ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«**ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**»

В.В. Конев

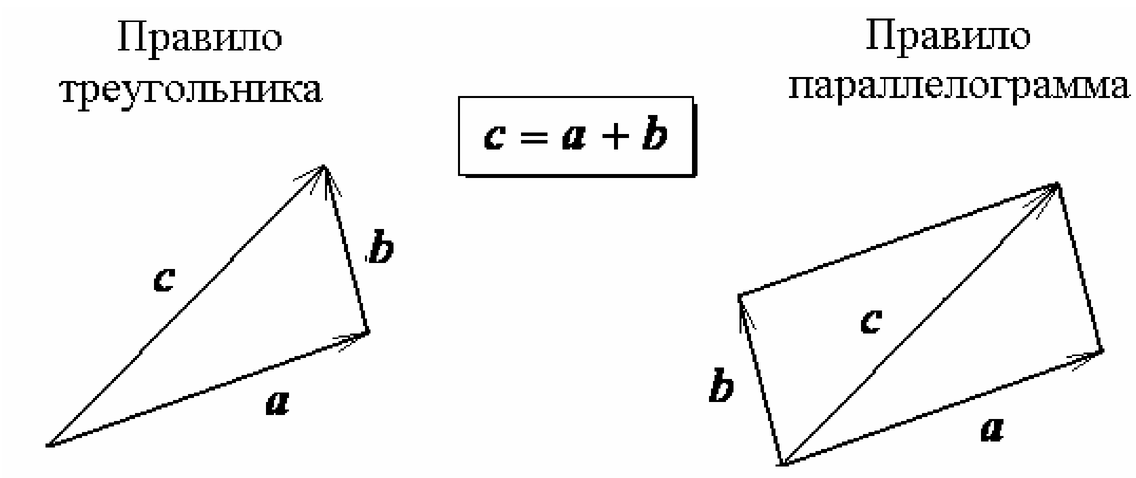
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

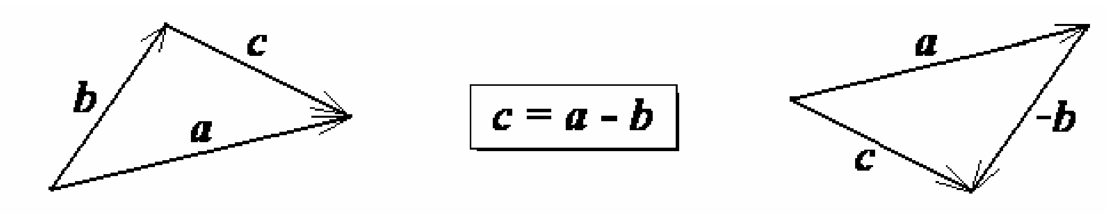
Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

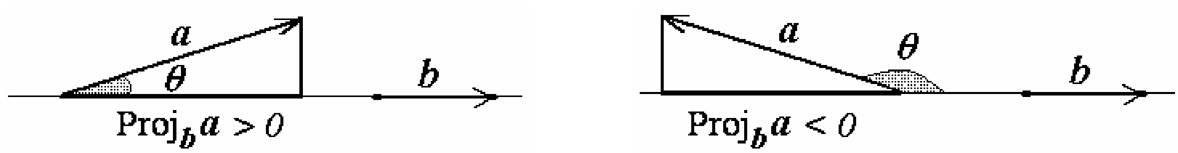
Издательство
Томского политехнического университета
2008

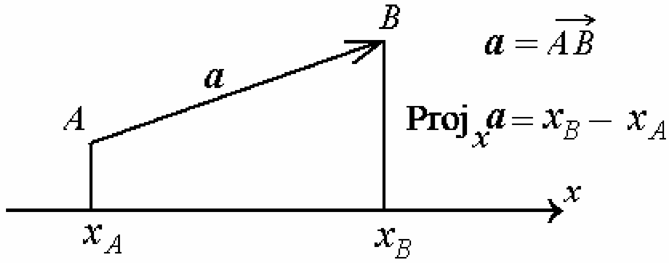
Линейные операции с векторами

1. $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$, если $b_1 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda a_2$ и $b_3 = \lambda a_3$.
2. $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, если $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$ и $c_3 = a_3 + b_3$.
3. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
4. $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$
5. $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$









UDC 517
Конев В.В. Векторная алгебра. Учебное пособие. – Томск. Изд. ТПУ. 2008. – 31с. Учебное пособие основано на курсе лекций, читаемых автором для студентов отделения элитного технического образования ТПУ.

Наряду с изложением теоретического курса в пособии содержатся графические иллюстрации и примеры.

Рецензент: Арефьев К. П., профессор, доктор физ.-мат. наук.

Содержание

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1. Введение

В науке и технике встречаются величины разного типа. Одни из них полностью определяются своим числовым значением, например энергия, масса, температура и т. д. Такие величины называются **скалярными**, или **скалярами**.

Другие физические величины определяются не только числовым значением, но и направлением – такие, например, как перемещение, скорость, ускорение, сила или импульс. Величины такого рода называются **векторными**, или **векторами**.

Потребность в векторном анализе стала особенно актуальной после того, как стала ясна векторная природа электрического и магнитного полей – благодаря, во многом, усилиям Максвелла по разработке электромагнитной теории.

Не следует, однако, думать, что любая величина, характеризуемая своим числовым значением и направлением, является вектором. Существуют физические величины, например, коэффициент упругости или коэффициент преломления света в анизотропных кристаллах, которые характеризуются числовым значением и направлением, но при этом не являются векторами. Не вдаваясь в подробности, скажем только, что вышеупомянутые физические величины представляют собой тензоры, а подобными свойствами обладают и псевдовекторы.

Достоинство геометрического подхода к описанию вектора заключается в его наглядности. Однако в большинстве приложений векторной алгебры, например, для решения задач аналитической геометрии, операции с векторами фактически осуществляются посредством операций с координатами векторов. По сути дела эффективность применения векторного аппарата основывается на возможности разложения вектора по базису ортогональных векторов или, другими словами, на интерпретации вектора как упорядоченного набора трех величин – координат вектора. Поэтому представляется разумным с самого начала исходить из представления о трехмерном векторе как об упорядоченной совокупности трех чисел. В таком подходе ключевые моменты с самого начала выходят на передний план, а обобщение вектора на случай абстрактного пространства большей размерности представляется просто самоочевидным.

Мы намерены следовать именно такому подходу. Однако не войдем ли мы в противоречие с принципом независимости вектора от системы координат, связывая определение вектора с некоторой координатной системой?

Такие опасения не беспочвенны. Действительно, результаты описания физических процессов с помощью математики должны быть независимыми от математического аппарата. Если сравнить физическую теорию с неким сооружением, то математический аппарат можно уподобить строительным лесам, без которых почти невозможно возвести это сооружение, но не леса определяют облик завершенного сооружения.

На самом деле подобные противоречия являются кажущимися. Можно использовать любое определение вектора – лишь бы оно соответствовало необходимым критериям. В частности, предположение об изотропности пространства (т. е. отсутствии выделенного направления) означает, что описание физического явления не должно зависеть от ориентации системы координат, а координаты вектора должны преобразовываться при повороте системы координат по тому же закону, что и координаты точки. Понятно, что такой важный момент не выпал из сферы нашего внимания. Показано также, что скалярное произведение инвариантно относительно поворота системы координат (является числом, не зависящим от выбора системы координат).

