

Федеральное агентство по образованию  
ГОУ ВПО “Уральский государственный технический университет-УПИ”



**Н.В. Мельникова**  
**Ю.Б. Мельников**  
**Ю.Ю. Мельникова**

# **ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА. ИНТЕГРАЛЫ В ТЕОРИИ ПОЛЯ**

Учебное электронное текстовое пособие  
Подготовлено кафедрой вычислительных методов и уравнений матфизики  
Научный редактор: доц., канд. физ.-мат. наук Ю.Б. Мельников

Рецензенты:  
кафедра уравнений математической физики  
Уральского государственного университета им. А.М. Горького  
(зав. кафедрой — проф., д-р физ.-мат. наук А.О. Иванов);  
Е.Г. Пыткеев — проф., д-р физ.-мат. наук  
(Институт математики и механики УрО РАН)

Учебное пособие содержит теоретический материал и примеры решения задач по векторному анализу, включая криволинейные интегралы первого и второго рода и поверхностные интегралы первого и второго рода. Учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей всех факультетов, изучающих курс высшей математики.

© ГОУ ВПО “УГТУ-УПИ”, 2006

Екатеринбург  
2006

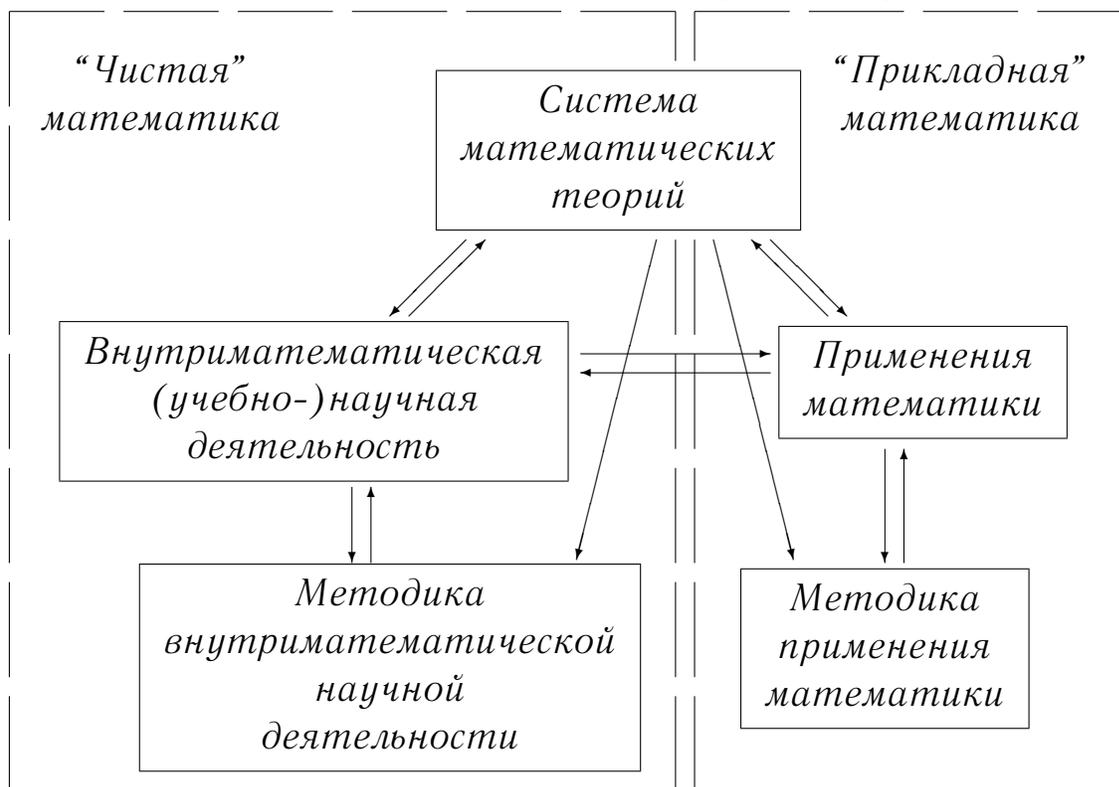
## Оглавление

Введение . . . . .	4
<b>Глава 1. Скалярные и векторные поля</b>	<b>7</b>
1.1. Вектор-функция . . . . .	7
1.1.1. Основные определения . . . . .	8
1.1.2. Предел, непрерывность, производная вектор-функции, геометрические приложения . . . . .	9
1.2. Скалярное поле . . . . .	11
1.2.1. Определение и примеры скалярных полей . . . . .	11
1.2.2. Линии (поверхности) уровня . . . . .	15
1.3. Векторное поле . . . . .	16
1.3.1. Определение и примеры векторных полей . . . . .	16
1.3.2. Векторные линии . . . . .	19
1.4. Задачи по теме “Определение скалярного и векторного полей” .	21
1.5. Основные результаты первой главы . . . . .	21
 <b>Глава 2. Интегрирование и дифференцирование в векторном анализе</b>	 <b>23</b>
2.1. Интеграл по фигуре . . . . .	23
2.1.1. В каком направлении развивать исследование? . . . . .	27
2.1.2. Линейные интегралы . . . . .	28
2.1.3. Кратные и поверхностные интегралы . . . . .	37
2.2. Задачи по теме “Типы интегралов, применяемых в теории поля”	42
2.3. Свойства интегралов по фигуре . . . . .	43
2.3.1. Свойства интегралов по фигуре . . . . .	44
2.3.2. Свойства, специфические для интегралов первого рода по фигуре . . . . .	45
2.3.3. Свойства, специфические для интегралов второго рода по фигуре . . . . .	46
2.4. Дифференциальные операции скалярного и векторного полей .	48
2.4.1. Интеграл с векторным значением . . . . .	49
2.4.2. Градиент, дивергенция, ротор . . . . .	50
2.5. Задачи по теме “Дифференциальные операции в теории поля” .	68
2.6. Работа с оператором “набла” . . . . .	69

2.6.1. Семантические и грамматические правила работы с оператором “набла” . . . . .	71
2.6.2. “Сокращенное” правило работы с оператором “набла” . . . . .	73
2.6.3. Некоторые полезные соотношения . . . . .	75
2.7. Задачи по теме “Работа с оператором “набла” . . . . .	76
2.8. Система координат . . . . .	76
2.8.1. Полярная система координат . . . . .	77
2.8.2. Цилиндрическая и сферическая системы координат . . . . .	79
2.9. Параметризация линий и поверхностей . . . . .	79
2.9.1. Параметризация линий . . . . .	81
2.9.2. Параметризация поверхностей . . . . .	82
2.9.3. Получение нормального вектора . . . . .	83
2.10. Примеры вычисления значений линейных, кратных и поверхностных интегралов . . . . .	87
2.11. Резюме: интегралы, применяемые в теории поля . . . . .	92
2.12. Задачи по теме “Вычисление линейных и поверхностных интегралов” . . . . .	94
2.13. Формула Стокса и формула Гаусса-Остроградского . . . . .	95
2.14. Основные результаты второй главы . . . . .	99
<b>Глава 3. Некоторые применения теории скалярного и векторного полей</b>	<b>101</b>
3.1. Потенциальное и соленоидальное поля . . . . .	101
3.1.1. Потенциальное поле . . . . .	102
3.1.2. Соленоидальное поле . . . . .	110
3.2. Задачи по теме “Дифференциальные операции в теории поля” . . . . .	112
3.3. Основные результаты третьей главы . . . . .	112
<b>Приложения</b>	<b>114</b>
П.1. Некоторые понятия и формулы векторной алгебры . . . . .	114
П.2. Некоторые понятия топологии . . . . .	119
П.3. Алгоритм составления уравнений . . . . .	122
П.4. Об исследовательских стратегиях . . . . .	123
П.5. Ответы . . . . .	129
<b>Список литературы</b>	<b>147</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>149</b>

## Введение

Основы векторного анализа освещены в большом числе учебников и учебных пособий [1], [17], посвященных математике и физике. Но даже беглый обзор большинства учебников и учебных пособий по высшей математике (и не только высшей) показывает, что авторы, как правило, воспринимают математику как *систему математических теорий*. Даже если автор книги с возмущением опровергает такую точку зрения на математику, именно такой она предстает в книге. Дело в том, что авторами учебников являются, как правило, ученые, для которых естественным является стиль научных статей. Само по себе это не является недостатком, поскольку владение формальным строгим стилем является одним из профессиональных качеств выпускника вуза. Вместе с тем учебное пособие, написанное в стиле математической научной статьи, дает однобокое представление о деятельности, связанной с развитием и использованием математического аппарата (см. рисунок). Существуют



Система областей деятельности, связанных с математикой

значительные отличия учебной литературы от научной. Научная литература

предназначена для коллег, которым, как правило, нет необходимости объяснять, например, логику, закономерности и механизм научного поиска. Поэтому, в отличие от научной работы, в данном пособии мы попытались особое внимание уделить процессу получения результата, в том числе — процессу формализации понятия, формулировки и доказательства теоремы, описанию логики научного поиска, привлечению читателя к прогнозу дальнейшего развития учебного материала. Вам судить, насколько нам это удалось. Особое внимание в работе уделено вопросам математического моделирования<sup>1</sup>, применению векторного анализа в физике и механике. В частности, в организации изложения используется аппаратная модель математики [14]. В рамках этой модели наука представляется как система из нескольких взаимосвязанных аппаратов: *понятийного, аналитического аппарата, аппарата контроля адекватности и методологического аппарата*. Понятийный аппарат обеспечивает преобразование информации к виду, стандартному для данной науки. Использование только стандартизированной информации обеспечивает научным методам беспрецедентно высокий уровень универсальности и эффективности. Именно поэтому мы уделяем повышенное внимание стандартным формам задания рассматриваемых объектов (полей, интегралов и др.), в задачах для самостоятельного решения особую роль играют примеры приведения информации к стандартному виду, например, задания векторного и скалярного поля в координатной форме.

Несколько слов о математическом содержании работы. Создание математического анализа произвело революцию в математике. В соответствии с общими законами развития теорий с течением времени возникла потребность в обобщении математического анализа и построении аналогичных теорий.

Классический математический анализ изучает преобразования  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , точнее, отображения *подмножества* из  $\mathbb{R}$  на подмножество из  $\mathbb{R}$ . Если рассматривать  $\mathbb{R}$  как одномерное линейное пространство, то очевидными направлениями обобщения классического математического анализа становятся теории, изучающие функции вида (здесь  $U$  — конечномерное линейное пространство над  $\mathbb{R}$  [8, с.215-374]):

- 1)  $\mathbb{R} \rightarrow U$  — вектор-функция скалярного аргумента;
- 2)  $U \rightarrow \mathbb{R}$  — скалярное поле;

<sup>1</sup>Здесь моделирование понимается в смысле наших монографий [9, 10].

3)  $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$  — векторное поле<sup>2</sup>.

Точнее, надо говорить об отображении *подмножеств* множеств  $U$  и  $\mathbb{R}$  в соответствующие множества. Раздел математики, изучающий векторные и скалярные поля, называется **векторным анализом**.

Читателю, впервые знакомящемуся с векторным анализом, в качестве перспективы для изучения математики отметим важное обобщение математического анализа — **функциональный анализ**. В рамках функционального анализа изучаются отображения *бесконечномерных* линейных пространств над  $\mathbb{R}$  в основное поле  $\mathbb{R}$ . Такие функции называются **функционалами**.

Как и в других наших учебных пособиях [7, 8], в данной работе каждая глава заканчивается обзором наиболее важных результатов, представленных в ней. Надеемся, что элегантность и прикладные возможности векторного анализа вдохновят вас на изучение других современных разделов математики.

---

<sup>2</sup>Впервые на эту связь между векторным и математическим анализом обратил наше внимание доц. Г.Л. Ходак.

# Глава 1

## Скалярные и векторные поля

Во введении к работе мы отметили три интересующих нас в данный момент раздела математики, изучающие:

- 1) отображения  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}$ , т.е. вектор-функции скалярного аргумента;
- 2) отображения  $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , т.е. скалярные поля;
- 3) отображения  $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ , т.е. векторные поля,

где  $U$  — линейное пространство<sup>1</sup> [8, с.215-374]. Обратите внимание на приведенные ниже строгие определения вектор-функции, скалярного и векторного полей, поскольку в приведенных выше “приблизительных описаниях” мы допустили существенную неточность: надо говорить об отображениях множеств  $\mathbb{R}$  и  $U$  в соответствующие множества. К векторному анализу обычно относят только изучение скалярных и векторных полей. Поэтому мы рассмотрим вектор-функцию только в порядке обзора необходимых нам результатов (рис.1.1).

### 1.1. Вектор-функция

Понятие вектор-функции возникло как результат обобщения математического анализа. Поэтому естественно, что круг рассматриваемых понятий “унаследован” от математического анализа: предел, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

<sup>1</sup>В соответствии с традиционным для алгебры соглашением [8, с.72, \nobreakspace {}216] мы идентифицируем линейное пространство по его носителю.

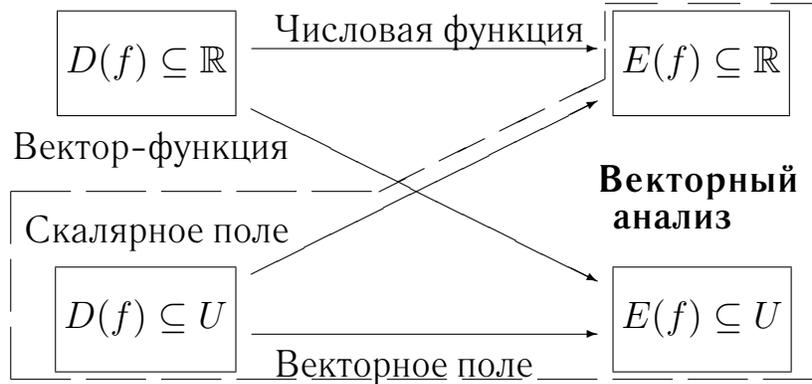


Рис. 1.1. Векторный анализ как обобщение математического анализа

### 1.1.1. Основные определения

**Определение 1.** *Вектор-функцией* скалярного аргумента называется функция, область определения которой содержится в  $\mathbb{R}$ , а область допустимых значений — в  $n$ -мерном линейном<sup>1</sup> пространстве.

Можно сказать иначе. Пусть  $U$  —  $n$ -мерное линейное пространство,  $D$  — некоторое числовое множество, то есть  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Тогда вектор-функцией называется функция, каждому числу из множества  $D$  сопоставляющая соответствующий вектор из  $U$ .

Как мы знаем на примере математического анализа, для интерпретации результатов, формирования гипотез и т.п. важную роль играет наглядное представление функции, в данном случае вектор-функции. Для функций, изучаемых в математическом анализе, с этой целью применяется график функции  $\varphi$ , т.е. множество точек плоскости  $xOy$  с координатами  $(x; \varphi(x))$ . В векторном анализе аналогичную роль играет понятие годографа функции.

**Определение 2.** *Годографом* вектор-функции  $\vec{f}$  называется множество точек  $M$  таких, что  $\vec{OM} \in E(\vec{f})$ , где  $E(\vec{f}) = \left\{ \vec{f}(t) \mid t \in D(\vec{f}) \right\}$  — множество допустимых значений функции  $f$ .

Иными словами, годограф вектор-функции — это линия, описываемая концом радиуса-вектора, когда аргумент этой вектор-функции пробегает всю область ее определения.

<sup>1</sup>Точнее, аффинном.

Отметим важное отличие годографа вектор-функции от графика функции: у различных вектор-функций может быть один и тот же годограф. В качестве примера рассмотрим несколько разных вектор-функций с одинаковым годографом, представляющим собой полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат, расположенным в первой и второй четвертях:

1) для функции  $\vec{f}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$  с областью определения, заданной системой неравенств  $0 \leq t \leq \pi$ , годограф имеет вид  $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin t, \end{cases}$  то есть

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ y \geq 0; \end{cases}$$

2) для функции  $\vec{g}(t) = \cos 2t \vec{i} + \sin 2t \vec{j}$  с областью определения, заданной системой неравенств  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , годограф имеет вид  $\begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = \sin 2t, \end{cases}$

$$\text{то есть } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ y \geq 0; \end{cases}$$

3) для функции  $\vec{h}(t) = t \vec{i} + \sqrt{1-t^2} \vec{j}$  с областью определения, заданной системой неравенств  $-1 \leq t \leq 1$ , годограф имеет вид  $\begin{cases} x = t; \\ y = \sqrt{1-t^2}, \end{cases}$ ,

$$\text{то есть } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Представление линии в виде годографа вектор-функции скалярного аргумента является популярным способом задания линии. С этой точки зрения в рассмотренных примерах можно говорить о разных параметризациях линии (в данном случае полуокружности)<sup>2</sup>. На рис. 1.2 изображены годографы этих вектор-функций (у них один и тот же годограф), и значения этих функций при одном и том же значении параметра  $t$ , равном  $\pi/6$ .

### 1.1.2. Предел, непрерывность, производная вектор-функции, геометрические приложения

Определения предела, непрерывности и производной вектор-функции вводятся по аналогии с определением производной “обычной” функции, т.е. действительной функции действительного аргумента. Речь идет именно об

<sup>2</sup>См. также пример 9, стр.81.

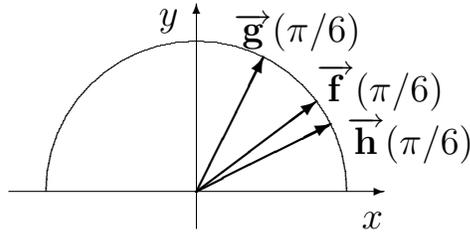


Рис. 1.2. К примерам годографов вектор-функции (изображены значения вектор-функций при значении параметра  $\pi/6$ )

обобщении, так как “обычную” функцию можно рассматривать как вектор-функцию с областью значений в одномерном линейном пространстве  $\mathbb{R}$ .

Для “обычной” функции  $\varphi$  имеем  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - A| < \varepsilon). \quad (1.1)$$

Для вектор-функции  $\vec{f}$  единственное отличие в формуле будет состоять в том, что модуль разности векторов определяется иначе, чем модуль разности чисел. Для того чтобы подчеркнуть это отличие, мы для векторов будем писать вместо знака модуля обозначение нормы<sup>3</sup> вектора. Обычно норма понимается в смысле евклидовой нормы<sup>4</sup>. Тогда определение, приведенное выше, переписывается практически дословно:

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) = \vec{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t (0 < |t - a| < \delta \Rightarrow \|\vec{f}(t) - \vec{A}\| < \varepsilon).$$

Определение непрерывности вектор-функции в точке также переносится практически дословно:

Непрерывность “обычной” функции $\varphi$	Непрерывность вектор-функции $\vec{f}$
$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \varphi(a)$	$\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) = \vec{f}(a)$

Напомним, что производная “обычной” функции вводится формулой

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1.2)$$

<sup>3</sup>См. определение 42, стр.121.

<sup>4</sup>См. формулу (П.5), стр.122.

Запишем определение предела “на языке  $\varepsilon$ - $\delta$ ”:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Delta x \left( |\Delta x| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \right| < \varepsilon \right).$$

Определение производной вектор-функции полностью идентично традиционному определению производной:

$$\vec{\mathbf{f}}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \vec{\mathbf{f}}(t + \Delta t) - \vec{\mathbf{f}}(t) \right),$$

т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Delta t \left( |\Delta t| < \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{1}{\Delta t} \left( \vec{\mathbf{f}}(t + \Delta t) - \vec{\mathbf{f}}(t) \right) - \vec{\mathbf{f}}'(t) \right\| < \varepsilon \right).$$

Можно доказать, что для производной вектор-функции верна формула

$$\frac{d}{dt} \vec{\mathbf{f}}(t) = \frac{d}{dt} \left( x(t) \vec{\mathbf{i}} + y(t) \vec{\mathbf{j}} + z(t) \vec{\mathbf{k}} \right) = x'(t) \vec{\mathbf{i}} + y'(t) \vec{\mathbf{j}} + z'(t) \vec{\mathbf{k}}. \quad (1.3)$$

Полученный вектор является **касательным** вектором к годографу вектор-функции в точке с радиусом-вектором  $x(t) \vec{\mathbf{i}} + y(t) \vec{\mathbf{j}} + z(t) \vec{\mathbf{k}}$ . Касательная прямая к годографу вектор-функции в точке, отвечающей значению переменной  $t_0$ , задается параметрическим уравнением

$$\vec{OM} = \vec{\mathbf{f}}(t_0) + \vec{\mathbf{f}}'(t_0) \cdot (t - t_0). \quad (1.4)$$

## 1.2. Скалярное поле

В начале главы мы наметили направления исследований (см. рис. 1.1, стр.8). К настоящему моменту мы вспомнили материал, относящийся к вектор-функции. Естественным следующим шагом является переход к изучению скалярного поля.

### 1.2.1. Определение и примеры скалярных полей

**Определение 3 (упрощенное).** Пусть  $U$  — линейное пространство геометрических векторов<sup>1</sup> и  $D \subseteq U$ . Тогда **скалярным полем** на множестве  $D$  называется любая функция  $f : D \mapsto \mathbb{R}$ , то есть функция, каждому вектору из  $D$  ставящая в соответствие действительное число.

<sup>1</sup>То есть  $U$  — множество радиусов-векторов, концы которых лежат либо на прямой, проходящей через начало координат, либо на плоскости, также проходящей через начало координат, либо  $U$  — множество всех радиусов-векторов точек трехмерного пространства.

**Определение 4 (общее).** Пусть  $U$  — линейное<sup>2</sup> пространство над полем  $K$  и  $D \subseteq U$ . Тогда **скалярным полем** на множестве  $D$  называется любая функция  $f : D \mapsto K$ .

В каком направлении развивать теорию скалярного поля? Во-первых, нам следует рассмотреть примеры скалярных полей. Во-вторых, следует перенести на скалярное поле важнейшие понятия математического анализа: предел, непрерывность, дифференцируемость<sup>3</sup>. В-третьих, можно выделить некоторые типы скалярных полей, наиболее интересные для изучения. В-четвертых, можно ввести дополнительные конструкции, облегчающие восприятие информации и изучение объекта. В-пятых, наиболее важным является направление, связанное с использованием координатного метода. Координатный метод буквально перевернул геометрию. Это имеет весьма веские объективные причины [9, с.82-84, с.233], обсуждение которых выходит за рамки нашей работы. Поэтому *одна из основных наших задач при введении нового “объекта” векторного анализа состоит в определении способа задания этого “объекта с помощью координат”*. Разумеется, можно предложить и другие направления исследований.

Определения предела и непрерывности скалярного поля практически без изменений переносятся с определений для “обычной” функции, т.е. для действительнзначной функции действительнзначного аргумента. Обобщая равенство (1.1), стр.10, получаем  $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \varphi(\vec{r}) = A \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \vec{r} \ (0 < \|\vec{r} - \vec{r}_0\| < \delta \Rightarrow |\varphi(\vec{r}) - A| < \varepsilon).$$

Непрерывность скалярного поля также обобщается без проблем: скалярное поле является непрерывным в точке с радиусом-вектором  $\vec{r}_0$ , если  $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0)$ .

А вот определение производной для скалярного поля обобщить традиционным способом не удастся, так как приращение аргумента является вектором, и поэтому не может оказаться в знаменателе [см. формулу (1.2), стр.10]. Поэтому вводится две конструкции дифференциальных операций. Так называемая “производная по направлению” является прямым обобщением классического

<sup>2</sup>На самом деле аффинное, но это понятие выходит за рамки втузовского курса алгебры.

<sup>3</sup>Применить стратегию обогащения модели, см. раздел П.4, стр.123.

определения производной. Но помимо производной по направлению вводится еще одна дифференциальная характеристика — градиент. Парадоксально, но этот аналог производной вводится с помощью интеграла! Вместе с тем вычисление его координатным методом осуществляется с помощью дифференциальных преобразований, как мы увидим ниже.

Градиент будет введен ниже, в разделе 2.4.2, стр.50, сейчас мы рассмотрим производную по направлению.

Напомним, что нам не удалось непосредственным образом перенести определение производной на скалярное поле, поскольку в формуле (1.2), стр.10, знаменатель не может быть вектором. Для разрешения возникшей проблемной ситуации применим стратегию поиска аналогии<sup>4</sup>. В первую очередь нам следует установить связь с другими математическими теориями, имеющими богатый исследовательский аппарат.

Видимо, нам следует на время изменить направление исследований. Среди намеченных нами направлений очень перспективным является подготовка к применению координатного метода. Рассмотрим важнейший из *стандартных способов задания* скалярного поля — задание с помощью координат. Скалярное поле отображает *точки пространства* (или радиусы-векторы этих точек) во множество чисел. Точка и вектор определяются своими координатами. Поэтому скалярное поле с помощью координат можно определить формулой вида

$$f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \Phi(x; y; z), \quad (1.5)$$

где  $\Phi(x; y; z)$  — **обобщенное алгебраическое выражение** от переменных  $x; y; z$  (**терм**), т.е. математическое выражение, состоящее из указанных переменных, обозначений элементарных функций, алгебраических операций, скобок и других вспомогательных символов, принимающее числовое значение при задании конкретных числовых значений переменных. Примерами обобщенных алгебраических выражений являются выражения  $x^2 + y^2$ ,  $x \cos y^2$ . Выражение  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  не является обобщенным алгебраическим выражением, поскольку при задании значений переменных мы получаем логическое значение (“истина” или “ложь”). Формула (1.5) устанавливает соответствие между скалярными полями и функциями нескольких переменных, так

<sup>4</sup>Подробнее об исследовательских стратегиях см. раздел П.4, стр.123.

как обобщенным алгебраическим выражением<sup>5</sup>  $\Phi(x; y; z)$  задается функция нескольких переменных.

Вернемся к проблеме переноса понятия производной функции на скалярное поле. Напомним, что главной проблемой к настоящему времени является тот факт, что в знаменателе формулы (1.2), стр.10, не может находиться вектор. Но подобная ситуация встречалась и в теории функций нескольких переменных. Так мы вышли из затруднения введением понятия “частная производная”. При этом мы позволяли изменяться только одной из переменных, фиксируя значения остальных переменных. Геометрически это означает дифференцирование по направлению одной из координатных осей. Используя эту аналогию, можно для скалярного поля предложить построить аналог производной, используя следующую идею: фиксируя *направление* приращения вектора, изменять будем только длину этого приращения. В итоге получаем следующее определение.

**Определение 5.** Если  $\varphi$  — скалярное поле,  $\vec{\Gamma}$  — ненулевой вектор, то *производной по направлению  $\vec{\Gamma}$  в точке с радиусом-вектором  $\vec{r}$*  называется число  $\frac{d\varphi}{d\vec{\Gamma}}$ , определяемое равенством

$$\frac{d\varphi}{d\vec{\Gamma}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{r} + t\vec{\Gamma}) - \varphi(\vec{r})}{t|\vec{\Gamma}|}. \quad (1.6)$$

**Пример 1.** Задать с помощью координат скалярное поле, каждому вектору плоскости ставящее в соответствие длину этого вектора.

**Решение.** Для того чтобы применять координатные методы, надо *иметь систему координат*. Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат  $Oxy$ ,  $\vec{i}$  — направляющий орт оси абсцисс  $Ox$ ,  $\vec{j}$  — направляющий единичный вектор оси ординат  $Oy$ . Мы будем пользоваться алгоритмом составления уравнений<sup>6</sup>, представленным в разделе П.3, стр.122 (в теории моделирования [9] данная задача является стандартной). *Что надо найти?* Скалярное поле. *Как запишем ответ?* Выражением. Введем переменные, для чего возьмем произвольную точку на плоскости, обозначим буквами координаты ее радиус-вектора:  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . *Составим уравнение*, для чего двумя способами запишем значение функции  $f$  на радиусе-векторе  $\vec{r}$ :  $f(\vec{r}) = |\vec{r}|$  (с одной стороны, это значение обозначается

<sup>5</sup>В логике носящее стандартное название *терм*.

<sup>6</sup>Подробнее об алгоритме составления уравнений см. [8, 9, 11]

через  $f(\vec{r})$ , с другой стороны, действие функции  $f$  на ее аргумент оговорено в условии примера). Следовательно,

$$f(x\vec{i} + y\vec{j}) = |x\vec{i} + y\vec{j}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Скалярные поля находят широкое применение в физике и технических науках. С помощью скалярного поля описываются распределение температур по некоторому объему, распределение концентрации вещества в неоднородной среде.

### 1.2.2. Линии (поверхности) уровня

В намеченной нами программе действий один из пунктов связан с обогащением понятийного аппарата теории, введением новых понятий.

Для этого можно применить стратегию приоритетного изучения экстремальных ситуаций. В данном случае можно изучить множество точек, в которых поле принимает максимальное или минимальное значение. Условия экстремальности значений можно получить при помощи результатов теории функций нескольких переменных. В качестве развития идеи изучения экстремальных значений поля можно предложить изучение множества точек, в которых поле принимает некоторое фиксированное значение (не обязательно экстремальное). Такой подход позволил “визуализировать” представляемую информацию о поле, подключить геометрическое мышление.

**Определение 6.** Если  $f(\vec{r})$  — скалярное поле, определенное на подмножестве  $D$  плоскости  $U_2$  или соответственно пространства  $U_3$  геометрических векторов, то для любого числа  $C$  множество точек

$$\left\{ M \mid f(\vec{OM}) = C, \quad \vec{OM} \in D \right\}$$

называется **линией уровня  $C$**  или соответственно **поверхностью уровня  $C$**  скалярного поля  $f$ .

Например, знакомые всем *изотермы* на карте погоды являются линиями уровня скалярного поля температур на земной поверхности (эта часть поверхности при этом считается плоской).

Для скалярного поля из примера 1, стр.14, линии уровня  $C$  поля  $f(\vec{r}) = |\vec{r}|$  представляют собой для положительного  $C$  окружности радиусом  $\sqrt{C}$ , при  $C = 0$  — это начало координат, при отрицательном  $C$  линии уровня  $C$  поля  $f(\vec{r}) = |\vec{r}|$  являются пустым множеством.

### 1.3. Векторное поле

Из объектов исследования, намеченных в начале главы, к настоящему моменту остались неизученными только векторные поля (см. рис. 1.1, стр.8).

#### 1.3.1. Определение и примеры векторных полей

**Определение 7 (упрощенное).** Пусть  $U$  — линейное пространство геометрических векторов<sup>1</sup>,  $V \subseteq U$ . Тогда **векторным полем** называется любая функция  $\vec{a} : V \mapsto U$ , то есть функция, каждому вектору из  $V$  ставящая в соответствие вектор из  $U$ .

**Определение 8 (общее).** Пусть  $U$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $V \subseteq U$ . Тогда **векторным полем** в пространстве  $U$  называется любая функция  $\vec{a} : V \mapsto U$ .

Необычное обозначение для функции —  $\vec{a}$  — вызвано тем обстоятельством, что значением этой функции является вектор.

В каких направлениях можно развивать исследование? Во-первых, следует рассмотреть примеры векторных полей. Во-вторых, следует выделить некоторые интересные для изучения типы векторных полей<sup>2</sup>. В-третьих, в процессе формирования теории происходит обогащение понятийного аппарата, вводятся новые понятия. В первую очередь следует перенести на векторные поля такие понятия, как “предел”, “непрерывность”, “производная”. Наконец, в-четвертых, как мы отметили выше, главным направлением является применение координатного метода в теории векторного поля.

<sup>1</sup>То есть  $U$  — множество радиусов-векторов, концы которых лежат либо на прямой, проходящей через начало координат, либо на плоскости, также проходящей через начало координат, либо  $U$  — множество всех радиусов-векторов точек трехмерного пространства.

<sup>2</sup>В частности, к таким относятся потенциальные и соленоидальные поля, описанные в разделе 3.1, стр.101.

Понятие предела переносится без особых изменений, и равенство (1.1), стр.10, преобразуется к виду  $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \vec{r} (0 < \|\vec{r} - \vec{r}_0\| < \delta \Rightarrow \|\vec{a}(\vec{r}) - \vec{a}_0\| < \varepsilon).$$

Непрерывность также не вызывает проблем и определяется равенством

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0} \vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(\vec{r}_0).$$

Определение производной векторного поля, как и для скалярного поля, не удастся перенести столь же непосредственно, причем по той же причине: приращение аргумента есть вектор, на него “нельзя делить”. В векторном анализе вводится два дифференциальных преобразования: дивергенция и ротор, о которых мы будем говорить ниже. Парадоксально, что вводятся они с помощью интегрирования и предельного перехода. Но, оказывается, в координатной форме результат этих преобразований может быть выражен через дифференциальные операции.

В векторном анализе основой вычислительного аппарата является координатный метод. Поэтому *стандартным способом задания* векторного поля является задание с помощью координат. В отличие от скалярного поля, для векторного поля не только область определения, но и область значений состоит из векторов. Поэтому надо говорить а) о координатах исходного вектора  $x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ , т.е. вектора из области определения векторного поля; б) координатах значения векторного поля, т.е. значения  $P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$  функции  $\vec{a}$  на элементе  $x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$  из области значений. Координаты  $P, Q, R$  зависят от значений переменных  $x, y, z$ , причем нетрудно понять, что эта зависимость однозначная, т.е.  $P, Q, R$  являются *функциями* от переменных  $x, y, z$ . Таким образом, одним из стандартных способов задания векторного поля является формула вида

$$\vec{a} \left( x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \right) = P(x; y; z) \vec{i} + Q(x; y; z) \vec{j} + R(x; y; z) \vec{k} \quad (1.7)$$

или

$$\vec{a}(\vec{r}) = P(\vec{r}) \vec{i} + Q(\vec{r}) \vec{j} + R(\vec{r}) \vec{k}. \quad (1.8)$$

При этом функции  $P, Q, R$  называются **координатными функциями** поля  $\vec{a}$ .

**Пример 2.** Задать с помощью координат плоское векторное поле  $\vec{w}$  скоростей, если осуществляется вращение вокруг некоторой точки, причем вращательная составляющая обратно пропорциональна расстоянию до центра вращения с коэффициентом 1, а центробежная составляющая вектора скорости равна расстоянию до центра вращения.

**Решение.** Разумеется, начинать решение этой задачи надо с введения системы координат. В данном случае выберем ее так, чтобы ее центр находился в центре вращения. Что надо найти? Векторное поле. Как запишем ответ? Это очень важный вопрос. Векторное поле — это функция. Функцию обычно задают выражением, то есть указывают, как надо преобразовывать аргумент, чтобы получить значение функции. Начнем с аргумента: возьмем произвольную точку, ее радиус-вектор  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$  имеет координаты  $(x, y)$ , его длина  $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Введем переменные. Часть переменных мы уже ввели: это координаты вектора, подставляемого в качестве аргумента искомой функции. Значением искомой функции является вектор. Обозначим координаты буквами: пусть вектор скорости  $\vec{w}$  в этой точке имеет координаты  $(u, v)$ , то есть  $\vec{w} = u\vec{i} + v\vec{j}$ . Составим уравнения. В данном случае мы, в конце концов, выразим  $u, v$  через  $x, y$  (то есть двумя способами будем записывать  $u$  и  $v$ ). Разложим  $\vec{w}$  на вращательную составляющую  $\vec{a}$  (параллельную касательной к окружности радиуса  $|\vec{r}|$ ) и центробежную  $\vec{b}$ . Проще всего найти координаты последней. В самом деле, этот вектор параллелен радиусу-вектору, значит он равен  $-\lambda(x\vec{i} + y\vec{j})$ , где  $\lambda > 0$ . Из условия, что его длина  $|\vec{b}|$  равна  $|\vec{r}|$ , получаем, что  $\lambda = 1$ , то есть  $\vec{b} = -x\vec{i} + (-y)\vec{j}$ .

Теперь займемся вращательной составляющей  $\vec{a} = m\vec{i} + n\vec{j}$ . Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, поэтому  $\vec{r} \cdot \vec{a} = 0$ , то есть  $x \cdot m + y \cdot n = 0$ . Кроме того, по условию  $|\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{r}|}$ , то есть  $m^2 + n^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$ . Из полученной системы уравнений  $\begin{cases} x \cdot m + y \cdot n = 0, \\ m^2 + n^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} \end{cases}$  надо выразить  $m, n$  как функции от  $x, y$ . Таким образом,  $n = -\frac{x}{y} \cdot m$ , поэтому, подставляя  $n$  во второе уравнение системы, получаем  $m^2 + (x/y)^2 \cdot m^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$ . Следовательно,  $m = \frac{y}{x^2 + y^2}$  (знак + перед  $y$  выбрали произвольно, так как направление вращения не задано). Тогда  $n = -\frac{x}{x^2 + y^2}$ , следовательно,  $\vec{a} = \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \vec{i} - \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \vec{j}$ . Таким образом,

$$\vec{w}(x\vec{i} + y\vec{j}) = \vec{a} + \vec{b} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - x\right)\vec{i} + \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} - y\right)\vec{j}.$$

Выясним, в какую сторону осуществляется вращение при нашем выборе знака. Для этого возьмем точку, например, с координатами  $(1, 0)$ , то есть вектор  $\vec{i}$ , подставляя  $\begin{cases} x = 1, \\ y = 0 \end{cases}$  в  $\vec{b} = \frac{y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{-x}{x^2 + y^2}\vec{j}$ , получаем  $\vec{b}(\vec{i}) = -\vec{j}$ . Таким образом, вращение осуществляется по часовой стрелке.

**Пример 3.** Задать с помощью координат плоское векторное поле  $\vec{F}$ , где  $\vec{F}$  — напряженность электрического поля, задаваемого двумя единичными зарядами разных знаков, находящимися на расстоянии 2 друг от друга.

**Решение.** Начать, естественно, надо с введения системы координат. Пусть начало координат находится посередине между зарядами и ось  $Ox$  проходит через эти заряды. Поместим произвольный единичный заряд в точку  $M$  с радиусом-вектором  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , и пусть к заряду, находящемуся в точке  $A$  с координатами  $(1, 0)$ , он притягивается, а от заряда, расположенного в точке  $B$  с координатами  $(-1, 0)$ , — отталкивается.

Тогда заряд в точке  $A$  действует на “измеряющий напряженность” заряд с силой

$$\vec{F}_A = \lambda (\vec{OA} - \vec{OM}) = \lambda (\vec{i} - \vec{OM}),$$

$$\text{где } \lambda = \frac{k}{|\vec{i} - \vec{OM}|^2} = \frac{k}{(1-x)^2 + y^2}.$$

Заряд в точке  $B$  действует на “измеряющий напряженность” заряд с силой  $\vec{F}_B = \mu (\vec{OB} - \vec{OM})$ , где  $\mu = \frac{k}{|-\vec{i} - \vec{OM}|^2} = \frac{k}{(-1-x)^2 + (-y)^2}$ .

Таким образом, искомое поле имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_A + \vec{F}_B = \frac{k}{(1-x)^2 + y^2} ((1-x)\vec{i} - y\vec{j}) + \frac{k}{(1+x)^2 + y^2} ((-1-x)\vec{i} - y\vec{j}) = \\ &= \left( \frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2} - \frac{1+x}{(1+x)^2 + y^2} \right) k\vec{i} - y \left( \frac{1}{(1-x)^2 + y^2} + \frac{1}{(1+x)^2 + y^2} \right) k\vec{j}. \end{aligned}$$

### 1.3.2. Векторные линии

Понятие векторной линии часто применяется для “визуализации” векторного поля. В этом отношении данное понятие можно считать “родственным” понятию линии уровня (поверхности уровня), обычно используемого для наглядного представления скалярного поля.

**Определение 9.** Пусть  $\vec{a}$  ( $\vec{r}$ ) — векторное поле, определенное на плоскости или пространстве  $U$  геометрических векторов. Тогда **векторной линией** поля  $\vec{a}$  называется гладкая линия  $L$  такая, что для каждой ее точки вектор поля в этой точке параллелен линии  $L$ .

Для примера 2, стр. 17, векторные линии поля  $\vec{w}$  представляют собой спирали. Это интуитивно понятно, но как найти эти линии? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Теорема 1 (об уравнении векторной линии).** Для поля

$$\vec{a} \left( x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \right) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

уравнения  $\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$  векторной линии являются частными интегралами системы уравнений

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (1.9)$$

**Доказательство.** Возьмем произвольную точку на векторной линии  $L$ , пусть ее радиус-вектор имеет вид  $x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ . Тогда координаты вектора  $dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$ , касающегося линии  $L$ , с одной стороны, являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} dz = 0.$$

С другой стороны, по определению векторной линии, вектор  $dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$  коллинеарен вектору поля

$$\vec{a} \left( x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \right) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k},$$

то есть, по критерию коллинеарности векторов (см. теорему 18, стр. 114, или таблицу П.1, стр. 118),

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)},$$

что и требовалось доказать.

**Пример 4.** Для поля  $\vec{w}$  из примера 2, стр. 17, найдите векторные линии.

**Решение.** Как мы выяснили,

$$\vec{w} \left( x \vec{i} + y \vec{j} \right) = \left( \frac{y}{x^2 + y^2} - x \right) \vec{i} + \left( -\frac{x}{x^2 + y^2} - y \right) \vec{j}.$$

Составим систему (1.9) (в данном случае она состоит из одного уравнения):

$$\frac{dx}{\frac{y}{x^2 + y^2} - x} = \frac{dy}{-\frac{x}{x^2 + y^2} - y},$$

то есть

$$(x + y(x^2 + y^2)) dx + (y - x(x^2 + y^2)) dy = 0.$$

Сделаем замену переменных  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$ , то есть перейдем в полярную систему координат.

Имеем  $\begin{cases} dx = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi \\ dy = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi \end{cases}$ , что позволяет преобразовать полученное дифференциальное уравнение к виду

$$(\rho \cos \varphi + \rho^3 \sin \varphi) (\cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi) + (\rho \sin \varphi - \rho^3 \cos \varphi) (\sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi) = 0,$$

то есть  $\rho d\rho - \rho^3 d\varphi = 0$ . Это уравнение легко решается:  $\int \frac{d\rho}{\rho^2} = \int d\varphi$ , откуда  $\rho = -\frac{1}{\varphi + C}$ .

Следовательно, с увеличением  $\varphi$  длина  $\rho$  радиуса-вектора точки на векторной линии уменьшается, то есть точка движется по спирали к началу координат, как мы и предполагали. Таким образом, получили параметрическое задание векторных линий:

$$\begin{cases} x = -\frac{\cos \varphi}{\varphi + C}, \\ y = -\frac{\sin \varphi}{\varphi + C}, \end{cases} \quad \text{где } C \in \mathbb{R}.$$

## 1.4. Задачи по теме “Определение скалярного и векторного полей”

Ответы и решения приведены на стр.129.

1) Опишите геометрически и найдите векторные линии поля

$$\vec{a} (x \vec{i} + y \vec{j}) = y \vec{i} + x \vec{j}.$$

2) Скалярное поле  $f$  является **центральный**, то есть  $f(\vec{r}) = \varphi(|\vec{r}|) = \varphi(r)$ , кроме того,  $f(t \vec{i} + t^2 \vec{j}) = t^4 + t^6(2 + t^2)$ . Найдите поле  $f$  и его линии уровня.

