M_0)| \neq 0$. Пусть $f(x,y,z) = C$ — поверхность уровня в точке M_0. Уравнение касательной плоскости в точке M_0 к этой поверхности имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(M_0)(z-z_0)=0. \quad (5)$$

Из этого равенства следует, что если $|\operatorname{grad} f|$ в точке не равен нулю, то $\operatorname{grad} f$ направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

Все изложенное переносится на случай плоского скалярного поля. Соответственно в формуле (2) будет два слагаемых, в уравнении (5) — тоже. Это — уравнение касательной к линии уровня в точке M_0.

Задача 1. Для функции $\Phi = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ найти производную по направлению внутренней нормали к цилиндрической поверхности $x^2+z^2=a^2+c^2$ в точке $M_0(a,b,c)$.

Р е ш е н и е. Пусть $f(x,y,z)=x^2+z^2$. Данная в условии поверхность — это поверхность уровня для f, проходящая через точку M_0. Имеем

$$\nabla f(M_0)=(2a,0,2c).$$

Функция f в точке M_0 растет быстрее всего по направлению $\operatorname{grad} f$, значит, по направлению нормали к заданной поверхности. Исходя из вида функции f, заключаем, что это — направление внешней нормали. Следовательно, единичный вектор внутренней нормали в точке M_0 будет

$$\mathbf{l}=\left(\frac{-2a}{\sqrt{4a^2+4c^2}}\,,0,\frac{-2c}{\sqrt{4a^2+4c^2}}\right)=\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+c^2}}\,,0,\frac{-c}{\sqrt{a^2+c^2}}\right).$$

Имеем $\nabla\Phi=\left(\dfrac{2x}{a^2}\,,\dfrac{2y}{b^2}\,,\dfrac{2z}{c^2}\right)$. По формуле (4) получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{l}}(M_0)=-\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\cdot\frac{2a}{a^2}-\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\cdot\frac{2c}{c^2}=-\frac{4}{\sqrt{a^2+c^2}}\,.$$

О т в е т. $-\dfrac{4}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

Задача 2. Пусть $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, $|\mathbf{a}|\neq 0$, $\mathbf{r}$ —

радиус-вектор произвольной точки $M \in \mathbb{R}^3$, проведенный из фиксированной точки O. Найти $\operatorname{grad} |[\mathbf{r}, \mathbf{a}]|^3$.

Решение. Введем декартову прямоугольную правую систему координат $0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, $\mathbf{k} = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$. Тогда имеем

$$\mathbf{a} = (0, 0, |\mathbf{a}|), \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & |\mathbf{a}| \end{vmatrix} = |\mathbf{a}|(y\mathbf{i} - x\mathbf{j}),$$

$$|[\mathbf{r}, \mathbf{a}]| = |\mathbf{a}|(x^2 + y^2)^{1/2}, \quad |[\mathbf{r}, \mathbf{a}]|^3 = |\mathbf{a}|^3(x^2 + y^2)^{3/2}.$$

Далее находим (см. определение 3)

$$\operatorname{grad} |[\mathbf{r}, \mathbf{a}]|^3 = 3|\mathbf{a}|^3(x^2 + y^2)^{1/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = 3|\mathbf{a}|^2|[\mathbf{r}, \mathbf{a}]|(\mathbf{r} - z\mathbf{k}).$$

А так как $z = (\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \left(\mathbf{r}, \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right)$, то получим

$$\operatorname{grad} |[\mathbf{r}, \mathbf{a}]|^3 = 3|\mathbf{a}|^2\, |[\mathbf{r}, \mathbf{a}]| \left(\mathbf{r} - \left(\mathbf{r}, \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right)\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right) =$$
$$= 3\, |[\mathbf{r}, \mathbf{a}]|\, (\mathbf{r}\, (\mathbf{a}, \mathbf{a}) - \mathbf{a}\, (\mathbf{a}, \mathbf{r}))\, .$$

Используя формулу для двойного векторного произведения $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = \mathbf{B}\, (\mathbf{A}, \mathbf{C}) - \mathbf{C}\, (\mathbf{A}, \mathbf{B})$, окончательно получаем

$$\operatorname{grad} |[\mathbf{r}, \mathbf{a}]|^3 = 3\, |[\mathbf{r}, \mathbf{a}]|\, [\mathbf{a}, [\mathbf{r}, \mathbf{a}]]\, .$$

Ответ. $3\, |[\mathbf{r}, \mathbf{a}]|\, [\mathbf{a}, [\mathbf{r}, \mathbf{a}]]$.

§ 2. Дивергенция и поток векторного поля. Формула Остроградского–Гаусса в терминах поля

Определение 4. Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами.

Дивергенцией векторного поля $\mathbf{a}$ называется скалярная функция

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\,.$$

Задача 3. а) Вычислить $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $f(r)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. б) В каком случае $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r) = 0$?

Решение. а) Вычислим $\operatorname{grad} f(r) = (P, Q, R)$. Имеем

$$P = \frac{\partial f(r)}{\partial x} = f'(r)\cdot\frac{x}{r} \Rightarrow \operatorname{grad} f = f'(r)\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\,, \tag{6}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки (x, y, z).

Для вычисления $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$ найдем вначале $\frac{\partial P}{\partial x}$. Имеем

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{f'}{r} + x^2\left(\frac{f''}{r^2} - \frac{f'}{r^3}\right).$$

Заменяя в полученном выражении x последовательно на y, потом на z, получаем аналогичные формулы для $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z} \Rightarrow$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = f'' + 2\frac{f'}{r}\,.$$

б) Решаем дифференциальное уравнение

$$f''+2\frac{f'}{r} = 0,\ f' = u,\ u'+2\frac{u}{r} = 0,\ \frac{du}{u} = -2\frac{dr}{r},\ f' = u = \frac{C_0}{r^2}\,.$$

$$\begin{gathered} f = \frac{C_1}{r} + C_2,\ C_i = \text{const},\ i = 0, 1, 2; \\ \operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{C_1}{r} + C_2\right) = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Ответ. а) $f'' + 2\,\frac{f'}{r}$; б) $f = \frac{C_1}{r} + C_2$, C_i — любые постоянные, $i = 1, 2$.

Определение 5. Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ с непрерывными компонентами.

Пусть S — ориентированная кусочно-гладкая поверхность, лежащая в области G, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали к поверхности, задающей ее ориентацию. Интеграл

$$\iint\limits_S (\mathbf{a}, \boldsymbol{\nu})\, ds$$

называется *потоком векторного поля* **a** через поверхность S и обозначается

$$\iint\limits_S \mathbf{a}\, \mathbf{d}s.$$

Имеем

$$\iint\limits_S \mathbf{a} \mathbf{d}s = \iint\limits_S (\mathbf{a}, \boldsymbol{\nu})\, ds = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds, \quad (8)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали ν к поверхности S, задающей ее ориентацию.