2. Линейные операции

Трехмерный **вектор**, заданный в некоторой системе координат, представляет собой упорядоченную тройку чисел, называемых **координатами** вектора. Вектор обозначается жирной буквой латинского алфавита, а его координаты заключаются в фигурные скобки, например, $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Два вектора $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ считаются **равными**, если их соответствующие координаты попарно равны:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ a_3 = b_3. \end{cases}$$

Обратите внимание, что одно векторное равенство эквивалентно системе трех скалярных уравнений для координат векторов.

Линейные операции над векторами включают в себя умножение вектора на число и сложение векторов. Эти операции определяются в точности также как и соответствующие операции для матриц.

Если вектор $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ **умножается на скаляр** λ, то каждая его координата умножается на этот скаляр:

$$\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} b_1 = \lambda a_1, \\ b_2 = \lambda a_2, \\ b_3 = \lambda a_3. \end{cases}$$

Суммой двух векторов $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_1\}$ является вектор $\boldsymbol{c}$, координаты которого равны сумме соответствующих координат векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}.$$

Вычитание из одного вектора другого представляет собой операцию обратную сложению:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}.$$

Другими словами, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = a_1 - b_1, \\ c_2 = a_2 - b_2, \\ c_3 = a_3 - b_3. \end{cases}$

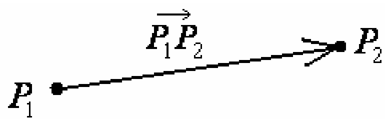
3. Геометрическая интерпретация векторов

3.1. Вектор как направленный отрезок

Пусть вектор $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ задан в прямоугольной системе координат. Выберем такие две точки P_1 и P_2 с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), соответственно, чтобы выполнялись условия

$$a_1 = x_2 - x_1, \qquad a_2 = y_2 - y_1, \qquad a_3 = z_2 - z_1. \qquad (1)$$

Проведем из точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ в точку $P_2(x_2, y_2, z_2)$ направленный отрезок $\overrightarrow{P_1P_2}$:



Координатами отрезка $\overrightarrow{P_1P_2}$ являются разности между соответствующими координатами конца и начала отрезка:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

С учетом условий (1) получаем, что

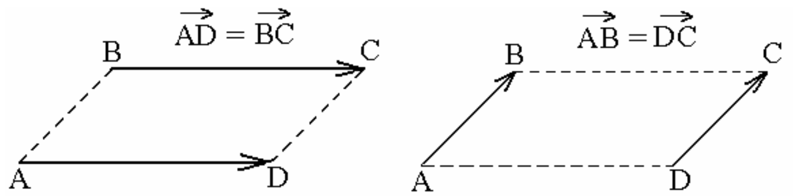
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \{a_1, a_2, a_3\}.$$

Таким образом, вектор $\boldsymbol{a}$ можно интерпретировать как направленный отрезок $\overrightarrow{P_1P_2}$: $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$.

Под **длиной** вектора $\boldsymbol{a}$ понимается длина соответствующего ему отрезка $\overrightarrow{P_1P_2}$, которая обозначается как $|\boldsymbol{a}|$ или просто символом a.

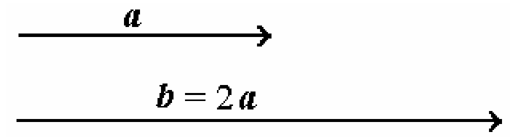
Для наглядного представления векторной величины используется изображение в виде стрелки, длина которой пропорциональна числовому значению, а направление стрелки отображает направление вектора.

С точки зрения геометрии два вектора рассматриваются как равные, если их можно совместить друг с другом параллельным переносом:

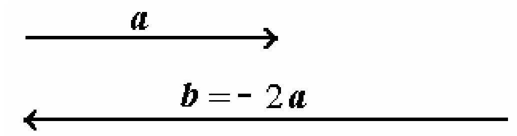


При умножении вектора $\boldsymbol{a}$ на число λ длина вектора становится равной $|\lambda|a$.

Если $\lambda > 0$, то направление вектора остается неизменным.

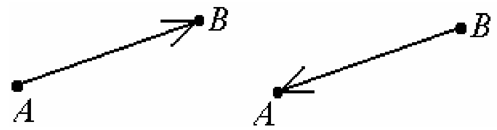


Если же $\lambda < 0$, то вектор $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$ направлен противоположно вектору $\boldsymbol{a}$.



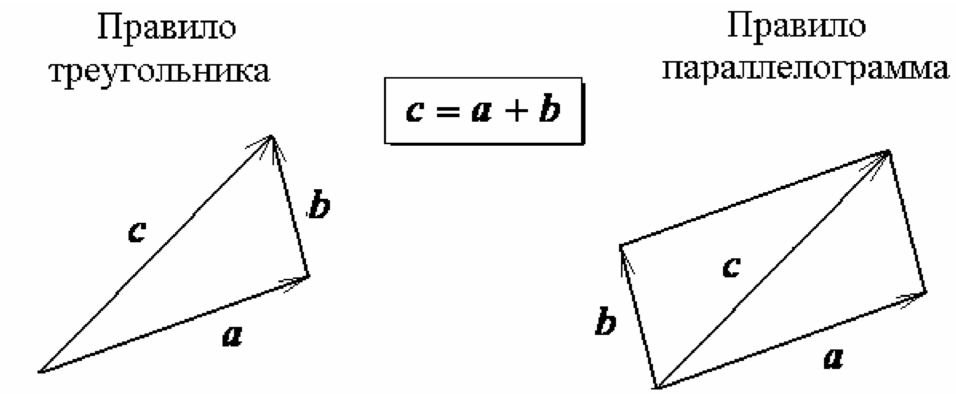
Для каждого вектора $\vec{AB}$ существует **противоположный** вектор

$$\vec{BA} = -\vec{AB}:$$

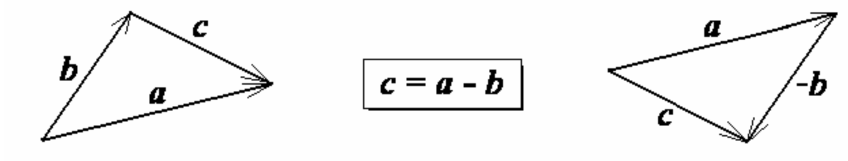


Под **единичным** вектором (или **ортом**) понимается вектор, длина которого равна единице. Чтобы получить единичный вектор $\boldsymbol{e}$ в направлении $\boldsymbol{a}$, нужно вектор $\boldsymbol{a}$ разделить на его длину: $\boldsymbol{e} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{a}$.

Приведенные ниже рисунки иллюстрируют правила **геометрического сложения и вычитания векторов**.

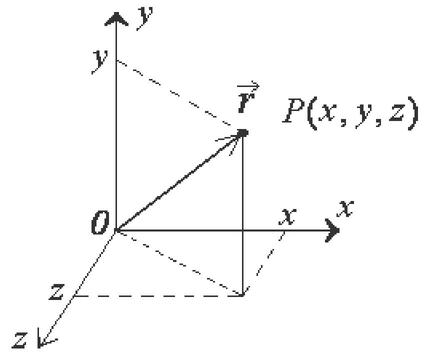


Под разностью $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ понимается такой вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, что $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$.



3.2. Радиус-вектор

Если отрезок проведен из начала координат в точку $P(x, y, z)$, то он называется **радиус-вектором** точки P и обозначается символом $\boldsymbol{r}$.