3) Векторные линии поля  $\vec{a}$  имеют вид  $y = Cx^2$ , причем для любого ненулевого вектора  $\vec{r}$  имеют место соотношения  $|\vec{a}(\vec{r})| = 1$  и  $\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) > 0$ . Найдите поле  $\vec{a}$ .

## 1.5. Основные результаты первой главы

Введены понятия скалярного и векторного полей.

Стандартным способом задания скалярного поля с помощью системы координат является задание формулой вида (1.5), стр.13. Формула (1.5) устанавливает соответствие между скалярными полями и функциями нескольких

переменных. Равенством (1.6), стр.14, вводится производная скалярного поля по направлению данного вектора. Определено такое важное понятие, как линия уровня или поверхность уровня скалярного поля (см. определение 6, стр.15).

Для векторного поля применяется задание с помощью координатных функций (1.7), стр.17. С помощью определения 9, стр.19, вводится понятие векторной линии, для нахождения уравнения которого используется теорема 1, стр.20.

## Глава 2

# Интегрирование и дифференцирование в векторном анализе

### 2.1. Интеграл по фигуре

Целью данного раздела является обобщение понятия определенного интеграла. Рассмотрим определение определенного интеграла. Обычно сначала вводится определение разбиения отрезка.

**Определение 10.** Назовем разбиением отрезка  $[a; b]$  множество действительных чисел  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  такое, что

$$a = x_0 < x_1 < \dots, x_n = b.$$

Диаметром разбиения  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  называется число

$$D = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} (x_i - x_{i-1}).$$

**Определение 11.** Пусть  $f$  — функция с областью определения  $D(f)$ , где  $[a; b] \subseteq D(f)$ , и существует такое число  $A$ , что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0, \dots, x_n \quad \forall \xi_1 \dots \xi_n \begin{cases} a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \\ x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, \\ \max_{i \in \{1, \dots, n\}} (x_i - x_{i-1}) < \delta \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \left| A - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Тогда число  $A$  называется **определенным интегралом** от функции  $f$  по отрезку  $[a; b]$ .

Мы хотим обобщить понятие интеграла на случай, когда интегрирование осуществляется по множеству  $M$ , отличному от подмножества числовой прямой. С этой целью выделим основные моменты в приведенных выше определениях. **Во-первых**, мы ввели понятие *разбиения отрезка*. Разбиение в представленном выше виде применимо только в случае, когда множество, по которому производится интегрирование, является отрезком. Самым важным в определении разбиения является тот факт, что различные “отрезочки”  $[x_{i-1}; x_i]$  могут пересекаться только по пустому множеству или по одной точке. Если некоторые из “отрезочков” заменить на интервалы или полуинтервалы, то нетрудно сделать так, чтобы различные отрезки, интервалы и полуинтервалы не пересекались, но их объединение все равно давало бы весь отрезок. Например, разбиению  $\{2; 2, 6; 3; 3, 7; 4\}$  отрезка  $[2; 4]$  можно сопоставить множество

$$T = \{[2; 2, 6]; (2, 6; 3); [3; 3, 7]; (3, 7; 4)\},$$

причем различные элементы множества  $T$  пересекаются по пустому множеству и

$$[2; 2, 6] \cup (2, 6; 3) \cup [3; 3, 7] \cup (3, 7; 4) = [2; 4].$$

Этому же разбиению можно было сопоставить множество

$$T' = \{[2; 2, 6); [2, 6; 3); [3; 3, 7); [3, 7; 4]\}$$

с теми же особенностями: различные его элементы не пересекаются и объединение всех элементов из  $T'$  совпадает с  $[2; 4]$ .

Нашей целью является обобщение интегрирования по отрезку на интегрирование по множеству  $M$ , отличному от подмножества числовой прямой. Видимо, удобнее будет считать разбиением множество таких подмножеств  $M_i$  множества  $M$ , что, во-первых, их объединение совпадает с  $M$  и, во-вторых, различные элементы из  $T$  попарно не пересекаются (т.е. пересечения различных элементов из  $T$  являются пустыми). Теперь мы будем понимать под разбиением отрезка  $[2; 4]$  не множество чисел  $\{2; 2, 6; 3; 3, 7; 4\}$ , а описанные выше множества  $T$ ,  $T'$  и т.п.

**Во-вторых**, мы ввели понятие диаметра разбиения как максимума длин “отрезочков”  $[x_{i-1}; x_i]$ . Аналогичное понятие вводится и для других множеств. Для этого нам следует каким-то образом определить “величину” множества. Одним из полезных вариантов является понятие *диаметра множества*.

**Определение 12.** Для множества  $M$  **диаметром множества** называется точная верхняя грань расстояний между точками этого множества. Диаметр множества  $M$  обозначается через  $\text{diam } M$ .

К сожалению, слово “диаметр” в литературе используется в двух различных смыслах: как *диаметр множества* [5, с.120] и как *диаметр разбиения* [17, с.156] (хотя разбиение мы рассматриваем тоже как множество). Но в ситуациях, с которыми мы столкнемся, из контекста ясно, в каком смысле используется термин “диаметр”.

Другим полезным примером формализации понятия “величина множества” является *мера*, например площадь, объем и др. Поэтому мы будем рассматривать некоторую функцию  $\mu$  с неотрицательными значениями на элементах из множества  $T$  (где в качестве  $\mu$  может выступать длина отрезка, площадь плоской фигуры, объем тела и др.).

Реализация этой идеи в представленном виде наталкивается на некоторые трудности. Ясно, что функцию  $\mu$  надо определять не только на элементах из конкретного разбиения  $T$ , но и на других подмножествах из  $M$ . Однако в некоторых разбиениях упомянутого выше отрезка [2; 4] могут быть элементы, для которых понятие длины не определено. Примером такого разбиения является двухэлементное множество  $\{A; B\}$ , где  $A$  — множество всех рациональных чисел из отрезка [2; 4],  $B$  — множество всех иррациональных чисел из отрезка [2; 4]. Имеем  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cup B = [2; 4]$  (т.е.  $\{A; B\}$  является разбиением отрезка [2; 4]), однако у нас не определена длина множеств  $A$  и  $B$ . Поэтому надо быть готовыми к тому, что функция  $\mu$  определена не на всех элементах из множества подмножеств множества  $M$ .

С учетом этих обстоятельств получаем, например<sup>1</sup>, следующую конструкцию.

**Определение 13.** *Разбиением* множества  $M$  называется такое конечное множество  $T$ , состоящее из некоторых подмножеств множества  $M$ , что

$$M = \bigcup_{M_i \in T} M_i, \quad \text{причем} \quad (M_i \neq M_j \Rightarrow M_i \cap M_j = \emptyset). \quad (2.2)$$

<sup>1</sup>В принципе, можно привести другие конструкции — как равносильные данной, так и отличные от нее.

На рис. 2.1 изображены три варианта разбиения круга:

$$\begin{aligned} \text{а) } T &= \{M_1; M_2; M_3; \dots; M_{28}\}, & \text{б) } T' &= \{M'_1; M'_2; M'_3; \dots; M'_{16}\}, \\ \text{в) } T'' &= \{M''_1; M''_2; M''_3; \dots; M''_8\}. \end{aligned}$$

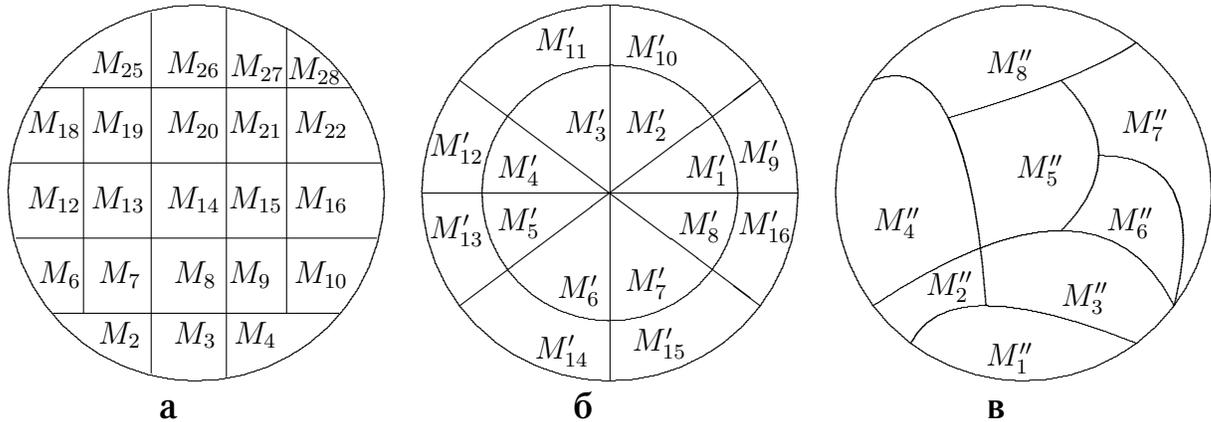


Рис. 2.1. К понятию “разбиение”, определение 13.

**Определение 14.** Разбиение  $T$  множества  $M$  назовем *измельчением* разбиения  $T'$  множества  $M$ , если для любого множества  $t'$  из  $T'$  найдутся такие элементы  $t_1; \dots; t_k$  из  $T$ , что  $t' = t_1 \cup \dots \cup t_k$ .

Например, на рис. 2.7, стр.37, изображены два разбиения одной и той же плоской области:

$$T = \{M_1; M_2; M_3; M_4\}, \quad T' = \{M'_1; M'_2; \dots; M'_9\},$$

причем разбиение  $T'$  является измельчением разбиения  $T$ . Аналогичная ситуация для разбиений поверхности изображена на рис. 2.8, стр.38.

В соответствии с намеченным нами планом (пункт “во-вторых”), мы должны обобщить понятие “максимальная длина отрезка” для случая произвольной фигуры. Сначала нам надо обобщить понятие “длины отрезка”, введя понятие, формализующее понятие “величина фигуры”. Выделяя наиболее важные особенности характеристики “величина фигуры”, мы определим понятие “меры”.

**Определение 15.** Пусть  $\mu$  — функция, область определения которой включается во множество всех подмножеств множества  $M$  и которая обладает следующими свойствами:

1) для любого  $X \in D(\mu)$  имеем  $\mu(X) \in [0; +\infty)$ , причем  $\mu(X) = 0$  тогда и только тогда, когда  $X = \emptyset$ ;

2) если  $\{X; Y\} \subseteq D(\mu)$  и  $X \cap Y = \emptyset$ , то<sup>2</sup>  $(X \cup Y) \in D(\mu)$  и  $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$ .

Тогда  $\mu$  называется **мерой**<sup>3</sup> на множестве  $D(\mu)$ .

Примерами меры являются длина, площадь, объем.

**Определение 16.** Назовем множество  $M$  **фигурой** (относительно функции  $\mu$ ) тогда и только тогда, когда для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое разбиение  $T$  множества  $M$ , что, во-первых,  $T \subseteq D(\mu)$  (т.е. на всех элементах разбиения определено значение функции  $\mu$ ), и, во-вторых,  $\forall \varepsilon > 0 \exists T \in \mathcal{T} \text{ diam}(T) < \varepsilon$ .

Если  $M = [0; 1]$  и  $\mu[x; y] = y - x$ , то в качестве примера множества  $\Phi$ , которое не является фигурой, можно взять подмножество всех чисел из отрезка  $[0; 1]$ , являющихся рациональными числами.

**Определение 17.** Пусть функция  $f$  определена на фигуре  $M$ , значения функции  $f$  являются действительными числами:  $f: M \mapsto \mathbb{R}$  и существует такое число  $A$ , что

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T \in \mathcal{T} \text{ diam}(T) < \delta \Rightarrow \\ & \Rightarrow \forall M_i \in T \quad \forall P_i \in (M_i \cap N) \quad \left| A - \sum_{M_i \in T} f(P_i) \mu(M_i) \right| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда число  $A$  называется **значением интеграла** от функции  $f$  по фигуре  $M$  или **интегралом** по фигуре  $M$ . При этом  $f$  называется **подынтегральной функцией**.

### 2.1.1. В каком направлении развивать исследование?

Наверное, этот вопрос для вас непривычен, но он является совершенно естественным для исследователя. Можно предложить несколько направлений исследования.

<sup>2</sup>В определении меры Лебега это свойство распространяют на случай бесконечного (счетного) числа подмножеств.

<sup>3</sup>Точнее, **конечно-аддитивной мерой**.

Во-первых, следует рассмотреть различные примеры конкретных типов интегралов по фигуре, помимо уже известного вам определенного интеграла.

Во-вторых, следует изучить свойства интегралов по фигуре. Видимо, естественным будет за основу взять свойства определенного интеграла и попытаться адаптировать их для рассматриваемого общего случая.

В-третьих, следует разработать методы вычисления интегралов по фигуре. Казалось бы, формула (2.3), стр.27, дает способ вычисления значения интеграла, но для практического использования этот способ малопригоден (хотя и лежит в основе некоторых методов приближенного численного вычисления). Разумеется, хотелось бы получить процедуры, сравнимые по трудоемкости с формулой Ньютона-Лейбница и с такими методами вычисления интеграла, как интегрирование “по частям” или замена переменной и др. Понятно, что алгоритма вычисления значения интеграла в общем случае ожидать не следует, поскольку даже использование формулы Ньютона-Лейбница наталкивается на такую трудность, как возможная неэлементарность первообразной от подынтегральной функции.

В-четвертых, интересно посмотреть, что принесет нам применение результатов создаваемой теории к изучению скалярных и векторных полей.

В результате этой работы мы определим линейные (криволинейные) интегралы первого и второго рода и поверхностные интегралы первого и второго рода. Если учесть уже изученные вами двойные и тройные интегралы, получаем довольно пеструю картину, в которой можно запутаться. Поэтому мы предлагаем структурировать систему уже известных вам интегралов и тех интегралов, которые мы будем рассматривать в этой главе, в виде графа, изображенного на рис. 2.2.

### 2.1.2. Линейные интегралы

Общепринятыми являются два обобщения понятия определенного интеграла, называемые линейными или криволинейными интегралами. Сначала рассмотрим линейный интеграл первого рода.

**Определение 18.** Пусть  $M$  — кусочно-гладкая линия и область определения функции  $f$  включает в себя линию  $M$ . Разбиение  $T$  линии  $M$

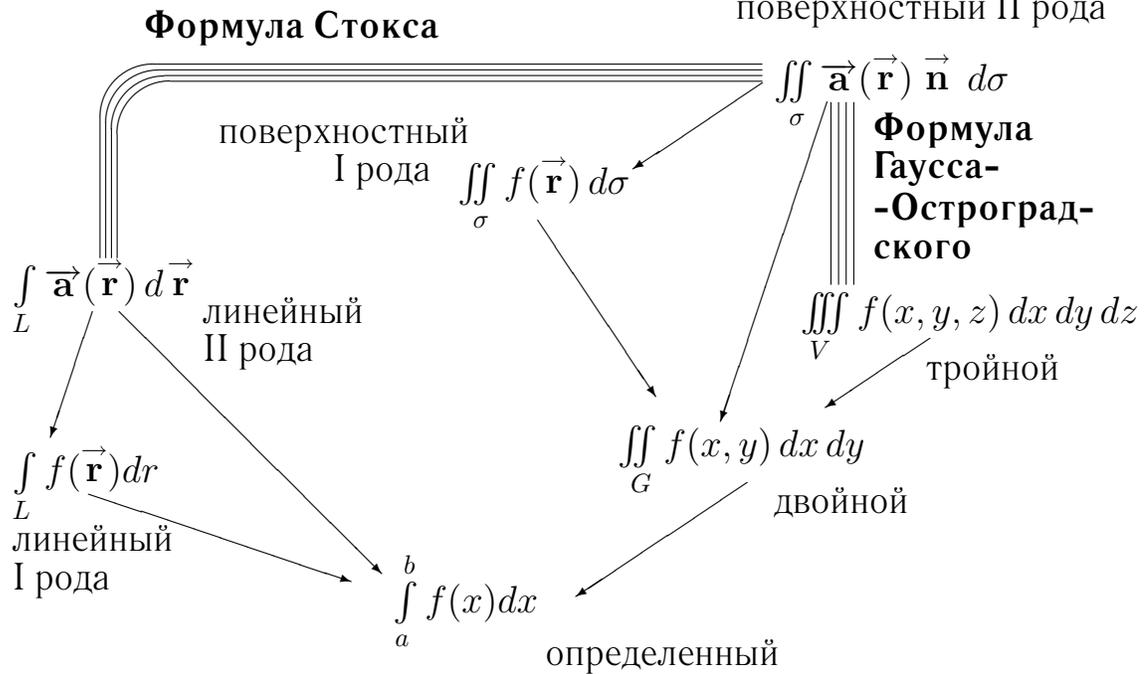


Рис. 2.2. Интегралы, применяемые в векторном анализе (стрелки на схеме от интеграла типа  $A$  к интегралу типа  $B$  означают, что вычисление интегралов типа  $A$  можно свести к вычислению интегралов типа  $B$ )

состоит из участков  $M_i$  линии  $M$  (рис. 2.3,а) (принадлежит ли конец линии  $M_i$  самой линии  $M_i$  или линиям  $M_{i-1}, M_{i+1}$ , для нас в данный момент несущественно). Положим  $\mu(M_i)$  равным длине линии  $M_i$ . Интеграл, определяемый в этом случае формулой (2.3), стр.27, обозначаемый обычно через  $\int_M f(\vec{r}) dl$  или через  $\int_M f(\vec{r}) dr$ , называется **линейным** (иногда — **криволинейным**) **интегралом первого рода** от функции  $f$ .

Часто в выражении для линейного интеграла подынтегральную функцию  $f$  задают не как функцию от радиуса-вектора  $\vec{r}$ , а в виде выражения  $\varphi(x; y)$  или  $\varphi(x; y; z)$  от координат вектора  $\vec{r}$ , т.е. предполагается, что  $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ .

Из определения линейного (криволинейного) интеграла первого рода следует, что, например, для ситуации, изображенной на рис.2.3,а,

$$\int_M f(\vec{r}) dr \approx \sum_{i=1}^8 f(P_i) \cdot \mu(M_i),$$

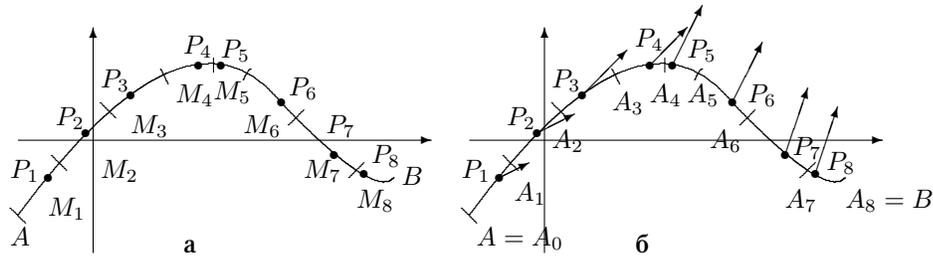


Рис. 2.3. К определению линейных интегралов. **а** — иллюстрация к определению линейного (криволинейного) интеграла первого рода; **б** — иллюстрация к определению линейного (криволинейного) интеграла второго рода.

где  $\mu(M_i)$  — длина линии  $\sphericalcap A_{i-1}A_i$ , при этом  $\mu(M_i) \approx \left| \overrightarrow{A_{i-1}A_i} \right|$ .

Линия  $M_i$  представляет собой настолько малую часть линии  $M$ , что ее можно считать отрезком прямой (пренебрегая при вычислении длины в формуле (2.3) бесконечно малыми более высокого порядка, чем  $\text{diam}(T)$ ).

**Пример 5.** Проволока, толщиной которой можно пренебречь, свернута в виде окружности диаметром 1 м. На этой окружности фиксирована точка  $A$ . Если в этой окружности взять дугу  $BC$  малой длины  $\Delta L$ , то масса проволоки, составляющей дугу  $BC$ , с точностью до бесконечно малых порядка, большего  $\Delta L$ , равна квадрату числа  $\rho + 1$ , где  $\rho$  — расстояние от дуги  $BC$  до точки  $A$ , (рис. 2.4,а). Представить в виде интеграла массу всей проволоки, свернутой в окружность.

**Решение.** Введем систему координат: начало координат поместим в точку  $A$ , ось абсцисс пусть будет проходить через центр окружности (см. рис. 2.4,б). Тогда масса проволоки определяется выражением

$$\int_L \left( \sqrt{x^2 + y^2} + 1 \right)^2 dr. \quad (2.4)$$

Вычислим приближенно значение этого интеграла с помощью формулы (2.3), стр. 27, используя разбиение, изображенное на рис. 2.4,б. Координаты точек  $A_i$ ,  $P_i$  и значение подынтегральной функции в точках  $P_i$  представлены в

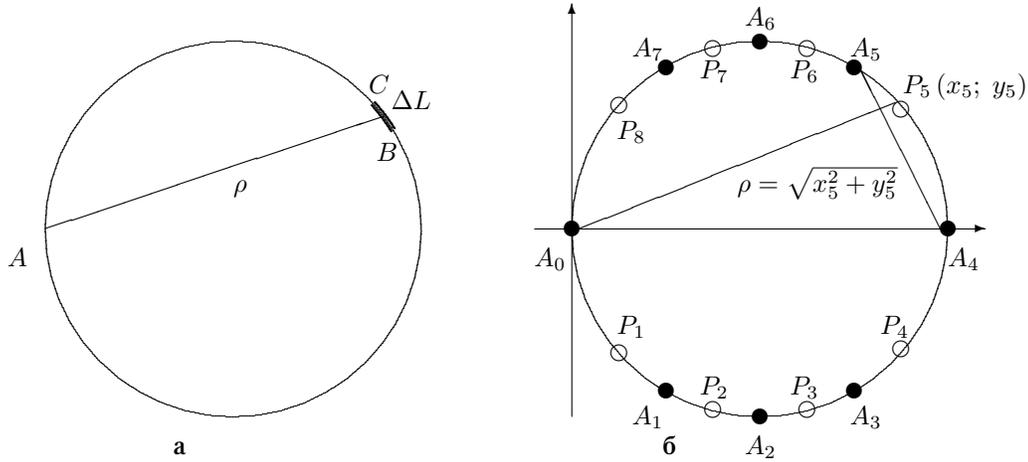


Рис. 2.4. К примеру 5: а — к вычислению массы дуги CD; б — изображены одно из разбиений и иллюстрация к вычислению слагаемого  $f(P_5)\mu(M_5)$  суммы (2.3), стр.27

таблице.

$A_i(\alpha_i; \beta_i)$								
	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$
$\alpha_i$	0	0.25	0.5	0.75	1	0.75	0.5	0.25
$\beta_i$	0	-0.433	-0.5	-0.433	0	0.433	0.5	0.433
$P_i(x_i; y_i)$								
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$
$x_i$	0.125	0.375	0.625	0.875	0.875	0.625	0.375	0.125
$y_i$	-0.331	-0.484	-0.484	-0.331	0.331	0.484	0.484	0.331
$(\sqrt{x_i^2 + y_i^2} + 1)^2$	0.354	0.612	0.791	0.935	3.746	3.206	2.6	1.832

По формуле (2.3), стр.27, имеем, используя данные из таблицы,

$$\int_L (\sqrt{x^2 + y^2} + 1)^2 dr \approx \sum_{i=1}^8 \left( \sqrt{x_i^2 + y_i^2} + 1 \right)^2 \cdot \mu(\cap A_{i-1}A_i) \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^8 \left( \sqrt{x_i^2 + y_i^2} + 1 \right)^2 \cdot |A_{i-1}A_i| \approx 5,299.$$

Пример 5 решен. Способы вычисления значения таких интегралов мы рассмотрим ниже, в разделе 2.10, стр.87. После этого вы сможете самостоятельно-

но аналитически вычислить значение этого интеграла. Проверить результаты вычислений можно в ответе к задаче 3, стр.94.

С помощью определения 18, стр.28, вводится линейный интеграл от скалярного поля. Вместе с тем широкое применение в физике и науках, использующих ее достижения, получила конструкция, называемая линейным интегралом второго рода. Отличия от линейного интеграла первого рода обусловлены тем, что линейный интеграл второго рода вычисляется от векторного поля.

**Определение 19.** Пусть  $M$  — гладкая линия и для каждой точки  $P$  линии  $M$  определено направление на касательной этой линии в точке  $P$ , т.е. определен вектор  $\vec{T}$  ( $\vec{OP}$ ) единичной длины, направленный по касательной к линии  $M$ . Будем говорить, что гладкая линия  $M$  является **ориентированной**, если векторное поле  $\vec{T}$ , заданное на линии  $M$ , является непрерывным на  $M$ . При этом векторное поле  $\vec{T}$  будем называть **ориентацией** линии  $M$ .

Рассмотрим следующий пример. Пусть в каждой точке  $P$  линии  $M$  на рис. 2.3,б определено значение вектора силы  $\vec{F}(P)$ , т.е. определено векторное поле  $\vec{F}$ . Требуется найти работу силы  $\vec{F}$  при перемещении материальной точки по линии  $M$  от точки  $A_0$  к точке  $B$  (в случае, изображенном на рис. 2.3,б, имеем  $B = A_8$ ). Ориентацию на линии  $AB$  выберем естественным образом, чтобы для любой точки  $P$  из линии  $A_i A_{i+1}$  угол между векторами  $\vec{n}(P)$  и  $\vec{A_i A_{i+1}}$  был острым. Разбиение  $T$  выберем так, чтобы в различных точках линии  $M_i$  вектор поля  $\vec{F}$  принимал приблизительно одно и то же значение. Будем считать это значение равным  $\vec{F}(P_i)$ . Отбрасывая бесконечно малые более высокого порядка, чем  $\text{diam}(T)$ , можно считать, что линии  $M_i$  представляют собой отрезки прямой. Задавая на каждом из этих отрезков  $M_i$  направление от точки  $A_{i-1}$  к точке  $A_i$ , получаем вектор, который обозначим через  $\vec{M}_i$ . Тогда (пренебрегая бесконечно малыми более высокого порядка, чем  $\text{diam}(T)$ ) можно считать, что работа по перемещению точки по линии  $M_i$  равна  $\vec{M}_i \cdot \vec{F}(P_i) \approx \mu(M_i) \cdot \left| \vec{F}(P_i) \right| \cdot \cos \widehat{\vec{M}_i \vec{F}(P_i)}$ .

Таким образом, в формуле (2.3), стр.27, имеем, что  $f(P_i) \mu(M_i) = \vec{M}_i \cdot \vec{F}(P_i)$ , т.е.  $f(P_i)$  есть скалярное произведение вектора  $\vec{M}_i$  на орт вектора  $\vec{F}(P_i)$ . По-

лучающийся интеграл обозначается через (приведены наиболее распространенные обозначения)

$$\int_M \vec{F}(\vec{r}) d\vec{l} = \int_M \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (2.5)$$

и называется **линейным** (иногда — **криволинейным**) **интегралом второго рода** от векторного поля  $\vec{F}$ .

Линейный интеграл второго рода по замкнутой ориентированной линии называется **циркуляцией** поля по этой линии. Для обозначения циркуляции обычно используется знак  $\oint$ , т.е. циркуляцию поля  $\vec{a}$  по замкнутой линии  $L$  можно записать как  $\oint_L \vec{a} d\vec{r}$ .

Место линейного интеграла второго рода в системе интегралов, применяемых в векторном анализе, изображено на рис. 2.2, стр.29.

**Пример 6.** Проволока, толщиной которой можно пренебречь, свернута в виде полуокружности  $AB$  диаметром 5 м. На эту проволоку надета гибкая трубка, диаметром которой также можно пренебречь. Поток увлекает трубку вдоль отрезка  $CD$  проволоки с силой, численно равной скалярному произведению вектора скорости  $\vec{F}$  на вектор  $\vec{CD}$  (рис. 2.5,а). Вектор скорости потока в каждой точке плоскости направлен в сторону точки  $A$ , и его длина равна 1. Представить в виде интеграла величину силы, сдвигающей трубку по дуге проволоки  $AB$ .

**Решение.** Введем систему координат, например, следующим образом: начало координат поместим в точку  $A$ , ось абсцис пусть будет проходить через центр окружности (рис.2.5,б). Тогда вектор поля  $\vec{F}$  в точке  $M(x; y)$  коллинеарен радиусу-вектору точки  $M$ , т.е. вектору  $\vec{r}(M) = \overrightarrow{AM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , откуда (учитывая противоположность векторов  $\vec{F}(M)$  и  $\vec{r}(M)$ )  $\vec{F}(M) = -\alpha\vec{r}(M) = -\alpha x\vec{i} - \alpha y\vec{j}$ , где  $\alpha > 0$ . По условию на длину вектора  $\vec{F}(M)$  получаем

$$1 = \sqrt{(-\alpha x)^2 + (-\alpha y)^2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Отсюда  $\vec{F}(M) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j}$ . Следовательно, в силу  $d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy$ , искомое значение силы можно представить следующим

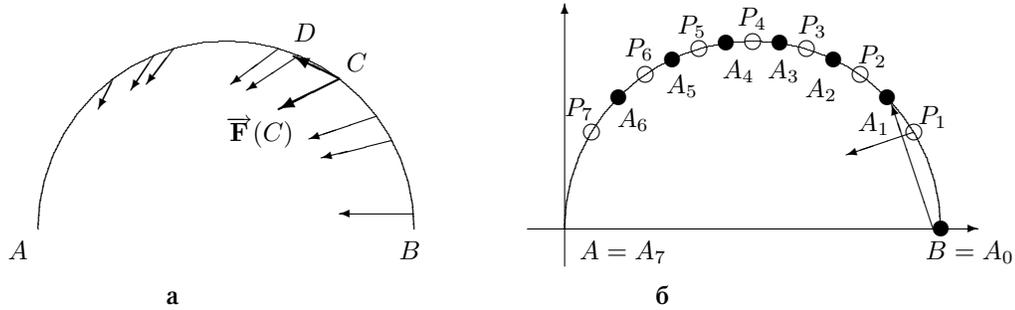


Рис. 2.5. К примеру 6: **а** — вектора поля в различных точках линии; **б** — одно из разбиений линии и вектор скорости потока в точке  $P_1$

линейным интегралом второго рода:

$$\int_L \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} \right) d\vec{r} = - \int_L \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (2.6)$$

Вычислим приближенно значение этого интеграла с помощью формулы (2.3), стр.27, используя разбиение, изображенное на рис.2.5,б. Координаты точек  $A_i, P_i$  и значение подынтегральной функции в точках  $P_i$  представлены в таблице.

$A_i(\alpha_i; \beta_i)$								
	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$
$\alpha_i$	5	4.286	3.571	2.857	2.143	1.429	0.714	0
$\beta_i$	0	1.75	2.259	2.474	2.474	2.259	1.75	0
$\overrightarrow{A_i A_{i+1}}(\gamma_i; \delta_i)$								
$\gamma_i$	-0.71	-0.71	-0.71	-0.71	-0.71	-0.71	-0.71	-
$\delta_i$	1.75	0.509	0.216	0	-0.22	-0.51	-1.75	-
$P_i(x_i; y_i)$								
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$
$x_i$	4.643	3.929	3.214	2.5	1.786	1.071	0.357	-
$y_i$	1.288	2.052	2.396	2.5	2.396	2.052	1.288	-
$\vec{F}(\overrightarrow{OP_i}) = U_i \vec{i} + V_i \vec{j}$								
$U_i$	-0.964	-0.886	-0.802	-0.707	-0.598	-0.463	-0.2673	-
$V_i$	-0.267	-0.463	-0.598	-0.707	-0.802	-0.886	-0.9636	-

По формуле (2.3), стр.27, имеем, используя данные из таблицы,

$$\begin{aligned} \int_L \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} \right) d\vec{r} &\approx \sum_{i=1}^7 \overrightarrow{A_i A_{i+1}} \cdot \vec{F}(\overrightarrow{OP_i}) = \\ &= \sum_{i=1}^7 (\gamma_i \vec{i} + \delta_i \vec{j}) (U_i \vec{i} + V_i \vec{j}) = \sum_{i=1}^7 (\gamma_i U_i + \delta_i V_i) \approx 4,826. \end{aligned}$$

Пример 6 решен. Способы вычисления линейного интеграла второго рода мы рассмотрим в разделе 2.10, стр.87, после чего вы сможете самостоятельно вычислить интеграл в формуле (2.6). В случае возникновения затруднений можно посмотреть решение задачи 4, стр.94.

Отметим следующие важные обстоятельства.

**Во-первых**, оба названия *линейный интеграл* и *криволинейный интеграл* не являются корректными. В самом деле слово “линейный” в названии интеграла вызывает естественную ассоциацию с понятием линейной функции и, в частности, со свойством линейности интеграла, которое не имеет прямого отношения к определению линейных интегралов первого и второго рода. Слово “криволинейный” снимает эту проблему<sup>4</sup>, но порождает другую: линия  $M$  может быть, например, отрезком прямой.

**Во-вторых**, значение линейного интеграла второго рода зависит не только от поля  $\vec{F}$  и линии  $M$ , но и от того, какое именно направление выбрано на этой линии, т.е. в каком именно порядке перечисляются точки  $A_0, A_1, \dots$  на рис. 2.3, стр.30,б. Например, если бы мы взяли в качестве  $A_0$  точку  $B$ , в качестве  $A_1$  — точку, обозначенную на рис. 2.3, стр.30,б, как  $A_7$  и т.д., заканчивая точкой  $A$  в качестве  $A_8$ , то значение интеграла получило бы противоположный знак по сравнению в вариантом, изображенным на этом рисунке.

**В-третьих**, определенный интеграл можно рассматривать как частный случай линейного интеграла первого рода и интеграла второго рода. В обоих случаях мы будем считать, что линия  $M$  — это отрезок  $[a; b]$  оси абсцисс. Будем считать, что значение скалярного поля в точке  $x$  на этой оси определено выражением  $f(x)$  и отождествим радиус-вектор  $\vec{r}(x) = x \vec{i}$  точки  $x$  с самой

<sup>4</sup>Если не учитывать сленгового смысла слова “кривой” как “обладающий искаженным свойством”.

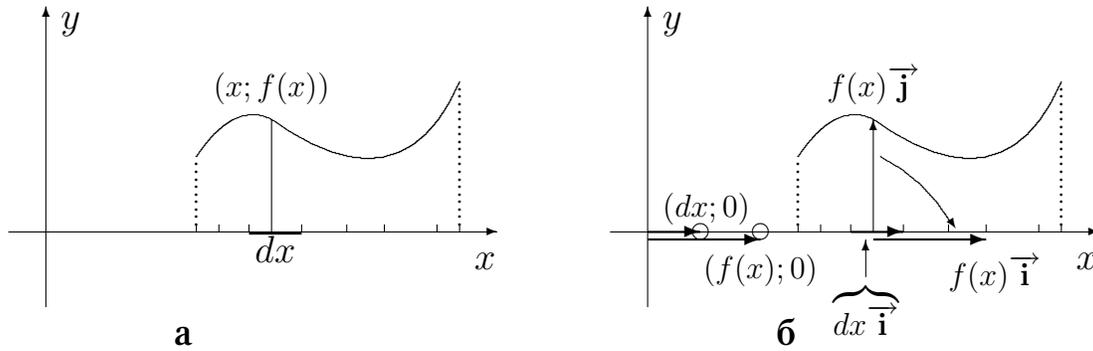


Рис. 2.6. Определенный интеграл как линейный интеграл второго рода

точкой  $x$ . Тогда

$$\int_M f(x) dx = \int_M f(\vec{r}) dr.$$

Определенный интеграл в последней формуле можно воспринимать и как линейный интеграл второго рода от векторного поля  $\vec{F}(x\vec{i}) = f(x)\vec{i}$ : принимая  $d\vec{r} = dx\vec{i}$ , получаем

$$\int_M f(x) dx = \int_M (f(x)\vec{i})(dx\vec{i}).$$

Последнюю конструкцию проиллюстрируем графически (рис. 2.6). Идея состоит в интерпретации рис. 2.6,а и выражения  $f(x) dx$  как значения скалярного произведения коллинеарных векторов с длинами  $f(x)$  и  $dx$ . Воспользуемся естественными графическими ассоциациями: значение функции  $f(x)$  и график функции должны ассоциироваться с вертикальным отрезком с концами в точках  $[x; 0]$  и  $[x; f(x)]$ . Естественно этому отрезку поставить в соответствие вектор  $f(x)\vec{j}$ . Однако векторы  $dx\vec{i}$  и  $f(x)\vec{j}$  ортогональны, поэтому их скалярное произведение равно 0. Напрашивается развернуть один из векторов на  $\pi/2$ , получаем, например, рис. 2.6,б.

На этом рисунке мы перенесли векторы  $f(x)\vec{i}$  и  $dx\vec{i}$  в начало координат, чтобы напомнить геометрическую интерпретацию координат вектора: *координаты вектора — это координаты конца вектора, равного исходному, выходящему из начала координат*. Точки, координаты которых равны координатам векторов  $f(x)\vec{i}$  и  $dx\vec{i}$ , мы обозначили “кружком” о.

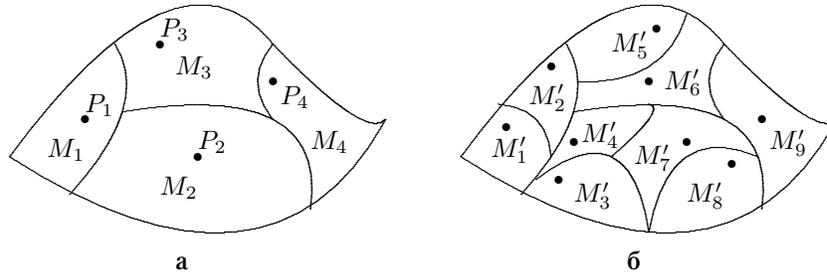


Рис. 2.7. К определению двойного интеграла (предполагается, что разбиение, соответствующее **б**, представляет собой измельчение разбиения, соответствующего **а**)

### 2.1.3. Кратные и поверхностные интегралы

#### Двойной и тройной интегралы

Пусть ограниченное подмножество  $M$  плоскости  $xOy$  включается в область определения функции  $f$ . Если в формуле (2.3), стр.27 под  $\mu(M_i)$  будем понимать площадь фигуры  $M_i$  (рис. 2.7), то такой интеграл по фигуре  $M$  называется **двойным интегралом**, обозначаемым через

$$\iint_M f(x; y) dx dy.$$

Аналогичным образом определяется **тройной интеграл**. В этом случае предполагается, что ограниченное подмножество  $M$  пространства  $Oxyz$  включается в область определения функции  $f$  и под  $\mu(M_i)$  в формуле (2.3), стр.27, понимается объем тела  $M_i$ . Тройной интеграл обозначается через

$$\iiint_M f(x; y; z) dx dy dz.$$

В рамках нашей работы эти интегралы подробно не рассматриваются. Вычисление этих интегралов, как правило, осуществляется с помощью перехода к кратным интегралам, т.е. определенным интегралам, у которых подынтегральная функция представляется в виде интеграла (точнее, интеграла от параметра с переменными пределами) [15, 17].

#### Поверхностные интегралы

Пусть область определения функции  $f$  включает в себя ограниченную поверхность  $M$  (рис. 2.8). Если в формуле (2.3), стр.27, в качестве  $\mu(M_i)$  взять

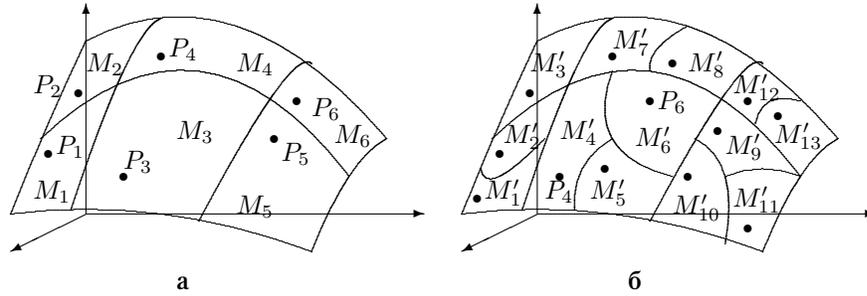


Рис. 2.8. К определению поверхностных интегралов (предполагается, что разбиение, изображенное на б, является измельчением разбиения, соответствующего а)

площадь поверхности  $M_i$ , то интеграл по фигуре  $M$  называется **поверхностным интегралом первого рода**. Обычно поверхностный интеграл первого рода по поверхности  $\sigma$  от подынтегральной функции  $f$  обозначается через

$$\iint_{\sigma} f(\vec{r}) d\sigma. \quad (2.7)$$

Здесь под  $d\sigma$  понимается площадь элемента поверхности. На практике обычно  $f$  задают как функцию не от вектора, а от координат этого вектора.

Рис. 2.2, стр.29, помогает уяснить место поверхностного интеграла первого рода в системе интегралов, применяемых в векторном анализе.

**Пример 7.** Жестяная труба диаметром 20 мм расположена вертикально. Горизонтально летящий снаряд калибра 20 мм попал в эту трубу, причем ось снаряда прошла по касательной к поверхности трубы (рис.2.9,а). Скорость снаряда была столь высока, что края вырванной части трубы практически не загнуты, а отрезаны ровно по обводу снаряда. Горизонтальная плоскость  $\Pi$  проходит через ось полета снаряда. Представить в виде интеграла уменьшение статического момента верхней половины трубы (той половины, которая расположена выше плоскости  $\Pi$ ) относительно плоскости  $\Pi$ .