Напомним, что система координат правая.

Пусть S — гладкая поверхность, имеющая явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$, D — область на плоскости переменных x, y. Тогда поверхность S имеет векторное представление $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in \overline{D}$.

Отметим, что угол между вектором

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y]}{|[\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y]|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1)$$

и вектором $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ острый.

Если вектор $\boldsymbol{\nu}$ (см. (8)) совпадает с вектором **n**, то вычисление интеграла

$$\iint\limits_S R\cos\gamma\, ds$$

в силу того, что

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\,, \qquad ds = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy,$$

сводится к вычислению такого двойного интеграла по области D:

$$\iint\limits_S R\cos\gamma\,ds = \iint\limits_D R(x,y,f(x,y))\,dx\,dy.$$

Аналогично получаются формулы для вычисления интегралов $\iint_S P\cos\alpha\,ds$ и $\iint_S Q\cos\beta\,ds$ (см. (8)) в случае явного представления поверхности S в виде $x=\varphi(y,z)$ — для первого интеграла и в виде $y=\psi(x,z)$ — для второго.

Задача 4. Вычислить поток векторного поля

$$\mathbf{a} = (z^2 - x, 1, y^5)$$

через ориентированную внутренней нормалью поверхность S: $y^2 = 2x$, отсеченную плоскостями: $x=2$, $z = 0$, $z=3$.

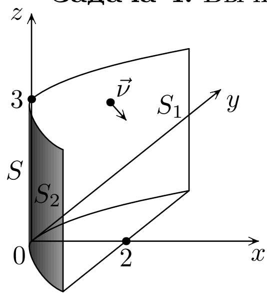

Рис. 1

Р е ш е н и е. Согласно формуле (8):

$$\iint\limits_S \mathbf{a}\,\mathbf{d}s = \iint\limits_S \left[(z^2-x)\cos\alpha + \cos\beta + y^5\cos\gamma\right]\,ds,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внутренней нормали к S. Имеем

$$\iint\limits_S \cos\beta\,ds = \iint\limits_{S_1} \cos\beta\,ds + \iint\limits_{S_2} \cos\beta\,ds, \qquad (9)$$

где (см. рис. 1) S_1, S_2 — части поверхности S, расположенные соответственно при $y\geqslant 0$ и $y\leqslant 0$, $S = S_1\cup S_2$; $\cos\beta \geqslant 0$ на S_2 и отличается лишь знаком от $\cos\beta$ в симметричных относительно плоскости (x,z) точках на поверхности S_1. Поэтому из (9) следует, что

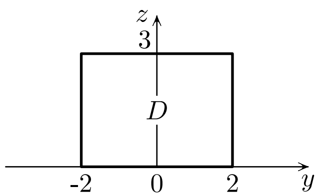

Рис. 2

$$\iint\limits_S \cos\beta\,ds = 0.$$

Так как $\cos\gamma = 0$ на S, то

$$\iint\limits_S y^5 \cos\gamma\, ds = 0.$$

Угол α между векторами $\boldsymbol{\nu}$ и $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ острый, поэтому

$$\iint\limits_S (z^2 - x)\cos\alpha\, ds = \iint\limits_D \left(z^2 - \frac{y^2}{2}\right)\, dy\, dz,$$

где D — проекция поверхности S на плоскость (y, z) (см. рис. 2). Имеем

$$\iint\limits_D \left(z^2 - \frac{y^2}{2}\right)\, dy\, dz = 2\int\limits_0^3 z^2\, dz \int\limits_0^2 dy - \int\limits_0^3 dz \int\limits_0^2 y^2\, dy =$$

$$= \frac{4}{3} z^3 \Big|_0^3 - \frac{8}{3} z \Big|_0^3 = 36 - 8 = 28.$$

О т в е т. 28.

Используя понятия дивергенции и потока векторного поля, можно *формулу Остроградского–Гаусса* записать в виде равенства

$$\boxed{\iiint\limits_D \operatorname{div}\mathbf{a}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_\Sigma \mathbf{a}\, \mathbf{d}s,} \tag{10}$$

т.е. объемный интеграл по области D от дивергенции векторного поля $\mathbf{a}$ равен потоку этого поля через поверхность Σ, ограничивающую область D и ориентированную внешней нормалью.

Задача 5. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = (xz, 0, 0)$ через ориентированную в направлении внешней нормали наклонную грань S_0 поверхности тетраэдра V, ограниченного плоскостями:

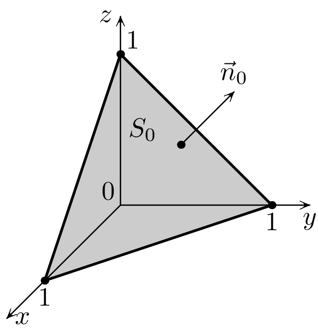

Рис. 3

$x=0$, $y=0$, $z=0$, $S_0: x+y+z=1$ (см. рис. 3).

Р е ш е н и е. Обозначим грани тетраэдра:

$$S_1: x=0, \quad S_2: y=0, \quad S_3: z=0;$$

$$\mathbf{n}_1=(-1,0,0),\ \mathbf{n}_2=(0,-1,0),\ \mathbf{n}_3=(0,0,-1)$$

— единичные векторы внешних нормалей к S_i, $i=1,2,3$; $\mathbf{n}_0$ — единичный вектор внешней нормали к S_0.

По формуле Остроградского–Гаусса имеем

$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S_0} (\mathbf{a},\mathbf{n}_0)\,ds + \sum_{i=1}^{3} \iint\limits_{S_i} (\mathbf{a},\mathbf{n}_i)\,ds.$$

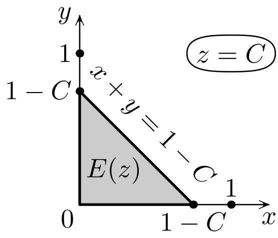

Рис. 4

Так как $(\mathbf{a},\mathbf{n}_1)=-xz=0$ на S_1, $(\mathbf{a},\mathbf{n}_2)=0$, $(\mathbf{a},\mathbf{n}_3)=0$, то

$$\iint\limits_{S_i} (\mathbf{a},\mathbf{n}_i)\,ds = 0, \quad i=1,2,3.$$

Имеем $\iint\limits_{S_0} (\mathbf{a},\mathbf{n}_0)\,ds =$

$$= \iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 z\,dz \iint\limits_{E(z)} dx\,dy,$$

где $E(z)$ — сечение тетраэдра плоскостью $z=C=$ $=\text{const}$ (см. рис. 4); $\iint\limits_{E(z)} dx\,dy = \dfrac{(1-z)^2}{2}$,

$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 z(1-z)^2\,dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (z-2z^2+z^3)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}\,.$$

О т в е т. $\dfrac{1}{24}$.