Координаты радиус-вектора совпадают с координатами его концевой точки, $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$, и, следовательно, они преобразуются при повороте координатных осей так же, как координаты точки.

Пусть выбраны две произвольные точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Радиус-векторы этих точек обозначим $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, соответственно. Тогда

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 .$$

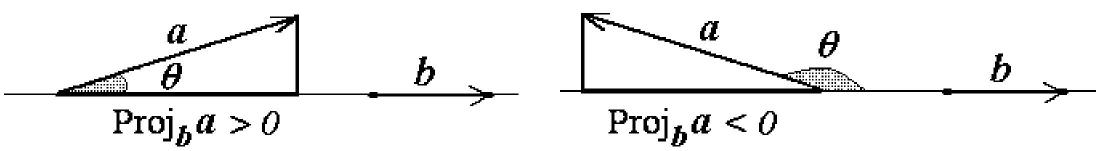
Мы видим, что любой вектор может быть представлен в виде разности между радиус-векторами его конца и начала.

4. Проекция вектора

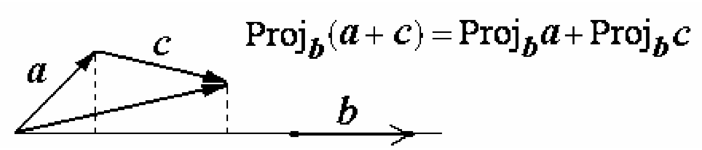
Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют между собой угол θ. Тогда произведение $a\cos\theta$ называется **проекцией вектора $\boldsymbol{a}$** на направление $\boldsymbol{b}$:

$$\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = a\cos\theta$$

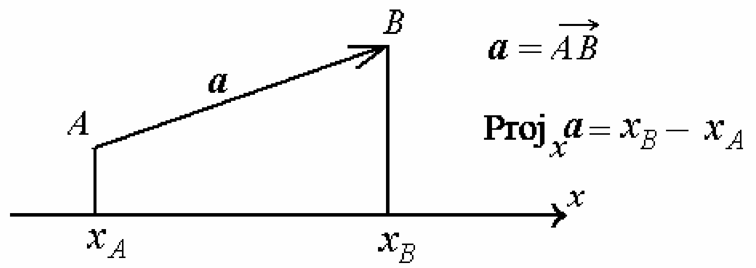
Очевидно, что проекция положительна для острых углов θ и отрицательна для тупых углов θ .



Нетрудно понять, что проекция суммы векторов на направление $\boldsymbol{b}$ равна сумме соответствующих проекций:

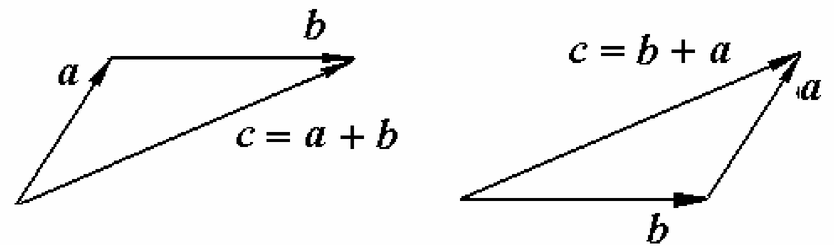


Проекция вектора ***a*** на положительное направление оси *x* равна разности соответствующих координат конца и начала вектора:

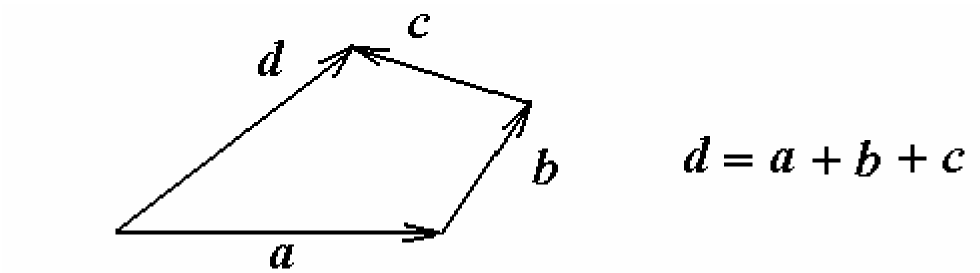


5. Свойства линейных операций над векторами

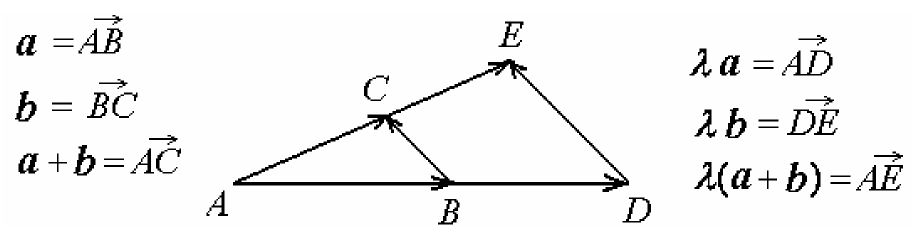
1) Коммутативность относительно сложения: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$



2) Ассоциативность относительно сложения: $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$



3) $$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$



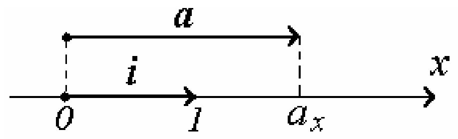
6. Разложение вектора по базису

1) Рассмотрим векторы вида $\boldsymbol{a} = \{a_x, 0, 0\}$ (т.е. параллельные оси x) и введем единичный вектор $\boldsymbol{i} = \{1, 0, 0\}$, направленный вдоль оси x.

Очевидно, что любой вектор $\boldsymbol{a} = \{a_x, 0, 0\}$ можно выразить через вектор $\boldsymbol{i}$:

$$\boldsymbol{a} = \{a_x, 0, 0\} = a_x\{1, 0, 0\} = a_x\,\boldsymbol{i}.$$

В подобных случаях говорят, что вектор $\boldsymbol{i}$ образует базис в одномерном пространстве векторов.

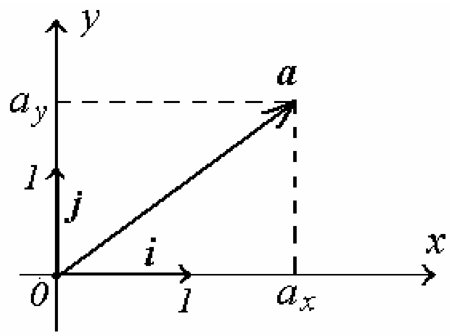


2) Теперь рассмотрим векторы, лежащие в плоскости x,y, т.е. векторы вида $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, 0\}$.

Обозначим символом $\boldsymbol{j}$ единичный вектор $\boldsymbol{j} = \{0, 1, 0\}$, направленный вдоль оси y.