**Решение.** Статический момент материальной точки относительно плоскости  $\Pi$  равен  $(m \cdot d)$ , где  $m$  — масса материальной точки,  $d$  — расстояние от точки до плоскости  $\Pi$ . Уменьшение статического момента равно статическому моменту верхней половины оторванной части трубы (рис.2.9,б). Введем систему координат, например, так, как это показано на рисунке: ось  $Ox$

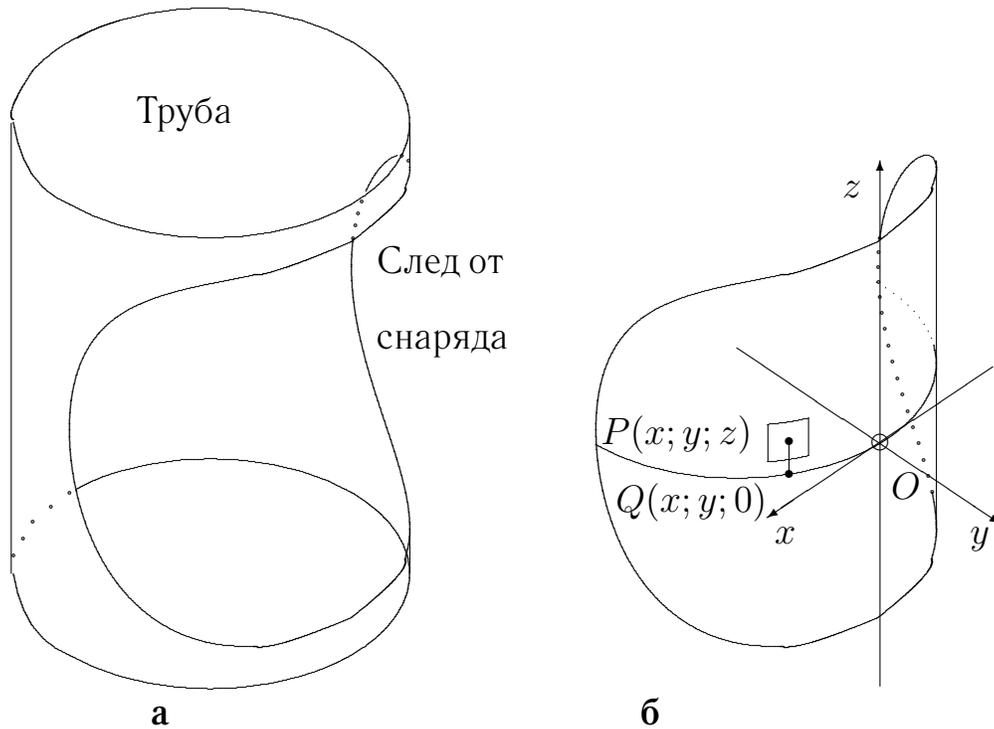


Рис. 2.9. К примеру 7: **а** — отрезок трубы с частью, вырванной снарядом; **б** — часть трубы, вырванная снарядом, и система координат

пусть совпадает с осью снаряда, ось  $Oz$  направим по образующей цилиндра через точку  $O$  касания поверхности с осью абсцисс, положительное направление оси  $Oy$  — от оси цилиндра в сторону начала координат (рис. 2.9, б). Плоскость  $\Pi$  совпадает с координатной плоскостью  $xOy$ . Используя методы аналитической геометрии [12, 8], получаем, что поверхность цилиндра описывается уравнением  $x^2 + (y + 5)^2 = 5^2$ , траектории точек движущегося снаряда заполняют внутренность цилиндра с уравнением  $y^2 + z^2 = 10^2$ . Расстояние от точки  $P(x; y; z)$  до плоскости  $xOy$  равно  $|z|$ . Поэтому статический момент верхней половины оторванной части  $\sigma$  трубы относительно плоскости  $xOy$  можно представить в виде поверхностного интеграла (2.7) первого рода:

$$\iint_{\sigma} f(x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) d\sigma = \iint_{\sigma} z d\sigma. \quad (2.8)$$

Вычисление линейных и поверхностных интегралов рассматривается в разделе 2.10, стр.87. Вычисление непосредственно этого интеграла составляет тре-

бование задачи 5, стр.94.

Поверхностный интеграл первого рода определяется как интеграл от *скалярного поля*. Для линейных интегралов вслед за линейным интегралом первого рода мы определили интеграл второго рода как интеграл от векторного поля. Аналогичным образом мы поступим для поверхностных интегралов и сейчас определим поверхностный интеграл второго рода как специфический интеграл от *векторного поля*.

Будем говорить, что гладкая поверхность  $\sigma$  является **ориентированной**, если для каждой точки  $P$  поверхности  $M$  определено направление на нормали к поверхности  $\sigma$  в точке  $P$ , т.е. определен вектор  $\vec{n}$  единичной длины, направленный по нормали к поверхности  $\sigma$ . Таким образом, на поверхности  $\sigma$  задано векторное поле  $\vec{n}$ , которое мы будем называть **ориентацией** поверхности  $M$ . Отметим, что обычно требуется непрерывность этой ориентации, но не все гладкие поверхности допускают непрерывную ориентацию. Примером поверхности, не допускающей непрерывную ориентацию, является односторонняя поверхность, например так называемый лист Мебиуса (рис. 2.10). Для границы замкнутой поверхности стандартной считается ориентация, при которой нормальный вектор проходит изнутри наружу тела, ограниченного этой поверхностью.



Рис. 2.10. Лист Мебиуса

Рассмотрим следующий пример: поток газа проходит через мембрану, причем в каждой точке  $P$  определен вектор  $\vec{F}(P)$  скорости потока в точке  $P$

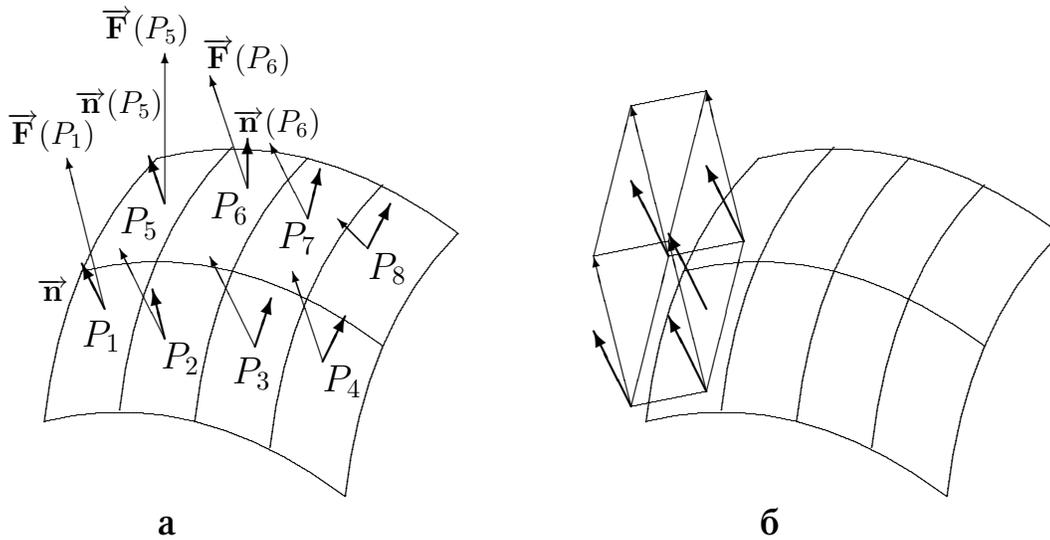


Рис. 2.11. К определению поверхностного интеграла второго рода

(рис.2.11,а). Таким образом, мы имеем векторное поле  $F$  (если отождествить точку  $P$  с ее радиусом-вектором  $\vec{OP}$ ). Требуется определить количество газа, прошедшего за мембрану за единицу времени. При использовании интегрирования естественной является процедура, результат которой изображен на рис.2.11,а: возьмем какое-либо разбиение  $T$  поверхности<sup>5</sup>  $\sigma$  на части  $\sigma_i$ , в каждой из этих частей возьмем точку  $P_i$  и вычислим значение вектора  $\vec{F}(P_i)$ . В качестве размера  $\mu(\sigma_i)$  поверхности  $M_i$  возьмем площадь этой поверхности. Каждую поверхность  $\sigma_i$ , вообще говоря криволинейную, заменим на примерно<sup>6</sup> равную ей по площади плоскую “чешуйку” (см. рис.2.11,б). Осталось понять, как найти объем газа, прошедшего через эту плоскую “чешуйку” в предположении, что вектор скорости потока в любой точке этой “чешуйки” постоянный и равен  $\vec{F}(P_i)$ . Нет необходимости считать, что “чешуйка” имеет “правильную” форму, например, что она является многоугольником. Из рис.2.12 видно, что искомый объем равен произведению площади поверхности  $\sigma'$  и проекции вектора  $\vec{F}$  на вектор  $\vec{n}$ , перпендикулярный к поверхности  $\sigma'$  (нормальный к плоскости, в которой лежит эта поверхность):  $\Delta V = \mu(\sigma') \cdot \text{пр}_{\vec{n}}(\vec{F})$ . Будем считать, что модуль вектора  $\vec{n}$  равен 1, то-

<sup>5</sup>Моделирующую исходную мембрану.<sup>6</sup>С точностью до бесконечно малых порядка, меньшего диаметра  $\text{diam}(T)$  разбиения  $T$ .

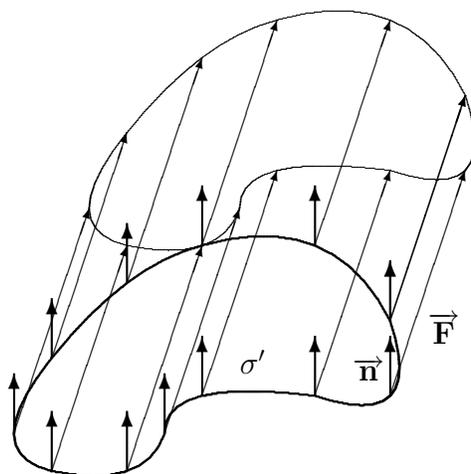


Рис. 2.12. К определению поверхностного интеграла второго рода

гда  $\text{pr}_{\vec{n}}(\vec{F}) = \vec{n} \cdot \vec{F}$ . Интеграл, полученный по формуле (2.3), стр.27 (где под  $M_i$  понимаются  $\sigma_i$ ), называется **поверхностным интегралом второго рода** и обозначается через

$$\iint_{\sigma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{n} d\sigma. \quad (2.9)$$

**Замечание 1.** Значение поверхностного интеграла второго рода зависит не только от поля  $\vec{F}$  и поверхности  $\sigma$ , но и от того, в какую именно сторону направлен вектор  $\vec{n}$ .

Место поверхностного интеграла второго рода в системе интегралов, применяемых в векторном анализе, можно понять из рис. 2.2, стр.29.

## 2.2. Задачи по теме “Типы интегралов, применяемых в теории поля”

Ответы приведены на стр.131.

1) Определите, от каких векторных полей вычисляются следующие криволинейные интегралы второго рода:

$$\text{а) } \int_L y dx - x dy; \quad \text{б) } \int_L x^2 dy + y^2 dz; \quad \text{в) } \int_L \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

2) Определите, от каких векторных полей вычисляются следующие поверхностные интегралы второго рода (здесь  $\vec{n} d\sigma = d\sigma_{yz} \vec{i} + d\sigma_{xz} \vec{j} + d\sigma_{xy} \vec{k}$ ):

$$\text{а) } \int_{\sigma} z d\sigma_{xy}; \quad \text{б) } \int_{\sigma} (x+y) d\sigma_{xy} - (x^2+y^2) d\sigma_{xz}.$$

3) Определите, к какому типу относится каждый из интегралов, укажите, от какого скалярного или векторного поля берется этот интеграл:

$$\text{а) } \int_S \sqrt{x^2+y^2} d\sigma; \quad \text{б) } \int_S \sqrt{x^2+y^2} dr; \quad \text{в) } \int_S \sqrt{x^2+y^2} dy; \quad \text{г) } \int_S \sqrt{x^2+y^2} dx dz.$$

### 2.3. Свойства интегралов по фигуре

Многие из основных свойств определенного интеграла остаются справедливыми для интегралов по фигуре и, следовательно, для линейных, кратных и поверхностных интегралов.

В качестве образца возьмем свойства определенного интеграла [7]:

**нечувствительность интеграла к изменениям в отдельных точках:** если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a; b]$  и на отрезке  $[a; b]$  функция  $g$  принимает те же значения, что и функция  $f$ , кроме конечного числа точек отрезка  $[a; b]$ , то есть

$$\exists t_1, t_2, \dots, t_k \in [a; b] \quad \forall x \quad \begin{cases} a \leq x \leq b \\ x \notin \{t_1, \dots, t_k\} \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x),$$

то функция  $g$  интегрируема на  $[a; b]$ , причем<sup>1</sup>  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ ;

**линейность интеграла:** если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на отрезке  $[a; b]$ , то для любых действительных чисел  $\lambda, \mu$  функция  $\lambda f + \mu g$  интегрируема на отрезке  $[a; b]$ , причем

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

(таким образом, функция  $F$  каждой интегрируемой на отрезке  $[a; b]$  функции  $f$ , ставящая в соответствие число  $F(f) = \int_a^b f(x) dx$ , является линейной функцией:

$$F(\lambda f + \mu g) = \lambda F(f) + \mu F(g);$$

<sup>1</sup>Иначе говоря, определенный интеграл "не чувствует" изменения значения функции в отдельной точке.

**теорема о перестановке пределов интегрирования:** перестановка пределов меняет знак

$$\text{интеграла: } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

**аддитивность по отрезку:** если  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ ,  $[a, c]$ ,  $[c, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

**теорема о неотрицательности интеграла от неотрицательной функции:** если  $f$  интегрируема на  $[a; b]$ , где  $a < b$ , и для любого  $x$  из  $[a, b]$  имеет место неравенство  $f(x) \geq 0$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0;$$

**индуцирование неравенства с функций на интегралы:** если  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $[a; b]$ , где  $a < b$  и для любого  $x$  из  $[a, b]$  имеет место неравенство  $f(x) \leq g(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx;$$

**теорема об оценке интеграла:** если  $a < b$  и для любого  $x$  из  $[a, b]$  имеет место неравенство  $m \leq f(x) \leq M$ , то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a);$$

**о модуле интеграла и интеграле от модуля:** если  $a < b$ , то  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ . В общем случае

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx;$$

**теорема о среднем значении:** если  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то на отрезке  $[a, b]$  найдется хотя бы одно такое число  $c$ , что

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Все эти свойства можно обобщить на произвольные интегралы по фигуре.

### 2.3.1. Свойства интегралов по фигуре

**Нечувствительность интеграла к изменениям в отдельных точках.** Если существует интеграл  $I_M(f)$  по фигуре  $M$  от функции  $f$  и функция  $g$  принимает

те же значения, что и функция  $f$ , кроме конечного числа точек из  $M$ , то есть

$$\exists t_1, t_2, \dots, t_k \in M \quad \forall P \quad \begin{cases} P \in M, \\ P \notin \{t_1, \dots, t_k\} \end{cases} \Rightarrow f(\overrightarrow{OP}) = g(\overrightarrow{OP}),$$

то существует интеграл  $I_M(g)$  по фигуре  $M$  от функции  $g$ , причем<sup>2</sup>  $I_M(f) = I_M(g)$ , т.е. совпадают значения интегралов по фигуре  $M$  от функции  $f$  и от функции  $g$ .

**Линейность интеграла.** Если существуют интегралы  $I_M(f)$  и  $I_M(g)$  по фигуре  $M$  от функций  $f$  и  $g$ , то для любых действительных чисел  $\lambda, \mu$  существует интеграл  $I_M(\lambda f + \mu g)$  по фигуре  $M$  от функции  $\lambda f + \mu g$ , причем значение этого интеграла равно  $I_M(\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot I_M(f) + \mu \cdot I_M(g)$ . Таким образом, функция  $I_M$  является линейной функцией.

**Аддитивность по фигуре.** Пусть  $M$  является объединением двух непересекающихся фигур  $M'$  и  $M''$ , т.е.  $\begin{cases} M = M' \cup M'', \\ M' \cap M'' = \emptyset, \end{cases}$  и существуют интегралы  $I_M(f)$ ,  $I_{M'}(f)$ ,  $I_{M''}(f)$  от функции  $f$  по фигурам соответственно  $M$ ,  $M'$  и  $M''$ , то  $I_M(f) = I_{M'}(f) + I_{M''}(f)$ .

### 2.3.2. Свойства, специфические для интегралов первого рода по фигуре

**Неотрицательность интеграла от неотрицательной функции.** Если для любой точки  $P$  из  $M$  имеет место неравенство  $f(P) \geq 0$  и существует интеграл  $I_M(f)$  первого рода от функции  $f$  по фигуре  $M$ , то  $I_M(f) \geq 0$ .

**Индукция неравенства с функций на интегралы.** Если для любой точки  $P$  из  $M$  имеет место неравенство  $f(P) \leq g(P)$  и существуют интегралы  $I_M(f)$  и  $I_M(g)$  первого рода по фигуре  $M$  от функций  $f$  и соответственно  $g$ , то  $I_M(f) \leq I_M(g)$ .

<sup>2</sup>Иначе говоря, интеграл по фигуре  $M$ , как и определенный интеграл, “не чувствует” изменения значения функции в отдельной точке.

**Теорема об оценке интеграла.** Если существует такое число  $S$ , что для любой точки  $P$  из  $M$  имеет место неравенство  $f(P) \leq S$ , и существует интеграл  $I_M(f)$  первого рода по фигуре  $M$  от функции  $f$ , то  $I_M(f) \leq S \cdot \mu(M)$ .

**О модуле интеграла и интеграле от модуля.** Если существуют интегралы  $I_M(f)$  и  $I_M(|f|)$  по фигуре  $M$  от функций  $f$  и  $|f|$ , то  $|I_M(f)| \leq I_M(|f|)$ .

**Теорема о среднем значении.** Пусть множество  $M$  таково, что любые две точки  $A$  и  $B$  из  $M$  можно соединить в  $M$  непрерывной линией  $L$ , т.е.  $L \subseteq M$ . Тогда из того, что существует интеграл  $I_M(f)$  первого рода по фигуре  $M$  от функции  $f$ , непрерывной на  $M$ , следует, что в  $M$  найдется такая точка  $Q$ , что  $I_M(f) = f(Q) \cdot \mu(M)$ .

### 2.3.3. Свойства, специфические для интегралов второго рода по фигуре

**Теорема 2 (об изменении направления интегрирования).** Пусть для векторного поля  $\vec{F}$  существует линейный интеграл  $I_M(\vec{F})$  второго рода по ориентированной линии  $M$  или соответственно поверхностный интеграл  $I_\sigma(\vec{F})$  второго рода по ориентированной поверхности  $\sigma$ . Тогда существует линейный интеграл  $I'_M(\vec{F})$  второго рода по линии  $M$  с противоположной ориентацией и соответственно поверхностный интеграл  $I'_\sigma(\vec{F})$  второго рода по поверхности  $\sigma$  с противоположной ориентацией, причем  $I'_M(\vec{F}) = -I_M(\vec{F})$  и  $I'_\sigma(\vec{F}) = -I_\sigma(\vec{F})$ .

Своеобразной “вариацией на тему аддитивности по фигуре” являются приведенные ниже теоремы о циркуляции по границам разбиения поверхности и о потоке по границам разбиения.

### Теорема 3 (о циркуляции по границам разбиения поверхности).

Пусть  $C(\sigma_0)$  — кусочно-гладкая граница ограниченной гладкой ориентированной поверхности  $\sigma_0$  и  $T = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  — разбиение<sup>3</sup> этой

<sup>3</sup>Понятие “разбиение” описано в определении 13, стр.25.

поверхности, причем граница  $C(\sigma_i)$  любой поверхности  $\sigma_i$  является кусочно-гладкой. Тогда для векторного поля  $\vec{a}$ , непрерывного на  $\sigma_0$ , имеет место равенство

$$\int_{C(\sigma_0)} \vec{a} d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \int_{C(\sigma_i)} \vec{a} d\vec{r}, \quad (2.10)$$

где ориентации контуров  $C(\sigma_i)$  и поверхностей  $\sigma_i$  согласованы стандартным образом<sup>4</sup>.

**Доказательство.** Рассмотрим разбиение поверхности  $\sigma_0$  на две части  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  (рис. 2.13). В самом деле, циркуляция по контуру  $C(\sigma_0)$  отличается от суммы циркуляций по контурам  $C(\sigma_1)$  и  $C(\sigma_2)$  линейными интегралами второго рода по ориентированным линиям  $AB$  и  $BA$ .

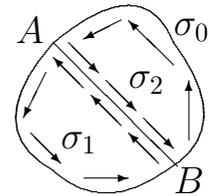


Рис. 2.13

Но интеграл по ориентированной линии  $BA$  и интеграл по ориентированной линии  $AB$ , возникающие при вычислении циркуляций поля  $\vec{a}$  по контурам соответственно  $C(\sigma_1)$  и  $C(\sigma_2)$ , взаимно компенсируются, поскольку они отличаются только знаком. Ясно, что при разбиении поверхности  $\sigma_0$  на большее количество частей ситуация не изменится, и циркуляция по контуру  $C(\sigma_0)$  будет равна сумме циркуляций по контурам  $C(\sigma_1), \dots, C(\sigma_n)$ .

Теорема доказана.

Аналогичным образом можно доказать следующую теорему о потоке по границам разбиения.

**Теорема 4 (о потоке по границам разбиения).** Пусть  $C(\sigma_0)$  — кусочно-гладкая граница ограниченного тела  $V_0$  и  $T = \{V_1, \dots, V_n\}$  — разбиение<sup>5</sup> тела  $V_0$ , причем граница  $\sigma(V_i)$  любого тела  $V_i$  является кусочно-гладкой. Тогда для векторного поля  $\vec{a}$ , непрерывного на  $V_0$ , имеет место равенство

$$\iint_{\sigma(V_0)} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \sum_{i=1}^n \iint_{\sigma(V_i)} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma, \quad (2.11)$$

<sup>4</sup>Т.е. при обходе контура  $C(G_i)$  в положительном направлении поверхность  $G_i$  остается слева.

<sup>5</sup>Понятие “разбиение” описано в определении 13, стр.25.

где ориентации поверхностей  $\sigma(V_i)$  являются стандартными, т.е. нормальный вектор к поверхности  $\sigma(G_i)$  направлен изнутри тела  $V_i$  наружу.

## 2.4. Дифференциальные операции скалярного и векторного полей

В каком направлении продолжить наше исследование? Разумеется, основной задачей является получение методов вычисления рассмотренных типов интегралов: линейных и поверхностных (первого и второго рода). У нас к настоящему моменту имеется достаточно развитый аппарат для получения практически значимых способов вычисления этих интегралов. Но вместе с тем нам следует ознакомиться с некоторыми чрезвычайно эффективными методами вычисления интегралов второго рода (линейных и поверхностных), применяемых для некоторых интегралов, наиболее часто встречающихся в инженерной и исследовательской практике. Для этих методов нам предстоит изучить некоторые новые для нас конструкции.

Какого сорта конструкции нам предстоит изучить? Вспомним, что в математическом анализе изучению теории интегрирования предшествует построение весьма развитого дифференциального исчисления. В векторном анализе мы пока почти не сталкивались с конструкциями, которые можно было бы отнести к “дифференциальному исчислению” (за исключением методов изучения векторной функции скалярного аргумента; кроме того, со значительной натяжкой к “дифференциальному исчислению” можно было бы отнести понятие векторной линии).

Особенностью дифференциальных операций векторного анализа при рассматриваемом подходе является тот факт, что изначально они определяются с помощью интегралов. Эти операции называют *дифференциальными* в силу того, что в координатной форме они могут быть заданы выражениями, использующими частные производные и алгебраические операции. Частные производные вычисляются или от функции, задающей скалярное поле [формула (1.5), стр.13], или от координатных функций векторного поля [формула (1.7), стр.17]. Особо отметим 2 момента:

*определения этих операций будут даны в инвариантной форме, т.е. не зависящей от системы координат;*

в данной работе мы рассмотрим только случай прямоугольной декартовой системы координат.

### 2.4.1. Интеграл с векторным значением

Напомним, что интеграл  $\int_{\Phi} f(\vec{r}) dS$  по фигуре  $\Phi$  с определенной на фигуре  $\Phi$  мерой  $\mu$  определяется равенством

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \Phi_1, \dots, \Phi_n \quad \forall \xi_1 \dots \xi_n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \dots \cup \Phi_n = \Phi, \\ \xi_i \in \Phi_i, \\ \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \text{diam}(\Phi_i) < \delta, \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \Phi_i \cap \left( \bigcup_{j \neq i} \Phi_j \right) = \emptyset \end{array} \right. \Rightarrow \left| A - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \mu(\Phi_i) \right| < \varepsilon. \quad (2.12)$$

В этой формуле рассматривается случай, когда значениями функции  $f$  являются числа, то есть  $E(f) \in \mathbb{R}$ . Однако если в последнем неравенстве абсолютную величину заменить на норму вектора, то получим определение интеграла от функции с векторными значениями:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \Phi_1, \dots, \Phi_n \quad \forall \xi_1 \dots \xi_n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \dots \cup \Phi_n = \Phi, \\ \xi_i \in \Phi_i, \\ \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \text{diam}(\Phi_i) < \delta, \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \Phi_i \cap \left( \bigcup_{j \neq i} \Phi_j \right) = \emptyset \end{array} \right. \Rightarrow \left\| A - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \mu(\Phi_i) \right\| < \varepsilon. \quad (2.13)$$

Для наиболее важного случая, когда  $E(f)$  является подмножеством множества геометрических векторов в силу эквивалентности норм в конечномерном пространстве, получаем, что интегрируемость функции и значение интеграла не зависят от выбора конкретной нормы.

## 2.4.2. Градиент, дивергенция, ротор

### Градиент

Одной из идей построения векторного анализа является идея обобщения математического анализа. Производная вводилась как характеристика для измерения скорости изменения функции. Рассмотрим, каким образом определить “скорость изменения функции” в точке  $M_0$ . Ясно, что эта “скорость” будет вектором. Рассмотрим, например, сферу  $\sigma$  с центром в точке  $M_0$ . Для того чтобы понять, какова скорость изменения функции в направлении прямой  $L$ , проходящей через точку  $M_0$ , возьмем две точки с радиусами-векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , соответствующими точкам пересечения прямой  $L$  со сферой (рис. 2.14). Выберем на сфере окрестности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  этих точек, пусть площадь каждой из

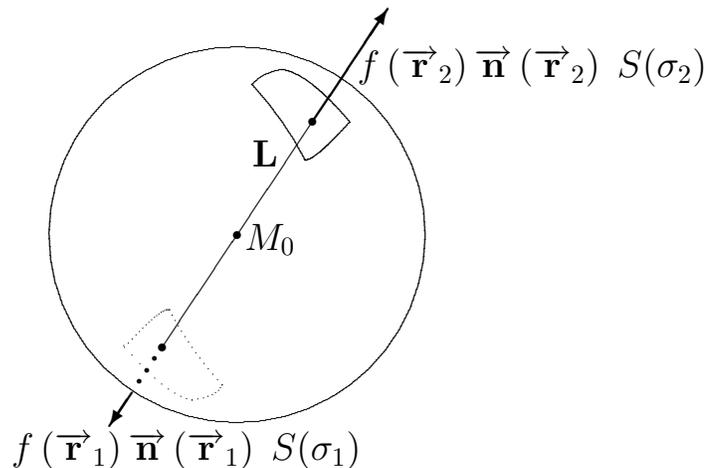


Рис. 2.14. К определению градиента

этих окрестностей равна  $S(\sigma_i)$ . Тогда естественно *изменение*<sup>1</sup> скалярного поля  $f$  в направлении  $L$  определить как (здесь  $\sigma_0 = \sigma_1 \cup \sigma_2$ )

$$f(\vec{r}_2) \vec{n}(\vec{r}_2) S(\sigma_2) - f(\vec{r}_1) \vec{n}(\vec{r}_1) S(\sigma_1) \approx \iint_{\sigma_0} f(\vec{r}) \vec{n} d\sigma.$$

Тогда суммарное изменение поля по сфере  $\sigma$  равно  $\iint_{\sigma} f(\vec{r}) \vec{n} d\sigma$ . Скорость можно определить как предел отношения “изменения” (в описанном смы-

<sup>1</sup>Но пока не *скорость* изменения.

сле) скалярного поля к объему сферы или к ее площади. Так какую же величину оставить в знаменателе: площадь или объем? Ясно, что нам не следует ограничиваться только сферами, необходимо брать поверхности и другой формы. Возьмем две поверхности, ограничивающие тела одного и того же объема с одинаковым диаметром<sup>2</sup>, причем у одной из них поверхность близка к сферической, а у другой — “смятая” поверхность. При этом площадь у второй поверхности будет больше, чем у первой, а вот значение интеграла  $\iint_{\sigma} f(\vec{r}) \vec{n} d\sigma$  может мало измениться. Такая “чувствительность” значе-

ния дроби  $\frac{\iint_{\sigma} f(\vec{r}) \vec{n} d\sigma}{\iint_{\sigma} d\sigma}$  к изменению формы поверхности  $\sigma$  делает эту дробь

неприменимой для определения градиента. Поэтому в определении градиента применяется определение скорости как предела отношения “изменения поля” к *объему* сферы. Итак, получили следующее определение “скорости изменения скалярного поля” в точке.

**Определение 20.** *Градиентом скалярного поля  $f(\vec{r})$  называется векторное поле  $\text{grad} f$ , каждой точке с радиусом-вектором  $\vec{r}$  ставящее в соответствие вектор*

$$\text{grad} f(\vec{r}) = \lim_{\text{diam}(V) \rightarrow 0} \frac{\iint_{\sigma(V)} f(\vec{r}) \vec{n} d\sigma}{\iiint_V dV}, \quad (2.14)$$

где  $V$  — тело<sup>3</sup>, содержащее точку с радиусом-вектором  $\vec{r}$ ;  $\sigma(V)$  — поверхность, ограничивающая область  $V$ ;  $\text{diam}(V)$  — диаметр тела  $V$ .

Отметим, что это определение мы получили как математическую формализацию следующего “физического” определения.

<sup>2</sup>Напомним, что диаметр множества — максимум (точнее, точная верхняя грань, см. определение 41, стр. 121.) расстояний между точками множества.

<sup>3</sup>Т.е. трехмерная односвязная область.

**Определение 21 (“Физическое”).** *Градиент — это вектор, направленный в сторону максимального возрастания поля в данной точке, модуль которого равен максимальной скорости изменения значения поля в окрестности данной точки.*

Оказывается, производная по направлению тесно связана с градиентом функции.

**Теорема 5 (о связи grad с производной по направлению).** *Если  $\varphi$  — скалярное поле и  $\vec{l}$  — ненулевой вектор, то*

$$\frac{d\varphi}{d\vec{l}} = \frac{\text{grad } \varphi \cdot \vec{l}}{|\vec{l}|}. \quad (2.15)$$

**Доказательство.** Построим прямоугольный параллелепипед<sup>4</sup>  $V$  с расположенной внутри точкой с радиусом-вектором  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ , и все грани которого параллельны или перпендикулярны вектору  $\vec{l}$  (рис. 2.15). Пусть  $\sigma(V)$  — по-

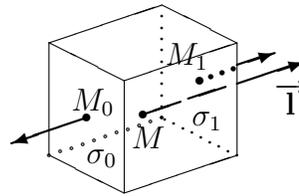


Рис. 2.15. К теореме 5

верхность<sup>5</sup> этого параллелепипеда. Согласно равенству (2.14) из определения градиента имеем

$$\vec{l} \text{ grad } f(\vec{r}) = \lim_{\mu(V) \rightarrow 0} \frac{\vec{l} \iint_{\sigma(V)} f(\vec{r}) \vec{n} d\sigma}{\iiint_V dV} = \lim_{\sigma(V)} \frac{\iint_{\sigma(V)} f(\vec{r}) \vec{l} \cdot \vec{n} d\sigma}{\iiint_V dV}.$$

<sup>4</sup>Обратите внимание:  $V$  — это не объем параллелепипеда, а его идентификатор (имя, обозначение)!

<sup>5</sup>Обратите внимание:  $\sigma(V)$  — это не площадь поверхности, а обозначение (“название”) поверхности, т.е.  $\sigma$  — это не число, а имя поверхности параллелепипеда.

Мы использовали без доказательства тот факт, что

$$\vec{\Gamma} \cdot \iint_{\sigma(V)} f(\vec{r}) \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma(V)} f(\vec{r}) \vec{\Gamma} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

По свойству аддитивности интеграла последний интеграл равен сумме интегралов по граням параллелепипеда  $V$ . Для граней, параллельных вектору  $\vec{\Gamma}$ , соответствующие интегралы равны нулю, так как нормальный к такой грани вектор  $\vec{n}$  ортогонален к вектору  $\vec{\Gamma}$ , поэтому  $\vec{\Gamma} \cdot \vec{n} = 0$ . Значит, обозначая через  $\sigma_0, \sigma_1$  грани, перпендикулярные к вектору  $\vec{\Gamma}$ , получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma(V)} f(\vec{r}) \vec{\Gamma} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{\sigma_0} f(\vec{r}) \vec{\Gamma} \cdot \vec{n} (\overrightarrow{OM_0}) d\sigma + \iint_{\sigma_1} f(\vec{r}) \vec{\Gamma} \cdot \vec{n} (\overrightarrow{OM_1}) d\sigma = \\ &= -|\vec{\Gamma}| \cdot \iint_{\sigma_0} f(\vec{r}) d\sigma + |\vec{\Gamma}| \cdot \iint_{\sigma_1} f(\vec{r}) d\sigma. \end{aligned}$$

По теореме 18, стр.114, — критерию коллинеарности векторов — для некоторого числа  $t$  имеем  $\overrightarrow{M_0M_1} = t \vec{\Gamma}$ , откуда  $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_0} + t \vec{\Gamma}$ . Обозначим через  $S$  площадь грани  $\sigma_0$ , равную площади грани  $\sigma_1$ . Получаем с точностью до бесконечно малых порядка, большего чем  $t$ ,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma(V)} f(\vec{r}) \vec{\Gamma} \cdot \vec{n} d\sigma &= |\vec{\Gamma}| \left( \iint_{\sigma_1} f(\vec{r}) d\sigma - \iint_{\sigma_0} f(\vec{r}) d\sigma \right) \approx \\ &\approx |\vec{\Gamma}| \left( f(\overrightarrow{OM_1}) \cdot S - f(\overrightarrow{OM_0}) \cdot S \right). \end{aligned}$$

Объем параллелепипеда равен произведению площади грани на длину высоты, опущенной на эту грань, поэтому  $\iiint_V dV = S \cdot t \cdot |\vec{\Gamma}|$ . Следовательно,

$$\frac{\vec{\Gamma} \cdot \text{grad}f(\vec{r})}{|\vec{\Gamma}|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\vec{\Gamma}| \cdot S \cdot \left( f(\overrightarrow{OM_0} + t \vec{\Gamma}) - f(\overrightarrow{OM_0}) \right)}{|\vec{\Gamma}| \cdot S \cdot t \cdot |\vec{\Gamma}|}.$$

Поэтому, согласно формуле (1.6), стр.14,

$$\frac{\vec{\Gamma}}{|\vec{\Gamma}|} \cdot \text{grad} f(\vec{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{OM}_0 + t\vec{\Gamma}) - f(\vec{OM}_0)}{t|\vec{\Gamma}|} = \frac{d\varphi}{d\vec{\Gamma}},$$

что и требовалось доказать.

Важным следствием из этой теоремы является следующая теорема.

**Теорема 6 (об ортогональности градиента и линии уровня).** Для любой точки  $M_0$  градиент  $\text{grad} \varphi(\vec{OM}_0)$  ортогонален к линии (или поверхности) уровня поля  $\varphi$ , соответствующей значению поля  $\varphi(\vec{OM}_0)$ .

**Доказательство.** Возьмем какой-либо касательный вектор  $\vec{\Gamma}$  к данной линии (или поверхности) уровня. Для любого малого значения параметра  $t$  обозначим через  $M_t$  точку на поверхности уровня, ближайшую к точке с радиусом-вектором  $(\vec{OM}_0 + t\vec{\Gamma})$ . Вектор  $\vec{\Gamma}$  является касательным к поверхности уровня, поэтому

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\vec{OM}_0 + t\vec{\Gamma} - \vec{OM}_t|}{t} = 0.$$

По определению линии уровня  $\varphi(\vec{OM}_t) = \varphi(\vec{OM}_0)$ . В силу равенства (2.15), стр.52, и равенства (1.6), стр.14, из определения градиента имеем

$$\begin{aligned} \text{grad} \varphi \cdot \vec{\Gamma} &= |\vec{\Gamma}| \cdot \frac{d\varphi}{d\vec{\Gamma}} = |\vec{\Gamma}| \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{OM}_0 + t\vec{\Gamma}) - \varphi(\vec{OM}_0)}{|\vec{\Gamma}|} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{OM}_0 + t\vec{\Gamma}) - \varphi(\vec{OM}_t) + \varphi(\vec{OM}_t) - \varphi(\vec{OM}_0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{OM}_0 + t\vec{\Gamma}) - \varphi(\vec{OM}_t)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\vec{OM}_t) - \varphi(\vec{OM}_0)}{t} = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Какой вопрос является основным в данный момент? В рамках программы исследования в качестве безусловного приоритета мы выделили задачу интерпретации рассматриваемых конструкций в координатной форме.

Имеем

$$\text{grad}f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (\text{grad}f \cdot \vec{i})\vec{i} + (\text{grad}f \cdot \vec{j})\vec{j} + (\text{grad}f \cdot \vec{k})\vec{k}.$$

Поэтому в силу теоремы 5, стр.52, о связи grad с производной по направлению имеем

$$\begin{aligned} \text{grad}f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) &= \frac{\partial f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\partial \vec{i}}\vec{i} + \\ &+ \frac{\partial f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\partial \vec{j}}\vec{j} + \frac{\partial f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\partial \vec{k}}\vec{k} = \\ &= \frac{\partial f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\partial x}\vec{i} + \\ &+ \frac{\partial f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\partial z}\vec{k}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали следующую формулу:

$$\begin{aligned} \text{grad}f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) &= \vec{\nabla}f = \frac{\partial f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\partial x}\vec{i} + \\ &+ \frac{\partial f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\partial z}\vec{k}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$  — “формальный вектор”, правила работы с которым изучаются в разделе 2.6, стр.69.

## Дивергенция

Понятие “скорость изменения” перенести на векторное поле гораздо сложнее, чем для скалярного поля. Стандартными являются две конструкции: дивергенция и ротор. Сейчас мы рассмотрим дивергенцию.

Рассмотрим в качестве примера ситуацию, когда в воздушном потоке сгорит топливо. Рассмотрим векторное поле скоростей воздушного потока. Возьмем тело  $V$ , ограниченное поверхностью  $\sigma$  (рис. 2.16), на котором изображен

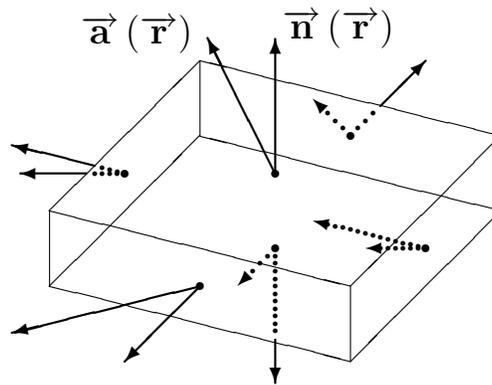


Рис. 2.16. К определению дивергенции.

случай, когда  $V$  является прямоугольным параллелепипедом. При сгорании топлива температура газа повышается, в результате чего при том же давлении он будет занимать больший объем. Таким образом, “количество газа”, входящего внутрь тела  $V$ , превышает “количество газа”, выходящего из него наружу. Это “количество газа” равно  $\iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma$ . Естественно, что если нас интересует “количество” поля, “зародившегося в точке” (или “поглощенного точкой”), то надо взять отношение этого “количества поля” к объему тела  $V$ . В итоге получили следующее определение дивергенции.

**Определение 22.** Дивергенцией векторного поля  $\vec{a}(\vec{r})$  называется<sup>6</sup> скалярная функция точки  $\vec{r}$ , равная

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{\mu(V) \rightarrow 0} \frac{\iint_{\sigma(V)} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma}{\iiint_V dV}, \quad (2.17)$$

где  $V$  — тело, содержащее точку  $\vec{r}$ ;  $\sigma(V)$  — поверхность, ограничивающая область  $V$ ;  $\mu(V)$  — диаметр тела  $V$ .

Применение координатного метода требует получения выражений для представления рассматриваемых объектов. Поэтому нам надо получить формулу для вычисления дивергенции вектора.

<sup>6</sup>См. [5, с.171].

Рассмотрим в качестве области  $V$  параллелепипед с гранями, заданными уравнениями  $x = x_0$ ,  $x = x_0 + \Delta x$ ,  $y = y_0$ ,  $y = y_0 + \Delta y$ ,  $z = z_0$ ,  $z = z_0 + \Delta z$ , где  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  — положительные числа (рис. 2.17). Сначала рассмотрим гра-

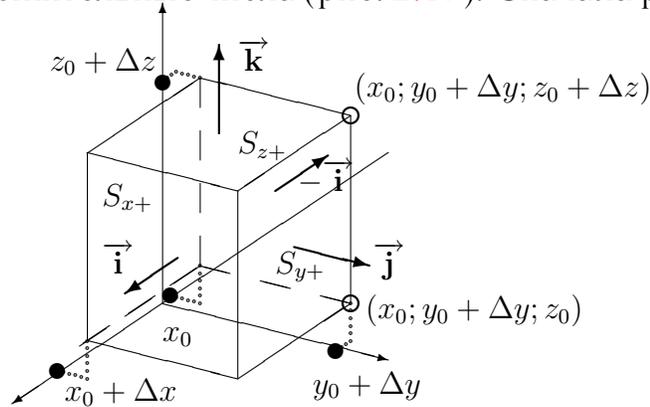


Рис. 2.17. К формулам для вычисления градиента, дивергенции и ротора с помощью координатных функций

ни  $S_{x-}$  и  $S_{x+}$ , лежащие соответственно в плоскостях  $x = x_0$  и  $x = x_0 + \Delta x$ . Нормали к этим плоскостям имеют вид соответственно  $(-\vec{i})$  и  $\vec{i}$ . Рассматриваемый интеграл по объединению этих граней  $S_x = S_{x+} \cup S_{x-}$  можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_{S_x} \vec{a} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= \iint_{S_{x+}} \vec{a} \cdot \vec{n} \, d\sigma + \iint_{S_{x-}} \vec{a} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \\ &= \iint_{S_{x+}} \left( P(x_0 + \Delta x; y; z) \vec{i} + Q(\dots) \vec{j} + R(\dots) \vec{k} \right) \cdot \vec{i} \, dy \, dz + \\ &+ \iint_{S_{x-}} \left( P(x_0; y; z) \vec{i} + Q(x_0; y; z) \vec{j} + R(x_0; y; z) \vec{k} \right) \cdot (-\vec{i}) \, dy \, dz = \\ &= \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} dy \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} (P(x_0 + \Delta x; y; z) - P(x_0; y; z)) \, dz. \end{aligned}$$

По теореме о среднем найдутся такие числа  $\beta, \gamma$ , что  $y_0 \leq \beta \leq y_0 + \Delta y$ ,  $z_0 \leq \gamma \leq z_0 + \Delta z$ . Последний интеграл равен

$$(P(x_0 + \Delta x; \beta; \gamma) - P(x_0; \beta; \gamma)) \Delta y \Delta z.$$

Аналогично для граней  $S_{y+}, S_{y-}, S_{z+}, S_{z-}$ , лежащих на плоскостях соответственно  $y = (y_0 + \Delta y)$ ,  $y = y_0$ ,  $z = (z_0 + \Delta z)$ ,  $z = z_0$ , получаем для некоторых  $\alpha' \in [x_0; x_0 + \Delta x]$ ,  $\gamma' \in [z_0; z_0 + \Delta z]$ ,  $\alpha'' \in [x_0; x_0 + \Delta x]$ ,  $\beta'' \in [y_0; y_0 + \Delta y]$ ,

$$\iint_{S_y} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = (P(\alpha'; y_0 + \Delta y; \gamma') - P(\alpha'; y_0; \gamma')) \Delta x \Delta z,$$

$$\iint_{S_z} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = (P(\alpha''; \beta''; z_0 + \Delta z) - P(\alpha''; \beta''; z_0)) \Delta x \Delta y.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \lim_{\mu(V) \rightarrow 0} \frac{\iint_{S_x} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{S_y} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{S_z} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma}{\iiint_V dV} = \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{P(x_0 + \Delta x; \beta; \gamma) - P(x_0; \beta; \gamma)}{\Delta x} + \\ &+ \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{P(\alpha'; y_0 + \Delta y; \gamma') - P(\alpha'; y_0; \gamma')}{\Delta y} + \\ &+ \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{P(\alpha''; \beta''; z_0 + \Delta z) - P(\alpha''; \beta''; z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что в координатной форме дивергенция определяется формулой

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \operatorname{div} \left( P(\vec{r}) \vec{i} + Q(\vec{r}) \vec{j} + R(\vec{r}) \vec{k} \right) = \\ &= \frac{\partial P(x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})}{\partial x} + \frac{\partial Q(x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})}{\partial y} + \frac{\partial R(x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})}{\partial z} = \\ &= \vec{\nabla} \vec{a} = (\vec{\nabla}, \vec{a}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $\vec{\nabla}$  — “формальный вектор”,  $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ . Правила работы с  $\vec{\nabla}$  изучаются в разделе 2.6, стр.69.