Утверждение 2. *Пусть в области $G\subset\mathbb{R}^3$ определено векторное поле $\mathbf{a}(M)$ с непрерывно дифференцируе-*

мыми компонентами. Пусть точка $M_0 \in G$ и K_ε — шар радиуса ε с центром в точке M_0, $K_\varepsilon \subset G$; S_ε — граница шара K_ε. Тогда

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M_0) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\iint_{S_\varepsilon}(\mathbf{a},\boldsymbol{\nu})\,ds}{V_\varepsilon}\,, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к сфере S_ε, V_ε — объем шара K_ε.

Из формулы (11) *следует, что дивергенция векторного поля не зависит от системы координат.*

Если $\operatorname{div}\mathbf{a} \neq 0$ в точке M_0, то, как видно из формулы (11), для всех достаточно малых шаров K_ε с центром в точке M_0 будем иметь $\iint_{S_\varepsilon}(\mathbf{a},\boldsymbol{\nu})\,ds \neq 0$.

Если рассматривать движение несжимаемой жидкости при наличии источников, то количество вытекающей через замкнутую поверхность S жидкости, отнесенное к единице времени, называется *производительностью источников*, заключенных внутри S. Это есть поток вектора скорости $\mathbf{v}$; $\operatorname{div}\mathbf{v}$ — плотность источников.

Аналогичное имеет место для теплового потока при наличии источников тепла.

Слово «дивергенция» происходит от французского «divergence», что значит «расходимость».

§ 3. Соленоидальные векторные поля

Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\mathbf{a}(M)$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами.

Определение 6. Векторное поле $\mathbf{a}$, поток которого через любую кусочно-гладкую поверхность, лежащую в области G и являющуюся границей некоторой ограниченной области, равен нулю, называется *соленоидальным в* G.

Определение 7. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется *объемно односвязной*, если для любой ограниченной области

D, граница которой ∂D есть кусочно-гладкая поверхность, из условия $\partial D \subset G$ следует, что $D \subset G$.

Утверждение 3. *Для того чтобы векторное поле* $\mathbf{a}$ *с непрерывно дифференцируемыми компонентами было* ***соленоидальным*** *в области* $G \subset \mathbb{R}^3$ *,* ***необходимо****, а в случае объемно односвязной области и* ***достаточно****, чтобы* $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ *в области* G.

Задача 6. Найти поток векторного поля $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\left(-\dfrac{e}{4\pi r}\right)$, где $e = \text{const}$, r — расстояние точки M_0 от переменной точки M, через любую сферу, не проходящую через M_0 и ориентированную внешней нормалью.

Решение. Имеем на основании (6) (см. задачу 3)

$$\mathbf{a} = \frac{e}{4\pi}\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M, проведенный из M_0. Используя формулу (7) (см. задачу 3), получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0.$$

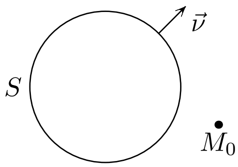

Рис. 5

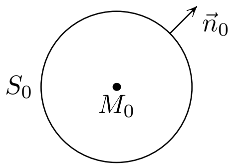

Рис. 6

Пусть S — любая сфера, не проходящая через M_0 и не содержащая эту точку внутри себя (см. рис. 5), $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к S. Тогда $\iint_S \mathbf{a}\,\mathbf{d}s = 0$, так как поле соленоидально (по утверждению 3).

Пусть S_0 — любая сфера с центром в точке M_0 радиуса r_0 (см. рис. 6), $\mathbf{n}_0 = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ — единичный вектор внешней нормали к S_0. Имеем

$$\iint\limits_{S_0} \mathbf{a}\,\mathbf{d}s = \frac{e}{4\pi}\iint\limits_{S_0}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \frac{\mathbf{r}}{r}\right) ds = \frac{e}{4\pi r_0^2}\iint\limits_{S_0} ds = e.$$

Пусть S_0' — любая сфера такая, что M_0 находится внутри S_0', но M_0 — не центр ее (см. рис. 7). Построим сферу S_0 с центром в M_0 такого малого радиуса, чтобы она находилась внутри сферы S_0'.

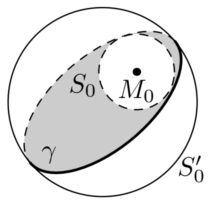

Рис. 7

Покажем, что

$$\iint\limits_{S_0'} \mathbf{a}\,\mathbf{d}s = \iint\limits_{S_0} \mathbf{a}\,\mathbf{d}s \tag{12}$$

при внешней ориентации S_0' и S_0.

Проведем плоскость, пересекающую обе сферы. Ею слой между сферами разбивается на две области с общим участком границы γ. Границу каждой из этих областей ориентируем внешней нормалью. Поток поля $\mathbf{a}$ через границу каждой области равен нулю (по утверждению 3). Сложим эти два потока. В сумму войдут потоки через S_0', S_0 и γ. Через γ они взаимно уничтожаются. Потому потоки через S_0' и S_0 в сумме дают нуль. Беря на S_0 противоположную ориентацию, получим равенство (12).

О т в е т. 0, если сфера не содержит внутри себя M_0; e, если содержит внутри себя M_0.

Рассмотрим еще векторное поле

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad}\left(-\frac{e}{4\pi r}\right) = \frac{e}{4\pi}\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,.$$

Построим конус с вершиной в M_0. Пусть S_1, S_2 — поперечные сечения конуса, расположенные (см. рис. 8) по одну сторону от вершины. Рассмотрим замкнутую поверхность S, образованную сечениями S_1, S_2 и поверхностью S^* — частью конической поверхности, заклю-

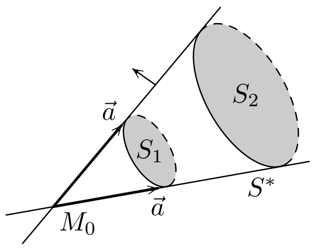

Рис. 8

ченной между S_1 и S_2. Поток поля $\mathbf{a}$ через поверхность S, ориентированную, например, внешней нормалью, равен нулю, так как поле соленоидально (по утверждению 3). На поверхности S^* вектор $\mathbf{a}$ ортогонален нормали к поверхности, поэтому

$$\iint\limits_{S^*} \mathbf{a}\,\mathbf{d}s = 0.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{S_1} \mathbf{a}\,\mathbf{d}s + \iint\limits_{S_2} \mathbf{a}\,\mathbf{d}s = 0.$$

Отсюда, изменив на поверхности S_1 направление нормали на противоположное, получим, что поток поля $\mathbf{a}$ через сечение S_1, как и через сечение S_2, а значит, и любое поперечное сечение, имеет одну и ту же величину.