Тогда любой вектор $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, 0\}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, т.е. в виде суммы этих векторов с некоторыми числовыми коэффициентами:

$$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, 0\} = a_x\{1, 0, 0\} + a_y\{0, 1, 0\} = a_x\,\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j}.$$

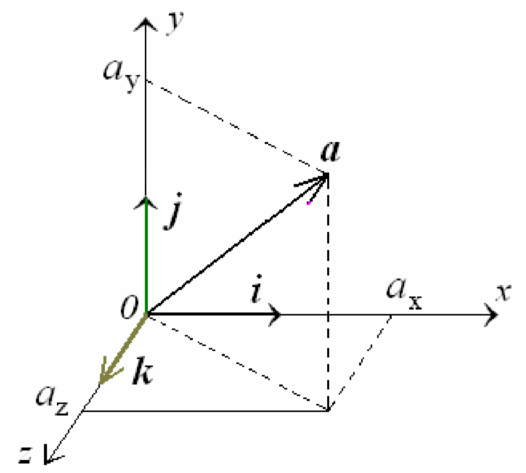


В этом случае говорят, что векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ образует базис в двухмерном пространстве векторов, или что векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ являются базисными векторами.

3) Чтобы оперировать с произвольными векторами $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ трехмерного пространства, нам понадобится тройка взаимно перпендикулярных (ортогональных) векторов

$$\boldsymbol{i} = \{1, 0, 0\}, \quad \boldsymbol{j} = \{0, 1, 0\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{k} = \{0, 0, 1\},$$

задающих положительные направления осей прямоугольной системы координат.



Любой вектор $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\{1,0,0\} + a_y\{0,1,0\} + a_z\{0,0,1\}.$$

Формула

$$\boldsymbol{a} = a_x\,\boldsymbol{i} + a_y\,\boldsymbol{j} + a_z\,\boldsymbol{k}\,. \qquad (2)$$

выражает разложение вектора $\boldsymbol{a}$ по ортогональному базису $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

Поскольку базис векторов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ не является единственно возможным, а координаты любого вектора зависят от выбора базиса, то в некоторых ситуациях бывает необходимым вносить уточнение, говоря, например, что величины a_x, a_y и a_z является координаты вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

7. Линейная зависимость векторов

Выражение вида

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n\,,$$

где $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ – векторы и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – числа (коэффициенты), называется **линейной комбинацией** векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

Если существует нетривиальное решение однородного уравнения

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = 0 \qquad (3)$$

относительно коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то говорят, что векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ являются **линейно зависимыми**.

В противном случае, если равенство (3) выполняется только при нулевых значениях коэффициентов

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0,$$

то векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называются **линейно независимыми**.

Другими словами, набор векторов является линейно зависимым, если один из этих векторов может быть представлен в виде линейной комбинации остальных. Например, если $\lambda_1 \neq 0$, то

$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n).$$

Теорема.

1) Любые два ненулевых вектора являются линейно зависимыми тогда и только тогда когда они коллинеарны (параллельны).
2) Любые три ненулевых вектора являются линейно зависимыми тогда и только тогда когда они компланарны (параллельны одной и той же плоскости или лежат в одной плоскости).
3) Любые четыре вектора являются линейно зависимыми.

Замечание. Теорема, в частности, утверждает, что
1) любые два неколлинеарных вектора всегда линейно независимы;
2) любые три некомпланарных вектора являются линейно независимыми.

Доказательство.
1) Два вектора $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ являются линейно зависимыми, если и только если уравнение

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 = 0$$

имеет ненулевое решение относительно коэффициентов λ_1 и λ_2.

В этом случае $\lambda_2 \boldsymbol{a}_2 = -\lambda_1 \boldsymbol{a}_1$, т.е. $\lambda_2 \boldsymbol{a}_2$ представляет собой противоположный вектор к вектору $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1$, что означает коллинеарность векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

2) Рассмотрим теперь векторное уравнение

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 = 0$$

относительно коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и представим его в виде однородной системы трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} = 0, \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{32} = 0, \\ \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23} + \lambda_3 a_{33} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Сначала предположим, что векторы $\boldsymbol{a}_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}$ и $\boldsymbol{a}_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}$ параллельны одной и той же плоскости, и выберем эту плоскость в качестве плоскости *x,y*. Тогда каждый из векторов имеет по крайней мере одну нулевую координату:

$$a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0.$$

В этом случае система (4) сводится к укороченной системе двух однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} = 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{32} = 0 \end{cases}$$

с тремя неизвестными λ_1, λ_2 и λ_3.

Поскольку число неизвестных превышает число однородных уравнений, то система имеет нетривиальное решение, что означает линейную зависимость векторов.

Теперь предположим, что векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$ некомпланарны. Тогда линейная комбинация $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2$ представляет собой вектор, лежащий в той же плоскости, что и векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

Поскольку вектор $\boldsymbol{a}_3$ не параллелен указанной плоскости, то вектор $(-\lambda_3 \boldsymbol{a}_3)$ не может быть обратным к вектору $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2$, а значит $\boldsymbol{a}_3$ не может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

Следовательно, некомпланарные векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$ образуют множество линейно независимых векторов.

3) В случае четырех векторов, уравнение

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 + \lambda_4 \boldsymbol{a}_4 = 0$$

эквивалентно системе трех линейных однородных уравнений с четырьмя неизвестными λ_1, λ_2, λ_3, и λ_4. Такая система имеет бесконечное множество решений, что и доказывает линейную зависимость любого набора из четырех векторов.

Теорема доказана.

Теперь можно вернуться к понятию базиса на более общем и строгом уровне. Сам факт того, что добавление четвертого вектора к трем линейно независимым векторам делает четверку векторов линейно зависимой, приводит к следующему важному заключению.

Произвольный вектор трехмерного пространства можно представить в виде линейной комбинации трех некомпланарных векторов.

Это фактически означает, что любые три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$ образуют базис трехмерного пространства и произвольный вектор $\boldsymbol{d}$ может быть разложен по этому базису:

$$\boldsymbol{d} = d_1 \boldsymbol{a}_1 + d_2 \boldsymbol{a}_2 + d_3 \boldsymbol{a}_3. \qquad (5)$$

Величины d_1, d_2 и d_3 в разложении (5) называются координатами вектора $\boldsymbol{d}$ в базисе $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$.

Формула (5) является обобщением разложения вектора по ортогональному базису $\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$ на случай произвольного базиса, образованного некомпланарными векторами $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$.

8. Переход от одного векторного базиса к другому

Пусть произвольный вектор $\boldsymbol{d}$ задан своим разложением по некоторому базису в трехмерном пространстве векторов:

$$\boldsymbol{d} = d_1\boldsymbol{a}_1 + d_2\boldsymbol{a}_2 + d_3\boldsymbol{a}_3 = \sum_{k=1}^{3} d_k\boldsymbol{a}_k . \tag{6}$$

Перейдем к новому базису векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ и представим вектор $\boldsymbol{d}$ в виде разложения по этому базису:

$$\boldsymbol{d} = \tilde{d}_1\boldsymbol{b}_1 + \tilde{d}_2\boldsymbol{b}_2 + \tilde{d}_3\boldsymbol{b}_3 . \tag{7}$$

Чтобы установить взаимосвязь между координатами вектора $\boldsymbol{d}$ при переходе от старого базиса к новому, произведем разложение векторов $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ и $\boldsymbol{b}_3$ по базису $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = b_{11}\boldsymbol{a}_1 + b_{12}\boldsymbol{a}_2 + b_{13}\boldsymbol{a}_3, \\ \boldsymbol{b}_2 = b_{21}\boldsymbol{a}_1 + b_{22}\boldsymbol{a}_2 + b_{23}\boldsymbol{a}_3, \\ \boldsymbol{b}_3 = b_{31}\boldsymbol{a}_1 + b_{32}\boldsymbol{a}_2 + b_{33}\boldsymbol{a}_3. \end{cases} \tag{8}$$