## Ротор

Еще одной локальной характеристикой векторного поля, помимо дивергенции, является ротор векторного поля. Будем считать, что векторное поле есть поле некоторых сил. Например, это может быть поле скоростей потока газа, тогда сила, действующая на тело, возникает из-за того, что этот газовый поток увлекает тело за собой. Нас интересует “закрученность” поля, “завихренность” в данной точке. Эту “завихренность” можно измерять по-разному. Мы рассмотрим две модели ротора. Приятным сюрпризом оказалось, что они приводят к одному и тому же дифференциальному преобразованию поля  $\vec{a}$ . Ясно, что “завихренность” следует измерять величиной, аналогичной моменту вращения. Таким образом, результатом операции “ротор” должен быть вектор, направленный по оси, вокруг которой вращался бы “объект” под воздействием “силового поля”  $\vec{a}$ .

**С одной стороны**, можно считать, что в газовый поток помещено некоторое тело  $V$ , причем оно не может двигаться поступательно, но может вращаться. Пусть  $\sigma$  — поверхность тела  $V$ . Из рис. 2.18,а видно, что элемент  $\Delta\sigma$  поверхности  $\sigma$  увлекается полем с силой, равной по величине  $|\vec{n}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin\varphi \cdot S(\Delta\sigma)$ , где  $S(\Delta\sigma)$  — площадь поверхности  $\Delta\sigma$ . Поэтому естественно считать, что “вращающий момент”, создаваемый полем  $\vec{a}$  на элементе  $\Delta\sigma$  поверхности  $\sigma$ , равен  $\vec{n} \times \vec{a} \Delta\sigma$ . Таким образом, “вращающий момент”, создаваемый полем на поверхности  $\sigma$  тела  $V$ , приблизительно равен сумме “вращающих моментов” по всем элементам разбиения поверхности  $\sigma$ . После перехода к пределу при диаметре разбиения, стремящемся к нулю, получаем  $\iint_{\sigma} \vec{n} \times \vec{a} d\sigma$ . Для того чтобы определить “удельный вращающий момент”, следует разделить последний интеграл то ли на площадь поверхности,

то ли на объем тела  $V$ . Как и в случае с дивергенцией, делить следует на объем, поскольку существует два тела  $V_1, V_2$  одинакового малого объема, с площадью поверхности, отличающейся “в разы”, но при этом для данных тел значения интегралов  $\iint_{\sigma_1} \vec{n} \times \vec{a} d\sigma$  и  $\iint_{\sigma_2} \vec{n} \times \vec{a} d\sigma$  почти не отличаются. Следовательно, в этом случае величина является слишком “чувствительной” к форме поверхности  $\sigma$ , что недопустимо. В итоге мы получаем приведенное ниже определение 23.

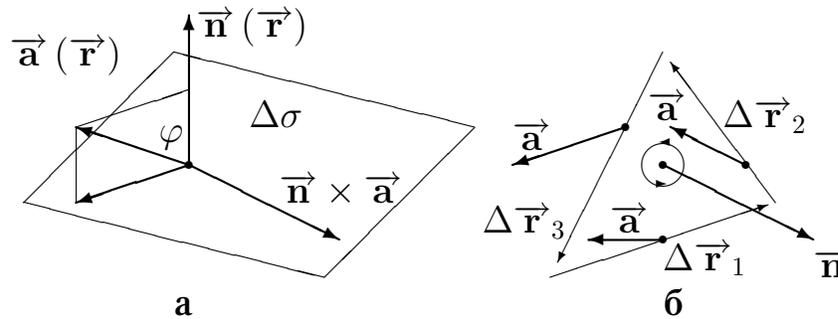


Рис. 2.18. К определению ротора

С другой стороны, можно считать, что полем увлекается не тело, а замкнутый контур (рис. 2.18,б), ограничивающий поверхность, содержащую точку  $M_0$  (нормальный вектор  $\vec{n}$  изображен выходящим из точки  $M_0$ ). Эта ситуация также часто возникает в приложениях векторного поля. Тогда естественным представляется считать, что величина “вращающего момента”, создаваемого полем на контуре, равна циркуляции поля по этому контуру. Понятно, что в этом случае для определения ротора следует взять контур, являющийся границей поверхности  $\sigma$  с фиксированной малой площадью, повернуть его вокруг точки  $M_0$  таким образом, чтобы циркуляция по нему была максимальна. Тогда ротор поля в точке  $M_0$  можно будет определить как вектор, расположенный ортогонально (нормально) к поверхности  $\sigma$  и равный по величине отношению циркуляции векторного поля по этому контуру к площади поверхности  $\sigma$ . Казалось бы, что можно было взять отношение циркуляции к длине контура, но этот способ был бы некорректным. В самом деле, можно сделать контур весьма “извилистым”, существенно увеличив его длину при той же площади ограничиваемой поверхности, при этом циркуляция может мало измениться. Таким образом, отношение циркуляции к длине контура может слишком сильно зависеть от формы контура, что неприемлемо. Поэтому для корректного определения ротора следует рассматривать все-таки отношение циркуляции к площади поверхности, ограничиваемой контуром.

**Примечание.** Тот факт, что рассмотренные “физические определения” (“вращение” тела и “вращение” контура) приводят к равносильным математическим определениям, доказана ниже, в теореме 7, стр.61, о роторе и циркуляции.

**Определение 23.** Ротором векторного поля  $\vec{a}(\vec{r})$  называется [5,

с.171] векторная функция точки  $\vec{r}$ :

$$(\operatorname{rot} \vec{a})(\vec{r}) = \lim_{\mu(V) \rightarrow 0} \frac{\iint_{\sigma(V)} (\vec{n} \times \vec{a}) d\sigma}{\iiint_V dV}, \quad (2.19)$$

где  $V$  — тело<sup>7</sup>, содержащее точку с радиусом-вектором  $\vec{r}$ ;  $\sigma(V)$  — поверхность, ограничивающая область  $V$ ;  $\mu(V)$  — диаметр области  $V$ ;  $\vec{a} \times \vec{b}$  — векторное произведение векторов, интегрирование вектора — по координатное.

**Теорема 7 (о роторе и циркуляции).** Пусть  $\vec{a}$  — векторное поле,  $\sigma$  — гладкая ориентированная поверхность,  $\Gamma(\sigma)$  — ориентированная граница области  $\Gamma$ ,  $\vec{n}_0$  — нормальный вектор к поверхности  $\sigma$  в точке  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ,  $\mu(X)$  — диаметр множества  $X$ , т.е. максимум<sup>8</sup> расстояний между точками множества  $X$ . Тогда

$$\operatorname{rot}(\vec{a}) \cdot \vec{n}_0 = \lim_{\mu(\sigma) \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma(\sigma)} \vec{a} d\vec{r}}{\iint_{\sigma} d\sigma}, \quad (2.20)$$

где предел берется по поверхностям  $\sigma$ , для которых точка  $M_0$  является внутренней<sup>9</sup>.

**Доказательство.** Пренебрегая бесконечно малыми величинами порядка, меньшего чем  $\mu(\sigma)$ , можно считать, что поверхность  $\sigma$  является частью плоскости  $\Pi$ . Гладкий плоский контур можно представить как предел ломаных, все отрезки которых параллельны или перпендикулярны некоторой прямой. Область с границей в виде такой замкнутой ломаной допускает разбиения, состоящие из прямоугольников<sup>10</sup>. Циркуляция по контуру этой области равна

<sup>7</sup>Трехмерная односвязная область.

<sup>8</sup>Вернее, точная верхняя граница.

<sup>9</sup>Т.е. входит в область вместе с некоторой своей окрестностью.

<sup>10</sup>Если разбиение понимается в смысле определения 13, стр.25, то прямоугольниками являются замыкания элементов разбиения. Но можно избежать потребности в замыкании, если

сумме циркуляций по границам прямоугольников из рассматриваемого разбиения поверхности  $\sigma$ , это следует из теоремы 3, стр.46, о циркуляции по границам разбиения поверхности. Поэтому для доказательства нам достаточно рассмотреть случай, когда поверхность  $\sigma$  представляет собой прямоугольник  $ABCD$  в плоскости  $\Pi$  (рис.2.19,а). Введем обозначения:  $AB = CD = \Delta x$ ,  $AD = BC = \Delta y$ .

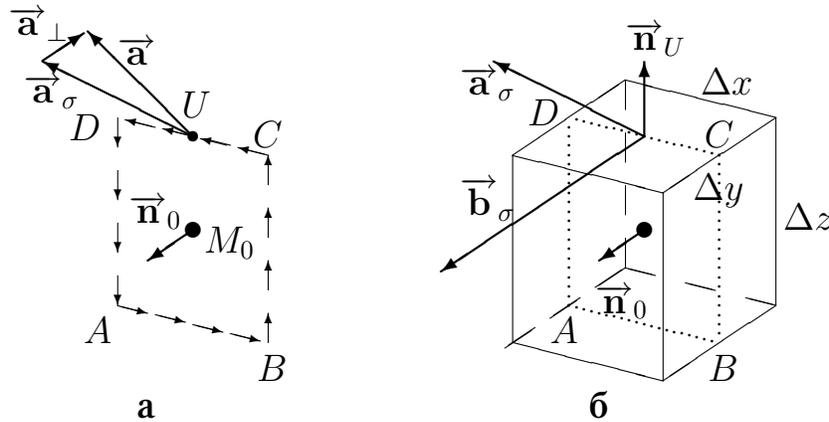


Рис. 2.19. К теореме 7:  $\vec{a}_\sigma$  — проекция векторов  $\vec{a}(U)$  на плоскость  $\sigma$ ;  $\vec{a}_\perp$  — проецирующий вектор

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, поверхность которого включает в себя отрезки  $AB, BC, CD, AD$  и две грани которого параллельны плоскости  $\Pi$  (рис.2.19,а). Пусть расстояние между этими гранями равно  $\Delta z$ . Обозначим через  $\vec{a}_\sigma$  проекцию вектора  $\vec{a}$  на плоскость  $\Pi$  и через  $\vec{a}_\perp$  — соответствующий проецирующий вектор. Таким образом,  $\vec{a} = \vec{a}_\sigma + \vec{a}_\perp$ .

Согласно равенству (2.19), стр.61, из определения ротора выражение в левой части доказываемого равенства (2.20) можно представить в виде

$$\text{rot}(\vec{a}) \cdot \vec{n}_0 = \lim_{\mu(V) \rightarrow 0} \frac{\vec{n}_0 \cdot \iint_{\sigma(V)} (\vec{n} \times \vec{a}) d\sigma}{\iiint_V dV}. \quad (2.21)$$

Используя свойство аддитивности (оно справедливо и для рассматриваемого в определении 13, стр.25, ослабить требование на пересечение различных элементов  $X$  и  $Y$  разбиения  $T$  и допустить, чтобы пересечение  $X \cap Y$  могло содержать элементы границ множеств  $X$  и  $Y$ ).

ваемого интеграла с векторным значением), интеграл  $\iint_{\sigma(V)} (\vec{n} \times \vec{a}) d\sigma$  представим как сумму интегралов по граням параллелепипеда. Для грани  $\sigma_1$ , перпендикулярной к вектору  $\vec{n}_0$ , имеем  $\vec{n}_0 = \vec{n}$ , поэтому вектор  $\vec{n}_0 \times \vec{a}$  ортогонален к вектору  $\vec{n}_0$ . Следовательно, для грани  $\sigma_1$  вектор  $\iint_{\sigma_1} (\vec{n} \times \vec{a}) d\sigma = \iint_{\sigma_1} (\vec{n}_0 \times \vec{a}) d\sigma$  ортогонален вектору  $\vec{n}_0$ . Поэтому  $\vec{n}_0 \cdot \iint_{\sigma_1} (\vec{n} \times \vec{a}) d\sigma = 0$ .

Таким образом, осталось вычислить скалярное произведение вектора  $\vec{n}_0$  на каждый из интегралов по граням параллелепипеда, ортогональным к плоскости  $\Pi$ . Для определенности рассмотрим интеграл по верхней грани  $\sigma_U$  (рис. 2.19,б). Имеем

$$\begin{aligned} \vec{n}_0 \cdot \iint_{\sigma_U} (\vec{n}_U \times \vec{a}) d\sigma &= \vec{n}_0 \cdot \iint_{\sigma_U} (\vec{n}_U \times (\vec{a}_U + \vec{a}_\perp)) d\sigma = \\ &= \vec{n}_0 \cdot \iint_{\sigma_U} (\vec{n}_U \times \vec{a}_U) d\sigma + \vec{n}_0 \cdot \iint_{\sigma_U} (\vec{n}_U \times \vec{a}_\perp) d\sigma. \end{aligned}$$

По построению вектор  $\vec{n}_U$  коллинеарен вектору  $\vec{n}_0$ , поэтому вектор  $\iint_{\sigma_U} (\vec{n}_U \times \vec{a}_\perp) d\sigma$  ортогонален к  $\vec{n}_0$ . Поэтому

$$\vec{n}_0 \cdot \iint_{\sigma_U} (\vec{n}_U \times \vec{a}) d\sigma = \vec{n}_0 \cdot \iint_{\sigma_U} (\vec{n}_U \times \vec{a}_U) d\sigma.$$

Пренебрегая слагаемыми порядка малости, большего  $\mu(V_1)$ , имеем (см. рис. 2.19)

$$\vec{n}_0 \cdot \iint_{\sigma_U} (\vec{n}_U \times \vec{a}_U) d\sigma = \vec{n}_0 \cdot \iint_{\sigma_U} (\vec{n}_U \times \vec{a}_U) d\sigma \approx \vec{n}_0 \cdot (\vec{n}_U \times \vec{a}_U) \Delta x \Delta y.$$

Векторы  $\vec{n}_0$  и  $(\vec{n}_U \times \vec{a}_U)$  коллинеарны, поэтому, согласно определению 30,

стр.115, векторного произведения векторов, имеем

$$\begin{aligned} \vec{n}_0 \cdot \iint_{\sigma_U} (\vec{n}_U \times \vec{a}_U) d\sigma &\approx \underbrace{|\vec{n}_0|}_{=1} \cdot |\vec{n}_U \times \vec{a}_U| \Delta x \Delta y = \\ &= \underbrace{|\vec{n}_U|}_{=1} \cdot |\vec{a}_U| \sin(\widehat{\vec{n}_U, \vec{a}_U}) \Delta x \Delta y = \underbrace{|\vec{a}_U| \cos(\widehat{\vec{CD}, \vec{a}_U})}_{\vec{a}_U \cdot \vec{CD}} \Delta x \cdot \Delta y = \\ &= (\vec{a} - \vec{a}_\perp) \cdot \vec{CD} \Delta y = \vec{a} \cdot \vec{CD} \Delta y - \underbrace{\vec{a}_\perp \cdot \vec{CD}}_{=0} \Delta y \approx \Delta y \int_{CD} \vec{a} d\vec{r}. \end{aligned}$$

Числитель в формуле (2.21), стр.62, мы представили в виде суммы, в которой интегралы берутся по всем граням параллелепипеда, перпендикулярным к плоскости  $\Pi$ . Для слагаемого, соответствующего верхней грани  $\sigma_U$ , получаем

$$\frac{\vec{n}_0 \cdot \iint_{\sigma_U} (\vec{n} \times \vec{a}_U) d\sigma}{\iiint_V dV} \approx \frac{\Delta y \int_{CD} \vec{a} d\vec{r}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\int_{CD} \vec{a} d\vec{r}}{\Delta x \Delta z} = \frac{\int_{CD} \vec{a} d\vec{r}}{\iint_{\sigma} d\sigma}.$$

Суммируя по всем граням параллелепипеда, формулу (2.21) приводим к виду (с учетом  $\mu(V) = \mu(\sigma(V))$ )

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{a}) \cdot \vec{n}_0 &= \lim_{\mu(V) \rightarrow 0} \frac{\vec{n}_0 \cdot \iint_{\sigma(V)} (\vec{n} \times \vec{a}) d\sigma}{\iiint_V dV} = \\ &= \lim_{\mu(\sigma) \rightarrow 0} \frac{\int_{CD} \vec{a} d\vec{r} + \int_{DA} \vec{a} d\vec{r} + \int_{AB} \vec{a} d\vec{r} + \int_{BC} \vec{a} d\vec{r}}{\iint_{\sigma} d\sigma} = \lim_{\mu(\sigma) \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma(\sigma)} \vec{a} d\vec{r}}{\iint_{\sigma} d\sigma}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Как обычно, нам следует получить формулу для вычисления ротора вектора с помощью координатных функций исходного векторного поля.

Рассмотрим в качестве области  $V$  параллелепипед с гранями, заданными уравнениями  $z = z_0$ ,  $x = x_0 + \Delta x$ ,  $y = y_0$ ,  $y = y_0 + \Delta y$ ,  $z = z_0$ ,  $z = z_0 + \Delta z$ , где  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  — положительные числа (см. рис. 2.17, стр.57). Сначала рассмотрим грань  $S_{z-}$ , лежащую в плоскости  $z = z_0$ . Нормаль к этой плоскости имеет вид  $(-\vec{k})$ . Вычислим интеграл по этой грани:

$$\begin{aligned} \iint_{S_{z-}} (\vec{n} \times \vec{a}) d\sigma &= \iint_{S_{z-}} (-\vec{k} \times (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k})) d\sigma = \\ &= \iint_{S_{z-}} (-P(x; y; z_0)\vec{j} + Q(x; y; z_0)\vec{i}) dx dy. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим грань  $S_{z+}$ , параллельную плоскости  $xOy$  с нормалью  $\vec{k}$ . Тогда для интеграла по этой грани имеем

$$\begin{aligned} \iint_{S_{z+}} (\vec{n} \times \vec{a}) d\sigma &= \iint_{S_{z+}} (\vec{k} \times (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k})) d\sigma = \\ &= \iint_{S_{z+}} (P(x; y; z_0 + \Delta z)\vec{j} - Q(x; y; z_0 + \Delta z)\vec{i}) dx dy. \end{aligned}$$

Таким образом, суммарный поток через объединение  $S_z = S_{z+} \cup S_{z-}$  равен

$$\begin{aligned} \iint_{S_{z+}} (\vec{n} \times \vec{a}) d\sigma + \iint_{S_{z-}} (\vec{n} \times \vec{a}) d\sigma &= \\ &= - \iint_{S_z} (Q(x; y; z_0 + \Delta z) - Q(x; y; z_0)) \vec{i} dx dy + \\ &+ \iint_{S_z} (P(x; y; z_0 + \Delta z) - P(x; y; z_0)) \vec{j} dx dy. \end{aligned}$$

Для первого из этих интегралов по теореме о среднем для некоторых  $\alpha, \beta$  таких, что  $x \leq \alpha \leq x + \Delta x$ ,  $y \leq \beta \leq y + \Delta y$ , имеем

$$- \iint_{S_z} (Q(x; y; z_0 + \Delta z) - Q(x; y; z_0)) \vec{i} dx dy =$$

$$= - (Q(\alpha; \beta; z_0 + \Delta z) - Q(\alpha; \beta; z_0)) \Delta x \Delta y \vec{\mathbf{i}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & - \iint_{S_z} (Q(x; y; z_0 + \Delta z) - Q(x; y; z_0)) \vec{\mathbf{i}} \, dx \, dy \\ & \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\iint_{S_z} (Q(x; y; z_0 + \Delta z) - Q(x; y; z_0)) \vec{\mathbf{i}} \, dx \, dy}{\iiint_{V_1} dV} = \\ & = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{- (Q(\alpha; \beta; z_0 + \Delta z) - Q(\alpha; \beta; z_0)) \Delta x \Delta y \vec{\mathbf{i}}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = - \frac{\partial Q}{\partial z} \vec{\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\iint_{S_z} (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{a}}) \, d\sigma = - \frac{\partial Q}{\partial z} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{\mathbf{j}}.$$

Аналогичным образом вычисляются потоки через остальные грани  $S_x = S_{x+} \cup S_{x-}$ ,  $S_y = S_{y+} \cup S_{y-}$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} & \iint (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{a}}) \, d\sigma \\ & (\text{rot } \vec{\mathbf{a}}) (\vec{\mathbf{r}}) = \lim_{\mu(V) \rightarrow 0} \frac{\iint_{\sigma(V)} (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{a}}) \, d\sigma}{\iiint_V dV} = \\ & \iint_{S_x} (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{a}}) \, dy \, dz + \iint_{S_y} (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{a}}) \, dx \, dz + \iint_{S_z} (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{a}}) \, dx \, dy \\ & = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\iint_{S_x} (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{a}}) \, dy \, dz + \iint_{S_y} (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{a}}) \, dx \, dz + \iint_{S_z} (\vec{\mathbf{n}} \times \vec{\mathbf{a}}) \, dx \, dy}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \\ & = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \vec{\mathbf{k}} - \frac{\partial R}{\partial x} \vec{\mathbf{j}} \right) + \left( - \frac{\partial P}{\partial y} \vec{\mathbf{k}} + \frac{\partial R}{\partial y} \vec{\mathbf{i}} \right) + \left( - \frac{\partial Q}{\partial z} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{\mathbf{j}} \right) = \\ & = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{\mathbf{i}} - \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Последнее выражение удобно представить в виде “формального определителя”, аналогичного по конструкции определителю в формуле (П.2), стр. 116, для вычисления векторного произведения.

Мы показали<sup>11</sup>, что в координатной форме ротор определяется формулой (как обычно,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ )

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} &= \operatorname{rot} \left( P(x; y; z) \vec{i} + Q(x; y; z) \vec{j} + R(x; y; z) \vec{k} \right) = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x; y; z) & Q(x; y; z) & R(x; y; z) \end{vmatrix} = \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{a}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где  $\vec{\nabla}$  — “формальный вектор”,  $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ . Правила работы с  $\vec{\nabla}$  изучаются в разделе 2.6, стр.69.

Информацию о дифференциальных операциях сведем в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

Область определения	Ф-ция	Область значений	Определение (формула)	Вычисление в координатах
Скалярное поле	$\vec{\operatorname{grad}}$	Векторное поле	(2.14), стр.51	(2.16), стр.55
Векторное поле	$\vec{\operatorname{div}}$ $\vec{\operatorname{rot}}$	Скалярное поле	(2.17), стр.56	(2.18), стр.58
		Векторное поле	(2.19), (2.20), стр.61	(2.22), стр.67

При использовании “формального вектора”

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

получаем, что для скалярного поля

$$f(\vec{r}) = f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

и векторного поля

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

<sup>11</sup>Наши рассуждения далеки от уровня требований к строгости доказательств, поэтому мы не “доказали”, а “показали” (неформальный термин).

можно ротор, дивергенцию и градиент представить в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \vec{\nabla} f(\vec{\mathbf{r}}) \text{ — “произведение” вектора на скаляр,} \\ \operatorname{div} \vec{\mathbf{a}} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}}) = \left( \vec{\nabla}, \vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}}) \right) \text{ — скалярное произведение “векторов”,} \\ \operatorname{rot} \vec{\mathbf{a}} &= \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}}) = \left[ \vec{\nabla}, \vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}}) \right] \text{ — векторное произведение “векторов”.} \end{aligned}$$

## 2.5. Задачи по теме “Дифференциальные операции в теории поля”

Ответы приведены на стр.133.

1) Данный пример мы взяли из [16, с.56]:

На рис. 2.20, стр.68, изображено некоторое скалярное поле  $f(x, y)$ , причем на рис.2.20,а изображена поверхность, задаваемая уравнением  $z = f(x, y)$ , а на рис.2.20,б — поле градиентов скалярного поля  $f$ . Укажите точку, в которой градиент поля  $f$  равен  $\vec{0}$ .

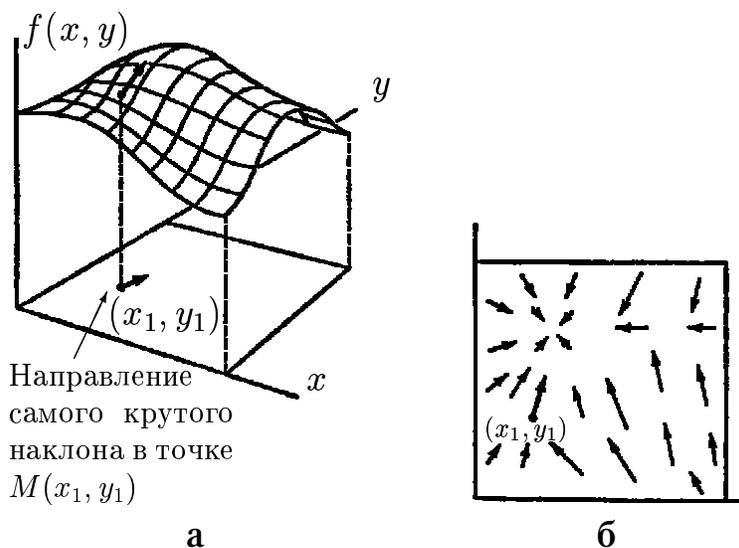


Рис. 2.20. К задаче 1

- 2) Скалярное поле  $T$  каждой точке плоскости ставит в соответствие температуру (в градусах Цельсия) в этой точке. На карту нанесены изотермические линии (рис. 2.21). Укажите примерно градиент скалярного поля  $T$  в точках  $A$  и  $B$ . В которой из этих точек модуль градиента больше, и во сколько раз?

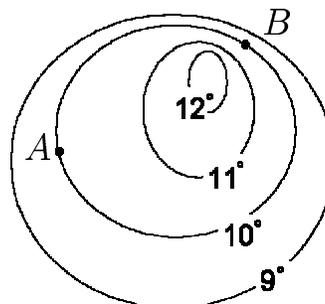


Рис. 2.21 к задаче 2

- 3) (Пример взят из [16, с.91]) На рис. 2.22, изображены векторные поля. Дивергенция четырех из этих векторных полей равна нулю в показанной области. Ротор трех из них равен нулю. Укажите эти поля.

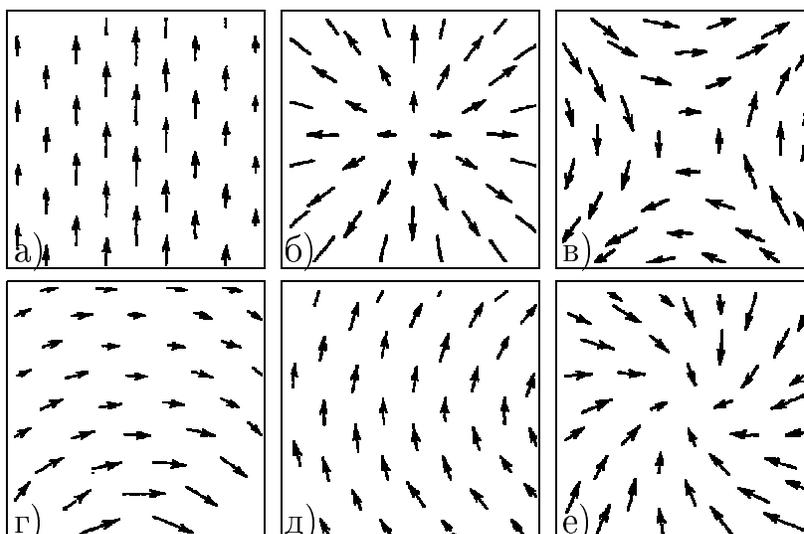


Рис. 2.22. К задаче 3

- 4) Рассмотрим плоское векторное поле  $\vec{a}$  и множество линий, каждая из которых в любой своей точке перпендикулярна вектору  $\vec{a}$  ( $\vec{r}$ ), где  $\vec{r}$  — радиус-вектор этой точки. Каким свойством должны обладать векторы поля в точках  $A$  и  $B$  (рис. 2.23), если поле  $\vec{a}$  потенциально?

## 2.6. Работа с оператором “набла”

Задачей науки является превращение “искусства в ремесло”. Мы заменяем работу с объектом на работу с его моделью. В математике модель, как

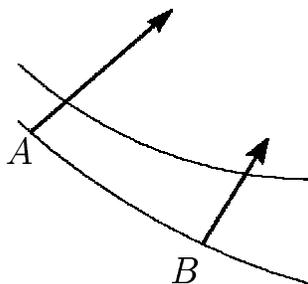


Рис. 2.23. К задаче 4.

правило, имеет символическую форму. Таким образом, мы моделируем преобразование объектов с помощью преобразований “математических слов”, т.е. математических выражений. Как показывает тысячелетний (точнее, “много-тысячелетний”) опыт математики, успех исследования с использованием математики в значительной мере определяется удачным выбором языка. Средневековая ученая степень “магистр деления” потеряла смысл после введения позиционной системы счисления вместо римских обозначений.

Выше мы ввели следующее обозначение:  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ . Как оказалось, в прямоугольной декартовой системе координат выражения для вычисления градиента скалярного поля, а также дивергенции и ротора векторного поля можно представить как результат выполнения “векторных операций” с использованием “вектора”  $\vec{\nabla}$ : (2.16), стр.55, (2.18), стр.58, (2.22), стр.67. Отметим, что здесь речь идет об использовании только грамматики языка векторной алгебры, точнее, даже использовании нескольких правил. Весьма продуктивной является идея создания исчисления на базе языка векторной алгебры и дифференциального исчисления для получения правил преобразования выражений, задающих скалярные и векторные поля, и результатов применения дифференциальных операций.

Оказывается, многие формулы теории векторного поля красиво записываются, если мы будем применять для этого “формального вектора”  $\vec{\nabla}$  грамматические правила, принятые для векторной алгебры, с небольшими оговоренными ниже изменениями. К таким формулам относятся, например, представления  $\text{grad}$ ,  $\text{rot}$ ,  $\text{div}$ , приведенные на стр.68.

### 2.6.1. Семантические и грамматические правила работы с оператором “набла”

Начнем с семантических (смысловых) правил. Напомним, что “координатами” “вектора”  $\vec{\nabla}$  являются операторы  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ .

Мы будем работать с двумя типами векторов:

- 1) векторные поля;
- 2) векторные дифференциальные операторы.

Скаляры тоже будут двух типов:

- 1) скалярные поля;
- 2) скалярные дифференциальные операторы.

Например,  
 $\vec{i} \left( x \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) + \vec{j} \frac{\partial}{\partial z}$  — векторный дифференциальный оператор;  
 $(x^2 - y^2) \vec{i} - \vec{j}$  — векторное поле;  
 $y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$  — скалярный дифференциальный оператор;  
 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  — скалярное поле.

К семантическим (смысловым) правилам, применяемым в традиционной векторной алгебре (точнее, алгебре векторных полей), добавляются следующие правила: если  $f, g$  — скалярные поля,  $\vec{a}, \vec{b}$  — векторные поля,  $\hat{F}, \hat{G}$  — скалярные дифференциальные операторы,  $\vec{A}, \vec{B}$  — векторные дифференциальные операторы, то

- 1) под “произведением” любого скалярного дифференциального оператора на скалярное поле понимается действие этого дифференциального оператора на это скалярное поле;
- 2)  $\hat{F} \cdot \hat{G}$  есть скалярный дифференциальный оператор;
- 3)  $\hat{F} \cdot f$  есть скалярное поле;
- 4)  $f \cdot \hat{G}$  есть скалярный дифференциальный оператор.

Например,  $\left( xy \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x, y, z) = xy \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$ .

Сейчас мы приведем список грамматических правил получившейся “алгебры”<sup>1</sup>, а на стр.73 в рамочке сформулировано краткое<sup>2</sup> правило проведения алгебраических преобразований.

Набор грамматических правил обогащается следующими правилами: если  $f, g$  — скалярные поля,  $\vec{a}, \vec{b}$  — векторные поля,  $\hat{F}, \hat{G}$  — скалярные дифференциальные операторы,  $\vec{A}, \vec{B}$  — векторные дифференциальные операторы, то

- 1) скалярное поле можно суммировать только со скалярным полем;
- 2) скалярный дифференциальный оператор можно суммировать только со скалярным дифференциальным оператором;
- 3) векторное поле можно суммировать только с векторным полем;
- 4) векторный дифференциальный оператор можно суммировать только с векторным дифференциальным оператором;
- 5) для скалярного дифференциального оператора  $\hat{F}$  и векторного поля-константы  $\vec{c}$  (не зависящего<sup>3</sup> от  $x, y, z$ ) по определению  $\hat{F}\vec{c} = \vec{c}\hat{F}$ . Это правило в сочетании с остальными грамматическими правилами позволяет определять остальные правила только для скалярного дифференциального оператора и скалярного поля, так как
  - (a) “координатами” векторного дифференциального оператора являются скалярные дифференциальные операторы;
  - (b) “координатами”<sup>4</sup> векторного поля являются скалярные поля;

$$6) \hat{F} \cdot (f + g) = \hat{F}(f) + \hat{F}(g);$$

$$7) (\hat{F} + \hat{G}) \cdot f = \hat{F}(f) + \hat{G}(f);$$

<sup>1</sup>Примечание для знатоков алгебры: строго говоря, это не алгебра, так как в силу правил 1-4 сумма является лишь частичной операцией.

<sup>2</sup>Но, увы, не строгое.

<sup>3</sup>Т.е.  $\vec{c}$  ( $\vec{r}$ ) имеет одно и то же значение при любых  $\vec{r}$ .

<sup>4</sup>Точнее, они называются координатными функциями. Дело в том, что, как мы убедились на примерах (это можно строго доказать), векторное поле можно задать выражением вида

$$\vec{a} \left( x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \right) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k},$$

где  $P, Q, R$  — это и есть **координатные функции** векторного поля  $\vec{a}$ .

- 8)  $\hat{F} \cdot (f \cdot g) = \hat{F}(f) \cdot g + f \cdot \hat{F}(g);$   
 9)  $\hat{F} \cdot (f \cdot \hat{G}) = \hat{F}(f) \cdot \hat{G} + f \cdot \hat{F}(\hat{G}(g));$   
 10)  $(\hat{F} \cdot \hat{G}) \cdot f = \hat{F}(\hat{G}(f));$   
 11) скалярное, векторное и смешанное произведения векторных дифференциальных операторов друг на друга и на векторные поля при любом порядке следования множителей определяются формулами (П.1), стр.115, (П.2), стр.116, (П.4), стр.117.

Можно проверить, что в этом случае для двойного векторного произведения “обобщенных векторов” (каждый из которых является либо векторным полем, либо векторным дифференциальным оператором) справедлива формула “бац-минус-цаб”, то есть формула (П.3), стр.117.

В силу перечисленных правил получаем, например:

- 1)  $\left(xy \frac{\partial}{\partial x}\right) \vec{a}(x, y, z) = xy \frac{\partial \vec{a}(x, y, z)}{\partial x};$   
 2)  $\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{k}\right) f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \vec{k};$   
 3)  $\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}.$

### 2.6.2. “Сокращенное” правило работы с оператором “набла”

Можно сформулировать короткое, но менее формальное правило алгебраических преобразований.

При выполнении алгебраических преобразований выражений, содержащих обозначения операций векторной алгебры, векторных и скалярных полей, а также векторных и скалярных дифференциальных операторов, сначала применяются “дифференциальные свойства” 6)-9) из набора грамматических правил, а потом формулы обычной векторной алгебры (см. раздел П.1, стр.114) с учетом некоммутативности любых произведений любых дифференциальных операторов и векторных и скалярных полей, за исключением ситуаций, предусмотренных правилом 5).

Для того чтобы облегчить проведение алгебраических преобразований, договоримся проводить их, как правило, в два этапа: сначала будем писать “черновик” и только потом — “чистовик”. На этапе “черновика” при применении оператора  $\vec{\nabla}$  к произведению договоримся при использовании “дифференциальных свойств” 6)-9) использовать следующий “незаконный прием”: *над тем векторным или скалярным полем, на который в данный момент действует оператор  $\vec{\nabla}$ , ставить штрих, а обозначения тех полей, на которые  $\vec{\nabla}$  в данный момент не действует, “оставлять чистенькими”*. Следующим этапом является “вынос” всех “нештрихованных” сомножителей из “зоны влияния” оператора  $\vec{\nabla}$  с помощью расстановки скобок или применения алгебраических свойств: антикоммутативности векторного произведения или, с учетом правила 5), коммутативности скалярного произведения и т.п. Например, на этапе написания черновика получаем (“производная произведения”):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\mathbf{a}}' \times \vec{\mathbf{b}}) + \vec{\nabla} \times (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}').$$

Теперь для того, чтобы вынести  $\vec{\mathbf{b}}$  из “зоны влияния”  $\vec{\nabla}$ , применим формулу “бац-минус-цаб”, то есть формулу (П.3), стр.117 (пока не будем обращать внимание на расположение  $\vec{\nabla}$  и вектор, на который он действует):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\mathbf{a}}' \times \vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{a}}' (\vec{\nabla} \vec{\mathbf{b}}) - \vec{\mathbf{b}} (\vec{\nabla} \vec{\mathbf{a}}').$$

Теперь расставим в нужном порядке  $\vec{\nabla}$  и векторы, на которые он действует и на которые он не действует:

$$\vec{\mathbf{a}}' (\vec{\nabla} \vec{\mathbf{b}}) - \vec{\mathbf{b}} (\vec{\nabla} \vec{\mathbf{a}}') = (\vec{\mathbf{b}} \vec{\nabla}) \vec{\mathbf{a}}' - \vec{\mathbf{b}} (\vec{\nabla} \vec{\mathbf{a}}').$$

Теперь можно “убрать штрихи”:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) = (\vec{\mathbf{b}} \vec{\nabla}) \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} (\vec{\nabla} \vec{\mathbf{a}}).$$

Аналогично

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{a}} (\vec{\nabla} \vec{\mathbf{b}}) - (\vec{\mathbf{a}} \vec{\nabla}) \vec{\mathbf{b}}.$$

Окончательно получим ответ:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \vec{\nabla}) \vec{a} - \vec{b} (\vec{\nabla} \vec{a}) + \vec{a} (\vec{\nabla} \vec{b}) - (\vec{a} \vec{\nabla}) \vec{b}.$$

**Пример 8.** Пусть  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  — векторные поля,  $f, g, h$  — скалярные поля. Проверить с помощью формальных преобразований справедливость следующих формул:

- 1)  $\text{rot}(f \vec{a}) = \text{grad } f \times \vec{a} + f \text{rot } \vec{a}$ ;
- 2)  $\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \text{rot}(\vec{a}) \vec{b} - \text{rot}(\vec{b}) \vec{a}$ .

### Решение

- 1) Сначала перейдем к обозначениям дифференциальных операций с помощью  $\vec{\nabla}$ , потом применим “дифференциальные свойства” 6)-9). На этапе “черновика” имеем

$$\begin{aligned} \text{rot}(f \vec{a}) &= \vec{\nabla} \times (f \vec{a}) = \vec{\nabla} \times \left( f' \vec{a} + f \vec{a}' \right) = \\ &= (\vec{\nabla} f) \times \vec{a} + f \vec{\nabla} \times \vec{a} = \text{grad } f \times \vec{a} + f \text{rot } \vec{a}. \end{aligned}$$

- 2) Согласно формулам (П.1) для смешанного произведения, стр.117, после применения “дифференциальных свойств” оператора  $\vec{\nabla}$  получаем

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{\nabla} (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{\nabla} \left( \vec{a}' \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b}' \right) = \\ &= (\vec{\nabla} \times \vec{a}') \vec{b} - \vec{\nabla} (\vec{b}' \times \vec{a}) = (\vec{\nabla} \times \vec{a}') \vec{b} - (\vec{\nabla} \times \vec{b}') \vec{a} = \\ &= (\vec{\nabla} \times \vec{a}') \vec{b} - (\vec{\nabla} \times \vec{b}') \vec{a} = \text{rot}(\vec{a}') \vec{b} - \text{rot}(\vec{b}') \vec{a}. \end{aligned}$$

### 2.6.3. Некоторые полезные соотношения

Здесь  $r = |\vec{r}|$  — модуль радиуса-вектора. В частности,  $\vec{r} \vec{r}' = r^2$ . Непосредственным вычислением с помощью формул (2.22), стр.67, (2.18), стр.58, (2.16), стр.55, можно убедиться в справедливости равенств (равенство пункта 4) доказано в разделе 2.7, стр.76, см.ответы):

- 1)  $\text{rot } \vec{r} = \vec{0}$ ;
- 2)  $\text{div } \vec{r} = 3$ ;

$$3) \operatorname{grad} r = \operatorname{grad} |\vec{r}| = \frac{1}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{1}{r} \vec{r};$$

$$4) \operatorname{div} \operatorname{grad} r = \Delta r = \frac{2}{r}, \text{ где}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \vec{\nabla} \vec{\nabla}$$

— так называемый **оператор Лапласа**.

## 2.7. Задачи по теме “Работа с оператором “набла”

Ответы приведены на стр. 134.

1) Используя правила работы с оператором  $\vec{\nabla}$ , доказать тождества:

$$(a) \operatorname{rot} (\operatorname{grad} f) = \vec{0};$$

$$(b) \operatorname{div} (f \vec{a}) = \operatorname{grad} f \cdot \vec{a} + f \operatorname{div} \vec{a};$$

$$(c) \operatorname{div} \operatorname{grad} r = \frac{2}{r} \text{ — формула (4), стр. 76.}$$

2) Пусть  $\vec{a}(\vec{r}) = y \vec{i} - x \vec{j}$ . Вычислите  $\operatorname{rot} (\vec{r} \times \operatorname{rot} \vec{a})$ .