Аналогичным свойством обладает любое соленоидальное поле. Рассматривается так называемая *векторная трубка*, состоящая из линий, в каждой точке которых касательная имеет направление поля.

Поток соленоидального поля через любое поперечное сечение векторной трубки имеет одну и ту же величину.

Название «соленоидальное» происходит от «солен», что по-гречески означает «трубка». Вместо «соленоидальное поле» иногда говорят «трубчатое поле».

Вернемся к задаче 6. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\left(-\frac{e}{4\pi r}\right)$ в области $G_0 : 0 < r < R_0$, $R_0 = \text{const} > 0$, r — расстояние точки M_0 от переменной точки M. Имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = 0 \quad \text{в} \quad G_0.$$

Область G_0 не является объемно односвязной, поэтому к полю $\mathbf{a}$ не применимо в G_0 утверждение 3. Как показано при решении задачи 6, поток поля $\mathbf{a}$ через любую сферу, содержащую внутри себя точку M_0, не равен нулю.

§ 4. Циркуляция векторного поля. Потенциальные векторные поля

Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ с непрерывными компонентами.

Определение 8. Пусть L — ориентированная кусочно-гладкая кривая, лежащая в области G. Интеграл

$$\int\limits_L \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_L (\mathbf{a}, \boldsymbol{\tau})\,dl \qquad (13)$$

называется *работой* векторного поля $\mathbf{a}$ вдоль L. Если L — замкнутая кривая, то интеграл (13) называется *циркуляцией* векторного поля $\mathbf{a}$ по кривой L. Через $\boldsymbol{\tau}$ обозначен в (13) единичный касательный вектор к кривой L, dl — дифференциал длины дуги.

Определение 9. Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ называется *потенциальным*, если его можно представить как *градиент* некоторого скалярного поля $u(M)$:

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} u.$$

Тогда функция $u(M)$ называется *потенциальной функцией*, или *потенциалом векторного поля* $\mathbf{a}$.

Утверждение 4. *Для векторного поля $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ с непрерывными компонентами в области G эквивалентны следующие три свойства:*

1) *Поле* $\mathbf{a}$ ***потенциально***, *т.е. существует однозначная функция $u(x, y, z)$, имеющая непрерывные частные производные, такая, что*

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{a} \quad \text{в} \quad G,$$

или, что то же, $du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ (u — потенциал поля $\mathbf{a}$).

2) ***Циркуляция*** *поля* $\mathbf{a}$ *по любой замкнутой ориентированной кусочно-гладкой кривой L, лежащей в G,* ***равна нулю****: $\int_L \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0$.*

3) *Если* A_0 *и* A — *точки области* G, *то интеграл* $\int_{\smile{A_0A}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}$ *по любой ориентированной кусочно-гладкой кривой* $\overset{\frown}{A_0A} \subset G$ *с началом в* A_0 *и с концом в* A *зависит от* A_0 *и* A, *но* ***не зависит от пути интегрирования****, при этом*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{A_0A}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = u(A) - u(A_0).$$

Задача 7. Доказать, что поле $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$, где $r = |\mathbf{r}|$, $f(r)$ — непрерывная функция, является потенциальным. Найти потенциал этого поля.

Решение. Соединим точку O, из которой проводятся радиусы-векторы всех точек, с любой точкой A (см. рис. 9) отрезком OA прямой и вычислим $\int_{OA} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}$.

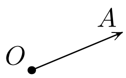

Рис. 9

Воспользовавшись формулой (13) и заметив, что $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ на OA, получим

$$\int\limits_{OA} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{OA} (\mathbf{a}, \boldsymbol{\tau})\,dl = \int\limits_{OA} \left(f(r)\mathbf{r}, \frac{\mathbf{r}}{r}\right)\,dr = \int\limits_{OA} f(r)r\,dr.$$

Рассмотрим $u = \int_0^r f(t)t\,dt$. Введем декартову прямоугольную систему координат с началом в точке O. Вычислим частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$. Получим $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(r)rr'_x = f(r)r\,\dfrac{x}{r} = f(r)x$, так как $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Аналогично,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(r)y, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = f(r)z \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \operatorname{grad} u = f(r)\mathbf{r} = \mathbf{a},$$

так как $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Итак, поле $\mathbf{a}$ потенциально и функция u — его потенциал.

Ответ. $u = \int_0^r f(t)t\,dt$.

Пусть в начало координат O помещена масса m. Если теперь в некоторую точку $M(x, y, z)$ поместить единичную массу, то на нее будет действовать сила притяжения, равная

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{m}{r^3}\mathbf{r}.$$

Эти силы, определяемые в каждой точке пространства, образуют векторное поле — поле тяготения точечной массы m. Его можно представить как градиент скалярной функции $\frac{\gamma m}{r}$, называемой *ньютоновским потенциалом точечной массы* m.

§ 5. Ротор векторного поля. Формула Стокса в терминах поля

Определение 10. Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами. Вектор

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{14}$$

называется *ротором* (*вихрем*) векторного поля $\mathbf{a}$.

$\operatorname{rot}\mathbf{a}$ удобно записывать в виде символического детерминанта

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \tag{15}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы, направленные по осям координат, а под «умножением» символов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ на некоторую функцию понимается выполнение соответствующей операции дифференцирования. Разложив указанный детерминант по элементам первой строки, получим (14).

Механический смысл ротора

Ротор скорости $\mathbf{v}$ любой точки твердого тела равен удвоенной угловой скорости твердого тела. Покажем это.

Если твердое тело, у которого одна из точек O неподвижна, вращается вокруг оси, проходящей через точку O, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \xi\mathbf{i}+\eta\mathbf{j}+\zeta\mathbf{k}$, то скорость произвольной точки M тела равна $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, идущий из точки O к точке M. Следовательно,

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \xi & \eta & \zeta \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\eta z - \zeta y)\mathbf{i} + (\zeta x - \xi z)\mathbf{j} + (\xi y - \eta x)\mathbf{k},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \eta z - \zeta y & \zeta x - \xi z & \xi y - \eta x \end{vmatrix} = 2\xi\mathbf{i} + 2\eta\mathbf{j} + 2\zeta\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega}.$$

Слово «ротор» происходит от французского «rotation», что значит «вращение».