Заметим, что коэффициенты a_{ij} представляют собой координаты векторов $\boldsymbol{b}_i$ в базисе $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

Подставив выражения (8) в равенство (7) и приведя подобные члены, мы вновь получаем разложение вектора $\boldsymbol{d}$ по базису векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$:

$$\boldsymbol{d} = \sum_{k=1}^{3} (b_{1k}\tilde{d}_1 + b_{2k}\tilde{d}_2 + b_{3k}\tilde{d}_3)\boldsymbol{a}_k . \tag{9}$$

Из сравнения равенств (6) и (9) вытекают формулы преобразования координат вектора при переходе от одного базиса к другому:

$$\begin{cases} d_1 = b_{11}\tilde{d}_1 + b_{21}\tilde{d}_2 + b_{31}\tilde{d}_3, \\ d_2 = b_{12}\tilde{d}_1 + b_{22}\tilde{d}_2 + b_{32}\tilde{d}_3, \\ d_3 = b_{13}\tilde{d}_1 + b_{23}\tilde{d}_2 + b_{33}\tilde{d}_3. \end{cases} \tag{10}$$

Представим систему (10) в матричном виде:

$$B^T\tilde{D} = D .$$

Здесь B – матрица, составленная из координат векторов нового базиса в старом базисе; B^T – матрица, получена транспонированием матрицы B; элементами матриц-столбцов D и $\tilde{D}$ являются координаты вектора $\boldsymbol{d}$ в старом и новом базисах, соответственно:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \qquad D=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{D}=\begin{pmatrix} \widetilde{d}_1 \\ \widetilde{d}_2 \\ \widetilde{d}_3 \end{pmatrix}.$$

Совершенно аналогично можно получить формулы преобразования координат вектора при переходе от старого базиса к новому. Для этого нужно сначала произвести разложение векторов старого базиса по новому базису:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = a_{11}\boldsymbol{b}_1 + a_{12}\boldsymbol{b}_2 + a_{13}\boldsymbol{b}_3, \\ \boldsymbol{a}_2 = a_{21}\boldsymbol{b}_1 + a_{22}\boldsymbol{b}_2 + a_{23}\boldsymbol{b}_3, \\ \boldsymbol{a}_3 = a_{31}\boldsymbol{b}_1 + a_{32}\boldsymbol{b}_2 + a_{33}\boldsymbol{b}_3. \end{cases} \tag{11}$$

Затем подставляем выражения (11) в равенство (6):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d} = {} & (a_{11}d_1 + a_{21}d_2 + a_{31}d_3)\boldsymbol{b}_1 + \\ & + (a_{12}d_1 + a_{22}d_2 + a_{32}d_3)\boldsymbol{b}_2 + \\ & + (a_{13}d_1 + a_{23}d_2 + a_{33}d_3)\boldsymbol{b}_3 \end{aligned}$$

В результате получаем следующие формулы обратного преобразования координат:

$$\begin{cases} \widetilde{d}_1 = a_{11}d_1 + a_{21}d_2 + a_{31}d_3, \\ \widetilde{d}_2 = a_{12}d_1 + a_{22}d_2 + a_{32}d_3, \\ \widetilde{d}_3 = a_{13}d_1 + a_{23}d_2 + a_{33}d_3. \end{cases} \tag{12}$$

В матричном виде полученные формулы имеют вид

$$A^T D = \widetilde{D},$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{D}=\begin{pmatrix} \widetilde{d}_1 \\ \widetilde{d}_2 \\ \widetilde{d}_3 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = 4\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ в базисе векторов $\boldsymbol{b}_1 = \{3, 0, 5\}$, $\boldsymbol{b}_2 = \{1, 1, -8\}$, $\boldsymbol{b}_3 = \{7, -2, 0\}$.

Решение. $\begin{cases} 4 = 3\widetilde{d}_1 + \widetilde{d}_2 + 7\widetilde{d}_3 \\ 7 = 0\cdot\widetilde{d}_1 + \widetilde{d}_2 - 2\widetilde{d}_3 \\ 1 = 5\widetilde{d}_1 - 8\widetilde{d}_2 + 0\cdot\widetilde{d}_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{d}_1 = 5,\ \widetilde{d}_2 = 3$ and $\widetilde{d}_3 = -2$.

9. Скалярное произведение векторов

Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы своими координатами в прямоугольной системе координат:

$$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}.$$

Скалярным произведением векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число равное сумме произведений соответствующих координат:

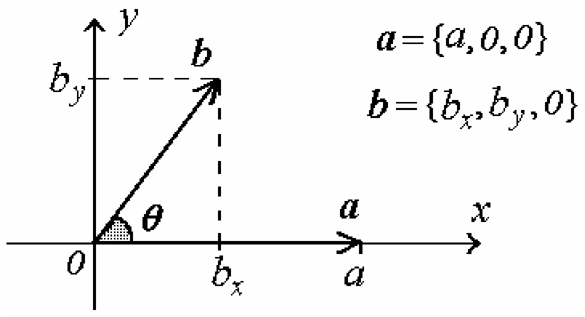
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{13}$$

Для обозначения скалярного произведения $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ используется также выражение ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$).

Теорема. Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равно произведению длин векторов на косинус угла между ними:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a\, b \cos\theta.$$

Доказательство: Выберем такую прямоугольную систему координат, чтобы векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ лежали в плоскости *x,y*, а вектор $\boldsymbol{a}$ был бы направлен вдоль положительного направления оси *x*.



В этой системе координат $a_x = a$, $a_y = a_z = 0$ и $b_x = b\cos\theta$. Следовательно, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\cos\theta$.

Бывает полезным представить эту теорему в несколько ином виде:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a \operatorname{Pr} oj_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = b \operatorname{Pr} oj_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$$

или

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}}{a} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{b}.$$

Согласно последней формулировке косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен скалярному произведению единичных векторов $\frac{\boldsymbol{a}}{a}$ и $\frac{\boldsymbol{b}}{b}$.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Если $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, то $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, что приводит нас к следующему условию ортогональности векторов $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Если}\\ a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0\,,\\ \text{то }\ \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}\,.\end{array}}$$

2. Если $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$, то $\theta = 0$ и $\cos\theta = 1$. Тогда

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\,.$$

Следовательно, длина вектора $\boldsymbol{a}$ выражается формулой

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

Используя две различных формулы для скалярного произведения векторов, и зная координаты векторов, мы можем легко найти угол между ними:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{a\,b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}}$$

Большинство приложений скалярного произведения связано именно с нахождением угла между векторами, а также с использованием условия ортогональности векторов.

9.1. Свойства скалярного произведения

Нижеприведенные свойства основаны на определении скалярного произведения или непосредственно вытекают из доказанной теоремы. Их доказательство не приводится в виду своей очевидности.