## 2.8. Система координат

Научный аппарат способен воспринимать и перерабатывать только информацию, представленную в стандартном виде. Поэтому одним из важнейших профессиональных качеств специалиста является умение формализовать информацию. Продемонстрируем процесс формализации на примере понятия “система координат”. Наш интерес к нему вызван тем обстоятельством, что в векторном анализе координатный метод является основой вычислительного аппарата.

В школьных учебниках и многих учебниках по высшей математике не дается строгое определение системы координат. Аналогичная ситуация наблюдается со справочниками [2, 3]. В справочнике [5] приводится описание (но не определение) понятия “система координат”. Есть два возможных сценария дальнейших действий: либо перерыть кучу литературы в поисках удовлетворительного определения, либо попытаться самостоятельно его сформулировать.

Система координат вводится для того, чтобы переводить вопросы об особенностях точек в вопросы об особенностях их координат. Таким образом, система координат сопоставляет точке строку ее координат. Ситуация, когда какому-то объекту сопоставляется другой объект, в математике описывается понятием “функция”. Разумеется, мы под функцией понимаем отображение одного множества в другое, а не “зависимую переменную”. Это несложное рассуждение привело нас к следующему определению.

**Определение 24.** Системой координат на плоскости называется функция  $\mathcal{K}$ , каждой паре чисел  $(u, v)$  ставящая в соответствие точку плоскости. При этом пара чисел  $(u, v)$  называется **координатами точки**<sup>1</sup>  $\mathcal{K}(u, v)$  в системе координат  $\mathcal{K}$ .

В некоторых приложениях требуется, чтобы  $\mathcal{K}$  была взаимно однозначной функцией, но мы этого ограничения накладывать не будем. Таким образом, в некоторых системах координат (например, в рассматриваемой ниже полярной системе координат) одна и та же точка может иметь много разных пар координат.

### 2.8.1. Полярная система координат

В школе вы познакомились с *прямоугольной декартовой системой координат*. Напомним, что она введена следующим образом: на плоскости зафиксированы две взаимно перпендикулярные оси, называемые обычно осями  $Ox$  и  $Oy$ . Каждой точке оси соответствует некоторое число. Прямоугольная декартова система координат каждой паре действительных чисел  $(x, y)$  ставит в соответствие точку плоскости, проекциям которой на оси соответствуют числа  $x$  (проекция на ось  $Ox$ ) и  $y$  (проекция на ось  $Oy$ ).

Можно сказать и так: прямоугольная декартова система координат каждой паре действительных чисел  $(x, y)$  ставит в соответствие точку плоскости с радиусом-вектором  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , где  $\vec{i}$  — **орт оси  $Ox$** , то есть вектор единичной длины, сонаправленный с осью  $Ox$ , и  $\vec{j}$  — **орт оси  $Oy$** , то есть вектор единичной длины, сонаправленный с осью  $Oy$ .

<sup>1</sup>Здесь  $\mathcal{K}(u, v)$  — это *значение* функции  $\mathcal{K}$ . Это обозначение не имеет ничего общего с традиционными для геометрии обозначениями типа “точка  $M(1; 2)$ ”, то есть  $\mathcal{K}(u, v)$  надо здесь воспринимать как обозначение типа  $f(x, y)$  и т.п.

В этом разделе мы познакомимся с не менее “популярной” в высшей математике системой координат плоскости — полярной системой координат.

**Определение 25.** Пусть на плоскости зафиксирована ось (называемая полярной осью), на которой зафиксирована точка  $O$  (называемая полюсом полярной системы координат). Полярной системой координат называется система координат, каждой упорядоченной паре чисел  $(\rho, \varphi)$ , где  $\rho \geq 0$ , ставящая в соответствие такую точку  $M$  плоскости, радиус-вектор  $\overrightarrow{OM}$  которой образует с полярной осью угол  $\varphi$  (угол, как обычно, отсчитывается против часовой стрелки) и имеет длину  $|\overrightarrow{OM}| = \rho$ .

### Каноническое соответствие между полярной системой координат и прямоугольной декартовой системой координат

Обычно с полярной системой координат связывается прямоугольная декартова система координат следующим образом (рис. 2.24): ее начало совпадает с полюсом, ось  $Ox$  совпадает с полярной осью, ось  $Oy$  образует с осью  $Ox$  угол  $\frac{\pi}{2}$  (отсчитываемый, как обычно, против часовой стрелки!).

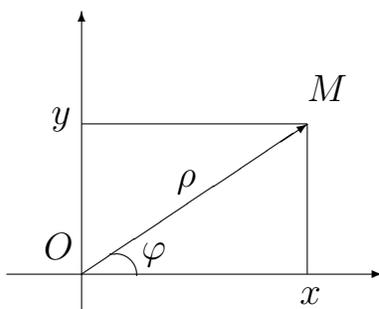


Рис. 2.24. Каноническая связь между полярной и декартовой системами координат

Очевидно, что координаты  $(\rho, \varphi)$  точки  $M$  в полярной системе координат связаны с декартовыми координатами  $(x, y)$  этой точки соотношениями

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad \vec{r} = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j}. \quad (2.23)$$

Кроме того, очень важными являются соотношения  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$  (при  $x \neq 0$ ).

## 2.8.2. Цилиндрическая и сферическая системы координат

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат  $\mathcal{K}(x, y, z)$ .

**Цилиндрическая система координат** тройке чисел  $(\rho; \varphi; z)$  ставит в соответствие точку пространства с прямоугольными декартовыми координатами  $(x; y; z)$ , где  $(x; y)$  — координаты точки на плоскости с полярными координатами  $(\rho; \varphi)$ , причем полярная ось совпадает с осью абсцисс, а полюс — с началом координат. Нетрудно вычислить, что переход от цилиндрической в декартову систему координат осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad \vec{\mathbf{r}} = \rho \cos \varphi \vec{\mathbf{i}} + \rho \sin \varphi \vec{\mathbf{j}} + z \vec{\mathbf{k}}. \quad (2.24)$$

**Сферическая система координат** тройке чисел  $(r; \varphi; \theta)$  ставит в соответствие точку пространства, радиус-вектор которой имеет длину  $r$  и образует с осью аппликат<sup>2</sup> угол  $\theta$ , а проекция этого радиуса-вектора на плоскость  $xOy$  образует с осью  $Ox$  угол  $\varphi$ . При фиксированных значениях переменных  $r = r_0$  и  $\varphi = \varphi_0$  получаются круги, называемые на глобусе радиусом  $r_0$  *параллелями*, при фиксированных значениях переменных  $r$  и  $\theta$  получаются круги, называемые на глобусе *меридианами* (но в последнем случае угол отсчитывается от северного полюса, а не от экватора<sup>3</sup>). При фиксированных значениях переменных  $\varphi = \varphi_0$  и  $\theta = \theta_0$  получаем луч, выходящий из начала координат. Переход от сферической в декартову прямоугольную систему координат осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ x = r \cos \theta, \end{cases} \quad \vec{\mathbf{r}} = r \cos \varphi \sin \theta \vec{\mathbf{i}} + r \sin \varphi \sin \theta \vec{\mathbf{j}} + r \cos \theta \vec{\mathbf{k}}. \quad (2.25)$$

## 2.9. Параметризация линий и поверхностей

В разделе 2.1.1, стр.27, мы наметили план проведения исследования, первые два пункта которого к настоящему моменту уже реализованы. Естествен-

<sup>2</sup>Иногда под  $\theta$  понимают угол между радиусом-вектором точки и *плоскостью*  $xOy$ .

<sup>3</sup>Угол отсчитывается от экватора в случае, когда под  $\theta$  понимают угол между радиусом-вектором точки и *плоскостью*  $xOy$ .

но перейти к третьему пункту плана: разработать методы вычисления интегралов рассмотренных типов. Отметим несколько важных моментов.

**Во-первых**, все разрабатываемые нами способы будут основаны на идее преобразования исходного интеграла по фигуре к определенным интегралам.

**Во-вторых**, при работе с этими интегралами мы, как правило, имеем дело с геометрическими объектами: точками, векторами, линиями, поверхностями. Обычно геометрические объекты задаются с использованием одного из двух способов: описанием положения относительно других объектов<sup>1</sup> или заданием с помощью координат: строкой координат, уравнением или неравенством для координат любой точки объекта и т.п. Вряд ли нам удастся создать метод вычисления, например, линейного интеграла, используя описание положения этой линии относительно других объектов. Поэтому основной формой задания линий и поверхностей будет задание с помощью уравнений и неравенств для координат *произвольной точки* соответствующей фигуры.

**В-третьих**, ключевое слово в обобщенном названии этих интегралов — “интеграл по фигуре”. Поэтому совершенно очевидно, что начать следует с формирования или отбора *способов задания* этих фигур: линий и поверхностей, — наиболее удобных для применения при вычислении интегралов.

Ясно, что задавать линии и поверхности будем с помощью уравнений, а описывать конкретную область с помощью неравенств. Применяются различные типы уравнений линий и поверхностей, наиболее распространенные из которых приведены, например, в [8]. В качестве основы возьмем три типа уравнений прямой в пространстве: общие уравнения прямой (задание пересечением двух плоскостей), параметрические и канонические уравнения. Линейный интеграл является непосредственным обобщением определенного интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ , в котором присутствует дифференциал переменной (в данном случае  $dx$ ). Видимо, при переходе от линейного интеграла к определенному интегралу мы должны получить дифференциал некоторой переменной. Следовательно, мы должны задать координаты точки линии как функцию от некоторого параметра. Таким образом, мы будем ориентироваться на параметрическое задание линий и поверхностей.

<sup>1</sup> Например, “центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой пересечения биссектрис”; “прямая, соединяющая середины сторон треугольника, параллельна его основанию” и др.

### 2.9.1. Параметризация линий

**Пример 9.** На плоскости  $Oxy$  параметризовать окружность радиусом 1 с центром в начале координат.

**Решение.** Можно предложить несколько параметризаций этой линии. Все эти параметризации базируются на уравнении этой окружности: точка с координатами  $(x; y)$  принадлежит данной окружности тогда и только тогда, когда

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (2.26)$$

Первая параметризация. Если разбить эту окружность на две части: верхнюю и нижнюю, то каждая из них параметризуется естественным образом. Достаточно из уравнения (2.26) выразить  $y$ , получим для верхней половины  $\begin{cases} x = x, \\ y = \sqrt{1 - x^2}, \end{cases}$  то есть

$\vec{r}(x) = x \cdot \vec{i} + \sqrt{1 - x^2} \cdot \vec{j}$ . Для нижней половины этой окружности параметризация имеет вид  $\begin{cases} x = x, \\ y = -\sqrt{1 - x^2}, \end{cases}$  то есть  $\vec{r}(x) = x \cdot \vec{i} - \sqrt{1 - x^2} \cdot \vec{j}$ .

Параметризация линии нам нужна в основном для вычисления криволинейных интегралов в теории поля. Для этого необходимо находить дифференциал дуги линии, для чего используется формула (1.3), стр.11. Для этой параметризации, например верхней половины окружности, получаем в силу формулы (1.3), стр.11,

$$d\vec{r} = \left( \frac{dx}{dx} \vec{i} + \frac{d\sqrt{1-x^2}}{dx} \vec{j} \right) dx = \left( \vec{i} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \vec{j} \right) dx,$$

$$dr = |d\vec{r}| = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Вторая параметризация. Можно из уравнения (2.26) выразить  $x$ , тогда получим параметризацию  $\begin{cases} x = \sqrt{1-y^2}, \\ y = y \end{cases}$  для правой половины этой окружности и  $\begin{cases} x = -\sqrt{1-y^2}, \\ y = y \end{cases}$  — для левой половины. Для правой половины окружности получаем

$$d\vec{r} = \left( \frac{d\sqrt{1-y^2}}{dy} \vec{i} + \frac{dy}{dy} \vec{j} \right) dy = \left( -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \vec{i} + \vec{j} \right) dy,$$

$$dr = |d\vec{r}| = \sqrt{\frac{y^2}{1-y^2} + 1} dy = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Третья параметризация. Перейдем в полярную систему координат, соответствующую исходной декартовой (полюс — в начале координат, полярная ось совпадает с осью абсцисс). Формулы перехода, как известно, имеют вид  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$  Это еще не параметризация, так как  $x$  и  $y$  выражены через два параметра, а не через один параметр, как

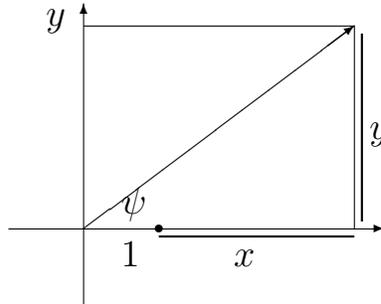


Рис. 2.25. К описанию параметризации линии примера 9, стр.81, полученной с помощью полярной системы координат

это необходимо для линии. Подставим эти выражения для  $x, y$  в уравнение (2.26), получим  $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 1$ , то есть, с учетом неотрицательности  $\rho$ , имеем  $\rho = 1$ . Подставляя найденное выражение для  $\rho$  в выражения для  $x, y$ , получим искомую параметризацию  $\begin{cases} x = \cos \varphi, \\ y = \sin \varphi. \end{cases}$  Можно записать иначе:  $\vec{r}(t) = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$ . В этом случае

$$d\vec{r} = (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) d\varphi,$$

$$dr = |d\vec{r}| = \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = d\varphi.$$

Четвертая параметризация. Перейдем в полярную систему координат с той же полярной осью, но полюс поместим в левую точку пересечения окружности с полярной осью. Как видно из рис.2.25,  $\begin{cases} x = r \cos \psi - 1, \\ y = r \sin \psi. \end{cases}$  Подставляя эти выражения в уравнение (2.26), получаем после простых преобразований  $r = 2 \cos \psi$ . Подставляя найденное выражение  $r$  через  $\psi$  в выражения для  $x, y$ , получаем  $\begin{cases} x = 2 \cos^2 \psi - 1 = \cos 2\psi, \\ y = 2 \cos \psi \sin \psi = \sin 2\psi, \end{cases}$  то есть  $\vec{r}(\psi) = \cos 2\psi \vec{i} + \sin 2\psi \vec{j}$ . Следовательно,

$$d\vec{r} = (-2 \sin 2\psi \vec{i} + 2 \cos 2\psi \vec{j}) d\psi,$$

$$dr = |d\vec{r}| = \sqrt{4 \sin^2 2\psi + 4 \cos^2 2\psi} d\psi = 2 d\psi.$$

## 2.9.2. Параметризация поверхностей

**Пример 10.** Параметризовать поверхность параболоида  $z = x^2 + y^2$ .

**Решение**

Способ 1.  $\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = x^2 + y^2, \end{cases}$  то есть  $\vec{r}(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j} + (x^2 + y^2) \vec{k}$ . В этом случае

$$\vec{r}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{i} + 2x \vec{k}, \quad \vec{r}_y = \vec{j} + 2y \vec{k},$$

Способ 2. С помощью цилиндрической системы координат. Перейдем в цилиндрическую систему координат с помощью формул (2.24), стр.79:  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$

Нам необходимо получить выражения для  $x, y, z$  через два параметра (обычно для цилиндрической системы координат это  $\varphi$  и  $\rho$ ). Способ получения такого выражения естественный: мы знаем, что для любой точки поверхности, с которой мы работаем, имеет место равенство  $z = x^2 + y^2$ . Подставим в это равенство выражения для  $x, y, z$ , и выразим один из параметров через другие. Потом можно будет подставить это выражения для параметра  $z$  в формулы для  $x, y, z$ , и получим искомую параметризацию. Итак, получаем

$$z = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2.$$

Следовательно, получаем параметризацию  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = \rho^2. \end{cases}$

Способ 3. С помощью сферической системы координат. Используем формулы перехода в сферическую систему координат (2.25), стр.79:  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta \end{cases}$  (на глобусе:  $\varphi$  — “меридиан”,  $\theta$  — “широта”, но только “широта” отсчитывается от “северного полюса”). Тогда, подставляя эти выражения в уравнение параболоида, получаем

$$r \cos \theta = r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta = r^2 \sin^2 \theta.$$

Следовательно,  $r = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}$ . Подставляя полученное выражение для  $r$  в формулы перехода к сферической системе координат, получаем

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta = \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta = \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta, \\ z = \operatorname{ctg}^2 \theta. \end{cases}$$

Каждая из этих параметризаций может оказаться самой удобной в том или ином случае.

### 2.9.3. Получение нормального вектора

**Теорема 8 (о векторе  $\vec{n}$   $d\sigma$  параметрически заданной поверхности).** Пусть  $\vec{r}(u, v)$  — некоторая параметризация поверхности  $\sigma$ , то есть, во-первых, радиус-вектор любой точки поверхности имеет вид  $\vec{r}(u, v)$

для подходящих значений параметров  $u, v$ , во-вторых, для любых значений параметров (обычно значения параметров берутся из некоторой области  $G_{(u,v)}$ ) точка с радиусом-вектором  $\vec{\mathbf{r}}(u, v)$  принадлежит поверхности  $\sigma$ . Тогда

$$\vec{\mathbf{n}} d\sigma = \pm \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial v} du dv. \quad (2.27)$$

**Обоснование.** Формулу (2.27) мы использовали при решении примера 10, стр.82. Строгое доказательство мы приводить не будем, ограничившись изложением его идеи. Зафиксируем какие-либо значения параметров  $u, v$  и зададим приращения  $du, dv$  этих параметров. На рис. 2.26 видно, что если эти приращения по абсолютной величине достаточно малы, то

$$\Delta_u \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(u + \Delta u, v) - \vec{\mathbf{r}}(u, v) \approx \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial u} \cdot \Delta u = \vec{\mathbf{r}}_u(u, v) \cdot \Delta u,$$

$$\Delta_v \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(u, v + \Delta v) - \vec{\mathbf{r}}(u, v) \approx \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial v} \cdot \Delta v = \vec{\mathbf{r}}_v(u, v) \cdot \Delta v.$$

Как видно из рис.2.26, получающаяся “площадка” примерно равна по площади параллелограмму, построенному на векторах  $\vec{\mathbf{r}}_u(u, v) \cdot \Delta u$  и  $\vec{\mathbf{r}}_v(u, v) \cdot \Delta v$ , причем в любой точке этой “площадки” вектор нормали к ней почти перпендикулярен указанному параллелограмму. Поэтому нам нужен вектор  $\vec{\mathbf{n}} d\sigma$ , то есть вектор, обладающий следующими двумя свойствами: во-первых, он должен быть ортогонален к векторам  $\vec{\mathbf{r}}_u(u, v) \cdot \Delta u$  и  $\vec{\mathbf{r}}_v(u, v) \cdot \Delta v$ , во-вторых, его площадь должна быть равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Но всеми этими свойствами обладает векторное произведение<sup>2</sup> векторов! Таким образом, переходя от приращений к дифференциалам, получаем требуемую формулу  $\vec{\mathbf{n}} d\sigma = \pm \vec{\mathbf{r}}_u \times \vec{\mathbf{r}}_v du dv$ .

Сформулируем, не проводя доказательство, еще одну теорему:

**Теорема 9 (о выражении вектора  $\vec{\mathbf{n}} d\sigma$  через  $dx, dy, dz$ ).** Если точка с координатами  $(x, y, z)$  принадлежит поверхности  $\sigma$  и

<sup>2</sup>Напомним, что векторное произведение вектора  $\vec{\mathbf{p}}$  на вектор  $\vec{\mathbf{q}}$  есть вектор  $\vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{q}} = [\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}]$ , обладающий тремя свойствами: во-первых, он ортогонален к сомножителям, то есть к  $\vec{\mathbf{p}}$  и  $\vec{\mathbf{q}}$ , во-вторых, его площадь равна  $|\vec{\mathbf{p}}| \cdot |\vec{\mathbf{q}}| \sin \widehat{\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}}$ , в-третьих, упорядоченная тройка векторов  $\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}, [\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}]$  является правой тройкой. Как известно из школьного курса геометрии, число  $|\vec{\mathbf{p}}| \cdot |\vec{\mathbf{q}}| \sin \widehat{\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}}$  равно площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}$  (см. раздел П.1, стр.114).

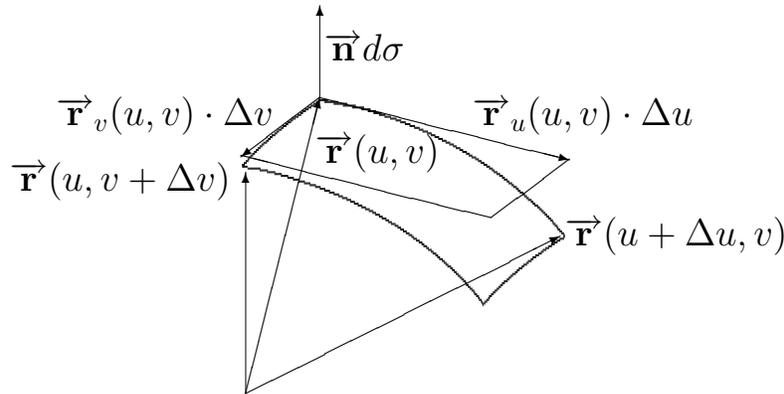


Рис. 2.26. К теореме 8

$\vec{n} d\sigma = d\sigma_{yz} \vec{i} + d\sigma_{xz} \vec{j} + d\sigma_{xy} \vec{k}$ , то  $|d\sigma_{yz}|$ ,  $|d\sigma_{xz}|$ ,  $|d\sigma_{xy}|$  — площади проекций параллелограмма площади  $d\sigma$ , касающегося поверхности  $\sigma$  в точке с координатами  $(x, y, z)$ .

**Пример 11.** Найти выражение для вектора  $\vec{n} d\sigma$  и дифференциала площади поверхности  $d\sigma$  в параметризациях поверхности параболоида  $z = x^2 + y^2$ , полученных при решении примера 10, стр.82.

**Решение**

Способ 1. Получена параметризация  $\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = x^2 + y^2. \end{cases}$ ,

С помощью формулы (2.27), стр.84, и формулы для вычисления векторного произведения (П.2), стр.116 (см.также табл. П.1, стр.118), получаем

$$\begin{aligned} \vec{n} d\sigma &= \pm \vec{r}_x \times \vec{r}_y dx dy = \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} dx dy = \\ &= \pm (-2x \vec{i} - 2y \vec{j} + \vec{k}) dx dy, \\ d\sigma &= |\vec{n} d\sigma| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy. \end{aligned}$$

Заметим, что полученные выражения совпадают с выражениями, получающимися при использовании формул (2.35)-(2.36), стр.93.

Способ 2. Получена параметризация  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = \rho^2. \end{cases}$

Следовательно,  $\vec{r} = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j} + \rho^2 \vec{k}$ , поэтому

$$\vec{r}_\rho = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} + 2\rho \vec{k}, \quad \vec{r}_\varphi = -\rho \sin \varphi \vec{i} + \rho \cos \varphi \vec{j}.$$

Согласно формуле (П.2), стр.116 (см.также табл. П.1)

$$\begin{aligned}\vec{n} d\sigma &= \vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi d\rho d\varphi = \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 2\rho \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} d\rho d\varphi = \\ &= \pm \rho \left( -2\rho \cos \varphi \vec{i} - 2\rho \sin \varphi \vec{j} + \vec{k} \right) d\rho d\varphi. \\ d\sigma &= |\vec{n} d\sigma| = \sqrt{4\rho^2 + 1} d\rho d\varphi.\end{aligned}$$

Способ 3. Получена параметризация

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta = \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta = \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta, \\ z = \operatorname{ctg}^2 \theta. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta \vec{i} + \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta \vec{j} + \operatorname{ctg}^2 \theta \vec{k},$$

поэтому

$$\begin{aligned}\vec{n} d\sigma &= \pm \vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta d\varphi d\theta = \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \varphi \operatorname{ctg} \theta & \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta & 0 \\ -\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \theta} & -\frac{\sin \varphi}{\sin^2 \theta} & -\frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{\sin^2 \theta} \end{vmatrix} d\varphi d\theta = \\ &= \pm \left( -\frac{2 \cos \varphi \operatorname{ctg}^2 \theta}{\sin^2 \theta} \vec{i} - \frac{2 \sin \varphi \operatorname{ctg}^2 \theta}{\sin^2 \theta} \vec{j} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin^2 \theta} \vec{k} \right) d\varphi d\theta, \\ d\sigma &= |\vec{n} d\sigma| = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin^2 \theta} \sqrt{4 \cos^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \theta + 4 \sin^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \theta + 1} d\varphi d\theta = \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin^2 \theta} \sqrt{4 \operatorname{ctg}^2 \theta + 1} d\varphi d\theta.\end{aligned}$$

Пример решен.

## 2.10. Примеры вычисления значений линейных, кратных и поверхностных интегралов

Следует предостеречь от неверной ассоциации формулы (2.27), стр.84:

$$\vec{n} d\sigma = \pm \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} du dv = \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du dv,$$

применяемой при вычислении поверхностных интегралов второго рода, с формулой замены переменных в тройном интеграле:

$$\begin{cases} x = x(u; v; w), \\ y = y(u; v; w), \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \Rightarrow dx dy dz = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix} du dv dw.$$

В данном разделе мы, наконец, рассмотрим способы вычисления интегралов, описанных в предыдущих разделах.

Линейный (криволинейный) интеграл первого рода	Пример 12
Линейный (криволинейный) интеграл второго рода	Пример 13, стр.88
Поверхностный интеграл первого рода	Пример 14, стр.89
Поверхностный интеграл второго рода	Пример 15, стр.90

**Пример 12.** Найдите массу кардиоиды  $C$ :  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ , если линейная плотность задана формулой  $\gamma(\vec{r}) = k \cdot \sqrt{\rho}$ , где  $k$  — положительное число.

**Решение.** Параметризуем линию с помощью полярной системы координат:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\varphi) &= x \vec{i} + y \vec{j} = \rho(\varphi) \cos \varphi \vec{i} + \rho(\varphi) \sin \varphi \vec{j} = \\ &= a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi \vec{i} + a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi \vec{j} = \\ &= a(\cos \varphi + \cos^2 \varphi) \vec{i} + a(\sin \varphi + \cos \varphi \sin \varphi) \vec{j} = \\ &= a \left( \cos \varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) \vec{i} + a \left( \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \vec{j}. \end{aligned}$$

Поэтому  $r = \sqrt{a(1 + \cos \varphi)}$ ,

$$d\vec{r} = \left( a(-\sin \varphi - \sin 2\varphi) \vec{i} + a(\cos \varphi + \cos 2\varphi) \vec{j} \right) d\varphi,$$

$$dr = a \sqrt{((-\sin \varphi - \sin 2\varphi)^2 + (\cos \varphi + \cos 2\varphi)^2)} d\varphi = a \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi.$$

Таким образом,

$$M = \int_C k \sqrt{a(1 + \cos \varphi)} dr = \int_0^{2\pi} k \sqrt{a(1 + \cos \varphi)} \cdot a \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = 2\pi k a \sqrt{2a}.$$

**Пример 13.** Вычислите криволинейный интеграл второго рода от векторного поля<sup>1</sup>  $\vec{F}(x\vec{i} + y\vec{j}) = -y\vec{j} + x\vec{j}$  вдоль границы  $L_0$  области  $\begin{cases} y \geq x^2, \\ y \leq x + 2 \end{cases}$  (обходимой в положительном направлении, то есть против часовой стрелки).

**Замечание.** Ниже мы рассмотрим другой способ вычисления этого интеграла (см. пример 16, стр.97).

**Решение.** Параметризация границы  $L_0$  данной области будет состоять из двух частей (рис.2.27): параметризация дуги  $L_1$  параболы  $y = x^2$  и параметризация отрезка прямой  $L_2$ , заданной уравнением  $y = 2 + x$ . Проще всего в данном случае это сделать непосредственно в

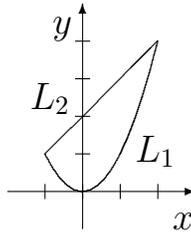


Рис. 2.27. К задаче 13

исходной декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} L_1 : \begin{cases} x = \alpha, \\ y = \alpha^2 \end{cases} &\Rightarrow \vec{r}(\alpha) = \alpha\vec{i} + \alpha^2\vec{j}, \\ &d\vec{r} = (\vec{i} + 2\alpha\vec{j}) d\alpha; \\ L_2 : \begin{cases} x = \beta, \\ y = \beta + 2 \end{cases} &\Rightarrow \vec{r}(\beta) = \beta\vec{i} + (\beta + 2)\vec{j}, \\ &d\vec{r} = (\vec{i} + \vec{j}) d\beta. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Найдем значения параметров, соответствующие каждой из точек пересечения этих линий.

Вычисляя двумя способами координаты этой точки, получаем систему  $\begin{cases} \alpha = \beta, \\ \alpha^2 = \beta + 2, \end{cases}$  откуда

$\begin{cases} \alpha = \beta = -1, \\ \alpha = \beta = 2. \end{cases}$  Обход границы происходит против часовой стрелки, поэтому для линии  $L_1$  значения параметра  $\alpha$  изменяются от  $-1$  до  $2$ , а для линии  $L_2$  значения параметра  $\beta$  изменяются от  $2$  до  $-1$ .

Таким образом, искомый интеграл второго рода можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{L_0} (-y\vec{i} + x\vec{j}) d\vec{r} &= \int_{L_1} (-y\vec{i} + x\vec{j}) d\vec{r} + \int_{L_2} (-y\vec{i} + x\vec{j}) d\vec{r} = \\ &= \int_{-1}^2 (-\alpha^2\vec{i} + \alpha\vec{j}) (\vec{i} + 2\alpha\vec{j}) d\alpha + \int_2^{-1} (-(\beta + 2)\vec{i} + \beta\vec{j}) (\vec{i} + \vec{j}) d\beta = \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Используя, например, методы, примененные при решении задач раздела 1.4, стр.21, нетрудно понять, что это поле скоростей плоскости, вращающейся вокруг начала координат против часовой стрелки с угловой скоростью 1.

$$= \int_{-1}^2 (-\alpha^2 + \alpha \cdot 2\alpha) d\alpha + \int_2^{-1} (-(\beta + 2) + \beta) d\beta = 3 + 6 = 9.$$

**Пример 14.** Вычислите площадь той части поверхности цилиндра  $x^2 + y^2 = Rx$ , которая находится внутри сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

**Решение**

Способ 1 — вычисление в декартовых координатах.

Параметризуем поверхность цилиндра:  $\begin{cases} x = x; \\ y = \pm\sqrt{Rx - x^2} = y(x, z). \\ z = z. \end{cases}$  В силу теоремы 8,

стр.83, о векторе  $\vec{n} d\sigma$  параметрически заданной поверхности, имеем

$$\vec{n} d\sigma = \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{-2x + R}{2\sqrt{Rx - x^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dx dz = \pm \left( \frac{R - 2x}{2\sqrt{Rx - x^2}} \vec{i} - \vec{j} \right) dx dz,$$

$$\begin{aligned} d\sigma &= |\vec{n} d\sigma| = \sqrt{1 + \frac{(R - 2x)^2}{4(Rx - x^2)}} dx dz = \\ &= \frac{\sqrt{R^2 - 4Rx + 4x^2 + 4Rx - 4x^2}}{2\sqrt{Rx - x^2}} dx dz = \frac{R dx dz}{2\sqrt{Rx - x^2}}. \end{aligned}$$

Расставим пределы интегрирования в двойном интеграле (надо “избавиться” от переменной  $y$ ):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 = Rx \end{cases} \Rightarrow Rx + z^2 = R^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{R^2 - Rx}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S &= 2 \iint_{\sigma} \frac{R dx dz}{2\sqrt{Rx - x^2}} = 2 \int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - Rx}}^{\sqrt{R^2 - Rx}} \frac{R dz}{2\sqrt{Rx - x^2}} = \frac{2R}{2} \int_0^R \frac{2\sqrt{R^2 - Rx}}{\sqrt{Rx - x^2}} dx = \\ &= 2R\sqrt{R} \int_0^R \frac{\sqrt{R - x}}{\sqrt{x}\sqrt{R - x}} dx = 2R\sqrt{R} \cdot 2\sqrt{x} \Big|_0^R = 4R^2. \end{aligned}$$

Способ 2 — вычисление в цилиндрических координатах.

Параметризуем поверхность цилиндра, для чего подставим равенства, связывающие полярные и декартовы координаты:  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z, \end{cases}$  в уравнение цилиндра  $x^2 + y^2 = Rx$ , получим  $\rho^2 = R\rho \cos \varphi$ , т.е.  $\rho = R \cos \varphi$ . Последнее равенство означает, в частности, что  $\cos \varphi \geq 0$ .

Поэтому можно считать, что  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Подставляя полученное выражение для  $\rho$  в приведенные выше формулы связи полярных и декартовых координат, получаем параметризацию

$$\begin{cases} x = R \cos^2 \varphi = \frac{R}{2}(1 + \cos 2\varphi), \\ y = R \cos \varphi \sin \varphi = \frac{R}{2} \sin 2\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

По теореме 8, стр.83, о векторе  $\vec{n} d\sigma$  параметрически заданной поверхности имеем

$$\begin{aligned} \vec{n} d\sigma &= \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R \sin 2\varphi & R \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} d\varphi dz = \\ &= \pm (R \cos 2\varphi \vec{i} + R \sin 2\varphi \vec{j}) d\varphi dz; \quad d\sigma = |\vec{n} d\sigma| = R d\varphi dz. \end{aligned}$$

Для расстановки пределов интегрирования подставим параметризацию цилиндра в уравнение шара:

$$\left(\frac{R}{2}(1 + \cos 2\varphi)\right)^2 + \left(\frac{R}{2} \sin 2\varphi\right)^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow z = \pm R \sin \varphi.$$

Мы должны вычислять интеграл для изменения угла из отрезка  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  (это мы обнаружили в ходе получения параметризации цилиндра), поэтому воспользуемся симметричностью подынтегральной функции и “уполовиним” отрезок интегрирования по  $\varphi$

$$S = \iint_{\sigma'} R d\varphi dz = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{-R \sin \varphi}^{R \sin \varphi} R dz = 2 \int_0^{\pi/2} 2R^2 \sin \varphi d\varphi = 4R^2,$$

что совпадает с результатом вычислений первым способом.

**Пример 15.** Найти поток векторного поля  $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r} \times \vec{i}$  через четверть сферы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2z; \\ x \geq 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

**Замечание.** Ниже мы приведем другой способ решения этой задачи (см. пример 17, стр.98).

**Решение.** Параметризуем данную сферу (рис. 2.28) с помощью сферической системы координат. Для этого выражения (2.25), стр.79, для декартовых координат точки, заданной сферическими координатами, подставим в исходное уравнение сферы  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ . После очевидных упрощений получим  $r \cdot (r - 2 \cos \theta) = 0$ . Таким образом, для любой точки сферы, кроме, быть может, начала координат<sup>2</sup>, имеем  $r = 2 \cos \theta$ . Подставляя найденное выражение

<sup>2</sup>На самом деле опасения, что начало координат может не удовлетворять полученным ниже параметрическим уравнениям, не подтверждаются. Для проверки достаточно подставить в полученные ниже уравнения значения параметров  $(\varphi; \theta) = (0; 0)$ .

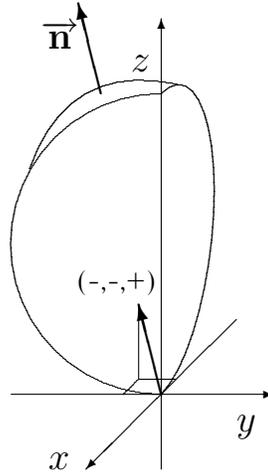


Рис. 2.28. К задаче 15

для  $r$  в формулу (2.25), стр.79, получаем искомую параметризацию

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta \cos \varphi \sin \theta, \\ y = 2 \cos \theta \sin \varphi \sin \theta, \\ z = 2 \cos \theta \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos \varphi \sin 2\theta, \\ y = \sin \varphi \sin 2\theta, \\ z = 1 + \cos 2\theta. \end{cases} \quad (2.29)$$

Иными словами, радиус-вектор любой точки этой сферы имеет вид

$$\vec{r}(\varphi; \theta) = \cos \varphi \sin 2\theta \vec{i} + \sin \varphi \sin 2\theta \vec{j} + (1 + \cos 2\theta) \vec{k}. \quad (2.30)$$

Для того чтобы обеспечить взаимную однозначность системы координат<sup>3</sup> (т.е. взаимно однозначное соответствие между координатами и точками пространства), мы будем считать, например, что  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Из условий  $x \leq 0$  и  $y \leq 0$  получаем

$$\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2.31)$$

Вектор  $\vec{n} d\sigma$  найдем с помощью теоремы 8, стр.83, о векторе  $\vec{n} d\sigma$  параметрически заданной поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{r}(\varphi; \theta) &= -\sin \varphi \sin 2\theta \vec{i} + \cos \varphi \sin 2\theta \vec{j}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{r}(\varphi; \theta) &= 2 \cos \varphi \cos 2\theta \vec{i} + 2 \sin \varphi \cos 2\theta \vec{j} - 2 \sin 2\theta \vec{k}, \end{aligned}$$

откуда, в силу упомянутой теоремы 8, стр.83, и формулы (П.2), стр.116 получаем

$$\vec{n} d\sigma = \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \varphi \sin 2\theta & \cos \varphi \sin 2\theta & 0 \\ 2 \cos \varphi \cos 2\theta & 2 \sin \varphi \cos 2\theta & -2 \sin 2\theta \end{vmatrix} d\varphi d\theta =$$

<sup>3</sup>В разделе 2.8, стр.76, мы установили, что система координат есть функция.

$$= \pm \left( -2 \cos \varphi \sin^2 2\theta \vec{i} - 2 \sin \varphi \sin^2 2\theta \vec{j} - 2 \sin 2\theta \cos 2\theta \vec{k} \right) d\varphi d\theta.$$

Для того чтобы выбирать нужный знак, возьмем, например, точку на сфере, отвечающую значениям параметров  $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ ,  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ . Из рис. 2.28 видно, что вектор нормали должен иметь строку координат, знаки которых имеют вид  $(-, -, +)$ , т.е. первая и вторая координаты — отрицательные, а третья координата — положительная. Исходя из этих соображений, получаем

$$\vec{n} d\sigma = \left( 2 \cos \varphi \sin^2 2\theta \vec{i} + 2 \sin \varphi \sin^2 2\theta \vec{j} + 2 \sin 2\theta \cos 2\theta \vec{k} \right) d\varphi d\theta. \quad (2.32)$$

Найдем координатные функции векторного поля  $\vec{a}(\vec{r})$ :

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = z\vec{j} - y\vec{k}.$$

Следовательно, согласно (2.30) для любой точки  $M(\varphi, \theta)$  сферы, отвечающей значениям параметров  $\varphi, \theta$ , имеем

$$\vec{a}(\vec{OM}(\varphi, \theta)) = z(\varphi, \theta)\vec{j} - y(\varphi, \theta)\vec{k} = (1 + \cos 2\theta)\vec{j} - \sin \varphi \sin 2\theta \vec{k}.$$

Используя эту формулу и формулу (2.32), получаем искомый поток поля:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (\vec{r} \times \vec{i}) \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_G \left( (1 + \cos 2\theta)\vec{j} - \sin \varphi \sin 2\theta \vec{k} \right) \cdot \\ &\cdot \left( 2 \cos \varphi \sin^2 2\theta \vec{i} + 2 \sin \varphi \sin^2 2\theta \vec{j} + 2 \sin 2\theta \cos 2\theta \vec{k} \right) d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\pi}^{3\pi/2} 2 \sin \varphi \sin^2 2\theta d\varphi = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

## 2.11. Резюме: интегралы, применяемые в теории поля

### Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Кривая  $L$

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{— параметрическое задание в координатной форме.}$$

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$  — параметрическое задание в векторной форме.

Дифференциалы:

$$d\vec{r} = \left( x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} \right) dt, \quad dr = |d\vec{r}| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt. \quad (2.33)$$

Здесь  $d\vec{r} = \vec{T} dt$  — такой вектор, что

$$\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \vec{T} \Delta t + \vec{s}(t, \Delta t) = d\vec{r} + \vec{s}(t, \Delta t),$$

причем  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\vec{s}(t, \Delta t)|}{\Delta t} = 0$ . Иными словами, с точки зрения интуитивных представлений,  $d\vec{r} = \vec{T} \Delta t$  — это вектор, касательный к дуге  $\cap \left( \vec{r}(t), \vec{r}(t + \Delta t) \right)$  кривой  $L$ , соответствующей  $\Delta t$  настолько малому, что можно считать эту дугу приблизительно совпадающей с  $d\vec{r}$ , причем длина последнего вектора (приблизительно равная длине этой дуги) обозначается через  $dr$ .

### Поверхность $\sigma$

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad \text{— параметрическое задание в координатной форме.}$$

$\vec{r}(u, v) = x(u, v) \vec{i} + y(u, v) \vec{j} + z(u, v) \vec{k}$  — параметрическое задание в векторной форме.

Дифференциалы:

$$d\vec{r} = \vec{n} d\sigma = \pm \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} du dv = d\sigma_{yz} \vec{i} + d\sigma_{xz} \vec{j} + d\sigma_{xy} \vec{k}, \quad (2.34)$$

$$d\sigma = |d\vec{r}| = |\vec{n} d\sigma|,$$

где  $d\vec{r}$  — вектор, перпендикулярный к участку поверхности  $\sigma$  настолько малому, что этот участок приблизительно можно считать плоским, причем площадь этого участка равна  $d\sigma$  (это интуитивное представление),  $d\sigma_{yz}$ ,  $d\sigma_{xz}$ ,  $d\sigma_{xy}$  — площади проекций малой площадки  $d\sigma$ , касающейся поверхности  $\sigma$  в точке с координатами  $(x, y, z)$ . Если поверхность задана уравнением  $z = f(x, y)$ , то можно выбрать следующую параметризацию этой поверхности:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = f(x, y). \end{cases} \quad \text{В этом случае}$$

$$\vec{n} d\sigma = \pm \left( f_x(x, y) \vec{i} + f_y(x, y) \vec{j} - \vec{k} \right) dx dy, \quad (2.35)$$

$$d\sigma = \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} dx dy. \quad (2.36)$$

В табл. 2.2 систематизированы обозначения и названия интегралов, применяемых в теории поля или используемых для вычислений в теории поля. На рис. 2.2, стр.29 схематически изображены все интегралы и отношения между ними.