Используя понятия циркуляции и ротора (вихря) векторного поля, можно **формулу Стокса** записать в виде равенства

$$\boxed{\int\limits_{\gamma} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \iint\limits_{S} \operatorname{rot}\mathbf{a}\,\mathbf{d}s,} \tag{16}$$

то есть циркуляция векторного поля $\mathbf{a}$ по ориентированному контуру γ равна потоку вихря этого поля через ориентированную поверхность S, ограниченную контуром γ, при этом направление обхода контура и ориентация поверхности согласованы по правилу правого винта (для правой системы координат).

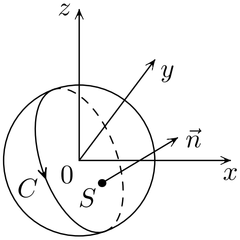

Рис. 10

Задача 8. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ по окружности

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

с заданным направлением движения против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox (см. рис. 10).

Решение. По формуле Стокса (16) имеем

$$\int\limits_C \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \iint\limits_S \operatorname{rot}\mathbf{a}\,\mathbf{d}s = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n})\,ds,$$

где S — круг на плоскости $x+y+z=0$, границей которого служит окружность C; $\mathbf{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,, \frac{1}{\sqrt{3}}\,, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ — единичный вектор нормали к S, направление которой согласуется с направлением обхода окружности C по правилу правого винта. Вычислим $\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} = (-1; -1; -1),$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n})\,ds = -\sqrt{3}\iint\limits_S ds = -\pi R^2\sqrt{3}.$$

Ответ. $-\pi R^2\sqrt{3}$.

Определение 11. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется *поверхностно односвязной*, если, каков бы ни был простой кусочно-гладкий замкнутый контур $\gamma \subset G$, существует кусочно-гладкая ориентируемая поверхность, натянутая на γ и лежащая в G.

Примером области, не являющейся поверхностно односвязной, служит тор.

Утверждение 5. *Для того чтобы векторное поле* $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ *с непрерывно дифференцируемыми компонентами в области* G *было* ***потенциальным, необходимо****, а в случае поверхностно односвязной области и* ***достаточно****, чтобы поле было* ***безвихревым:***

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

в области G.

Задача 9. Убедившись в потенциальности поля

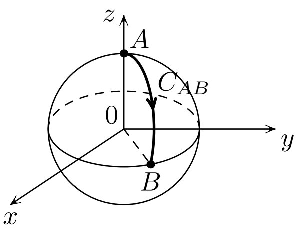

Рис. 11

$$\mathbf{a} = (y+z)\mathbf{i} + (x+z^2)\mathbf{j} + (x+2yz)\mathbf{k},$$

вычислить работу поля вдоль дуги C_{AB} окружности

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2, \\ x = y \end{cases}$$

в первом октанте в направлении от точки $A(0,0,R)$ к точке $B\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\,, \frac{R}{\sqrt{2}}\,, 0\right)$ (см. рис. 11).

Р е ш е н и е. Вычислим $\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z^2 & x+2yz \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Поле $\mathbf{a}$ потенциально в $\mathbb{R}^3$ (по утверждению 5). Тогда (по утверждению 4)

$$\int\limits_{C_{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{AO} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} + \int\limits_{OB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r},$$

AO, OB — прямолинейные отрезки (см. рис. 11).

Имеем на основании формулы (13)

$$\int\limits_{AO} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{AO} (\mathbf{a}, -\mathbf{k})\,dl = 0 \quad (x=0,\ y=0 \text{ на } AO);$$

$$\int\limits_{OB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{OB} (\mathbf{a}, \boldsymbol{\tau})\,dl = \int\limits_{OB} y\,dx + x\,dy = (xy)\Big|_O^B = \frac{R^2}{2} \Rightarrow$$

$$\int\limits_{C_{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \frac{R^2}{2}\,.$$

О т в е т. $\dfrac{R^2}{2}$.

Замечание к задаче 9 (второй способ решения). Так как поле **a** потенциально, то (см. утверждение 4)

$$(y+z)\,dx + (x+z^2)\,dy + (x+2yz)\,dz = du,$$

u — потенциал поля **a**.

Имеем: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y+z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x+z^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = x+2yz$.

Такие частные производные имеет функция

$$u = xy + xz + yz^2.$$

Тогда $\int_{C_{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = u(B) - u(A) = \dfrac{R^2}{2}$.

Задача 10. Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ заданы скалярное поле φ и векторное $\mathbf{a} = (P, Q, R)$; φ, P, Q, R — непрерывно дифференцируемые функции. Вектор **b** в точке $M(x, y, z) \in$ $\in G$ имеет компоненты:

$$\begin{aligned}
b_x &= R\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial R}{\partial y} - Q\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \varphi\frac{\partial Q}{\partial z}\,,\\
b_y &= P\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varphi\frac{\partial P}{\partial z} - R\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial R}{\partial x}\,,\\
b_z &= Q\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial Q}{\partial x} - P\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial P}{\partial y}\,.
\end{aligned}$$

Используя термины поля, найти выражение для **b** через **a** и φ в векторной форме.

Р е ш е н и е. На основании (14) заключаем, что слагаемые

$$\varphi\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right), \varphi\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right), \varphi\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

входящие в состав b_x, b_y, b_z, являются компонентами вектора $\varphi \operatorname{rot}\mathbf{a}$. Остальные слагаемые

$$R\frac{\partial\varphi}{\partial y} - Q\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,, P\frac{\partial\varphi}{\partial z} - R\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,, Q\frac{\partial\varphi}{\partial x} - P\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

являются компонентами векторного произведения

$$[\operatorname{grad}\varphi, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Следовательно, $\mathbf{b} = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{a}]$. Нетрудно получить другое выражение для $\mathbf{b}$. Имеем

$$b_x = \frac{\partial(\varphi R)}{\partial y} - \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial z},$$
$$b_y = \frac{\partial(\varphi P)}{\partial z} - \frac{\partial(\varphi R)}{\partial x},$$
$$b_z = \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi P)}{\partial y},$$

т.е. $\mathbf{b} = \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a})$.

О т в е т. $\mathbf{b} = \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{a}]$.

При решении задачи 10 получено выражение для $\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a})$. Об этом см. еще задачу 12в).