1) Скалярное произведение векторов коммутативно:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}\,.$$

2) Скалярное произведение векторов дистрибутивно:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}\,.$$

3) Если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны друг другу и обратно, если два вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}\,.$$

9.2. Примеры

Пример 1. Легко проверить, что векторы

$$\boldsymbol{i} = \{1, 0, 0\}, \quad \boldsymbol{j} = \{0, 1, 0\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{k} = \{0, 0, 1\}$$

образуют ортонормированный базис, т.е. являются единичными взаимно перпендикулярными векторами:

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = 1, \quad \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = 1, \quad \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1,$$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0.$$

Пример 2. Если $\boldsymbol{a} = \{2, -1, 3\}$, $\boldsymbol{b} = \{5, 7, 4\}$ и θ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 2\cdot 5 + (-1)\cdot 7 + 3\cdot 4 = 15,$$

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14},$$

$$b = |\boldsymbol{b}| = \sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}} = \sqrt{5^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

и, следовательно,

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{15}{4\sqrt{14}\sqrt{5}} = \frac{3}{56}\sqrt{70}.$$

Пример 3. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a} = \{3, 2, -5\}$ и $\boldsymbol{b} = \{5, 7, 4\}$.

Решение. Так как

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 3\cdot 1 + 4\cdot 3 + (-5)\cdot 3 = 0,$$

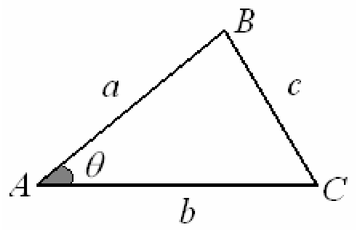
то векторы являются ортогональными.

Пример 4. Выразить скалярное произведение векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ через длины векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

Решение.

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}^2 = a^2 - b^2.$$

Пример 5. Зная две стороны AB и AC треугольника ABC и угол θ между этими сторонами, найти третью сторону треугольника.



Решение. Обозначим $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{CB}$.

Тогда

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{c}^2 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \quad \Rightarrow$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta,$$

что представляет собой известную из элементарной математики теорему косинусов.

Таким образом,

$$c = \sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}.$$

9.3. Направляющие косинусы

Рассмотрим некоторый единичный вектор $\boldsymbol{u}$ и обозначим через α, β и γ углы, образованные этим вектором с осями прямоугольной системы координат. Тогда $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора $\boldsymbol{u}$.

Теорема 1. Направляющие косинусы являются координатами единичного вектора $\boldsymbol{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$, заданного в прямоугольной системе координат.

Доказательство. Теорема непосредственно вытекает из определения скалярного произведения. С одной стороны,

$$\boldsymbol{u} = \{u_x, u_y, u_z\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{i} = \{1, 0, 0\} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{i} = u_x .$$

С другой стороны,

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{i} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{i}| \cdot \cos\alpha = \cos\alpha .$$

Следовательно, $u_x = \cos\alpha$.

Аналогично доказываются утверждения

$$u_y = \cos\beta \quad \text{и} \quad u_z = \cos\gamma .$$

Теорема 2. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Доказательство. По определению, длина единичного вектора равна 1:

$$|\boldsymbol{u}|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 .$$

Применяя Теорему 1, получаем требуемый результат.

В заключение заметим, что для произвольного ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$ отношение $\dfrac{\boldsymbol{a}}{a}$ представляет собой единичный вектор и, следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{a},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{a} .$$

10. Векторное произведение векторов

Векторное произведение векторов $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, заданных в прямоугольной системе координат, представляет собой вектор, определяемый формулой

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \qquad (14)$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ – ортонормированные базисные векторы.

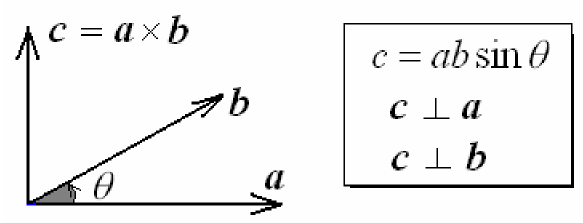
Часто используется также обозначение векторного произведения в виде $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Разлагая определитель (14) по элементам первой строки, получаем

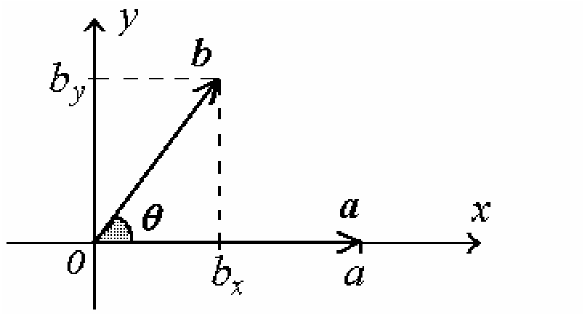
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i}+(a_z b_x - a_x b_x)\boldsymbol{j}+(a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}\,.$$

Теорема. Для любых непараллельных друг другу векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

1) векторное произведение $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ является вектором перпендикулярным к $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$,
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}\,.$$
2) Длина вектора $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ равна произведению длин векторов на синус угла между ними,
$$c = ab\sin\theta\,.$$
3) Упорядоченный набор векторов $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ образует правую тройку (как это показано на рисунке).



Доказательство. Выберем такую систему координат, чтобы векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ лежали в плоскости *x,y*, а вектор $\boldsymbol{a}$ был бы направлен вдоль положительного направления оси *x*.



Тогда $\boldsymbol{a}=\{a,0,0\}$ и $\boldsymbol{b}=\{b\cos\theta, b\sin\theta, 0\}$, что влечет за собой

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a & 0 & 0\\ b\cos\theta & b\sin\theta & 0\end{vmatrix}=ab\sin\theta\,\boldsymbol{k}\,.$$

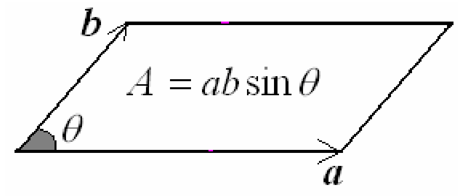
Таким образом, длина вектора $|\boldsymbol{c}|=a\sin\theta$, а его направление совпадает с положительным направлением оси *z*, т.е. является перпендикулярным к плоскости *x,y*, в которой лежат векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

10.1. Свойства векторного произведения

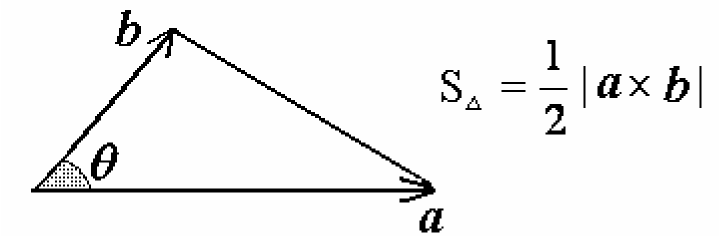
1) Векторное произведение антикоммутативно:
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\,.$$
2) Векторное произведение дистрибутивно:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.$$

3) Длина вектора $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.



Следствие. Площадь треугольника, сторонами которого являются векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, выражается формулой



4) Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю.

Свойства 1) и 2) вытекают из свойств определителей.
Действительно,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a},$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x+b_x & a_y+b_y & a_z+b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.$$

Свойство 3) следует из Теоремы о векторном произведении.
Свойство 4) является совершенно очевидным.
На практике векторное произведение применяется в основном для нахождения площадей треугольников и параллелограммов, а также для построения вектора, перпендикулярного двум заданным векторам.

10.2. Примеры

1) Покажем, что базисные векторы $\boldsymbol{i} = \{1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{j} = \{0, 1, 0\}$ и $\boldsymbol{k} = \{0, 0, 1\}$ прямоугольной системы координат выражаются друг через друга с помощью векторного произведения.

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}.$$

2) Выразить векторное произведение векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q} &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}. \end{aligned}$$

3) Найти площадь треугольника ABC с вершинами в точках $A(1, 0, -2)$, $B(1, 5, 0)$ и $C(0, 4, -1)$.