Таблица 2.2

Обозначение интеграла	Название интеграла
$\int_L f(\vec{r}) dr$	Криволинейный интеграл 1-го рода
$\int_L \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r}$	Криволинейный интеграл 2-го рода
$\iint_G f(x, y) dx dy$	Двойной интеграл
$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$	Тройной интеграл
$\iint_{\sigma} f(\vec{r}) d\sigma$	Поверхностный интеграл 1-го рода
$\iint_{\sigma} \vec{a}(\vec{r}) \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} \vec{a}(\vec{r}) \vec{d}\sigma$	Поверхностный интеграл 2-го рода

## 2.12. Задачи по теме “Вычисление линейных и поверхностных интегралов”

Ответы приведены на стр.135.

- 1) Вычислите массу дуги линии  $L$ , у которой радиус-вектор любой точки удовлетворяет равенству  $\vec{OM} = t \vec{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}} \vec{j} + \frac{t^3}{3} \vec{k}$ , где  $t \in \mathbb{R}$  от точки  $O(0, 0, 0)$  до точки  $B\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ , если линейная плотность задана формулой  $\rho(x, y, z) = \frac{y}{x + 3z}$ .
- 2) Определите тип интеграла  $\int_L 6y dx + 3x dy$  и вычислите его, если  $L$  — дуга параболы  $\begin{cases} y = x^2, \\ y \leq x + 2. \end{cases}$
- 3) Вычислите значение интеграла, полученного при решении задачи 5, стр.30.
- 4) Вычислите интеграл, полученный при решении примера 6, стр.33.
- 5) Вычислите интеграл, полученный при решении примера 7, стр.38.
- 6) Вычислите интеграл от поля градиентов скалярного поля  $f(x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = xy$  по части поверхности конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ , находящейся внутри цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = 2x$  выше плоскости  $Oxy$ .

- 7) Определите тип интеграла  $\int_L y^2 dx - x^2 dy$  и вычислите его, если  $L$  — дуга окружности, заданной системой отношений  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ y \leq x. \end{cases}$
- 8) Вычислите криволинейный интеграл второго рода от  $\vec{a} = x \vec{j}$  вдоль ломаной  $ABCD$ , где  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(0, 3)$ ,  $D(2, 3)$ .
- 9) Вычислите работу силового поля  $\vec{F} = x^2 y \vec{i} + \frac{x^3}{3} \vec{j}$  при перемещении материальной точки вдоль каждой из дуг: а)  $y = x$ ; б)  $y = x^2$  от точки  $A(0, 0)$  до точки  $B(1, 1)$ .
- 10) Найдите поток через боковую поверхность конуса  $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$  от векторного поля  $\vec{F}$ , каждой точке  $M$  пространства сопоставляющего вектор, направленный к точке  $A(1; 0; 1)$  и по модулю равный удвоенному расстоянию от точки  $M$  до точки  $A$ .

### 2.13. Формула Стокса и формула Гаусса-Остроградского

**Теорема 10 (формула Стокса).** Пусть  $\sigma$  — конечная кусочно-гладкая поверхность, натянутая на кусочно-гладкий контур  $L$ , причем ориентации контура  $L$  и поверхности  $\sigma$  согласованы стандартным образом<sup>1</sup>, и  $\vec{a}$  — векторное поле,

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k},$$

причем координатные функции  $P, Q, R$  непрерывны вместе со своими частными производными в области  $G$  пространства, где  $\sigma \subset G$ . Тогда

$$\int_L \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r} = \iint_{\sigma} \text{rot}(\vec{a}) \vec{n} d\sigma.$$

**Доказательство.** Пусть  $T$  — разбиение<sup>2</sup> поверхности  $\sigma$ ,  $X$  — элемент этого разбиения (таким образом,  $X$  — поверхность, являющаяся частью поверхности  $\sigma$ ). Обозначим через  $C(X)$  ориентированный контур, являющийся границей поверхности  $X$ . По теореме 3, стр.46, о циркуляции по границам

<sup>1</sup>Т.е. при обходе границы в положительном направлении область остается слева.

<sup>2</sup>Разумеется, мы считаем, что все элементы разбиения имеют кусочно-гладкую границу.

разбиения поверхности интеграл по контуру  $C(X)$  является суммой линейных интегралов по всем контурам  $C(X)$ , где  $X$  пробегает все множество  $T$ :

$$\int_L \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r} = \sum_{X \in T} \int_{C(X)} \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Поэтому, в силу теоремы 7, стр.61, о роторе и циркуляции

$$\int_{C(X)} \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r} \approx \text{rot}(\vec{a}) \cdot \vec{n} \cdot \iint_X d\sigma \approx \iint_X \text{rot}(\vec{a}) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Таким образом,

$$\int_L \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r} \approx \sum_{X \in T} \iint_X \text{rot}(\vec{a}) \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} \text{rot}(\vec{a}) \vec{n} d\sigma.$$

Все эти равенства выполняются с точностью до бесконечно малых функций порядка, большего  $\mu(X)$ . Поэтому, переходя к пределу по  $\text{diam}(T) \rightarrow 0$ , получаем, что это равенство является точным:

$$\int_L \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r} = \iint_{\sigma} \text{rot}(\vec{a}) \vec{n} d\sigma.$$

Теорема доказана.

**Теорема 11 (формула Гаусса-Остроградского).** Пусть область  $V$  ограничена кусочно-гладкой поверхностью  $\sigma(V)$ ,  $\vec{a}$  — векторное поле,

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

причем координатные функции  $P, Q, R$  непрерывны вместе со своими частными производными на области  $\bar{V}$ . Тогда

$$\iint_{\sigma(V)} \vec{a}(\vec{r}) \vec{n} d\sigma = \iiint_V \text{div}(\vec{a}(\vec{r})) dx dy dz. \quad (2.37)$$

**Доказательство.** Рассмотрим разбиение<sup>3</sup>  $T$  области  $V$ . По теореме 4, стр.47, о потоке по границам разбиения имеем

$$\iint_{\sigma(V)} \vec{a}(\vec{r}) \vec{n} d\sigma = \sum_{X \in T} \iint_{\sigma(X)} \vec{a}(\vec{r}) \vec{n} d\sigma.$$

<sup>3</sup>Разумеется, мы считаем, что все элементы разбиения имеют кусочно-гладкую поверхность.

С точностью до бесконечно малых порядка, большего  $\mu(X)$ , по формуле (2.17), стр.56 из определения дивергенции имеем равенство

$$\iint_{\sigma(X)} \vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}}) \vec{\mathbf{n}} d\sigma \approx \operatorname{div}(\vec{\mathbf{a}}) \cdot \iiint_X dV \approx \iiint_X \operatorname{div}(\vec{\mathbf{a}}) dV.$$

Поэтому

$$\iint_{\sigma(V)} \vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}}) \vec{\mathbf{n}} d\sigma = \sum_{X \in T} \iint_{\sigma(X)} \vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}}) \vec{\mathbf{n}} d\sigma \approx \sum_{X \in T} \iiint_X \operatorname{div}(\vec{\mathbf{a}}) dV.$$

Переходя к пределу по  $\mu(X) \rightarrow 0$ , получаем требуемое равенство

$$\iint_{\sigma(V)} \vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}}) \vec{\mathbf{n}} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}})) dx dy dz.$$

Теорема доказана.

**Пример 16.** Решить задачу 13, стр.88, с помощью формулы Стокса.

**Решение.** Для применения формулы Стокса “выйдем из плоскости в пространство”, т.е. доопределим векторное поле  $\vec{\mathbf{F}}$  на трехмерном пространстве таким образом, чтобы ограничение нового поля  $\vec{\mathbf{E}}$  на плоскость  $xOy$  совпадало с  $\vec{\mathbf{F}}$ . Например, положим

$$\vec{\mathbf{E}}(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}) = -y\vec{\mathbf{j}} + x\vec{\mathbf{j}} + 0\vec{\mathbf{k}}.$$

Линия  $L_0$  в рассматриваемом случае задается системой

$$\begin{cases} y \geq x^2, \\ y \leq x + 2, \\ z = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{L_0} \vec{\mathbf{F}}(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}) d\vec{\mathbf{r}} = \int_{L_0} \vec{\mathbf{E}}(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}) d\vec{\mathbf{r}}.$$

Для применения формулы Стокса надо вычислить ротор векторного поля  $\vec{\mathbf{E}}$ :

$$\operatorname{rot}(\vec{\mathbf{E}}) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{\mathbf{k}}.$$

Обозначим через  $G$  часть плоскости  $xOy$ , ограниченную линией  $L_0$  (рис. 2.27, стр.88). Очевидно, что для поверхности  $G$  имеем  $\vec{n} d\sigma = \vec{k} d\sigma$ , поэтому согласно формуле Стокса

$$\begin{aligned} \int_{L_0} \vec{E} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) d\vec{r} &= \int_{L_0} (-y \vec{i} + x \vec{j}) d\vec{r} = \\ &= \iint_G 2 \vec{k} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_G 2 \vec{k} \cdot \vec{k} d\sigma = \iint_G 2 d\sigma = 2 \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} dy = 2 \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \\ &= 2 \left( \left( \frac{x^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right) + 6 - \left( \frac{x^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) = 9, \end{aligned}$$

что совпадает с результатами вычисления “по-честному” при решении примера 13, стр.88.

**Пример 17.** Решить задачу 15, стр.90, с помощью формулы Гаусса-Остроградского.

**Решение.** Из рис. 2.28, стр.91, видно, что полная поверхность четверти шара является объединением четверти сферической поверхности и поверхностей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , где  $\sigma_1$  — часть плоскости  $xOz$ ,  $\sigma_2$  — часть плоскости  $yOz$ , заданные системами уравнений и неравенств

$$\sigma_1 : \begin{cases} y^2 + z^2 \leq 2z, \\ x = 0, \end{cases} \quad \sigma_2 : \begin{cases} x^2 + z^2 \leq 2z, \\ y = 0. \end{cases}$$

Тогда в силу теоремы Гаусса-Остроградского

$$\begin{aligned} \iiint_{\sigma} \vec{a}(\vec{r}) \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_{\sigma} (z \vec{j} - y \vec{k}) \cdot \vec{n} d\sigma = \\ &= \iiint_V \operatorname{div} (z \vec{j} - y \vec{k}) dV - \iint_{\sigma_1} (z \vec{j} - y \vec{k}) \cdot \vec{n} d\sigma - \iint_{\sigma_2} (z \vec{j} - y \vec{k}) \cdot \vec{n} d\sigma = \\ &= 0 - \iint_{\sigma_1} (z \vec{j} - y \vec{k}) \cdot \vec{j} d\sigma - \iint_{\sigma_2} (z \vec{j} - y \vec{k}) \cdot \vec{i} d\sigma = - \iint_{G_{xz}} z dy dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^2 z dz \int_0^{\sqrt{2z-z^2}} dy = \int_0^2 z \sqrt{2z-z^2} dz = \left[ \begin{array}{l} z = 1 + \sin t \\ dz = \cos t dt \\ z = 0 \mapsto t = -\pi/2 \\ z = 2 \mapsto t = \pi/2 \end{array} \right] = \\
&= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \sin t) \cdot |\cos t| \cdot \cos t dt = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \sin t) \cos^2 t dt = -\pi/2,
\end{aligned}$$

что совпадает с результатом, полученным при решении примера 15, стр.90.

## 2.14. Основные результаты второй главы

Определены линейные (криволинейные) и поверхностные интегралы I и II рода. Связи между интегралами изображены на рис. 2.2, стр.29. В разделе 2.3.1, стр.44, и последующих описаны свойства интегралов по фигуре. Вычисление этих интегралов удобнее всего проводить с помощью параметризации линий и поверхностей. Некоторые способы параметризации линий и поверхностей рассмотрены в разделе 2.9, стр.79. Эти способы основаны на понятии системы координат (см. раздел 2.8, стр.76). В некоторых ситуациях (часто встречающихся в исследованиях) вычисление линейных интегралов можно упростить с помощью теоремы Стокса (формула Стокса, теорема 10, стр.95) и теоремы Гаусса-Остроградского (формула Гаусса-Остроградского, теорема 11, стр.96).

Дифференциальное преобразование скалярного поля, называемое **градиентом**, введено определением 20, стр.51, дифференциальные операции векторного поля **дивергенция** и **ротор** — соответственно определениями 22, стр.56, и 23, стр.60. При решении задач координатным методом градиент может быть вычислен с помощью формулы (2.16), стр.55, дивергенция — формулы (2.18), стр.58, ротор — формулы (2.22), стр.67.

Доказаны теорема 5, стр.52, о связи градиента с производной по направлению, теорема 6, стр.54, об ортогональности градиента и линии (поверхности) уровня. Теорема 7, стр.61, о роторе и циркуляции устанавливает еще одно важное “физическое определение” ротора, задаваемое формулой (2.20), стр.61. Всю эту информацию мы собрали в табл. 2.1, стр.67.

---

В исследованиях в области векторного анализа широко применяется компактный и удобный язык, основанный на использовании так называемого “оператора  $\vec{\nabla}$ ”. Описанию грамматических правил этого языка посвящен раздел [2.6](#), стр.[69](#).

## Глава 3

# Некоторые применения теории скалярного и векторного полей

### 3.1. Потенциальное и соленоидальное поля

В каком направлении развивать исследование? Разумеется, вопрос в такой общей постановке имеет слишком много возможных ответов: можно обобщить понятие векторного поля и рассмотреть, например, поле линейных операторов, билинейных или квадратичных форм (эти исследования востребованы в физике), можно вводить новые преобразования скалярных и векторных полей, можно рассмотреть частные случаи. Поэтому уточним вопрос: какие из частных случаев скалярных и векторных полей следует рассмотреть в первую очередь?

Можно рассмотреть поля, являющиеся результатом применения дифференциальных преобразований (градиента, дивергенции, ротора). Градиент скалярного поля является векторным полем. Возникает естественный вопрос: любое ли векторное поле является полем градиентов некоторого скалярного поля? Поле скоростей вращающейся пластинки  $\vec{a}(x\vec{i} + y\vec{j}) = -y\vec{i} + x\vec{j}$  доставляет пример векторного поля, для которого не существует такого скалярного поля  $\varphi$ , что  $\text{grad } \varphi = \vec{a}$  (доказывать это мы сейчас не будем). Таким образом, интерес представляет класс векторных полей, которые являются полем градиентов некоторого скалярного поля (так называемые потенциальные поля).

Аналогичная ситуация складывается с полями, представимыми в виде ротора некоторого векторного поля.

Мы реализуем в данном разделе еще одно направление. Одной из эффективных исследовательских стратегий является стратегия приоритетного исследования экстремальных ситуаций. Рассмотрим табл. 2.1, стр.67. Одним из перспективных вариантов исследования является наложение требования “экстремальности” значения соответствующей дифференциальной операции. Одним из наиболее очевидных “экстремальных” видов поля является нулевое поле (точнее, нулевые поля — скалярное и векторное). Скалярное поле, для которого нулевым является градиент, не представляет интереса, поскольку, очевидно, оно является постоянным (функцией-константой). Поэтому было бы полезно рассмотреть векторные поля с нулевой дивергенцией (так называемые соленоидальные поля), а также векторные поля с нулевым ротором<sup>1</sup>.

### 3.1.1. Потенциальное поле

**Определение 26.** Векторное поле  $\vec{a}(\vec{r})$  называется **потенциальным** в области  $D$  тогда и только тогда, когда существует такое скалярное поле  $\varphi(\vec{r})$ , что для любого<sup>2</sup>  $\vec{r} \in D$  имеет место равенство  $\text{grad } \varphi = \vec{a}$ . При этом скалярное поле  $\varphi$  называется **потенциалом** поля  $\vec{a}$  в области  $D$ .

**Теорема 12 (критерий потенциальности).** Векторное поле  $\vec{a}$  является потенциальным в области  $D$  тогда и только тогда, когда для любого  $\vec{r} \in D$  имеет место равенство  $\text{rot } \vec{a}(\vec{r}) = \vec{0}$ , т.е. когда поле  $\vec{a}$  является безвихревым.

**Доказательство.** Пусть поле  $\varphi$  является потенциальным и  $\varphi$  — его потенциал. Применим правила работы с оператором  $\vec{\nabla}$  (см. раздел 2.6, стр.69). Имеем

$$\text{rot } \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{\nabla} \times (\text{grad } \varphi) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \varphi = \vec{0}.$$

Необходимость доказана. Докажем достаточность. Пусть у векторного поля  $\vec{a}$  ротор — нулевой. Продолжение доказательства использует следующую теорему.

<sup>1</sup>Результаты исследования представлены в табл. 3.1, стр.113.

<sup>2</sup>Имеется в виду, что  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки из  $D$ .

**Теорема 13 (об интеграле от потенциального поля).** Если в области  $D$  векторное поле  $\vec{a}(\vec{r})$  является потенциальным, то для любого кусочно-гладкого замкнутого контура  $C$ , включающегося в область  $D$ , имеет место равенство  $\int_C \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r} = 0$ .

**Доказательство.** Эта теорема является прямым следствием формулы Стокса — теоремы 10, стр.95, и критерия потенциальности поля (точнее, уже доказанной необходимости условия “отсутствия вихрей”) — теоремы 12. Теорема доказана.

**Следствие 1 (из теоремы об интеграле от потенциального поля).** Если в области  $D$  векторное поле  $\vec{a}(\vec{r})$  является потенциальным, то для любых точек  $A, B$  из  $D$  и любых кусочно-гладких ориентированных линий  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ , начинающихся в точке  $A$  и заканчивающихся в  $B$ ,

$$\int_{\mathcal{L}_1} \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\mathcal{L}_2} \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

Иными словами, криволинейный интеграл второго рода от потенциального поля не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от начальной и конечной точек.

**Доказательство.** Обозначим через  $\mathcal{L}_2^-$  ориентированную линию, отличающуюся от  $\mathcal{L}_2$  только ориентацией, т.е. начало этой линии находится в точке  $B$ , а конец — в точке  $A$ . Тогда объединение ориентированных линий  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2^-$  образует замкнутый контур, поэтому  $\int_{\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2^-} \vec{a} d\vec{r} = 0$ . Следовательно,

$$0 = \int_{\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2^-} \vec{a} d\vec{r} = \int_{\mathcal{L}_1} \vec{a} d\vec{r} + \int_{\mathcal{L}_2^-} \vec{a} d\vec{r} = \int_{\mathcal{L}_1} \vec{a} d\vec{r} - \int_{\mathcal{L}_2} \vec{a} d\vec{r}.$$

Следствие доказано.

**Продолжение доказательства** теоремы 12, стр.102. Зафиксируем точку  $M_0$  в области  $D$  и возьмем произвольную точку  $M$  из  $D$ . По следствию 1

из теоремы об интеграле от потенциального поля имеем, что линейный интеграл второго рода  $\int_{M_0}^M \vec{a} d\vec{r}$  по линии с концами в точках  $M_0$  и  $M$  не зависит от формы линии, по которой производится интегрирование. Поэтому этот интеграл определяет скалярное поле

$$\varphi(\overrightarrow{OM}) = \int_{M_0}^M \vec{a} d\vec{r}. \quad (3.1)$$

Докажем, что  $\varphi$  является потенциалом поля  $\vec{a}$ . Для этого надо доказать, во-первых, что в любой точке  $M$  направление вектора<sup>3</sup>  $\text{grad } \varphi(\overrightarrow{OM})$  совпадает с направлением вектора  $\vec{a}(\overrightarrow{OM})$ , и, во-вторых, что  $|\text{grad } \varphi(\overrightarrow{OM})| = |\vec{a}(\overrightarrow{OM})|$ .

Возьмем точку  $M_1$  из области  $D$  и обозначим через  $\sigma$  поверхность (линию) уровня поля  $\varphi$ , соответствующую значению  $\varphi(\overrightarrow{OM}_1)$ . Для того чтобы доказать коллинеарность векторов  $\vec{a}(\overrightarrow{OM}_1)$  и  $\text{grad } \varphi(\overrightarrow{OM}_1)$ , воспользуемся теоремой 6, стр.54, об ортогональности градиента и линии уровня, согласно которой нам достаточно доказать ортогональность вектора  $\vec{a}(\overrightarrow{OM}_1)$  к поверхности  $\sigma$ .

Пусть некоторый касательный вектор  $\vec{\Gamma}$  поверхности уровня поля  $\varphi$  не ортогонален к вектору  $\vec{a}(\overrightarrow{OM}_1)$ . Поскольку вектор  $\vec{\Gamma}$  является касательным, то на поверхности лежит такая линия  $L$ , что

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{M \in L, \\ M \rightarrow M_1}} \frac{\overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{M_1M}|} = \lambda \vec{\Gamma}. \end{array} \right.$$

Значит, с точностью до бесконечно малых порядка, большего  $|\overrightarrow{M_1M}|$ , имеет место приближенное равенство

$$\overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{OM} \approx |\overrightarrow{M_1M}| \cdot \lambda \vec{\Gamma},$$

<sup>3</sup>Подчеркнем, что при полной расстановке скобок это выражение записывается как  $(\text{grad } \varphi)(\overrightarrow{OM})$ .

поэтому по свойству аддитивности

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{|\overrightarrow{M_1M}|} \varphi(\overrightarrow{OM_1}) - \varphi(\overrightarrow{OM}) = \frac{1}{|\overrightarrow{M_1M}|} \int_{M_1}^M \vec{a} \, d\vec{r} \approx \\
 &\approx \frac{1}{|\overrightarrow{M_1M}|} \overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{a}(\overrightarrow{OM_1}) = \frac{1}{|\overrightarrow{M_1M}|} (\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM}) \cdot \vec{a}(\overrightarrow{OM_1}) \approx \\
 &\approx \frac{1}{|\overrightarrow{M_1M}|} \cdot |\overrightarrow{M_1M}| \cdot \lambda \vec{1} \cdot \vec{a}(\overrightarrow{OM_1}) = \lambda \vec{1} \cdot \vec{a}(\overrightarrow{OM_1}).
 \end{aligned}$$

Сравнивая начальное и конечное выражения в этой цепочке равенств, получаем, что с точностью до бесконечно малых порядка, большего  $|\overrightarrow{M_1M}|$ ,

$$\lambda \vec{1} \cdot \vec{a}(\overrightarrow{OM_1}) \approx 0.$$

Переходя к пределу при  $|\overrightarrow{M_1M}| \rightarrow 0$  по точкам  $M$  из линии  $L$ , получаем, что это равенство является точным. Следовательно, мы доказали ортогональность вектора  $\vec{a}(\overrightarrow{OM_1})$  к поверхности  $\sigma$ , т.е. векторы  $\vec{a}(\overrightarrow{OM_1})$  и  $\text{grad} \varphi(\overrightarrow{OM_1})$ .

Осталось доказать их сонаправленность и равенство длин. Возьмем произвольную точку  $M_1$  из  $D$  и ограниченную область  $\sigma_1$  на поверхности уровня поля  $\varphi$ , проходящую через точку  $M_1$ , т.е. соответствующую значению поля  $\varphi(\overrightarrow{OM_1})$ . Возьмем ненулевое число  $t \approx 0$  и обозначим через  $M_2$  точку, удовлетворяющую условию

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + t \cdot \vec{a}(\overrightarrow{OM_1}).$$

Обозначим через  $\sigma_2$  проекцию области  $\sigma_1$  на поверхность уровня поля  $\varphi$ , проходящую через точку  $M_1$ , т.е. соответствующую значению поля  $\varphi(\overrightarrow{OM_1})$  (рис.3.1). Обозначим через  $S(\sigma_i)$  площадь поверхности  $\sigma_i$ , и через  $V$  тело, ограниченное поверхностями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и соответствующими боковыми поверхностями (рис.3.1). Оценим модуль числителя в формуле из определения градиента (см. определение 2.14, стр.51) с точностью до бесконечно малых, порядка, большего  $\mu(V)$ .

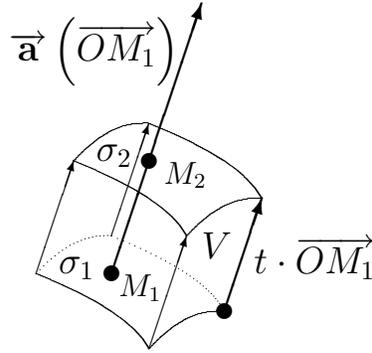


Рис. 3.1. К доказательству теоремы 12 — критерия потенциальности векторного поля

Учитывая определение поля  $\varphi$ , т.е. формулу (3.1), стр.104, получаем

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\sigma(V)} \varphi(\vec{r}) \vec{n} d\sigma \right| &\approx \varphi(\vec{OM}_2) \cdot S(\sigma_2) - \varphi(\vec{OM}_1) \cdot S(\sigma_1) \approx \\ &\approx \left| \varphi(\vec{OM}_2) - \varphi(\vec{OM}_1) \right| \cdot S(\sigma_1) = S(\sigma_1) \cdot \left| \int_{M_1 M_2} \vec{a} d\vec{r} \right| \approx \\ &\approx S(\sigma_1) \cdot \left| \vec{a}(\vec{OM}_1) \right| \cdot t \cdot \vec{OM}_1 \approx \left| \vec{a}(\vec{OM}_1) \right| \cdot \iiint_V dV. \end{aligned}$$

Поэтому согласно формуле (2.14), стр.51, из определения градиента получаем требуемое равенство  $\left| \vec{a}(\vec{OM}_1) \right| = \left| \text{grad } \varphi(\vec{OM}_1) \right|$ . Сонаправленность этих векторов следует из совпадения знаков интеграла  $\int_{M_1 M_2} \vec{a} d\vec{r}$  и разности

$\left( \varphi(\vec{OM}_2) - \varphi(\vec{OM}_1) \right)$ .

Теорема доказана.

**Теорема 14 (о выражении потенциала через интеграл).** Если векторное поле  $\vec{a}$  потенциально, то для любого потенциала  $\varphi$  и любой точки с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  из  $D$  найдется такое число  $C$ , что

$$\varphi(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x_1, y_1, z_1)} \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (3.2)$$

Можно предложить, как минимум, три способа нахождения потенциала.  
Способ 1. Если

$$\vec{a} \left( x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \right) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

потенциально, то для него справедлива формула (3.2). Проведем интегрирование по линии, изображенной на рис.3.2. Выберем следующие параметризации отрезков  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  (рис.3.2):

$$\begin{aligned} (AB) : \quad \vec{r} &= x \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}, \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad d\vec{r} = \vec{i} dx, \\ (BC) : \quad \vec{r} &= x_1 \vec{i} + y \vec{j} + z_0 \vec{k}, \quad y_0 \leq y \leq y_1, \quad d\vec{r} = \vec{j} dy, \\ (CD) : \quad \vec{r} &= x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z \vec{k}, \quad z_0 \leq z \leq z_1, \quad d\vec{r} = \vec{k} dz. \end{aligned}$$

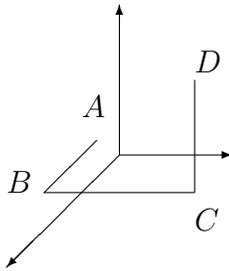


Рис. 3.2. К вычислению потенциала

Тогда получаем формулу

$$\begin{aligned} & \varphi \left( x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \right) = \\ & = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y, z_0) dy + \int_{z_0}^{z_1} R(x_1, y_1, z) dz + C. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Способ 2. Будем интегрировать по отрезку прямой, соединяющему эти точки. Напишем параметрическое уравнение этого отрезка. Напомним, что в векторной форме это уравнение имеет вид  $\vec{OM} = \vec{OM}_0 + t \vec{I}$ . Положим

$$\vec{I} = \vec{BA} = (x_1 - x_0) \vec{i} + (y_1 - y_0) \vec{j} + (z_1 - z_0) \vec{k}.$$

Переходя к координатам, получаем уравнения отрезка:

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0) t, \\ y = y_0 + (y_1 - y_0) t, \\ z = z_0 + (z_1 - z_0) t, \\ 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Краткости ради, положим

$$\begin{cases} x_0 + (x_1 - x_0)t = \alpha(t), \\ y_0 + (y_1 - y_0)t = \beta(t), \\ z_0 + (z_1 - z_0)t = \gamma(t). \end{cases}$$

Поэтому формула (3.2), стр.106, приобретает вид

$$\begin{aligned} & \varphi \left( x_1 \vec{\mathbf{i}} + y_1 \vec{\mathbf{j}} + z_1 \vec{\mathbf{k}} \right) = \\ & = \int_0^1 \left( P(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)) \cdot (x_1 - x_0) + Q(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)) \cdot (y_1 - y_0) + \right. \\ & \quad \left. + R(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)) \cdot (z_1 - z_0) \right) dt + C. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Способ 3. По определению потенциала имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{\mathbf{k}} = \text{grad } \varphi = \\ & = \vec{\mathbf{a}} \left( x \vec{\mathbf{i}} + y \vec{\mathbf{j}} + z \vec{\mathbf{k}} \right) = P(x, y, z) \vec{\mathbf{i}} + Q(x, y, z) \vec{\mathbf{j}} + R(x, y, z) \vec{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\varphi \left( x \vec{\mathbf{i}} + y \vec{\mathbf{j}} + z \vec{\mathbf{k}} \right) = \int P(x, y, z) dx + \alpha(y, z).$$

Для нахождения функции  $\alpha$  воспользуемся равенством  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y, z)$ . После соответствующего интегрирования функция  $\alpha(y, z)$  находится с точностью до неизвестного слагаемого  $\beta(z)$ . Для того чтобы его найти, используем равенство  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = R(x, y, z)$ .

**Пример 18.** Найти градиент скалярного поля

$$\varphi \left( x \vec{\mathbf{i}} + y \vec{\mathbf{j}} + z \vec{\mathbf{k}} \right) = xy^2z^3 + x^3 + y^2 + z - 1,$$

проверить для поля  $\vec{\mathbf{a}} = \text{grad } \varphi$  выполнение критерия потенциальности поля и найти потенциал поля  $\vec{\mathbf{a}}$ .

**Решение.** Имеем  $\text{grad } \varphi =$

$$= \vec{\mathbf{a}} \left( x \vec{\mathbf{i}} + y \vec{\mathbf{j}} + z \vec{\mathbf{k}} \right) = (y^2 z^3 + 3x^2) \vec{\mathbf{i}} + (2xyz^3 + 2y) \vec{\mathbf{j}} + (3xy^2 z^2 + 1) \vec{\mathbf{k}}.$$

Проверим выполнение критерия потенциальности поля:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{\mathbf{a}} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{\mathbf{k}} \right) \times \vec{\mathbf{a}} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 z^3 + 3x^2 & 2xyz^3 + 2y & 3xy^2 z^2 + 1 \end{vmatrix} = \vec{\mathbf{0}}. \end{aligned}$$

Итак, поле  $\vec{\mathbf{a}} = (y^2 z^3 + 3x^2) \vec{\mathbf{i}} + (2xyz^3 + 2y) \vec{\mathbf{j}} + (3xy^2 z^2 + 1) \vec{\mathbf{k}}$ , как и следовало ожидать, удовлетворяет этому критерию. Найдем потенциал. Вообще-то он нам известен: это функция  $\varphi$ , данная в условии задачи, но сейчас мы “притворимся, что ничего не знаем”, и найдем потенциал “по-честному”, всеми тремя способами. Итак, пусть  $\psi$  — искомый потенциал.

Способ 1. В формуле (3.3), стр.107, положим  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , и тогда получим

$$\begin{aligned} \psi \left( x_1 \vec{\mathbf{i}} + y_1 \vec{\mathbf{j}} + z_1 \vec{\mathbf{k}} \right) &= \\ &= \int_0^{x_1} (0^2 \cdot 0^3 + 3x^2) dx + \int_0^{y_1} (2x_1 y \cdot 0^3 + 2y) dy + \int_0^{z_1} (3x_1 y_1^2 z^2 + 1) dz + C = \\ &= x^3 \Big|_{x=0}^{x=x_1} + y^2 \Big|_{y=0}^{y=y_1} + (x_1 y_1^2 z^3 + z) \Big|_{z=0}^{z=z_1} + C = x_1^3 + y_1^2 + x_1 y_1^2 z_1^3 + z + C. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, исходная функция  $\varphi$  имеет такой же вид, точнее, она получается при  $C = -1$ .

Способ 2. Согласно формуле (3.4), стр.108, получаем для  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , что

$$\begin{cases} x = 0 + (x_1 - 0)t = x_1 t, \\ y = 0 + (y_1 - 0)t = y_1 t, \\ z = 0 + (z_1 - 0)t = z_1 t, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{aligned} \psi \left( x_1 \vec{\mathbf{i}} + y_1 \vec{\mathbf{j}} + z_1 \vec{\mathbf{k}} \right) &= \int_0^1 \left( ((y_1 t)^2 (z_1 t)^3 + 3(x_1 t)^2) x_1 + (2x_1 t y_1 t (z_1 t)^3 + 2y_1 t) y_1 + \right. \\ &\quad \left. + (3x_1 t (y_1 t)^2 (z_1 t)^2 + 1) z_1 \right) dt + C = \int_0^1 (6x_1 y_1^2 z_1^3 t^5 + 3x_1^3 t^2 + 2y_1^2 t + z_1) dt + C = \\ &= x_1 y_1^2 z_1^3 + x_1^3 + y_1^2 + z_1 + C. \end{aligned}$$

Вновь получен тот же результат. Кстати, мы убедились, что криволинейный интеграл второго рода от потенциального поля не зависит от пути интегрирования.

Способ 3. Имеем

$$\psi(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \int (y^2z^3 + 3x^2) dx = xy^2z^3 + x^3 + \alpha(y, z).$$

Вычисляя двумя способами  $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ , получаем уравнение

$$2xyz^3 + 2y = 2xyz^3 + \frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

откуда

$$\alpha(y, z) = \int 2y dy = y^2 + \beta(z).$$

Следовательно,

$$\psi(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = xy^2z^3 + x^3 + y^2 + \beta(z).$$

Вычисляя двумя способами  $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ , получаем уравнение

$$3xy^2z^2 + 1 = 3xy^2z^2 + \beta'(z),$$

откуда

$$\beta(z) = \int dz = z + C.$$

Следовательно,

$$\psi(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = xy^2z^3 + x^3 + y^2 + z + C,$$

что совпадает с соответствующими результатами предыдущих расчетов.

### 3.1.2. Соленоидальное поле

**Определение 27.** Векторное поле  $\vec{a}$  называется **соленоидальным** тогда и только тогда, когда существует такое поле  $\vec{b}$ , что  $\text{rot } \vec{b} = \vec{a}$ . При этом поле  $\vec{b}$  называется **векторным потенциалом** поля  $\vec{a}$ .

**Теорема 15 (критерий соленоидальности поля).** Векторное поле  $\vec{a}$  является соленоидальным тогда и только тогда, когда  $\text{div } \vec{a} = 0$ .

**Доказательство.** Воспользуемся правилами работы с оператором  $\vec{\nabla}$  (см. раздел 2.6, стр.69). Используя свойство П.1, стр.117 (эквивалентное определение смешанного произведения), получаем:

$$\text{div}(\vec{a}) = \text{div}(\text{rot } \vec{b}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{b}) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})\vec{b} = \vec{0}.$$

Доказательство достаточности мы приводить не будем, его нетрудно получить, обобщая рассуждения приведенного ниже примера 19.

Теорема доказана.

**Теорема 16 (о векторном потенциале).** Если  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  — два векторных потенциала векторного поля  $\vec{a}$ , то для некоторого скалярного поля  $\varphi$

$$\vec{c} = \vec{b} + \text{grad } \varphi. \quad (3.5)$$

**Доказательство.** По условию

$$\text{rot}(\vec{c} - \vec{b}) = \text{rot}(\vec{c}) - \text{rot}(\vec{b}) = \vec{0}.$$

Согласно критерию потенциальности поля — теореме 12, стр.102, получаем, что поле  $(\vec{c} - \vec{b})$  — потенциальное, т.е.  $(\vec{c} - \vec{b}) = \text{grad } \varphi$ . Отсюда следует равенство (3.5). Теорема доказана.

**Пример 19.** Найдите векторный потенциал  $\vec{b}$  векторного поля

$$\vec{a} = x \vec{i} - y \vec{j} + 2(x - y) \vec{k}.$$

**Решение.** Векторный потенциал определяется с точностью до потенциального поля. Поэтому у нас появился значительный “запас свободы”, который надо “с толком истратить”. Разумеется, следует “истратить свободу” на облегчение вычислений. Например, найдем векторный потенциал  $\vec{c}$ , у которого третья координатная функция — нулевая, т.е.

$$\vec{c} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = P(x; y; z) \vec{i} + Q(x; y; z) \vec{j}.$$

По определению векторного потенциала и формуле (2.22), стр.67, для вычисления ротора вектора по координатным функциям исходного поля имеем

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = -Q_z \vec{i} + P_z \vec{j} + (Q_x - P_y) \vec{k},$$

т.е. по условию

$$-Q_z \vec{i} + P_z \vec{j} + (Q_x - P_y) \vec{k} = x \vec{i} - y \vec{j} + 2(x - y) \vec{k}.$$

Перепишем векторное равенство в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} -Q_z = x, \\ P_z = -y, \\ Q_x - P_y = 2(x - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = -yz + \alpha(x; y), \\ Q = -xz + \beta(x; y), \\ -z + \beta'_x - (-z + \alpha'_y) = 2(x - y). \end{cases}$$

Оказывается, мы не конца исчерпали “ресурс свободы”! Для того чтобы найти какой-либо векторный потенциал поля  $\vec{a}$ , нам достаточно выбрать *произвольное* решение уравнения  $\beta'_x - \alpha'_y = 2x - 2y$ . Например, положим  $\alpha = y^2$ ,  $\beta = x^2$ . Следовательно, векторный потенциал поля  $\vec{a}$  имеет вид

$$\begin{aligned}\vec{f} &= (y^2 - yz) \vec{i} + (x^2 - xz) \vec{j} + \text{grad } \varphi = \\ &= (y^2 - yz + \varphi_x) \vec{i} + (x^2 - xz + \varphi_y) \vec{j} + \varphi_z \vec{k}.\end{aligned}$$

### 3.2. Задачи по теме “Дифференциальные операции в теории поля”

Ответы приведены на стр.144.

- 1) Векторные линии потенциального поля  $\vec{F}$  представляют собой окружности с центром на оси  $Oz$ , параллельные плоскости  $xOy$ , причем длина вектора  $\vec{F}$  ( $\vec{F}$ ) зависит только от длины вектора  $\vec{r}$ . Найдите поле  $\vec{F}$ , если  $\vec{F}(\vec{i} + z\vec{k}) = \vec{j}$ .
- 2) Проверьте непосредственным вычислением, что поле

$$\vec{a}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \text{rot}(x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k})$$

является соленоидальным, вычислите какой-либо из его векторных потенциалов и проверьте, что он отличается от векторного поля  $\vec{b} = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}$  слагаемым в виде потенциального поля.

### 3.3. Основные результаты третьей главы

Материал данной главы представляет собой результат исследования, основанного на стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций. А именно, введено потенциальное поле как поле градиентов некоторого скалярного поля. “Экстремальность” этой ситуации состоит, в частности, в том, что, согласно теореме 12, стр.102, потенциальное поле — это безвихревое поле. Иными словами, критерием потенциальности поля является равенство нулю ротора этого поля. Тот факт, что результатом дифференциального преобразования поля — ротора векторного поля — является функция-константа, принимающая на любом векторе нулевое значение (здесь ноль — это нулевой вектор!), безусловно, можно расценивать как “экстремальную ситуацию”. Для нахождения потенциала обычно используют результат теоремы 14, стр.106 о выражении потенциала через интеграл.

Другим практически и теоретически значимым типом векторного поля является соленоидальное поле, т.е. поле с нулевым значением дивергенции.

Связи между потенциальным и соленоидальным полями представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

<b>Потенциальное и соленоидальное поля</b>	
<i>Дано векторное поле <math>\vec{a}</math></i>	
<b>Потенциальное поле <math>\vec{a}</math></b>	<b>Соленоидальное поле <math>\vec{a}</math></b>
$\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$	$\text{div } \vec{a} = 0$
$\vec{a} = \text{grad } f$ , где $f$ — (скалярный) потенциал векторного поля $\vec{a}$	$\vec{a} = \text{rot } \vec{b}$ , где $\vec{b}$ — векторный потенциал векторного поля $\vec{a}$
Потенциал — скалярное поле $f$ — находится с точностью до константы: всякий скалярный потенциал поля $\vec{a}$ имеет вид $f + C$	Векторный потенциал — векторное поле $\vec{b}$ — находится с точностью до потенциального поля: всякий векторный потенциал поля $\vec{a}$ имеет вид $\vec{b} + \text{grad } f$ , где $f$ — скалярное поле

# Приложения

## П.1. Некоторые понятия и формулы векторной алгебры

Большая часть материала дословно взята из нашей книги [8].

**Координатами вектора  $\vec{a}$**  называются координаты *конца* вектора  $\vec{b}$ , равного  $\vec{a}$  и *выходящего из начала координат*. Таким образом, для нахождения координат вектора  $\vec{a}$  надо “перенести” его в начало координат и найти координаты конца полученного вектора  $\vec{b}$  (таким образом, мы переходим к модели “векторов с фиксированным началом”).

**Теорема 17 (о координатах вектора  $\vec{a}$ ).** Пусть в ортонормированном базисе вектор  $\vec{a}$  имеет координаты  $(a_1, a_2, a_3)$ , а вектор  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) вектор  $\vec{a}$  имеет координаты  $(a_1, a_2, a_3)$  тогда и только тогда, когда  $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ ;
- 2) вектор  $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$  имеет координаты  $(\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \lambda a_3 + \mu b_3)$ ;
- 3) точка  $A$  имеет координаты  $(A_1, A_2, A_3)$  тогда и только тогда, когда радиус-вектор точки  $A$  имеет вид  $\vec{OA} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$ ;
- 4) если координаты точек  $A$  и  $B$  равны  $(A_1, A_2, A_3)$  и соответственно  $(B_1, B_2, B_3)$ , то  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ , поэтому координаты вектора  $\vec{AB}$  равны  $(B_1 - A_1, B_2 - A_2, B_3 - A_3)$ .

В векторной алгебре говорят, что векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  **коллинеарны**, если они параллельны друг другу.

**Теорема 18 (критерий коллинеарности векторов).** Ненулевые векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллельны тогда и только тогда, когда их координаты про-

порциональны: для некоторого числа  $\lambda$  
$$\begin{cases} a_1 = \lambda b_1, \\ a_2 = \lambda b_2, \\ a_3 = \lambda b_3. \end{cases}$$

**Определение 28.** Скалярным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi_{\vec{a}, \vec{b}})$ , где  $\varphi_{\vec{a}, \vec{b}}$  — угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначают и как  $(\vec{a}, \vec{b})$ , и как  $\vec{a} \vec{b}$ . В векторном анализе обычно используется второе обозначение.