Утверждение 6. *Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ определено векторное поле $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами; M_0 — фиксированная точка, $M_0 \in G$, $\boldsymbol{\nu}$ — произвольный фиксированный единичный вектор; π — плоскость, перпендикулярная вектору $\boldsymbol{\nu}$ и проходящая через M_0; K_ε — круг в плоскости π радиуса ε с центром в точке M_0, $K_\varepsilon \subset G$, γ_ε — граница круга K_ε. Пусть окружность γ_ε (см. рис. 12) ориентирована по отношению к $\boldsymbol{\nu}$ по правилу правого винта (для правой системы координат). Тогда в точке M_0*

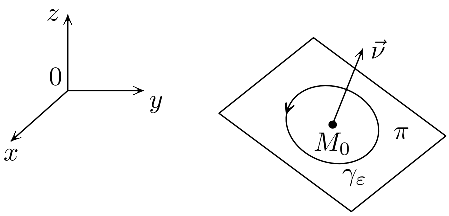

Рис. 12

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \boldsymbol{\nu}) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\int_{\gamma_\varepsilon} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}}{\sigma_\varepsilon}, \tag{17}$$

где σ_ε — площадь круга K_ε.

По формуле (17) выражаются проекции $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ на любые взаимно ортогональные единичные векторы $\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3$. Этими проекциями $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ однозначно определяется.

Величины, входящие в правую часть равенства (17), не зависят от выбора системы координат одной и той же ориентации. Однако при замене правой системы координат на левую и неизменном $\boldsymbol{\nu}$ направление обхода γ_ε изменяется на противоположное, что влечет изменение знака в правой части (17), а значит, и $\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

Таким образом, $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ инвариантен относительно преобразований прямоугольных координат, сохраняющих их ориентацию; $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ — аксиальный, или осевой вектор (таким называют вектор в ориентированном пространстве, который при изменении ориентации пространства преобразуется в противоположный вектор).

§ 6. Однократное применение оператора Гамильтона

Оператор Гамильтона ∇ (3) удобно трактовать как символический вектор с компонентами $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, а применение его к скалярной функции — как умножение скаляра на этот вектор. С помощью ∇ удобно записывать для $\mathbf{a} = (P, Q, R)$:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R = (\nabla, \mathbf{a}),$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial}{\partial y}R - \frac{\partial}{\partial z}Q\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}P - \frac{\partial}{\partial x}R\right)\mathbf{j} + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P\right)\mathbf{k} = [\nabla, \mathbf{a}], \tag{18}$$

т.е. дивергенция векторного поля $\mathbf{a}$ есть скалярное произведение символического вектора ∇ и вектора $\mathbf{a}$, а ротор векторного поля $\mathbf{a}$ есть векторное произведение вектора ∇ и вектора $\mathbf{a}$.

Правила работы с ∇

1. Если ∇ стоит перед линейной комбинацией $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$, где α_i — постоянные, p_i — функции точки (скалярные или векторные), то
$$\nabla \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nabla p_i.$$
2. Если ∇ стоит перед произведением функций p, q, то ∇ применяется поочередно к каждой из этих функций (над ней ставится в этом случае знак $\downarrow$), результаты складываются:
$$\nabla(pq) = \nabla(\overset{\downarrow}{p}q) + \nabla(p\overset{\downarrow}{q}).$$
Затем полученные произведения преобразуются по правилам векторной алгебры так, чтобы за ∇ стоял только множитель, снабженный знаком $\downarrow$. После этого знак $\downarrow$ можно опустить.

Задача 11. Вычислить, считая f скалярной функцией:
а) $\operatorname{div}(f\mathbf{a})$;
б) $\operatorname{div}(f(r)\mathbf{a}(r))$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки (x, y, z).

Р е ш е н и е. а)
$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\mathbf{a}) &= (\nabla, f\mathbf{a}) = (\nabla, \overset{\downarrow}{f}\mathbf{a}) + (\nabla, f\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = \\ &= (\nabla \overset{\downarrow}{f}, \mathbf{a}) + f(\nabla, \overset{\downarrow}{a}) = (\mathbf{a}, \nabla f) + f(\nabla, \mathbf{a}) = \\ &= (\mathbf{a}, \operatorname{grad} f) + f \operatorname{div} \mathbf{a}. \end{aligned} \tag{19}$$

б) Вычислим $\operatorname{div} \mathbf{a}(r)$. Учитывая, что компоненты вектора $\mathbf{a}(r)$ зависят от r, аналогично формуле (6) получаем
$$\operatorname{div} \mathbf{a}(r) = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dr}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \tag{20}$$
где $\dfrac{d\mathbf{a}}{dr}$ — вектор, компоненты которого есть производные по r от компонент вектора $\mathbf{a}(r)$.

Далее по формуле (19), воспользовавшись (6) и (20), получим

$$\operatorname{div}(f(r)\mathbf{a}(r)) = \frac{f'}{r}(\mathbf{r}, \mathbf{a}) + \frac{f}{r}\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{a}}{dr}\right).$$

Задача 12. Вычислить:

а) $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$;

б) $\operatorname{div}[\mathbf{a}(r), \mathbf{b}]$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки (x, y, z);

в) $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a})$, φ — скалярная функция.

Решение. а) Имеем

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\nabla, [\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}, \mathbf{b}]) + (\nabla, [\mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]).$$

Совершив круговую перестановку сомножителей смешанного произведения, преобразуем слагаемое $(\nabla, [\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}, \mathbf{b}])$ к виду $(\mathbf{b}, [\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}])$. Слагаемое $(\nabla, [\mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}])$ преобразуется аналогично, если предварительно в нем поменять местами $\mathbf{a}$ с $\mathbf{b}$, в результате чего получим $-(\mathbf{a}, [\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}])$.

Опустив знак $\downarrow$ и воспользовавшись формулой (18), будем иметь

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{b}). \tag{21}$$

б) Вычислим $\operatorname{rot}\mathbf{a}(r)$. Воспользуемся формулой (14). Учитывая, что компоненты P, Q, R вектора $\mathbf{a}(r)$ зависят от r, получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(r) = \left[R'(r)\frac{y}{r} - Q'(r)\frac{z}{r}\right]\mathbf{i} - \left[R'(r)\frac{x}{r} - P'(r)\frac{z}{r}\right]\mathbf{j} +$$

$$+ \left[Q'(r)\frac{x}{r} - P'(r)\frac{y}{r}\right]\mathbf{k} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ P'(r) & Q'(r) & R'(r) \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{a}}{dr}\right].$$

Тогда по формуле (21) имеем

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}(r), \mathbf{b}] = \left(\frac{\mathbf{b}}{r}, \left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{a}}{dr}\right]\right) - (\mathbf{a}(r), \operatorname{rot}\mathbf{b}).$$

в) Имеем $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a}) = [\nabla, \varphi\mathbf{a}] = [\nabla, \overset{\downarrow}{\varphi}\mathbf{a}] + [\nabla, \varphi\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}] = [\nabla\varphi, \mathbf{a}] +$ $+ \varphi[\nabla, \mathbf{a}] = [\operatorname{grad}\varphi, \mathbf{a}] + \varphi\operatorname{rot}\mathbf{a}$ (см. задачу 10).