Решение. Введем два вектора,

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = \{0, 5, 2\}$$

и

$$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC} = \{-1, 4, 1\}.$$

Согласно Свойству 3 векторного произведения,

$$S = \frac{1}{2}|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|.$$

Элементарно показывается, что

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \frac{\sqrt{38}}{2}.$$

11. Смешанное произведение векторов

Скалярное произведение и векторное произведение векторов можно скомбинировать в **смешанное произведение** вида

$$([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\ .$$

Теорема. Смешанное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$ и $\boldsymbol{c}=\{c_x, c_y, c_z\}$, заданных в прямоугольной системе координат, выражается формулой

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Доказательство. Умножим скалярно вектор

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_x)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}$$

на вектор

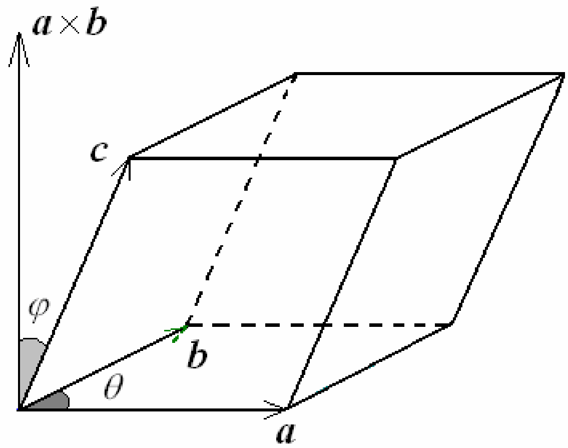
$$\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k}\ .$$

В результате получаем выражение,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot c = (a_y b_z - a_z b_y)c_x + (a_z b_x - a_x b_x)c_y + (a_x b_y - a_y b_x)c_z\ ,$$

представляющее собой разложение определителя $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ по элементам третьей строки.

Геометрическая интерпретация. Численное значение смешанного произведения $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ совпадает (с точностью до знака) с объемом параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.



Доказательство. Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту. Согласно теореме о скалярном произведении векторов,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\varphi .$$

Величина $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ равна площади параллелограмма, а произведение $|\boldsymbol{c}|\cos\varphi$ равно высоте параллелепипеда.

Следствие 1. Если три вектора компланарны, то их смешанное произведение равно нулю.

Следствие 2. Точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, если смешанное произведение $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\,\overrightarrow{AD}$ равно нулю.

11.1. Свойства смешанного произведения векторов

Свойство 1.

Согласно свойству скалярного произведения, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$.

Однако

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} .$$

Заметим, что порядок следования точки скалярного произведения и креста векторного произведения оказывается несущественным. Поэтому представляется разумным опустить эти символы в выражении для смешанного произведения $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ и просто записывать его в виде ***abc***.

Свойство 2. Преобразуем смешанное произведение, опираясь на свойства определителей:

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{cab} = \boldsymbol{bca}.$$

Свойство 3. Аналогично,

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

и поэтому

$$\boldsymbol{abc} = -\,\boldsymbol{bac} = -\,\boldsymbol{acb}.$$

Свойство 4. Теорема о линейной зависимости векторов устанавливает, что любые три линейно зависимые векторы являются компланарными. Следовательно:

Смешанное произведение ненулевых векторов равно нулю, если и только если векторы являются линейно зависимыми.

11.2. Примеры

1) Показать, что точки $A(-1,2,2)$, $B(3,3,4)$, $C(2,-2,10)$ и $D(0,2,2)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Проведем из точки A векторы в оставшиеся три точки:

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=\{4,1,2\}, \qquad \boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=\{3,4,8\}, \quad \text{и} \quad \boldsymbol{c}=\overrightarrow{AD}=\{1,0,0\}.$$

Вычислим смешанное произведение полученных векторов:

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 8\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ лежат в одной плоскости, что доказывает утверждение.

2) Найти объем V тетраэдра с вершинами в точках $A(1,0,2)$, $B(3,-1,4)$, $C(1,5,2)$ и $D(4,4,4)$.

Решение. Объем тетраэдра составляет 1/6 часть объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Объем V_p параллелепипеда численно равен (по абсолютной величине) смешанному произведению векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Учитывая, что

$$\overrightarrow{AB}=\{2,-1,2\}, \quad \overrightarrow{AC}=\{0,5,0\}, \quad \text{и} \quad \overrightarrow{AD}=\{3,4,2\},$$

получаем

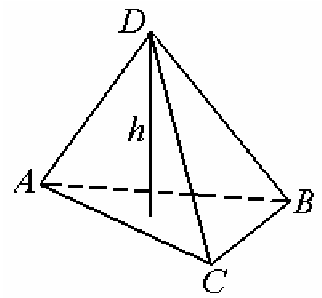
$$V_p=\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 0 & 5 & 0\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=10.$$

Таким образом,

$$V=\frac{1}{6}V_p=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}.$$

3) Тетраэдр задан своими вершинами $A(1,0,2)$, $B(3,-1,4)$, $C(1,5,2)$ и $D(4,4,4)$.

Найти высоту, опущенную из вершины D на основание ABC.



Решение. Воспользуемся известной из элементарной математики формулой для объема пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h .$$

Очевидно, что для нахождения высоты h пирамиды достаточно вычислить объем V тетраэдра и площадь S его основания ABC.

В Примере 2 было показано, что объем данного тетраэдра равен $5/3$.

Площадь треугольника ABC можно найти с помощью операции векторного произведения:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| .$$

Найдем координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$:

$$\vec{AB} = \{2,-1,2\} \quad \text{и} \quad \vec{AC} = \{0,5,0\} .$$

Вычислим векторное произведение:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{k} .$$

Найдем длину вектора $\vec{AB} \times \vec{AC}$:

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{10^2 + (-10)^2} = 10\sqrt{2} .$$

Таким образом,

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

12. Преобразование координат базисных векторов при повороте прямоугольной системы координат

Пусть векторы $\boldsymbol{e_1} = \{1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{e_2} = \{0, 1, 0\}$ и $\boldsymbol{e_3} = \{0, 0, 1\}$ образуют ортонормированный базис прямоугольной системы координат.[1]

Условия ортогональности единичных векторов можно представить единой формулой

$$\boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_j} = \delta_{i\,j}, \tag{16}$$

где $\delta_{i\,j}$ – дельта символ Кронекера.[2]

Перейдем к новой прямоугольной системе координат, полученной поворотом исходной системы вокруг начала координат.

Пусть векторы $\boldsymbol{e}'_1 = \{1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{e}'_2 = \{0, 1, 0\}$ и $\boldsymbol{e}'_3 = \{0, 0, 1\}$ образуют ортонормированный базис новой системы координат. Тогда

$$\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = \delta_{ij}. \tag{17}$$

Согласно теореме о направляющих косинусах координаты векторов $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$ и $\boldsymbol{e_3}$ в базисе $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$ равны направляющим косинусам этих векторов.

Для удобства последующего изложения введем универсальные обозначения, используя символы u_{n1}, u_{n2} и u_{n3} для обозначения направляющих косинусов вектора $\boldsymbol{e}_n$ (n = 1, 2, 3).