### Свойства скалярного произведения

- 1)  $\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$ ;
- 2)  $\vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$ ;
- 3)  $(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} \vec{c} + \vec{b} \vec{c}$ ,  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \vec{b} + \vec{a} \vec{c}$ ;
- 4)  $(\lambda \vec{a}) \vec{b} = \vec{a}(\lambda \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} \vec{b}$ , где  $\lambda$  — число;
- 5) критерий ортогональности ненулевых векторов:  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда  $\vec{a} \vec{b} = 0$ ;
- 6)  $\vec{a} \vec{a} = |\vec{a}|^2$ ;
- 7) если  $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ ,  $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ , то
 
$$\vec{a} \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (\text{П.1})$$

**Определение 29.** Говорят, что  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  — система компланарных векторов, если существует плоскость, параллельная всем этим векторам. В противном случае это система некомпланарных векторов.

Компланарность или некомпланарность — это свойство системы векторов, то есть фраза “вектор компланарен” без указания остальных векторов системы бессмысленна.

**Определение 30.** Векторным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор, обозначаемый через  $[\vec{a}, \vec{b}]$  или  $\vec{a} \times \vec{b}$ , обладающий следующими свойствами:

- 1)  $|\left[ \vec{a}, \vec{b} \right]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi_{\vec{a}, \vec{b}})$ ;

- 2)  $[\vec{a}, \vec{b}]$  перпендикулярен сомножителям, т.е. векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;
- 3)  $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$  образуют правую тройку векторов.

### Свойства векторного произведения векторов

**Антикоммутативность**  $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ .

**Линейность по первому сомножителю**

$$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}] \quad \text{и} \quad [\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}].$$

**Следствие из антикоммутативности и линейности:** линейность по второму сомножителю.

**Критерий коллинеарности**  $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$  тогда и только тогда, когда  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны<sup>1</sup>.

**Геометрический смысл** (рис. П.1):  $[\vec{a}, \vec{b}]$  — вектор, перпендикулярный параллелограмму, построенному на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , причем  $||[\vec{a}, \vec{b}]||$  численно равен площади этого параллелограмма.

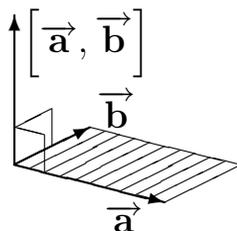


Рис. П.1. Геометрический смысл векторного произведения

### Вычисление в ОНБ:

$$[a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (\text{П.2})$$

<sup>1</sup>Этот критерий коллинеарности не занесен в таблицу критериев по двум причинам: во-первых, он годится только для трехмерного случая (в плоскости векторное произведение не определяется), а во-вторых, он слишком громоздкий для вычисления.

**Теорема 19 (формула “бац минус цаб”).** Для любых векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  имеет место равенство (формула “бац минус цаб”)

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b} (\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a}, \vec{b}). \quad (\text{П.3})$$

**Определение 31.** Смешанным произведением векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  называется число, определяемое формулой  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ .

**Свойства смешанного произведения векторов**

**Эквивалентное определение**  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$ .

**Линейность по всем трем сомножителям:**

- $(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \vec{c} \vec{d} = \lambda \vec{a} \vec{c} \vec{d} + \mu \vec{b} \vec{c} \vec{d};$
- $\vec{a} (\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}) \vec{d} = \lambda \vec{a} \vec{b} \vec{d} + \mu \vec{a} \vec{c} \vec{d};$
- $\vec{a} \vec{b} (\lambda \vec{c} + \mu \vec{d}) = \lambda \vec{a} \vec{b} \vec{c} + \mu \vec{a} \vec{b} \vec{d}.$

**Критерий правой и левой тройки** Тройка векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  является правой тройкой тогда и только тогда, когда  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} > 0$ . Тройка векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  является левой тройкой тогда и только тогда, когда  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} < 0$ .

**Критерий компланарности** Векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  компланарны тогда и только тогда, когда  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$ .

**Геометрический смысл**  $|\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$  равен объему параллелепипеда с ребрами  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

**Цикличность**  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b}$ .

**Вычисление в ОНБ**

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (\text{П.4})$$

**Свойства произведений**

Таблица П.1

	Скалярное	Векторное	Смешанное
	$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}, \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$		
Обозначение	$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \vec{b}$ (число)	$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$ (вектор)	$\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ (число)
Определение	$(\vec{a}, \vec{b}) =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \cos \angle \vec{a}, \vec{b}$	1) $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}; [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b};$ 2) $  [\vec{a}, \vec{b}   =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \sin \angle \vec{a}, \vec{b};$ 3) $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$ — правая тройка	$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$
Свойства	$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$	$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$	$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$
	Линейность по всем сомножителям		
	<b>Критерий ортогональности ненулевых векторов:</b> если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ , то $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$	<b>Критерий коллинеарности ненулевых векторов:</b> если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ , то $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$	<b>Критерий компланарности ненулевых векторов:</b> если $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ и $\vec{c} \neq \vec{0}$ , то $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$
$(\vec{a}, \vec{a}) =  \vec{a} ^2;$ $(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$	<b>Геометрический смысл:</b> вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ перпендикулярен параллелограмму со сторонами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ , причем $  [\vec{a}, \vec{b}  $ равен площади этого параллелограмма	<b>Геометрический смысл:</b> $ \vec{a} \vec{b} \vec{c} $ равен объему параллелепипеда с ребрами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	
В координатах	$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$	$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
<b>Формула “бац минус цаб”:</b> $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$			

Таблица П.2

Некоторые критерии ( $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}$ )	
коллинеарности (параллельности)	$\vec{a} = \lambda \vec{b}$ $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
ортогональности	$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \vec{b} = 0$
компланарности	$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$
правой и левой тройки векторов	$\vec{a} \vec{b} \vec{c} > 0$ тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая $\vec{a} \vec{b} \vec{c} < 0$ тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая

## П.2. Некоторые понятия топологии

Материал этого раздела носит вспомогательный характер и не является обязательным для понимания материала. Этот материал необходим для обеспечения корректности изложения, в частности корректности определений. Подробнее с топологией можно ознакомиться, например, по книге [4].

**Определение 32.** Пусть  $X$  — некоторое множество,  $2^X$  — множество всех его подмножеств. Подмножество  $\mathcal{T}$  множества  $2^X$  называется **топологией**, если выполняются следующие три условия:

1) пересечение любых двух элементов из  $\mathcal{T}$  принадлежит  $\mathcal{T}$ :

$$\forall U \forall V \left\{ \begin{array}{l} U \in \mathcal{T}; \\ V \in \mathcal{T} \end{array} \right. \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T};$$

2) объединение всех элементов любого подмножества множества  $\mathcal{T}$  принадлежит  $\mathcal{T}$ :

$$\forall \mathcal{T}_1 \quad \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \left( \bigcup_{U \in \mathcal{T}_1} U \right) \in \mathcal{T}.$$

3)  $X \in \mathcal{T}$ .

Элементы множества  $\mathcal{T}$  и пустое множество называются **окрестностями** и **открытыми множествами**, а множество  $X$  с данной топологией — **топологическим пространством**.

Из аксиом следует, что  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{T}} U$ .

**Определение 33.** Если  $\mathcal{T}$  — топология, то множество  $U$  из  $\mathcal{T}$  называется **окрестностью точки**  $x$  тогда и только тогда, когда  $x \in U$ .

Пример топологии в пространстве: совокупность множеств, являющихся объединением **открытых шаров**, т.е. шаров, у которых ни одна точка границы не принадлежит шару. Нетрудно понять, что в этой топологии, например, открытым множеством, окрестностью является внутренняя часть куба (без точек на поверхности куба). Аналог этой топологии на плоскости — множество

<sup>1</sup> Таким образом, элементами множества  $\mathcal{T}$  являются некоторые подмножества множества  $X$ .

всех множеств, являющихся объединением открытых кругов, т.е. внутренностей кругов без точек соответствующей окружностей. Квадраты и треугольники, не содержащие своих границ (т.е. из которых удалены все точки границы), в этой топологии являются открытыми множествами.

**Определение 34.** Если  $\mathcal{T}$  — топология, то множество  $V$  называется **замкнутым множеством** тогда и только тогда, когда дополнение множества  $V$  до  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{T}} U$  является открытым множеством.

**Определение 35.** Элемент  $a$  называется **внутренней точкой** множества  $A$ , если существует такая окрестность  $U$  точки  $a$ , что  $U \subseteq A$ .

**Определение 36.** **Границей** множества  $A$  называется множество таких точек  $a$ , в любой окрестности  $U(a)$  которых содержатся как точки множества  $A$ , так и точки, не принадлежащие  $A$ .

**Определение 37.** Если  $\mathcal{T}$  — топология и  $N \subseteq X = \bigcup_{U \in \mathcal{T}} U$ , то **топологией, индуцированной** на множестве  $N$ , называется множество

$$\mathcal{T}_N = \{U \cap N \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

Мы ввели понятие индуцированной топологии некорректно: сначала надо было доказать, что множество  $\mathcal{T}_N$  действительно является топологией. Однако последний факт очевиден и следует непосредственно из определения топологии.

Рассмотренная выше топология плоскости (объединения открытых кругов) может рассматриваться как топология, индуцированная топологией пространства (объединения открытых шаров). Если в плоскости взять прямую, то эти топологии индуцируют на ней топологию, состоящую из объединений интервалов.

**Определение 38.** Если  $\mathcal{T}$  — топология, то элемент  $a$  подмножества  $A$  множества  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{T}} U$  называется **внутренней точкой** тогда и только тогда, когда элемент  $a$  входит в  $A$  вместе с некоторой своей окрестностью, т.е.

$$\exists V \begin{cases} V \subseteq A, \\ a \in V, \\ V \in \mathcal{T}. \end{cases}$$

**Определение 39.** Если  $\mathcal{T}$  — топология, то элемент  $x$  называется **предельной точкой** множества  $N$  тогда и только тогда, когда любая окрестность точки  $x$  имеет непустое пересечение со множеством  $N$ , т.е.

$$\forall U \left( \begin{cases} U \in \mathcal{T}, \\ x \in U \end{cases} \Rightarrow U \cap N \neq \emptyset \right).$$

**Определение 40.** Если  $\mathcal{T}$  — топология и  $Y \subseteq X = \bigcup_{U \in \mathcal{T}} U$ , то **замыканием** множества  $Y$  называется множество  $Z$ , являющееся объединением множества  $Y$  со множеством всех предельных точек множества  $Y$ .

**Определение 41.** Пусть на множестве  $M$  определено некоторое отношение частичного порядка  $\leq$ . Тогда **верхней гранью** подмножества  $N$  множества  $M$  называется такой элемент  $t$  множества  $M$ , что

$$\forall x \quad (x \in N \Rightarrow x \leq t).$$

**Точной верхней гранью** множества  $N$  называется наименьшая из верхних граней множества  $N$ , т.е. такой элемент  $t_0$  из  $M$ , что

$$\begin{cases} \forall x \quad (x \in N \Rightarrow x \leq t_0), \\ \forall t (\forall x \quad (x \in N \Rightarrow x \leq t) \Rightarrow t_0 \leq t). \end{cases}$$

Точная нижняя грань определяется аналогично.

Для обобщения некоторых геометрических понятий и конструкций математического анализа необходимо обобщить понятия расстояния между точками и величины вектора для произвольного линейного пространства. С этой целью вводится понятие нормы в линейном пространстве [7, с.51-52], [8, с.287].

**Определение 42.** Линейное пространство  $U$  называется **нормированным** тогда и только тогда, когда в нем определена такая функция  $\|\bullet\| : U \rightarrow \mathbb{R}$ , что выполняются следующие утверждения (аксиомы нормы):

- 1)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  (однородность нормы);
- 2)  $\|x\| \geq 0$ , причем  $\|x\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = \mathbf{0}$ ;
- 3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника).

При этом функция  $\|\bullet\|$  называется **нормой**.

Оказывается, для определения дифференцируемости и непрерывности не очень существенным является конкретный способ введения нормы, поскольку в конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны [7, с.58], [8, с.290]. Поэтому мы ограничимся введением так называемой евклидовой нормы.

Пусть  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  — некоторый базис линейного пространства  $U$ . Тогда в  $U$  норма стандартно вводится формулой

$$\|\vec{x}\| = \|x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (\text{П.5})$$

Если исходный базис является ортонормированным базисом линейного пространства, то норма, введенная формулой (П.5), является стандартной нормой евклидова пространства.

### П.3. Алгоритм составления уравнений

1. Что надо найти?

2. В каком виде представим ответ?

3. Какие величины<sup>1</sup> рассматриваются в задаче? Применить “мышление Печорина” или ввести переменные, то есть свести задачу к нахождению числовых параметров и *обозначить буквами* те из них, которые необходимы для ответа на вопрос задачи, но которые не удастся сразу найти с помощью условий задачи<sup>2</sup>. При этом:

а) переменные должны быть подробно описаны;

б) в первую очередь символами обозначаются искомые величины.

4. Составить систему уравнений. Требуемое уравнение можно получить одним из двух способов: либо подставить числовые и буквенные значения в некоторую известную формулу<sup>3</sup>. *Для получения уравнения надо какую-то величину вычислить несколькими способами.* Для выбора величины, которую будем вычислять разными способами, в тексте задачи обращаем особое внимание:

<sup>1</sup>Скорость, время, расстояние, масса, производительность, безразмерные величины (отношение одноименных величин: концентрация, доля, величина угла в радианах) и т.п.

<sup>2</sup>С помощью восходящего анализа.

<sup>3</sup>Например, в уравнение касательной, в формулу (2.22), стр.67, для вычисления ротора и др.

- а) на слова “больше”, “меньше”, “короче”, “длиннее” и т.п.;
  - б) на явное указание значения величины;
  - в) на величины, которые разлагаются в сумму легко вычисляемых слагаемых<sup>4</sup>, в геометрии это обычно длины отрезков (отрезок разбит точками), величины углов, площади и объемы;
  - г) на величины, которые не изменяются<sup>5</sup> или изменяются предсказуемо.
- Блок-схема этого алгоритма изображена на рис. П.2.

#### П.4. Об исследовательских стратегиях

Мы живем в эпоху революций: научных, технических, социальных, экономических. Стремительно изменяющаяся жизнь, внедрение новых технологий приводят к быстрому устарению знаний, обесцениванию многих профессиональных умений, замене их на новые, более современные. Поэтому задачей обучения в настоящее время является не столько передача определенного объема знаний, сколько обучение *исследовательской деятельности*, которая включает в себя учебную деятельность. Одной из основ исследовательской деятельности является **система исследовательских стратегий** [13]. В работе [9] предложена трактовка понятия “стратегия” как системы из следующих компонентов: *во-первых*, некоторого множества целей деятельности; *во-вторых*, системы приоритетов и правил выбора (выделения) целей и задач (подзадач), то есть множества некоторых отношений, определенных на множестве целей и задач; *в-третьих*, системы или совокупности “стандартных” алгоритмов и планов действий для достижения выделенных целей, а также системы правил разработки планов (эти планы обычно приводят к формированию новых целей, поэтому планы можно рассматривать как частичные операции, определенные на множестве целей); *в-четвертых*, системы доступных интеллектуальных и материальных ресурсов, в том числе: алгоритмов, методов, знаний, умений и навыков, сформированных ассоциаций и др.; *в-пятых*, механизма количественного и качественного оценивания

<sup>4</sup>То есть величин, которые можно вычислить, используя условия задачи и (или) переменные, введенные ранее или вводимые дополнительно.

<sup>5</sup>При осуществлении описанных в условии задачи процессов. Например, при повороте или другом ортогональном преобразовании (см. теорему об ортогональности изометрического оператора [8, с.326]) не меняется длина (модуль) вектора.



Рис. П.2. Алгоритм составления системы уравнений

результатов действий и деятельности (прогнозируемых и реально достигнутых). Стратегию идентифицируют, например, по особенностям целей (стратегия уничтожения промышленных центров противника), по особенностям глобальных планов действий (наступательные или оборонительные стратегии). В данной работе мы использовали следующие стратегии исследовательской деятельности: 1) стратегию перехода от изучения отдельного объекта к изучению системы объектов; 2) стратегию изучения экстремальных ситуаций; 3) стратегию предвкушения; 4) стратегию поиска аналогии; 5) стратегию построения модели; 6) стратегию обогащения (усложнения) модели.

**Стратегия перехода от изучения отдельного объекта к изучению системы объектов** имеет основной **целью** построение модели с помощью “операции” развертывания модели [9], [10]. В элементарной математике примером применения стратегии перехода от изучения отдельного объекта к изучению системы объектов является переход от изучения простейших геометрических фигур: отрезков прямых, окружностей, углов, треугольников, к изучению их взаимного расположения: окружность, вписанная в треугольник и описанная около него, пересечение медиан треугольника, его биссектрис, высот. В нашей работе примером применения этой стратегии является переход от изучения отдельного вектора к изучению векторного поля. Другим примером применения этой стратегии в курсе высшей математики является переход от изучения чисел к изучению матриц. При этом операции алгебры чисел индуцируют операции алгебры матриц [8]. **Система приоритетов и правил выбора целей** стратегии перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов включает в себя выбор стратегии исследования и другие правила, ориентированные на построение новой модели. В список стандартных алгоритмов входят алгоритмы и правила выполнения операций алгебры моделей, построения характеристик (в частности, индуцирования характеристик с моделей отдельных объектов на системы объектов). Например, расстояние между множествами точек определяется как минимум расстояний между парами точек из различных множеств. Система доступных ресурсов включает в себя информацию об отдельных объектах, систему знаний, умений и навыков исследовательской деятельности. Например, понятийный аппарат векторной алгебры, свойства ее операций и других функций с помощью стратегии перехода к изучению множеств векторов (в частности, радиусов-векторов точек) является базой для изучения векторных и скалярных полей. Механизм оце-

нивания результатов включает в себя средства и методы оценивания перспективности исследования, оценивания адекватности полученных моделей.

**Для стратегии изучения экстремальных ситуаций** в систему **целей** включаются: формирование гипотезы, накопление опыта, формирование исследовательского аппарата. **Система приоритетов** обозначена в названии стратегии и состоит в приоритетном изучении ситуаций, экстремальных в том или ином смысле, например ситуаций, когда характеристика принимает нулевое значение. Список **стандартных алгоритмов** и **планов** действий включает в себя общераспространенные планы и алгоритмы, планы, связанные с выделением характеристик и элементов носителя, изучение которых наиболее перспективно (например, на которых выделенные характеристики принимают экстремальные значения), планы, обеспечивающие накопление и обработку опыта. **Система ресурсов** включает в себя систему знаний, умений и навыков, обеспечивающих выполнение таких мыслительных операций, как обобщение, абстрагирование и конкретизация. **Механизм количественного и качественного оценивания** результатов включает в себя средства определения уровня универсальности результатов (в том числе методов), оценивания переносимости результатов на другие объекты (не обязательно являющиеся результатом обобщения и абстрагирования) и др. Стратегия изучения экстремальных ситуаций оказывается эффективной при формировании гипотез, построении понятийного и вычислительного аппаратов и др. Например, повышенный интерес в геометрии к параллельным и перпендикулярным прямым вызван тем обстоятельством, что это расположение прямых соответствует *минимальному* и *максимальному* углу между прямыми. Отметим, что нет аналогичных терминов для прямых с другими значениями угла (например,  $45^\circ$ ). Изучение треугольников с экстремальными значениями углов (для треугольников невырожденной ситуацией является значение угла в  $90^\circ$ ) привело к появлению понятия прямоугольного треугольника. Характерно, что нет специального названия для треугольника, у которого один угол равен, допустим,  $60^\circ$ . В нашей работе как результат приоритетного изучения экстремальных ситуаций можно воспринимать результаты главы 3, стр. 101, посвященной изучению потенциальных полей (поле градиентов, что оказалось равносильным требованию нулевого значения ротора) и соленоидальных полей (нулевой является дивергенция).

**Стратегия предвкушения** обычно **основной целью** имеет установ-

ление условий, при которых достигается цель исследования. Например, при решении примера 2, стр.17, и других примеров мы обозначили буквами координантные функции искомого векторного поля. Введение переменных для обозначения искомым величин является классическим примером реализации стратегии предвкушения, поскольку после введения переменных мы считаем, что искомые значения величин уже известны, и целью дальнейших рассуждений является установление отношений между известными (точнее, “как бы известными”) значениями величин. В процессе формирования новых понятий, например “интеграл по фигуре”, мы часто используем стратегию предвкушения, принимая тот или иной вариант определения для того, чтобы установить возможные дефекты в рассматриваемом варианте определения. При создании программной оболочки предполагается, что пользователь уже работает с этой программой, тем или иным образом реагирует на сообщения и т.п., в чем и состоит “предвкушение”. **Стандартный план** для стратегии предвкушения состоит в выполнении следующих этапов: *во-первых*, построении модели ситуации, когда цель уже достигнута; *во-вторых*, выявлении основных отношений между элементами носителя рассматриваемой модели; *в-третьих*, на основании этой информации строятся различные планы преобразования исходной ситуации к ситуации, удовлетворяющей заданным требованиям. **Система интеллектуальных и материальных ресурсов** включает в себя знания, умения и навыки, которыми владеет исследователь (включая умение определять, какими знаниями, умениями и навыками потребуются овладеть для достижения поставленной цели), а также ресурсы, которые предоставляются исследователю в условии задачи (например, финансовые ограничения, ограничения по массе и/или габаритам). **Механизм оценивания** состоит в средствах и методах контроля корректности<sup>1</sup> и достоверности результатов при реализации построенного алгоритма действий. Разумеется, стратегия предвкушения может применяться только в сочетании с методом моделирования, поскольку на начальном этапе именно модель замещает проектируемый объект.

**Для стратегии поиска аналогии** основной целью в **системе целей** является создание модели исследуемого объекта. Частными целями являются: а) выделение особенностей исследуемого объекта, существенных с точки зрения целей исследования; б) нахождение объекта, имеющего те же особен-

<sup>1</sup>Подробнее об адекватности модели, в частности о корректности и достоверности, см. [9, 10].

ности; в) оценивание уровня “похожести” моделируемого и моделирующего объектов по другим особенностям. В **систему приоритетов** включается механизм оценивания важности выделенных особенностей с точки зрения достижения целей деятельности. В **систему стандартных алгоритмов и планов действий** для достижения выделенных целей входят механизмы а) выделения особенностей, существенных с точки зрения целей исследования; б) поиска и/или построения объектов, обладающих теми же особенностями; в) оценивания адекватности моделей [9, 10]. В **системе доступных ресурсов** для реализации этой стратегии основную роль (быть может, большую, чем в других стратегиях) играет кругозор исследователей, уровень их квалификации, доступность информации. Естественно, что важной остается роль финансовых ресурсов. **Механизм оценивания результатов** деятельности применяется как в процессе реализации стратегии поиска аналогии, так и после достижения ее результатов, т.е. после а) нахождения объекта, аналогичного исследуемому; б) формализации этой аналогии. Примерами реализации стратегии поиска аналогии являются развитие теорий скалярного и векторного полей, см. разделы 1.2, стр.11 и 1.3, стр.16: мы взяли за основу схему развития теории функций действительной переменной (предел, непрерывность, производная). Когда нам не удалось непосредственным образом перенести определение производной на случай скалярного поля, мы применили стратегию поиска аналогии и нашли аналогию с функциями нескольких переменных (частная производная), что позволило нам ввести понятие “производная по направлению”. В данной работе мы применили стратегию поиска аналогии при построении понятия и “интеграл по фигуре” (см. раздел 2.1, стр.23).

**Стратегия построения модели** имеет **основной целью** создание объекта, изучение которого позволяет получить новую информацию об исследуемом объекте. В частности, стратегия построения модели нередко используется при обогащении понятийного аппарата. Например, мы использовали эту стратегию при формализации некоторых дифференциальных операций в теории поля (см. раздел 2.4.2, стр.50). **Система приоритетов** на множестве целей основана на идее получения модели как максимально доступной для изучения. В частности, изучение модели должно обходиться дешевле, быстрее, проще, чем непосредственное изучение исходного объекта, для этого модель должна быть основана на теории, обладающей развитым исследовательским аппаратом. Именно с этой точки зрения наиболее предпочтитель-

ными, как правило, являются математические модели. **Система стандартных алгоритмов и планов** действий для достижения выделенных целей включает в себя способы исследования, стандартные для научной области, в терминах которой сформулирована модельно-содержательная компонента модели [9, 10], а также результаты теории моделирования, рассматриваемые исследовательские стратегии. В **систему доступных ресурсов** входят знания, умения, навыки исследователя, его опыт, кругозор, финансовые, технологические и другие ресурсы. **Механизм количественного и качественного оценивания** результатов деятельности представляет собой систему контроля адекватности моделей<sup>2</sup>.

**Стратегия обогащения модели** применяется в ситуации, когда цели исследования можно добиться без создания существенно новой модели, с помощью обогащения имеющейся модели новыми элементами, характеристиками и отношениями. Эту стратегию выделила Надежда Николаевна Вечтомова во время выполнения курсовой работы по теории и методике обучения математике на 4 курсе математического факультета Уральского государственного педагогического университета в 2004/2005 учебном году под руководством Ю.Б. Мельникова. В нашей работе как результат применения этой стратегии можно рассматривать введение таких понятий, как “линия (поверхность) уровня”, “векторная линия”.

## П.5. Ответы

### Ответы к заданиям на стр. 21

- 1) Опишите геометрически и найдите векторные линии поля

$$\vec{a} (x \vec{i} + y \vec{j}) = y \vec{i} + x \vec{j}.$$

**Ответ:** Сначала найдем векторные линии этого поля с помощью системы уравнений (1.9), стр.20, которая для данного случая имеет вид  $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$ . В нашем случае эта система состоит из одного уравнения, к тому же самого простого (для решения) вида: с разделяющимися переменными. Решая это уравнение, получаем общий интеграл вида  $x^2 - y^2 = C$ . Это гиперболы с асимптотами  $y = \pm x$ . Для радиуса-вектора любой из точек асимптоты  $y = x$  соответствующие ему векторы поля равны исходному радиусу-вектору:

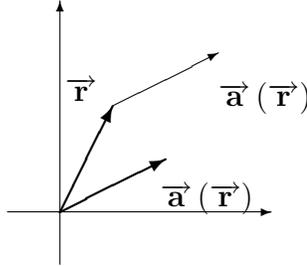
$$\vec{a} (\vec{r}) = \vec{a} (t \vec{i} + t \vec{j}) = t \vec{i} + t \vec{j} = \vec{r}.$$

<sup>2</sup>Подробнее об адекватности см. [9], [10].

На асимптоте  $y = -x$  поле  $\vec{a}$  исходный вектор “разворачивает в обратную сторону”:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(t\vec{i} - t\vec{j}) = -t\vec{i} + t\vec{j} = -\vec{r}.$$

Нетрудно понять, что поле  $\vec{a}$  аргументу  $\vec{r}$  ставит в соответствие вектор  $\vec{a}(\vec{r})$ , получающийся зеркальным отражением вектора  $\vec{r}$  относительно оси  $y = x$ :



- 2) Скалярное поле  $f$  является **центральным**, то есть  $f(\vec{r}) = \varphi(|\vec{r}|) = \varphi(r)$ , кроме того,  $f(t\vec{i} + t^2\vec{j}) = t^4 + t^6(2 + t^2)$ . Найдите поле  $f$  и его линии уровня.

**Ответ:** Проще всего решается вопрос с линиями уровня: для любого допустимого значения константы  $C$  по определению имеем

$$C = f(\vec{r}) = \varphi(r),$$

то есть линии уровня представляют собой *объединение концентрических окружностей*.

Теперь найдем поле  $f$ . Воспользуемся алгоритмом составления уравнений<sup>1</sup>, представленным в разделе П.3, стр.122. *Что надо найти?* Скалярное поле. *Как запишем ответ?* Формулой вида  $f(x\vec{i} + y\vec{j}) = F(x, y)$ . *Найдем это выражение конструктивно или введем переменные.* Описывая вид решения, мы уже ввели переменные  $F, x, y$ . *Составим систему уравнений.* Во-первых, по определению центрального поля  $F(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$ . Поэтому нам достаточно найти вид функции  $\varphi$  от одной(!) переменной. Во-вторых, по условию

$$f(t\vec{i} + t^2\vec{j}) = \varphi\left(\sqrt{t^2 + (t^2)^2}\right) = t^4 + t^6(2 + t^2).$$

Для того чтобы задать  $\varphi$  выражением, нам надо представить выражение в правой части как выражение от  $\sqrt{t^2 + t^4}$ . Это нетрудно сделать:

$$t^4 + t^6(2 + t^2) = t^4 + 2t^6 + t^8 = (t^2 + t^4)^2 = \left(\sqrt{t^2 + t^4}\right)^4.$$

Следовательно, нам удалось получить искомое выражение:

$$f(x\vec{i} + y\vec{j}) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^4 = (x^2 + y^2)^2.$$

Задача решена.

<sup>1</sup>Подробнее об алгоритме составления уравнений см. [8, с.22], [9], [11, с.22].

3) Векторные линии поля  $\vec{a}$  имеют вид  $y = Cx^2$ , причем для любого ненулевого вектора  $\vec{r}$  имеют место соотношения  $|\vec{a}(\vec{r})| = 1$  и  $\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) > 0$ . Найдите поле  $\vec{a}$ .

**Ответ:** Воспользуемся алгоритмом составления уравнений<sup>2</sup> (см. раздел П.3, стр.122). Что надо найти? Векторное поле. В каком виде представить ответ? Формулой вида

$$\vec{a}(x\vec{i} + y\vec{j}) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

Найдем это выражение конструктивно или введем переменные. Описывая вид решения, мы уже ввели переменные  $P, Q, x, y$ . Составим систему уравнений. Из уравнения (1.9), стр.20, получаем  $\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}$ . Уравнение векторных линии дано в условии, из него следует  $dy = 2xC dx$ . Чтобы избавиться от мешающей буквы  $C$ , заметим, что на самом деле имеет место система уравнений  $\begin{cases} y = Cx^2, \\ dy = 2xC dx. \end{cases}$  Поэтому  $C = \frac{y}{x^2}$ . Подставляя это выражение во второе уравнение системы, получаем  $dy = \frac{2xy}{x^2} dx$ . Следовательно, выражая двумя способами  $dy$ , получаем

$$\frac{dx}{P(x, y)} \cdot Q(x, y) = dy = \frac{2y}{x} dx.$$

Отсюда  $Q(x, y) = \frac{2y}{x} P(x, y)$ . Вычисляя двумя способами модуль вектора  $\vec{a}$ , получаем  $1 = \sqrt{P^2 + Q^2}$ , откуда

$$1 = |P(x, y)| \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2y}{x}\right)^2}.$$

Поэтому  $|P(x, y)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}$ . Условие  $\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) > 0$  переписывается в виде

$$(x\vec{i} + y\vec{j}) \left( \frac{\pm x}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} \vec{i} + \frac{\pm 2y}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} \vec{j} \right) > 0.$$

Следовательно, с помощью формулы (П.1), стр.115, получаем

$$\pm \left( \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} + \frac{2y \cdot 2y}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} \right) > 0,$$

откуда следует, что надо выбрать знак  $+$ . Окончательный ответ:

$$\vec{a}(x\vec{i} + y\vec{j}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} \vec{i} + \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} \vec{j}.$$

### Ответы к заданиям на стр. 42

1) Определите, от каких векторных полей вычисляются следующие криволинейные интегралы второго рода:

<sup>2</sup>Обоснование алгоритма составления уравнений с точки зрения теории моделирования и многочисленные примеры использования приведены в работе [9].

а)  $\int_L y dx - x dy$ . **Ответ:** Согласно формуле (2.33), стр.92, и рис. 2.2, стр.29, в силу формулы для вычисления скалярного произведения (П.1), стр.115), подынтегральное выражение  $y dx - x dy$  представляет собой скалярное произведение вектора  $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x\vec{i} + y\vec{j}) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  на вектор  $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j}$ . Как известно из курса векторной алгебры,

$$(u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}) \cdot (v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z,$$

то есть  $y dx - x dy = \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ . Следовательно,  $P(x, y) = y$ ,  $Q(x, y) = -x$ , то есть  $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x\vec{i} + y\vec{j}) = y\vec{i} - x\vec{j}$ ;

б)  $\int_L x^2 dy + y^2 dz$ . **Ответ:**  $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 0\vec{i} + x^2\vec{j} + y^2\vec{k}$ ;

в)  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dx$ . **Ответ:**  $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x\vec{i} + y\vec{j}) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \vec{i}$ .

2) Определите, от каких векторных полей вычисляются следующие поверхностные интегралы второго рода (здесь  $\vec{n} d\sigma = d\sigma_{yz}\vec{i} + d\sigma_{xz}\vec{j} + d\sigma_{xy}\vec{k}$ ):

а)  $\int_{\sigma} z d\sigma_{xy}$ . **Ответ:** Согласно формуле (2.34), стр.93, и рис.2.2, стр.29, согласно формуле (П.1), стр.115, подынтегральное выражение  $z dx dy$  есть скалярное произведение искомого вектора поля

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

на вектор  $\vec{n} d\sigma = \pm dy dz \vec{i} \pm dx dz \vec{j} \pm dx dy \vec{k}$ . Поэтому

$$\vec{a}(\vec{r}) = 0\vec{i} + 0\vec{j} \pm z\vec{k}.$$

Уточнить знак в рамках условия данной задачи невозможно, знаки зависят от вида поверхности и положительного направления нормального вектора;

б)  $\int_{\sigma} (x + y) d\sigma_{xy} - (x^2 + y^2) d\sigma_{xz}$ .

**Ответ:**  $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -(x^2 + y^2)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$ .

3) Определите, к какому типу относится каждый из интегралов, укажите, от какого скалярного или векторного поля берется этот интеграл:

а)  $\int_S \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ . **Ответ:** это поверхностный интеграл первого рода от скалярного поля

$$f(\vec{r}) = f(x\vec{i} + y\vec{j}) = \sqrt{x^2 + y^2};$$

б)  $\int_S \sqrt{x^2 + y^2} dr$ . **Ответ:** это криволинейный интеграл первого рода от скалярного поля

$$f(\vec{r}) = f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$в) \int_S \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

**Ответ:** это криволинейный интеграл второго рода от векторного поля

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x\vec{i} + y\vec{j}) = \sqrt{x^2 + y^2}\vec{j} = 0\vec{i} + \sqrt{x^2 + y^2}\vec{j};$$

$$г) \int_S \sqrt{x^2 + y^2} dx dz.$$

**Ответ:** это поверхностный интеграл второго рода от векторного поля  $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x\vec{i} + y\vec{j}) = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \vec{j}$ . Уточнить знак в условиях этого задания невозможно.

### Ответы к заданиям на стр. 68

- 1) На рис. 2.20,а, стр.68, градиент будет нулевым на плоскости  $Oxy$  “под вершиной холма”. На рис. 2.20,б, стр.68, это та точка, расположенная ближе к правому верхнему углу, в которую “сходятся” стрелки, изображающие вектора поля.
- 2) Согласно “физическому” определению градиента — определению 21, стр.52 — вектор градиента ортогонален к линии уровня и направлен в сторону наибольшего возрастания функции.

Его длину можно найти с помощью теоремы 5, стр.52 о связи градиента с производной по направлению. Таким образом, величина градиента, например, в точке  $A$  приближенно равна дроби, числитель которой равен разности между значением поля на следующей линии уровня (т.е.  $11^\circ$ ) и значением поля в точке  $A$  (т.е.  $10^\circ$ ), а в знаменателе — расстояние от точки  $A$  до следующей линии уровня. Поэтому модуль градиента в точке  $A$  меньше, чем в точке  $B$ , см. рис. П.3.

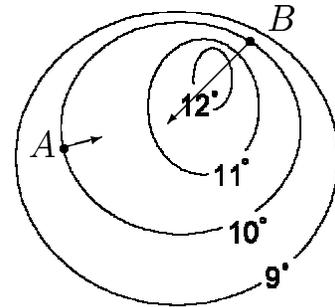


Рис. П.3 к задаче 2

- 3) а) Заметьте, что вектор остается постоянным, когда вы продвигаетесь в его направлении, т. е.  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = 0$ ,  $\vec{F}_x = 0$ . Следовательно,  $\text{div } \vec{F} = 0$ . Линейный интеграл вдоль штрихового контура не равен нулю, поэтому  $\text{rot } \vec{F} \neq \vec{0}$ .
- б) Поле является центральным. Это значит, что функция  $\vec{F}$  радиальна и что для данного  $\vec{r}$  ее величина постоянна. Ротор любого центрального поля равен нулю; циркуляция равна нулю вокруг пунктирного и любого другого контура. Но дивергенция, очевидно, не равна нулю.
- в) Циркуляция, очевидно, могла бы быть равна нулю вокруг изображенных контуров. Из одного этого рисунка не очевидно, что  $\text{div } \vec{F} = 0$ , но видно, что она также могла бы быть равна нулю.

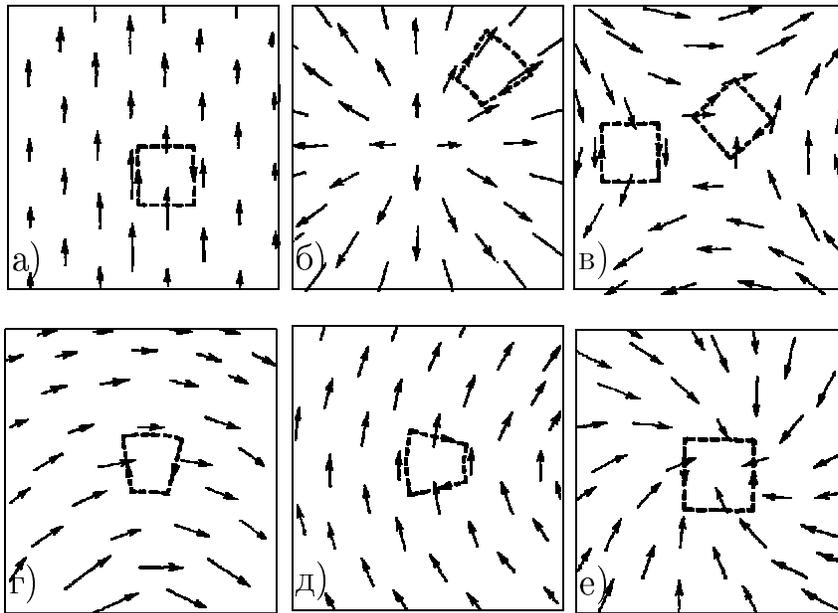


Рис. П.4. К задаче 3

г) Заметьте, что, с точностью до первого порядка, здесь нет изменения в величине  $\vec{F}$ , если вы продвигаетесь в направлении вектора  $\vec{F}$ . Этого достаточно для того, чтобы дивергенция была равна нулю. Оказывается, что циркуляция могла бы быть равна нулю вокруг изображенного контура, так как  $\vec{F}$  слабее на длинной стороне, чем на короткой. Действительно, это есть возможное электростатическое поле с  $\vec{F}$ , пропорциональным  $1/r$ , где  $r$  — расстояние до точки, расположенной вне чертежа.

д) По той же причине, что и выше, мы приходим к заключению, что  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ . В данном примере величина  $\vec{F}$  всюду одинакова, поэтому линейный интеграл по длинной стороне контура не уничтожается интегралом по короткому пути и циркуляция не равна нулю. Таким образом,  $\operatorname{rot} \vec{F} \neq \vec{0}$ .

е) Ясно, что циркуляция вокруг штрихового контура не равна нулю. Оказывается также, что и дивергенция не равна нулю, так как векторы сходятся к центру со всех сторон.

- 4) Если поле  $\vec{a}$  потенциально, то в точках  $A$  и  $B$  длины векторов  $\vec{a}(\overline{OA})$  и  $\vec{a}(\overline{OB})$  должны быть “примерно” пропорциональны расстоянию от точек  $A$  и  $B$  до линии  $l_2$ .

### Ответы к заданиям на стр. 76

- 1) Используя правила работы с оператором  $\vec{\nabla}$ , доказать тождества:

(a)  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$ . **Ответ:**

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) f = \vec{0}.$$

(b)  $\operatorname{div}(f\vec{a}) = \operatorname{grad} f \cdot \vec{a} + f \operatorname{div} \vec{a}$ . **Ответ:** с учетом “правил для черновика” получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f\vec{a}) &= \vec{\nabla}(f\vec{a}) = \vec{\nabla}\left(f\vec{a}\right) + \vec{\nabla}\left(f\vec{a}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\vec{a} + f\vec{\nabla}\vec{a} = \\ &= \left(\vec{\nabla}f\right)\vec{a} + f\vec{\nabla}\vec{a} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{a} + f \operatorname{div} \vec{a}.\end{aligned}$$

(c)  $\operatorname{div} \operatorname{grad} r = \frac{2}{r}$  — формула (4), стр.76. **Ответ:** с учетом формул (2) и (3), стр.75, а также равенства  $\vec{r}\vec{r} = r^2$ , получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{grad} r &= \vec{\nabla}\vec{\nabla}r = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}r\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\vec{r}\right) = \left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)\vec{r} + \frac{1}{r}\vec{\nabla}\vec{r} = \\ &= -\frac{1}{r^2}\left(\vec{\nabla}r\right)\vec{r} + \frac{3}{r} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r}\vec{r}\vec{r} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}.\end{aligned}$$

2) Пусть  $\vec{a}(\vec{r}) = y\vec{i} - x\vec{j}$ . Вычислите  $\operatorname{rot}(\vec{r} \times \operatorname{rot} \vec{a})$ .

**Ответ:** С помощью формулы (П.1), стр.117, получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{r} \times \operatorname{rot} \vec{a}) &= \vec{\nabla}\left(\vec{r} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right)\right) = \\ &= \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \vec{r}\right)}_{=\vec{0}} \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) - \left(\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right)\right) \vec{r} = -\left(\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right)\right) \vec{r}.\end{aligned}$$

Согласно формуле (2.22), стр.67, имеем

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{k}.$$

Следовательно,  $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = \vec{0}$ . Окончательный ответ:

$$\operatorname{rot}(\vec{r} \times \operatorname{rot} \vec{a}) = \vec{0}.$$

Можно было вычислить  $\left(\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right)\right)$  иначе, с помощью формулы “бац-минус-цаб” (П.3), стр.117:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{a}\right) - \left(\vec{\nabla}\vec{\nabla}\right)\vec{a}.$$

Поскольку  $\vec{a}(\vec{r}) = y\vec{i} - x\vec{j}$ , то  $\vec{\nabla}\vec{a} = 0$ ,  $\left(\vec{\nabla}\vec{\nabla}\right)\vec{a} = \Delta\vec{a} = 0$ , то  $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = 0$ . Эти выкладки несколько проще “лобового” вычисления ротора от ротора вектора.

### Ответы к заданиям на стр. 94

- 1) Вычислите массу дуги линии  $L$ , у которой радиус-вектор любой точки удовлетворяет равенству  $\vec{OM} = t\vec{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{t^3}{3}\vec{k}$ , где  $t \in \mathbb{R}$  от точки  $O(0,0,0)$  до точки  $B\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ , если линейная плотность задана формулой  $\rho(x, y, z) = \frac{y}{x+3z}$ .