Градиент одного вектора по другому

Пусть $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ — векторное поле с дифференцируемыми компонентами.

Аналогично производной скалярного поля по направлению $\mathbf{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $|\mathbf{l}| = 1$ (см. (1)) определяется производная векторного поля $\mathbf{a}$ по направлению $\mathbf{l}$, которая обозначается $\dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{l}}$.

Справедлива формула, аналогичная (2):

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}\cos\gamma,$$

которую, полагая

$$\mathbf{l}\nabla = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

можно записать так:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{l}} = (\mathbf{l}\nabla)\mathbf{a}.$$

Пусть $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ — произвольный вектор.

Определение 12. Под вектором $(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}$ будем понимать вектор

$$(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} = b_x\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + b_y\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + b_z\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}\,, \tag{22}$$

который называется *градиентом вектора* $\mathbf{a}$ *по вектору* $\mathbf{b}$.

Если вектор $\mathbf{b}$ имеет то же направление, что единичный вектор $\mathbf{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, так что $\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\mathbf{l}$, то имеем

$$b_x = |\mathbf{b}|\cos\alpha, \quad b_y = |\mathbf{b}|\cos\beta, \quad b_z = |\mathbf{b}|\cos\gamma.$$

Поэтому

$$(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} = |\mathbf{b}|\left(\cos\alpha\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}\right) =$$

$$= |\mathbf{b}|(\mathbf{l}\nabla)\mathbf{a} = |\mathbf{b}|\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{l}}\,.$$

На основании формулы (22) заключаем, что компоненты градиента вектора $\mathbf{a}$ по вектору $\mathbf{b}$ вычисляются по формулам:

$$\{(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}\}_x = b_x\frac{\partial a_x}{\partial x} + b_y\frac{\partial a_x}{\partial y} + b_z\frac{\partial a_x}{\partial z} = (\mathbf{b}, \nabla a_x), \quad (22\text{а})$$

$$\{(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}\}_y = b_x\frac{\partial a_y}{\partial x} + b_y\frac{\partial a_y}{\partial y} + b_z\frac{\partial a_y}{\partial z} = (\mathbf{b}, \nabla a_y), \quad (22\text{б})$$

$$\{(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}\}_z = b_x\frac{\partial a_z}{\partial x} + b_y\frac{\partial a_z}{\partial y} + b_z\frac{\partial a_z}{\partial z} = (\mathbf{b}, \nabla a_z). \quad (22\text{в})$$

Имеем, в частности, для радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки (x, y, z)

$$(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{b}. \tag{23}$$

Задача 13. Вычислить: а) $\mathrm{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; б) $\mathrm{div}[\mathbf{r}, [\mathbf{c}, \mathbf{r}]]$; в) $\mathrm{rot}[\mathbf{r}, [\mathbf{c}, \mathbf{r}]]$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки (x, y, z).

Решение. а) Имеем

$$\mathrm{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = [\nabla, [\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}, \mathbf{b}]] + [\nabla, [\mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]]. \tag{24}$$

Применив правило вычисления двойного векторного произведения

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = \mathbf{B}\,(\mathbf{A}, \mathbf{C}) - \mathbf{C}\,(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,, \tag{25}$$

получим

$$[\nabla, [\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}, \mathbf{b}]] = (\mathbf{b}\nabla)\overset{\downarrow}{\mathbf{a}} - \mathbf{b}(\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla, \mathbf{a}) = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a},$$

$$[\nabla, [\mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]] = \mathbf{a}(\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) - (\mathbf{a}\nabla)\overset{\downarrow}{\mathbf{b}} = \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}.$$

Поэтому в силу формулы (24)

$$\mathrm{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a} + \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}, \tag{26}$$

или

$$\mathrm{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}. \tag{27}$$

б) Обозначим $[\mathbf{c}, \mathbf{r}] = \mathbf{R}$. Имеем по формуле (21):

$$\begin{aligned}\mathrm{div}[\mathbf{r}, \mathbf{R}] &= (\mathbf{R}, \mathrm{rot}\,\mathbf{r}) - (\mathbf{r}, \mathrm{rot}\,\mathbf{R}) = -(\mathbf{r}, \mathrm{rot}\,\mathbf{R}) = \\ &= -(\mathbf{r}, \mathrm{rot}[\mathbf{c}, \mathbf{r}]),\end{aligned} \tag{28}$$

так как

$$\operatorname{rot}\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{0} \tag{29}$$

(то же следует по утверждению 5 из потенциальности поля вида $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$, $f \equiv 1$ (см. задачу 7)).

По формуле (26) получаем

$$\operatorname{rot}[\mathbf{c},\mathbf{r}] = (\mathbf{r}\nabla)\mathbf{c} - \mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{c} + \mathbf{c}\operatorname{div}\mathbf{r} - (\mathbf{c}\nabla)\mathbf{r} = 3\mathbf{c} - \mathbf{c} = 2\mathbf{c},$$

так как $(\mathbf{r}\nabla)\mathbf{c} = \mathbf{0}$, $\operatorname{div}\mathbf{c} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{r} = 3$, $(\mathbf{c}\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{c}$ (см. (23)).

В силу (28)

$$\operatorname{div}[\mathbf{r},[\mathbf{c},\mathbf{r}]] = -2(\mathbf{r},\mathbf{c}).$$

О т в е т. $-2(\mathbf{r},\mathbf{c})$.

в) Имеем по формуле (27):

$$\operatorname{rot}[\mathbf{r},\mathbf{R}] = (\mathbf{R}\nabla)\mathbf{r} - (\mathbf{r}\nabla)\mathbf{R} + \mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{R} - \mathbf{R}\operatorname{div}\mathbf{r}, \tag{30}$$

где $\mathbf{R} = [\mathbf{c},\mathbf{r}]$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, c_i — постоянные по условию, $i = 1,\ 2,\ 3$.

Вычислим слагаемые, стоящие в правой части формулы (30):

$$(\mathbf{R}\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{R} \qquad \text{(см. (23))};$$

$$\mathbf{R} = [\mathbf{c},\mathbf{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (c_2z - c_3y)\mathbf{i} - (c_1z - c_3x)\mathbf{j} + (c_1y - c_2x)\mathbf{k};$$

$$(\mathbf{r}\nabla)\mathbf{R} = x\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x} + y\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y} + z\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial z} = \mathbf{R}$$

(см. (22а), (22б), (22в)); $\operatorname{div}\mathbf{r} = 3$; $\operatorname{div}\mathbf{R} = 0$. Поэтому из (30) следует, что

$$\operatorname{rot}[\mathbf{r},[\mathbf{c},\mathbf{r}]] = \mathbf{R} - \mathbf{R} - 3\mathbf{R} = -3[\mathbf{c},\mathbf{r}] = 3[\mathbf{r},\mathbf{c}].$$

О т в е т. $3[\mathbf{r},\mathbf{c}]$.