**Комментарий.** Другим стандартным способом задания линии  $L$  является ее определение параметрическими уравнениями 
$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2/\sqrt{2}, \\ z = t^3/3. \end{cases}$$

**Решение.** По условию  $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = t\vec{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{t^3}{3}\vec{k}$ , следовательно,  $d\vec{r} = dt\vec{i} + \sqrt{2}t dt\vec{j} + t^2 dt\vec{k}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} M &= \int_L \rho(x, y, z) dr = \int_L \frac{y}{x+3z} dr = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^2/\sqrt{2}}{t+t^3} \sqrt{1+2t^2+t^4} dt = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2}} dt = \frac{t^2}{2\sqrt{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

2) Определите тип интеграла  $\int_L 6y dx + 3x dy$  и вычислите его, если  $L$  — дуга параболы

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y \leq x + 2. \end{cases}$$

**Решение.** Это криволинейный интеграл второго рода от векторного поля

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x\vec{i} + y\vec{j}) = 6y\vec{i} + 3x\vec{j},$$

так как подынтегральное выражение представимо в виде

$$6y dx + 3x dy = \underbrace{(6y\vec{i} + 3x\vec{j})}_{\vec{a}(\vec{r})} \underbrace{(\vec{i} dx + \vec{j} dy)}_{d\vec{r}}.$$

В качестве параметра возьмем  $x$ . Получим параметризацию

$$\begin{cases} x = x, \\ y = x^2. \end{cases} \quad (\text{П.6})$$

Выясним, каким значениям параметра  $x$  соответствует указанная в условии дуга параболы. Подставляя в неравенство  $y \leq x + 2$  параметрические выражения (П.6), получаем  $x^2 \leq x + 2$ , откуда  $x^2 - x - 2 \leq 0$ , то есть  $(x+1)(x-2) \leq 0$ . Таким образом, точка лежит на указанной в условии дуге параболы тогда и только тогда, когда параметр  $x$  принадлежит отрезку  $[-1; 2]$ .

Согласно параметризации (П.6), стр.136, радиусы-векторы точек параболы имеют вид  $\vec{r} = x\vec{i} + x^2\vec{j}$ . Поэтому, согласно формуле (2.33), стр.92,  $d\vec{r} = dx\vec{i} + 2x dx\vec{j} = (\vec{i} + 2x\vec{j}) dx$ .

Для точки параболы, соответствующей параметру  $x$ , соответствующий вектор поля  $\vec{a}$  имеет вид (подставляем параметризацию)

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \underbrace{6y}_{=6 \cdot x^2} \vec{i} + \underbrace{3x}_{=3 \cdot x} \vec{j} = 6x^2\vec{i} + 3x\vec{j}. \end{aligned}$$

Значит, учитывая, что указанная дуга параболы получается при  $x \in [-1; 2]$ , получаем

$$\int_L 6y dx + 3x dy = \int_{-1}^2 (6x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 2x) dx = 4x^3 \Big|_{x=-1}^{x=2} = 36.$$

3) Вычислите значение интеграла, полученного при решении задачи 5, стр.30.

**Ответ:** В системе координат, введенной на рис. 2.4, стр.31, окружность задается уравнением  $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$ , т.е.  $x^2 + y^2 = x$ . Параметризуем эту окружность с помощью полярной системы координат. Подставляя выражения для  $x$  и  $y$  из формул (2.23), стр.78, в уравнение окружности, получаем  $\rho^2 = \rho \cos \varphi$ . Во всей плоскости, кроме начала координат,  $\rho \neq 0$ . Интеграл “нечувствителен” к изменению значения в одной точке<sup>3</sup>, поэтому, пренебрегая ситуацией в начале координат, приводим уравнение окружности в полярной системе координат к виду  $\rho = \cos \varphi$ . Подставляя найденные значения для  $\rho$  в формулы (2.23), стр.78, получаем параметризацию окружности<sup>4</sup>

$$\begin{cases} x = \cos^2 \varphi, \\ y = \cos \varphi \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \vec{r}(\varphi) = \cos^2 \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \sin \varphi \cdot \vec{j} \Rightarrow \\ \Rightarrow dr = \sqrt{\left(\frac{d}{d\varphi} \cos^2 \varphi\right)^2 + \left(\frac{d}{d\varphi} \cos \varphi \sin \varphi\right)^2} d\varphi = d\varphi.$$

Следовательно, подставляя параметризацию и выражение для  $dr$  в формулу (2.4), стр.30, получаем

$$\int_L \left(\sqrt{x^2 + y^2} + 1\right)^2 dr = \int_{-\pi/2}^{\pi} (\cos \varphi + 1)^2 d\varphi = \frac{3}{2}\pi + 4.$$

Имеем  $\frac{3}{2}\pi + 4 \approx 8.712$ , что довольно близко к значению 5,299, полученному при приближенном вычислении этого интеграла. Наличие значительной ошибки является естественным, поскольку для разбиения  $T$ , примененного при приближенном вычислении этого интеграла, диаметр  $\text{diam}(T)$  является слишком большим, он равен почти 0,26.

4) Вычислите интеграл, полученный при решении примера 6, стр.33.

**Ответ:** В декартовой системе координат, построенной на рис. 2.5, стр.34, уравнение полуокружности имеет вид  $\begin{cases} (x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = (\frac{5}{2})^2, \\ y \geq 0. \end{cases}$

Получаем параметризацию

$$\begin{cases} x = x, \\ y = \sqrt{5x - x^2} \end{cases} \Rightarrow d\vec{r} = \left(\vec{i} + \frac{5 - 2x}{\sqrt{5x - x^2}}\right) dx.$$

<sup>3</sup>Это свойство мы отметили на стр.44.

<sup>4</sup>Приятной неожиданностью является тот факт, что даже для начала координат (с которым могли возникнуть “неприятности” из-за сокращения на  $\rho$ ) ситуация благополучная: начало координат лежит на окружности и удовлетворяет этим уравнениям при значении параметра  $\varphi = \pi/2$ !

Вычислим искомое значение интеграла:

$$\begin{aligned} & \int_L \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{j} \right) d\vec{r} = \\ & = \int_5^0 \left( -\frac{x}{\sqrt{5x}} dx - \frac{\sqrt{5x-x^2}}{2\sqrt{5x}} \cdot \frac{5-2x}{\sqrt{5x-x^2}} \right) dx = 5. \end{aligned}$$

Другой вариант решения связан с параметризацией линии с помощью полярной системы координат. Подставим выражения (2.23), стр.78, для  $x, y$  через декартовы координаты  $\varphi, \rho$  в эту систему уравнений и неравенств, получим  $\rho = 5 \cos \varphi$ . Мы позволили себе произвести сокращение на  $\rho$ , поскольку интеграл “нечувствителен к изменению” значения подынтегральной функции в отдельной точке. Подставляя это выражение для  $\rho$  в формулы (2.23), стр.78, связи между полярными и декартовыми координатами точки, получаем требуемую параметризацию (мы выписали параметрическое задание радиуса-вектора точки линии)

$$\begin{aligned} \vec{r} &= 5 \cos^2 \varphi \vec{i} + 5 \cos \varphi \sin \varphi \vec{j} = 5 \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \vec{i} + 5 \frac{\sin 2\varphi}{2} \vec{j}, \\ d\vec{r} &= \left( -5 \sin 2\varphi \vec{i} + 5 \cos 2\varphi \vec{j} \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Осталось вычислить искомый интеграл

$$-\int_L \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\int_0^{\pi/2} \frac{5(1 + \cos 2\varphi)(-5 \sin 2\varphi) + 5 \sin 2\varphi \cdot 5 \cos 2\varphi}{2 \cdot 5 \cos \varphi} d\varphi = 5.$$

Полученное значение 5 незначительно отличается от значения, вычисленного приближенно в процессе решения примера 6, стр.33, тогда мы получили 4,826, что подтверждает правильность выкладок.

5) Вычислите интеграл, полученный при решении примера 7, стр.38.

**Ответ:** Параметризацию поверхности получим с помощью цилиндрической системы координат: подставляя выражения для  $x, y, z$  из равенств (2.24), стр.79, в уравнение поверхности цилиндра  $x^2 + y^2 + 20y = 0$ , получаем  $\rho = -20 \sin \varphi$ , в итоге, возвращаясь к формулам (2.24), стр.79, получаем параметризацию поверхности цилиндра:

$$\begin{cases} x = -20 \sin \varphi \cos \varphi, \\ y = -20 \sin^2 \varphi, \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -10 \sin 2\varphi, \\ y = 10 \cos 2\varphi - 10, \\ z = z. \end{cases} \quad (\text{П.7})$$

Согласно формулам (8), стр.83, и (П.2), стр.116, получаем

$$\begin{aligned} d\sigma &= |\vec{n} d\sigma| = \left| \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -20 \cos 2\varphi & -20 \sin 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| d\varphi dz = \\ &= \left| -20 \sin 2\varphi \vec{i} + 20 \cos 2\varphi \vec{j} \right| d\varphi dz = 20 d\varphi dz. \end{aligned}$$

Для того чтобы найти пределы интегрирования, подставим параметризацию (П.7) в уравнение “снарядного следа”  $y^2 + z^2 = 10^2$ , получаем, например,

$z = \pm \sqrt{200 \cos 2\varphi - 100 \cos^2 2\varphi}$ . Учитывая, что нас интересует *верхняя* половина оторванной части трубы, следует выбрать знак  $+$ . Следовательно,

$$\iint_{\sigma} z d\sigma = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{200 \cos 2\varphi - 100 \cos^2 2\varphi}} z dz = 2000 - 250\pi.$$

- б) Вычислите интеграл от поля градиентов скалярного поля  $f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = xy$  по части поверхности конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ , находящейся внутри цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = 2x$  выше плоскости  $Oxy$ .

**Ответ:** Требуется вычислить интеграл по поверхности от векторного поля. Поэтому речь идет о поверхностном интеграле второго рода. Сначала с помощью формулы (2.16), стр.55, найдем векторное поле  $\text{grad } f = y\vec{i} + x\vec{j}$ . Теперь параметризуем поверхность. Интеграл требуется вычислить по части *конуса*, поэтому параметризовать будем конус. Проведем параметризацию с помощью цилиндрической системы координат. Формулы

перехода в цилиндрическую систему координат имеют вид 
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$
 Для того что-

бы выразить один параметр через другие (должно остаться только 2 параметра, так как параметризуем поверхность), подставим эти выражения в *уравнение той поверхности, которую параметризуем*, то есть в уравнение конуса<sup>5</sup>  $x^2 + y^2 = z^2$ . После простых преобразований имеем  $z = \rho$ . Следовательно, получили параметризацию

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = \rho. \end{cases} \quad (\text{П.8})$$

Вычислим  $\vec{n} d\sigma$  с помощью формулы (2.27), стр.84:

$$\begin{aligned} \vec{n} d\sigma &= \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 1 \end{vmatrix} d\rho d\varphi = \\ &= \pm \left( \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j} - \rho \vec{k} \right) d\rho d\varphi. \end{aligned}$$

Теперь надо выбрать знак. Возьмем конкретную точку на конусе, например точку, соответствующую значениям параметров  $\begin{cases} \rho = 1, \\ \varphi = 0, \end{cases}$  то есть точку с декартовыми координатами  $(1; 0; 1)$ . Нормальный вектор, идущий в положительном направлении, имеет координаты следующих знаков:  $(+; 0; -)$ . При подстановке указанных значений  $\rho, \varphi$  в выражение, стоящее в скобках в формуле для  $\vec{n} d\sigma$ , получаем

$$\rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j} - \rho \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}.$$

Значит, надо брать знак  $+$ , то есть

$$\vec{n} d\sigma = \left( \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j} - \rho \vec{k} \right) d\rho d\varphi.$$

<sup>5</sup>Типичная ошибка состоит в том, что на этом этапе параметризуют поверхность цилиндра. На самом деле уравнение поверхности цилиндра потребуется лишь на этапе расстановки пределов интегрирования при переходе от двойного интеграла к двукратному.

Теперь разберемся, каковы пределы изменения параметров  $\rho, \varphi$ . Для этого подставим их в неравенство, задающее “вырезающий цилиндр”. *Внутренняя часть* цилиндра задается неравенством  $x^2 + y^2 \leq 2x$ , что после постановки параметризации (П.8) дает  $\rho^2 \leq 2\rho \cos \varphi$ , то есть с учетом неотрицательности  $\rho$  получаем  $0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi$ .

Подставляя параметризацию (П.8) в выражение для векторного поля  $\text{grad } f$ , получаем

$$\text{grad } f|_{\sigma} = \rho \sin \varphi \vec{\mathbf{i}} + \rho \cos \varphi \vec{\mathbf{j}}.$$

Итак, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \text{grad } f \vec{\mathbf{n}} d\sigma &= \iint_{\sigma} (\rho \sin \varphi \rho \cos \varphi + \rho \cos \varphi \rho \sin \varphi) d\rho d\varphi = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \sin \varphi \cos \varphi \int_0^{2 \cos \varphi} d\sigma \rho^2 d\rho = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{(2 \cos \varphi)^3}{3} d\varphi = \dots = 0. \end{aligned}$$

7) Определите тип интеграла  $\int_L y^2 dx - x^2 dy$  и вычислите его, если  $L$  — дуга окружности,

$$\text{заданной системой отношений} \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ y \leq x. \end{cases}$$

**Решение.** Это криволинейный интеграл второго рода от векторного поля

$$\vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{\mathbf{a}}(x \vec{\mathbf{i}} + y \vec{\mathbf{j}}) = y^2 \vec{\mathbf{i}} - x^2 \vec{\mathbf{j}},$$

так как подынтегральное выражение представимо в виде

$$y^2 dx - x^2 dy = \underbrace{(y^2 \vec{\mathbf{i}} - x^2 \vec{\mathbf{j}})}_{\vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{r}})} \underbrace{(\vec{\mathbf{i}} dx + \vec{\mathbf{j}} dy)}_{d\vec{\mathbf{r}}}.$$

Приведем несколько способов решения, основанных на разных параметризациях дуги окружности исходной окружности, уравнение которой преобразуем к виду<sup>6</sup>  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ .

Способ 1. В качестве параметра возьмем  $x$ . Имеем, что либо  $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ , либо  $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ . Как следует из рис. П.5, указанная дуга окружности (она, по условию, находится ниже прямой  $y = x$ ) соответствует нижней половине окружности, поэтому в рассматриваемом случае имеем  $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ . Получили параметризацию

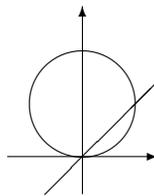


Рис. П.5. К получению параметризации (П.9)

<sup>6</sup> $x^2 + y^2 - 2y = 0$ . Теперь выделим “полный квадрат” для  $y$ :  $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$ , откуда получается указанный вид уравнения.

$$\begin{cases} x = x, \\ y = 1 - \sqrt{1 - x^2}. \end{cases} \quad (\text{П.9})$$

Выясним, каким значениям параметра  $x$  соответствует указанная в условии дуга окружности. Подставляя в неравенство  $y \leq x$  параметрические выражения (П.9), получаем  $1 - \sqrt{1 - x^2} \leq x$ . Следует решить это неравенство, но мы воспользуемся рис.П.5, из которого ясно, что точка лежит на рассматриваемой дуге окружности тогда и только тогда, когда параметр  $x$  принадлежит отрезку  $[0; 1]$ .

Согласно параметризации (П.9), стр.141, радиусы-векторы точек дуги окружности имеют вид  $\vec{\mathbf{r}}(x) = x \vec{\mathbf{i}} + (1 - \sqrt{1 - x^2}) \vec{\mathbf{j}}$ . Поэтому, согласно формуле (2.33), стр.92,

$$d\vec{\mathbf{r}} = dx \vec{\mathbf{i}} + \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} \vec{\mathbf{j}} = \left( \vec{\mathbf{i}} + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \vec{\mathbf{j}} \right) dx.$$

В точке окружности, соответствующей параметру  $x$ , вектор поля  $\vec{\mathbf{a}}$  имеет вид (подставляем параметризацию)

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{y^2}{(1 - \sqrt{1 - x^2})^2} \vec{\mathbf{i}} - \frac{x^2}{-(x)^2} \vec{\mathbf{j}} = (2 - x^2 - 2\sqrt{1 - x^2}) \vec{\mathbf{i}} - x^2 \vec{\mathbf{j}}.$$

Учитывая, что указанная дуга окружности получается при  $x \in [0; 1]$ , имеем

$$\int_L y^2 dx + x^2 y = \int_{-1}^2 \left( (2 - x^2 - 2\sqrt{1 - x^2}) \cdot 1 - x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

Для вычисления интегралов, содержащих обозначения корней, потребуется сделать замену, например,  $x = \sin t$  и т.п.

Способ 2. Параметризуем окружность с помощью формул перехода в полярную систему координат:  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$  Надо выразить одну из переменных  $\rho, \varphi$  через другую. Для

этого подставим эти выражения в уравнение окружности:  $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 2\rho \sin \varphi$ , откуда  $\rho = 2 \sin \varphi$ . Подставляя найденное выражение для  $\rho$  в формулы перехода в полярную систему координат, получаем параметризацию

$$\begin{cases} x = 2 \sin \varphi \cos \varphi, \\ y = 2 \sin^2 \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sin 2\varphi, \\ y = 1 - \cos 2\varphi. \end{cases} \quad (\text{П.10})$$

Выясним, каким значениям параметра  $\varphi$  соответствует указанная в условии дуга окружности. Подставляя в неравенство  $y \leq x$  параметрические выражения (П.10), получаем  $1 - \cos 2\varphi \leq \sin 2\varphi$ , откуда  $\varphi \in [0; \frac{\pi}{4}]$ .

Согласно параметризации (П.10), стр.141, радиусы-векторы точек окружности имеют вид  $\vec{\mathbf{r}}(\varphi) = \sin 2\varphi \vec{\mathbf{i}} + (1 - \cos 2\varphi) \vec{\mathbf{j}}$ . Поэтому, согласно (2.33), стр.92,

$$d\vec{\mathbf{r}} = (2 \cos 2\varphi \vec{\mathbf{i}} + 2 \sin 2\varphi \vec{\mathbf{j}}) d\varphi.$$

В точке параболы, соответствующей параметру  $\varphi$ , соответствующий вектор поля  $\vec{\mathbf{a}}$  имеет вид (подставляем параметризацию)

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{y^2}{(1 - \cos 2\varphi)^2} \vec{\mathbf{i}} - \frac{x^2}{-(\sin 2\varphi)^2} \vec{\mathbf{j}} = (1 - \cos 2\varphi)^2 \vec{\mathbf{i}} - \sin^2 2\varphi \vec{\mathbf{j}}.$$

Учитывая, что указанная дуга окружности получается при  $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ , имеем

$$\int_L y^2 dx - x^2 dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((1 - \cos 2\varphi)^2 \cdot 2 \cos 2\varphi - \sin^2 2\varphi \cdot 2 \sin 2\varphi) d\varphi = 1 - \frac{\pi}{2},$$

что совпадает с результатом вычислений в ситуации, когда в качестве параметра выбирался  $x$ .

- 8) Вычислите криволинейный интеграл второго рода от  $\vec{a} = x \vec{j}$  вдоль ломаной  $ABCD$ , где  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(0, 3)$ ,  $D(2, 3)$ .

**Решение**

$$AB : \begin{cases} x = x, \\ y = 0, \\ 0 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad BC : \begin{cases} x = x, \\ y = 3 - 1, 5x, \\ 2 \geq x \geq 0, \end{cases} \quad CD : \begin{cases} x = x, \\ y = 3, \\ 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$\int_L \vec{a} d\vec{r} = \int_{AB} \vec{a} d\vec{r} + \int_{BC} \vec{a} d\vec{r} + \int_{CD} \vec{a} d\vec{r} =$$

$$= \int_0^2 (0 d0 + x dx) + \int_2^0 (0 dx + x d(3 - 1, 5x)) + \int_0^2 (0 d0 + x dx) =$$

$$= 0 + -\frac{3}{2} \int_2^0 x dx + 0 = 3.$$

**Ответ:**  $\int_L \vec{a} d\vec{r} = 3.$

- 9) Вычислите работу силового поля  $\vec{F} = x^2 y \vec{i} + \frac{x^3}{3} \vec{j}$  при перемещении материальной точки вдоль каждой из дуг: а)  $y = x$ ; б)  $y = x^2$  от точки  $A(0, 0)$  до точки  $B(1, 1)$ .

**Решение.** а) Подставляя параметризацию  $\begin{cases} x = x, \\ y = x \end{cases}$  в выражения для дифференциала дуги и для вектора поля в точке с координатами  $(x; x)$ , получаем

$$\begin{cases} d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} = dx \vec{i} + dx \vec{j} = (\vec{i} + \vec{j}) dx, \\ \vec{F} = x^2 x \vec{i} + \frac{x^3}{3} \vec{j} = x^3 \vec{i} + \frac{x^3}{3} \vec{j}. \end{cases} \quad \text{Следовательно,}$$

$$\int_{AB} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 \left( x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \int_0^1 \frac{4x^3}{3} dx = \frac{4x^4}{12} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

б) Подставим параметризацию  $\begin{cases} x = x, \\ y = x^2. \end{cases}$  в выражения для дифференциала дуги и для вектора поля в точке с координатами  $(x; x^2)$ , получаем

$$\begin{cases} d\vec{r} = dx \vec{i} + 2x dx \vec{j}, \\ \vec{F} = x^2 x^2 \vec{i} + \frac{x^3}{3} \vec{j} = x^4 \vec{i} + \frac{x^3}{3} \vec{j}. \end{cases} \text{ Таким образом,}$$

$$A = \int_{AB} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 \left( x^4 + \frac{2x^4}{3} \right) dx = \frac{5}{3} \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{3}.$$

Совпадение величины работы, выполненной данной силой по перемещению точки по рассмотренным линиям, соединяющим точки  $A$  и  $B$ , не является особенностью рассматриваемого поля. Подробнее особенности таких полей обсуждаются в разделе 3.1, стр.101.

- 10) Найдите поток через боковую поверхность конуса  $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$  от векторного поля  $\vec{F}$ , каждой точке  $M$  пространства сопоставляющего вектор, направленный к точке  $A(1; 0; 1)$  и по модулю равный удвоенному расстоянию от точки  $M$  до точки  $A$ .

**Решение.** Параметризуем конус с помощью цилиндрической системы координат. Подставляя выражения для декартовых координат  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z \end{cases}$  в уравнение конуса, получаем  $\rho^2 = z^2$ . Учитывая условие  $0 \leq z \leq 1$  и неотрицательность  $\rho$ , имеем  $z = \rho$ . Следовательно, в данном случае получилась параметризация конуса (его верхней части)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = \rho. \end{cases} \quad (\text{П.11})$$

Согласно теореме 8, стр.83, о векторе  $\vec{n} d\sigma$  параметрически заданной поверхности имеем

$$\begin{aligned} \vec{n} d\sigma &= \pm \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j} + \rho \vec{k} \right) \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j} + \rho \vec{k} \right) d\varphi d\rho = \\ &= \pm \left( -\rho \cos \varphi \vec{i} - \rho \sin \varphi \vec{j} + \rho \vec{k} \right) d\varphi d\rho. \end{aligned}$$

Нам надо выяснить, какой именно знак (+ или -) следует поставить в последнем выражении. Для этого можно, например, взять конкретную точку  $M$  на поверхности и оценить знак каждой координаты вектора  $\vec{F}(M)$ . Возьмем, например, точку, отвечающую значениям параметров  $(\rho; \varphi) = (1; 0)$ , (см. рис. П.6). Эта точка имеет полярные координаты  $(\rho; \varphi; z) = (1; 0; 1)$  и декартовы координаты  $(1; 0; 1)$  (совпадение декартовых и полярных координат является случайным). Как видно из рис. П.6, координаты вектора  $\vec{F}(M)$  имеют следующие знаки<sup>7</sup>: +; 0; -. Поэтому имеем

$$\vec{n} d\sigma = \left( \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j} - \rho \vec{k} \right) d\varphi d\rho.$$

Теперь следует задать поле  $\vec{F}$  формулой от координат точки. Возьмем произвольную точку  $M(x; y; z)$ . По условию векторы  $\vec{F}(M)$  и  $\overrightarrow{MA}$  коллинеарны. Согласно крите-

<sup>7</sup>Напомним, что координаты вектора — это координаты конца направленного отрезка, выходящего из начала координат и равного данному вектору.

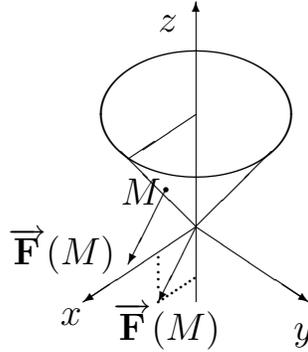


Рис. П.6. К задаче 10

рию коллинеарности  $\vec{F}(M) = \lambda \overline{MA}$ . По условию  $|\vec{F}(M)| = 2 |\overline{MA}|$ , с другой стороны,  $|\vec{F}(M)| = |\lambda| \cdot |\overline{MA}|$ . Векторы  $\vec{F}(M)$  и  $\overline{MA}$  сонаправлены, поэтому  $\lambda > 0$ , т.е.  $|\lambda| = \lambda$ . Таким образом,

$$2 |\overline{MA}| = |\vec{F}(M)| = \lambda \cdot |\overline{MA}|,$$

откуда  $\lambda = 2$ . Следовательно,  $\vec{F}(M) = 2\overline{MA} = 2((1-x)\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k})$ . Значит, нам надо вычислить линейный интеграл второго рода

$$\iint_{\rho \leq 1} 2 \left( (1-x)\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k} \right) \cdot \left( \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j} - \rho \vec{k} \right) d\varphi d\rho.$$

Подставляя параметризацию (П.11) и вычисляя скалярное произведение, получаем значение этого интеграла:

$$\begin{aligned} & \iint_{\rho \leq 1} 2 \left( (1 - \rho \cos \varphi) \rho \cos \varphi + (\rho \sin \varphi)^2 + \rho^2 \right) d\varphi d\rho = \\ & = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2\rho(1 - \cos \varphi) d\rho = 4\pi. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $4\pi$ .

### Ответы к заданиям на стр. 112

- 1) Воспользуемся алгоритмом составления уравнений, представленным в разделе<sup>8</sup> П.3, стр.122. *Что надо найти? Векторное поле. В каком виде представим ответ? Формулой вида*

$$\vec{F} \left( x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \right) = P(x; y; z) \vec{i} + Q(x; y; z) \vec{j} + R(x; y; z) \vec{k}.$$

*Найдем это выражение конструктивно или введем переменные.* Описывая вид решения, мы уже ввели переменные  $x; y; z; P; Q; R$ . Из того, что векторные линии представляют собой окружности, параллельные плоскости  $xOy$ , следует  $R(x; y; z) = 0$ .

<sup>8</sup>См. также [8, с.22], [9], [11, с.22].

Составим систему уравнений. Вектор поля  $P(x; y; z) \vec{i} + Q(x; y; z) \vec{j} + R(x; y; z) \vec{k}$  коллинеарен вектору касательной к окружности  $x^2 + y^2 = C^2$ . Рассматривая это уравнение как неявное задание функции  $y(x)$ , получаем  $2x + 2y \cdot y' = 0$ , откуда  $y' = -\frac{x}{y}$ .

Следовательно, касательным вектором к векторной линии поля  $\vec{F}$  будет, например, вектор

$$\frac{d}{dx} (x \vec{i} + y \vec{j}) = \vec{i} + y' \vec{j} = \vec{i} - \frac{x}{y} \vec{j}.$$

По условию этот вектор коллинеарен вектору  $\vec{F} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})$ , т.е.<sup>9</sup>

$$P(x; y; z) \vec{i} + Q(x; y; z) \vec{j} + R(x; y; z) \vec{k} = \lambda \cdot \left( \vec{i} - \frac{x}{y} \vec{j} \right).$$

Значение переменной  $\lambda$  зависит от того, в какой точке рассматривается вектор, т.е.  $\lambda$  есть функция от  $x; y; z$ . По условию модуль вектора  $\vec{F} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})$  зависит только от длины вектора  $\vec{r}$ , поэтому

$$|\lambda(x; y; z)| \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2} = \alpha \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right),$$

откуда  $|\lambda(x; y; z)| = |y| \cdot \frac{\alpha \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = |y| \cdot |\beta \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)|$ . Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что  $\lambda(x; y; z) = y \cdot \beta \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)$ . Следовательно,

$$\vec{F} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k} = \beta \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) (y \vec{i} - x \vec{j}).$$

Согласно теореме 12, стр.102 (критерий потенциальности поля),  $\text{rot} (\vec{F}) = \vec{0}$ , откуда в силу формулы (2.22), стр.67,

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y \cdot \beta \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) & -x \cdot \beta \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) & 0 \end{vmatrix} = \vec{0},$$

т.е.

$$\beta \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \beta' \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) + \left( \beta \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \beta' \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right) = 0.$$

Таким образом,  $\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \beta' \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) + 2\beta = 0$ , откуда

$$\frac{d\beta \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)}{\beta \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)} = -2 \frac{d\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \Rightarrow \beta \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) = \frac{C}{x^2 + y^2}.$$

Следовательно,

$$\vec{F} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k} = C \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} - \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j} \right).$$

<sup>9</sup>См. критерий коллинеарности векторов — теорему 18, стр.114.

Наконец, по условию задачи

$$\vec{j} = C \left( \frac{0}{1^2 + 0^2} \vec{i} - \frac{1}{0^2 + 0^2} \vec{j} \right),$$

откуда  $C = -1$ .

**Ответ.** Искомое поле может быть задано уравнением

$$\vec{F} \left( x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}.$$

2) По формуле (2.22), стр.67, для вычисления координатных функций ротора имеем

$$\begin{aligned} \vec{a} = \text{rot} \left( x^2 y \vec{i} + y^2 z \vec{j} + z^2 x \vec{k} \right) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & y^2 z & z^2 x \end{vmatrix} = \\ &= -y^2 \vec{i} - z^2 \vec{j} - x^2 \vec{k}. \end{aligned}$$

Проверим соленоидальность поля  $\vec{a}$  с помощью критерия, т.е. теоремы 15, стр.110:

$$\text{div} \vec{a} = \text{div} \left( -y^2 \vec{i} - z^2 \vec{j} - x^2 \vec{k} \right) = \frac{\partial(-y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(-z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(-x^2)}{\partial z} = 0.$$

Как и при решении примера 19, стр.111, найдем векторный потенциал  $\vec{c} = P \vec{i} + Q \vec{j}$ , у которого последняя координатная функция — нулевая:

$$-Q_z \vec{i} + P_z \vec{j} + (Q_x - P_y) \vec{k} = -y^2 \vec{i} - z^2 \vec{j} - x^2 \vec{k}.$$

Запишем это векторное равенство в виде системы уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} -Q_z = -y^2; \\ P_z = -z^2; \\ Q_x - P_y = -x^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = -\frac{z^3}{3} + \alpha(x; y); \\ Q = y^2 z + \beta(x; y); \\ \beta'_x - \alpha'_y = -x^2. \end{cases}$$

Например, положим  $\alpha(x; y) = x^2 y$ ,  $\beta(x; y) = 0$ . В итоге получили векторный потенциал

$$\vec{c} \left( x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \right) = \left( -\frac{z^3}{3} + x^2 y \right) \vec{i} + y^2 z \vec{j}.$$

Проверим, что поля  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  отличаются слагаемым в виде градиента скалярного поля. По теореме 12, стр.102, т.е. критерию потенциальности поля и формуле (2.22), стр.67, для вычисления координатных функций ротора имеем

$$\begin{aligned} \text{rot} \left( \vec{b} - \vec{c} \right) &= \text{rot} \left( \left( x^2 y - \left( -\frac{z^3}{3} + x^2 y \right) \right) \vec{i} + (y^2 z - y^2 z) \vec{j} + z^2 x \vec{k} \right) = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{z^3}{3} & 0 & z^2 x \end{vmatrix} = \vec{0}. \end{aligned}$$

### Список литературы

1. *Азерников В.И.* Векторный анализ: методическое пособие по курсу “Высшая математика”/ В.И. Азерников. Екатеринбург: УГТУ, 1998. 62 с. (document)
2. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся ВУЗов/ И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. 15-е изд., М.: Наука: Физматлит, 1998. 608 с. 2.8
3. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике/ М.Я. Выгодский. 11-е изд-е, стереотипное, М.: Наука, 1975. 871 с. 2.8
4. *Келли Дж.* Общая топология: Пер. с англ./ Дж. Келли. 2-е изд. М.: Наука, 1981. 432 с. П.2
5. *Корн Г.* Справочник по высшей математике для научных работников и инженеров/ Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1984. С. 494-517. 2.1, 6, 23, 2.8
6. *Краснов М.Л.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям/ М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Высшая школа, 1978. С.288.
7. *Махнев А.А.* Определенные и несобственные интегралы. Интегралы, зависящие от параметра. Ряды/ А.А. Махнев, Н.В. Мельникова, Ю.Б. Мельников. Екатеринбург: УрГУ, 2001. 226 с. 2, 2.3, П.2, П.2
8. *Мельникова Н.В.* Лекции по алгебре. Учеб. пос. по курсу “Математика”/ Н.В. Мельникова, Ю.Б. Мельников, 3-е изд-е, испр. и доп./ Екатеринбург: Уральское издательство, 2003. 512 с. 1, 2, 3, 1, 6, 2.1.3, 45, П.1, П.2, П.2, 5, П.4, 1, 8
9. *Мельников Ю.Б.* Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей: монография. Екатеринбург: Уральское издательство, 2004. 384 с. 1, 10, 13, 6, П.4, П.4, 1, 63, 63, 2, 1, 2, 8
10. *Мельников Б.Н.* Геотехногенные структуры: теория и практика: Монография/ Б.Н. Мельников, Ю.Б. Мельников. Екатеринбург: Уральское изд-во, 2004. 556 с. 1, П.4, 1, 63, 63, 2

11. *Мельников Ю.Б.* Доказательство теорем. Задачи, требующие составления системы уравнений и неравенств. Функции и графики. Задачи с параметрами: учеб. пособие по курсу “Математика”/ Ю.Б. Мельников. 4-е изд., перераб. и доп., Екатеринбург: ООО “Издательство УМЦ-УПИ”, 2005. 252 с. **6, 1, 8**
12. *Мельникова Н.В., Мельников Ю.Б.* Геометрия — это несложно: учеб. пособие по курсу “Математика”/ Н.В. Мельникова, Ю.Б. Мельников. 2-е изд., испр. и доп. Екатеринбург: ООО “Издательство УМЦ УПИ”, 2005. 172 с. **2.1.3**
13. *Мельников Ю.Б.* О системе исследовательских стратегий/ Ю.Б. Мельников, Ю.Ю. Мельникова/ Психолого-педагогические исследования в системе образования: материалы Всероссийской науч.-практ. конференции: в 7 ч. Ч.6/ Акад. повыш. квалиф. и перепод. раб. обр.; Южно-Уральск. гос. ун-т; Челяб. гос. пед. ун-т; Челяб. ин-т доп. проф.-пед. образ., отв. ред. Д.Ф. Ильясов. Москва; Челябинск: Образование, 2005.— С.223-226. **П.4**
14. *Мельников Ю.Б.* Модели математики и их использование в учебном процессе/ Ю.Б. Мельников, Н.В. Мельникова, Ю.Ю. Мельникова / Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании: сборник материалов областной научно-практической конференции, В 2 ч. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006, Ч II. С.190-196. **1**
15. *Никольский С.М.* Курс математического анализа/ С.М. Никольский, М.: Наука, 1973. Т 2. 392 с. **2.1.3**
16. *Парселл Э.* Электричество и магнетизм. Берклевский курс физики/ Э. Парселл. М.: Наука, 1975. Т. 2, 439 с. **1, 3**
17. *Табуева В.А.* Математика. Математический анализ. Специальные разделы: учебное пособие/ В.А. Табуева. Екатеринбург. УГТУ-УПИ, 2002. 495 с. **(document), 2.1, 2.1.3**

## Предметный указатель

- $\Delta$ , 76
- $\nabla$ , 55, 58, 67, 70
- $\oint$ , 33
- div, 56
- grad, 51
- rot, 60
  
- Гаусса-Остроградского формула, 96
  
- Лапласа оператор, 76
  
- Стокса формула, 95
  
- аддитивность интеграла по фигуре, 45
- аддитивность по отрезку:, 44
- аксиомы нормы, 121
- анализ
  - векторный, 6
  - функциональный, 6
  
- вектор-функция, 8
- векторная линия, 19
- векторное поле, 16
  - координатные функции, 17
  - соленоидальное, 110
  - циркуляция, 33
- векторное произведение векторов, 115
- векторный анализ, 6
- векторный потенциал, 110
- векторы коллинеарные, 114
- векторы компланарные, 115
- верхняя грань, 121
  - точная, 121
- внутренняя точка, 120
- выражение обобщенное алгебраическое, 13
  
- годограф вектор-функции, 8
- градиент скалярного поля, 51
- граница, 120
- грань
  - верхняя, 121
  - точная верхняя, 121
  
- двойной интеграл, 37, 94
- диаметр множества, 25
- диаметр разбиения, 23
- дивергенция векторного поля, 56
  
- замкнутое множество, 120
- замыкание множества, 121
- значение интеграла, 27
  
- измельчение разбиения, 26
- индуцирование неравенства с функций на интегралы
  - для интеграла первого рода по фигуре, 45
  - для определенного интеграла, 44
- индуцированная топология, 120
- интеграл, 27
  - двойной, 37
  - значение, 27
  - линейный второго рода, 33
  - линейный первого рода, 29
  - поверхностный второго рода, 42
  - поверхностный первого рода, 38
  - тройной, 37
- интеграл второго рода
  - линейный, 33
- интеграл определенный, 23
- интеграл первого рода
  - линейный, 29
  
- конечно-аддитивная мера (см. сноску), 27
- координатные функции, 17
- координатные функции векторного поля, 72
- координаты вектора, 114
- кривая, 92
- криволинейный интеграл, 94
- криволинейный интеграл второго рода, 33
- криволинейный интеграл первого рода, 29
- критерий коллинеарности векторов, 114
- критерий потенциальности векторного поля, 102
- критерий соленоидальности поля, 110

- линейность интеграла  
 для интеграла по фигуре, 45  
 для определенного интеграла, 43
- линейный интеграл второго рода, 33  
 линейный интеграл первого рода, 29
- линия  
 ориентированная, 32  
 линия векторная, 19  
 линия уровня, 15
- мера, 27  
 конечно-аддитивная (см. сноску), 27
- множества  
 открытые, 119
- множество  
 диаметр, 25  
 замкнутое, 120  
 замыкание, 121
- нечувствительность интеграла к изменениям в отдельных точках  
 для интеграла по фигуре, 44  
 для определенного интеграла, 43
- норма, 122
- нормированное линейное пространство, 121
- обобщенное алгебраическое выражение, 13
- однородность нормы, 121
- окрестность, 119
- окрестность точки, 119
- оператор Лапласа, 76
- ориентация  
 линии, 32  
 поверхности, 40
- ориентированная линия, 32
- ориентированная поверхность, 40
- открытые множества, 119
- поверхностный интеграл, 94  
 второго рода, 42  
 первого рода, 38
- поверхность, 93  
 ориентированная, 40
- поверхность уровня, 15
- подынтегральная функция, 27
- поле  
 соленоидальное, 110
- поле векторное, 16
- поле потенциальное, 102
- поле скалярное, 11, 12
- поле центральное (см. задачи для самостоятельного решения), 21, 130
- полярная система координат, 78
- потенциал, 102  
 векторный, 110
- предельная точка, 121
- производная по направлению, 14
- пространство  
 топологическое, 119
- разбиение  
 диаметр, 23
- разбиение множества, 25
- разбиение отрезка, 23
- ротор векторного поля, 60
- система координат, 77
- система координат сферическая, 79
- система координат цилиндрическая, 79
- скалярное поле, 11, 12
- скалярное произведение, 115
- следствие из теоремы об интеграле от потенциального поля, 103
- смешанное произведение векторов, 117
- соленоидальное поле, 110
- стратегия  
 обогащения модели, 129
- теорема Гаусса-Остроградского, 96
- теорема Стокса, 95
- теорема о векторе  $\vec{n} d\sigma$  параметрически заданной поверхности, 83
- теорема о векторном потенциале, 111
- теорема о выражении потенциала через интеграл, 106
- теорема о координатах вектора  $\vec{a}$ , 114
- теорема о модуле интеграла и интеграле от модуля  
 для интеграла первого рода по фигуре, 46

- для определенного интеграла, 44
- теорема о неотрицательности интеграла от неотрицательной функции
- для интеграла первого рода по фигуре, 45
- для определенного интеграла, 44
- теорема о перестановке пределов интегрирования, 44
- теорема о потоке по границам разбиения, 47
- теорема о роторе и циркуляции, 61
- теорема о связи градиента с производной по направлению, 52
- теорема о среднем значении
- для интеграла первого рода по фигуре, 46
- для определенного интеграла, 44
- теорема о циркуляции по границам разбиения поверхности, 46
- теорема об изменении направления интегрирования, 46
- теорема об интеграле от потенциального поля, 103
- следствие, 103
- теорема об ортогональности градиента и линии уровня, 54
- теорема об оценке интеграла
- для интеграла первого рода по фигуре, 46
- для определенного интеграла, 44
- теорема-критерий коллинеарности векторов, 114
- теорема-критерий соленоидальности поля, 110
- терм, 13
- топологическое пространство, 119
- топология, 119
- индуцированная, 120
- точка
- внутренняя, 120
- окрестность, 119
- предельная, 121
- точная верхняя грань, 121
- тройной интеграл, 37, 94
- уровня линия, 15
- уровня поверхность, 15
- формула
- Гаусса-Остроградского, 96
- Стокса, 95
- формула “бац минус цаб”, 117
- функции
- координатные, 17
- функции координатные векторного поля, 72
- функциональный анализ, 6
- функция
- подынтегральная, 27
- центральное поле (см.задачи для самостоятельного решения), 21, 130
- циркуляция, 33

*Учебное электронное текстовое издание*

Нина Владимировна Мельникова  
Юрий Борисович Мельников  
Юлия Юрьевна Мельникова

## **ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА. ИНТЕГРАЛЫ В ТЕОРИИ ПОЛЯ**

Редактор *Л.Ю. Козяйчева*  
Компьютерная верстка *Ю.Б. Мельников*

**Рекомендовано РИС ГОУ ВПО УГТУ-УПИ**  
**Разрешен к публикации 10.04.2006**  
**Электронный формат – PDF**  
**Формат 60 × 84 1/16 Объем 8,1 уч.-изд. л.**

**Издательство ГОУ-ВПО УГТУ-УПИ**  
**620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19**  
**e-mail: sh@uchdep.ustu.ru**

**Информационный портал**  
**ГОУ ВПО УГТУ-УПИ**  
**<http://www.ustu.ru>**