§ 7. Повторное применение оператора Гамильтона

Так как $\operatorname{grad}\varphi$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ — векторы, к ним можно применить операции div и rot. В результате получаем $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

К $\operatorname{div}\mathbf{a}$ можно применить только операцию grad, в результате получится $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$.

Задача 14. Для скалярного поля $\varphi(x, y, z)$, φ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, вычислить: а) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$; б) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$.

Р е ш е н и е. а) Так как поле $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi$ потенциально, то

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{0} \quad (\text{см. утв. 5}).$$

Это же можно получить, пользуясь символическим вектором ∇:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = [\nabla, \nabla\varphi] = [\nabla, \nabla]\varphi = \mathbf{0},$$

ибо векторное произведение любого вектора (в том числе ∇) на самого себя равно нулю.

б)
$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{div}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \\ = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi, \tag{31}$$

где Δ — *оператор Лапласа*:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Так как и дивергенция и градиент не зависят от выбора системы координат, то и $\Delta\varphi$ зависит лишь от самого поля, но не от системы координат (см. (31)).

Оператор Лапласа естественно рассматривать как скалярный квадрат вектора ∇:

$$(\nabla, \nabla)\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi.$$

Применяется оператор Лапласа и к вектору. При этом если $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то под $\Delta\mathbf{a}$, или $\nabla^2\mathbf{a}$ понимается вектор

$$\nabla^2\mathbf{a} = \Delta\mathbf{a} = (\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z). \tag{32}$$

Задача 15. Для векторного поля $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами вычислить: а) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}$; б) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

Решение. а) Пользуясь (14), имеем

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = 0$$

в силу равенства смешанных производных по x, y и y, x и т.д.

То же самое можно получить, оперируя с ∇ как с вектором, пользуясь при этом круговой перестановкой сомножителей в смешанном произведении:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = (\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]) = ([\nabla, \nabla], \mathbf{a}) = 0. \tag{33}$$

б) Пользуясь правилом (25) вычисления двойного векторного произведения и (32), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} &= [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{a}) - (\nabla, \nabla)\mathbf{a} = \\ &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}. \end{aligned} \tag{34}$$

Как следует из равенства (33) (по утверждению 3), если $\mathbf{a}$ — векторное поле с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами в объемно односвязной области, то поле $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в этой области соленоидально.

На основании равенства (34) заключаем, что $\Delta\mathbf{a}$ не зависит от системы координат, поскольку $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$ и $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$ от нее не зависят.

Задача 16. Вычислить $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dfrac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{r}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы, направленные по осям координат.

Р е ш е н и е. Обозначим $\dfrac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{r} = \mathbf{a}$. Применив к $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$ формулу (34), получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \operatorname{rot}\Delta\mathbf{a}.$$

Имеем: $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (см. задачу 14а)),

$$\Delta\mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{r}\right) = \Delta\left(\frac{1}{r}\right)(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \qquad (\text{см.}\quad (32)).$$

Из (31) и (7) следует, что

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \Rightarrow \Delta\mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow \operatorname{rot}\Delta\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Итак, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dfrac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{r} = \mathbf{0}$.

О т в е т. $\mathbf{0}$.

Формулы Грина в $\mathbb{R}^3$

Задача 17. Доказать **первую формулу Грина** в $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\begin{aligned}\iiint\limits_G v\Delta u\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = -\iiint\limits_G \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 + \\ +\iint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,ds,\end{aligned}} \tag{35}$$

где G — область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей S, $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности S, $u(x_1, x_2, x_3)$ — дважды, а $v(x_1, x_2, x_3)$ — один раз непрерывно дифференцируемые в $\overline{G}$ функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заменив Δu на $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$ и использовав ∇, можно записать **первую формулу Грина** в таком виде:

$$\iiint\limits_G v\operatorname{div}\operatorname{grad} u\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = -\iiint\limits_G (\nabla v, \nabla u)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 + \\ +\iint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\,ds. \tag{36}$$

Согласно формуле (4), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = (\nabla u, \mathbf{n}), \qquad v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = (v \operatorname{grad} u, \mathbf{n}). \tag{37}$$

Обозначив $\operatorname{grad} u$ через $\mathbf{a}$ и применив формулу (19) к $\operatorname{div}(v \operatorname{grad} u)$, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u) &= \operatorname{div}(v\mathbf{a}) = (\operatorname{grad} v, \mathbf{a}) + v \operatorname{div} \mathbf{a} = \\ &= (\nabla v, \nabla u) + v \operatorname{div} \operatorname{grad} u. \end{aligned} \tag{38}$$

Далее по формуле Остроградского–Гаусса имеем (см. (10)):

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iint\limits_S (v \operatorname{grad} u, \mathbf{n})\, ds,$$

откуда в силу формул (37), (38) следует (36), а значит, и (35). Первая формула Грина доказана.

Задача 18. Доказать **вторую формулу Грина** в $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\iiint\limits_G (v\Delta u - u\Delta v)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iint\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) ds,} \tag{39}$$

где G — область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей S, $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности S, $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(x_1, x_2, x_3)$ — дважды непрерывно дифференцируемые в $\overline{G}$ функции.

Доказательство. Напишем первую формулу Грина (35), поменяв местами u и v:

$$\iiint\limits_G u\Delta v\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = -\iiint\limits_G \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + \iint\limits_S u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\, ds.$$

Вычтем это равенство из равенства (35). Получим (39).

Обе формулы Грина широко применяются в уравнениях математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 2, 3. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1988.
2. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1989.
3. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. Т. 2. – 2-е изд. – М., 1973.
4. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. – 5-е изд. – М., 2000.
5. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – 2-е изд. – М.: МФТИ, 2000.
6. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 3. – М.: МФТИ, 1997.
7. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – 9-е изд. – М., 1965.
8. *Будак Б.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. – 2-е изд. – М., 1967.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – 6-е изд. – М.: Наука, 1966.
10. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. – 4-е изд. – М.: Наука, 1982.
11. *Компанеец А.С.* Теоретическая физика. – 2-е изд. – М., 1957.
12. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: Учебное пособие/ Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Наука. 1995.
13. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – 10-е изд. – М.: Наука, 1990.
14. *Карякин Н.И., Быстров К.Н., Киреев П.С.* Краткий справочник по физике. – 3-е изд. – М., 1969.