Тогда разложение векторов старого базиса по новому базису описывается выражениями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= u_{11}\,\boldsymbol{e}'_1 + u_{12}\,\boldsymbol{e}'_2 + u_{13}\,\boldsymbol{e}'_3, \\ \boldsymbol{e}_2 &= u_{21}\,\boldsymbol{e}'_1 + u_{22}\,\boldsymbol{e}'_2 + u_{23}\,\boldsymbol{e}'_3, \\ \boldsymbol{e}_3 &= u_{31}\,\boldsymbol{e}'_1 + u_{32}\,\boldsymbol{e}'_2 + u_{33}\,\boldsymbol{e}'_3. \end{aligned} \tag{18}$$

Можно использовать и более компактную форму записи:

$$\boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{3} u_{nk}\,\boldsymbol{e}'_k \qquad (n = 1, 2, 3). \tag{19}$$

Подставим эти выражения в равенство (16):

$$\boldsymbol{e_i} \cdot \boldsymbol{e_j} = \delta_{i\,j} \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} u_{ik}u_{jm}\boldsymbol{e}'_k\boldsymbol{e}'_m = \delta_{i\,j}.$$

Учитывая условия (17), получаем соотношения

$$\sum_{k=1}^{3} u_{ik}u_{jk} = \sum_{k=1}^{3} u_{ki}u_{kj} = \delta_{i\,j} \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{20}$$

---

[1] Напомним, что термин “ортонормированный базис” означает базис, образованный единичными взаимно перпендикулярными векторами.

[2] Числа $\delta_{i\,j}$ являются элементами единичной матрицы: и определяются выражением $\delta_{i\,j} = \begin{cases} 1, \text{если } i = j \\ 0, \text{если } i \neq j \end{cases}$

Например,

$$\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cdot\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2=0,$$
$$\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_3+\cos\beta_1\cdot\cos\beta_3+\cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_3=0,$$
$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1,$$
$$\cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2=1$$

и т.д.

Полученные соотношения имеют наиболее простой вид в матричной форме записи.

Введем матрицу $U=\|u_{ij}\|$, элементами которой являются направляющие косинусы векторов $\boldsymbol{e}_n$ $(n=1, 2, 3)$.

Тогда соотношения (20) эквивалентны матричным равенствам

$$U\cdot U^T=I,$$
$$U^T\cdot U=I,$$

где U^T – транспонированная матрица; $I=\|\delta_{ij}\|$ – единичная матрица. Очевидно, что матрица U^T является обратной для матрицы U:

$$U^T=U^{-1}.$$

В таких случаях про матрицу U говорят, что она является **унитарной**.

Введем еще две матрицы,

$$E=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad\widetilde{E}=\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{e}}_1\\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_2\\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_3\end{pmatrix}.$$

Обратите внимание на то, что в этом разделе символ E не имеет ни малейшего отношения к единичной матрице и используется для обозначения матрицы, составленной из базисных векторов.

Тогда соотношения (19) можно представить в виде

$$E=U\cdot E'.$$

Отсюда сразу же следует формула обратного преобразования, т.е. формула перехода от старого базиса к новому:

$$U^{-1}E=U^{-1}U\cdot E'\qquad\Rightarrow\qquad E'=U^{-1}E=U^TE.$$

Это матричное соотношение эквивалентно следующим трем векторным равенствам:

$$\boldsymbol{e}'_n=\sum_{k=1}^{3}u_{kn}\boldsymbol{e}_k\qquad(n=1, 2, 3)$$

или в подробной записи,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}'_1&=u_{11}\,\boldsymbol{e}_1+u_{21}\,\boldsymbol{e}_2+u_{31}\,\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{e}'_2&=u_{12}\,\boldsymbol{e}_1+u_{22}\,\boldsymbol{e}_2+u_{32}\,\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{e}'_3&=u_{13}\,\boldsymbol{e}_1+u_{23}\,\boldsymbol{e}_2+u_{33}\,\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}\qquad(21)$$

13. Преобразование координат произвольного вектора при повороте системы координат

Представим произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ в виде разложения по базису ортонормированных векторов $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$:

$$\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_z \boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i \,. \qquad (22)$$

Затем перейдем к новому базису, соответствующему системе координат, полученной поворотом исходной системы вокруг начала координат. Разложение вектора $\boldsymbol{a}$ по базису $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$ имеет вид

$$\boldsymbol{a} = a'_1 \boldsymbol{e}'_1 + a'_2 \boldsymbol{e}'_2 + a'_z \boldsymbol{e}'_3 = \sum_{i=1}^{3} a'_i \boldsymbol{e}'_i \,. \qquad (23)$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{k=1}^{3} a'_k \boldsymbol{e}'_k \,.$$

Используя формулы преобразований (19), получаем

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \sum_{k=1}^{3} u_{ik} \boldsymbol{e}'_k = \sum_{k=1}^{3} a'_k \boldsymbol{e}'_k \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} u_{ik} a_i \right) \boldsymbol{e}'_k = \sum_{k=1}^{3} a'_k \boldsymbol{e}'_k \,.$$

Следовательно,

$$a'_k = \sum_{i=1}^{3} u_{ik} a_i = u_{1k} a_1 + u_{2k} a_2 + u_{3k} a_3 \,. \qquad (24)$$

Аналогично получаются формулы перехода от нового к старому базису:

$$a_k = \sum_{i=1}^{3} u_{ki} a'_i = u_{k1} a'_1 + u_{k2} a'_2 + u_{k3} a'_3 \,. \qquad (25)$$

В заключение покажем, что скалярное произведение векторов не зависит от выбора системы координат.

Теорема. Скалярное произведение векторов инвариантно относительно поворота системы координат.

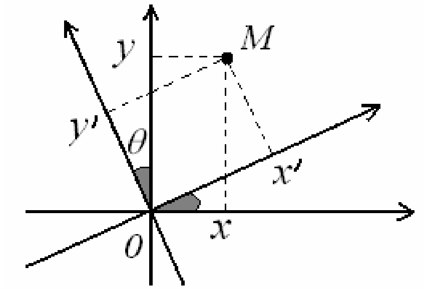
Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ – два произвольных вектора. По определению скалярного произведения и с учетом формул преобразования (24) имеем

$$\boldsymbol{ab} = \sum_{k=1}^{3} a'_k b'_k = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} u_{ik} a_i \sum_{j=1}^{3} u_{jk} b_j$$

$$= \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{3} u_{ik} u_{jk} \right) a_i b_j = \sum_{i,j} \delta_{ij} a_i a_j = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i .$$

14. Поворот плоскости *x,y* вокруг оси *z*

Дана прямоугольная система координат, заданная своими базисными векторами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$. Рассмотрим другую систему координат, полученную из исходной поворотом плоскости x,y вокруг оси z на угол θ.



Выберем произвольную точку $M(x,y)$ и запишем разложение ее радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ двумя способами, используя различные базисные наборы:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \qquad \text{и} \qquad \boldsymbol{r} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}'.$$

Отсюда следует, что

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}'. \tag{26}$$

Выпишем все скалярные произведения единичных базисных векторов:

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = 1,$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = 0,$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}' = \cos\theta,$$

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}' = \cos\theta,$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}' = \cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta,$$

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}' = \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta.$$

Умножая обе части равенства (26) скалярно на вектор $\boldsymbol{i}$, получаем

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \tag{27}$$

Теперь умножим равенство (26) скалярно на вектор $\boldsymbol{j}$:

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta. \tag{28}$$

Формулы преобразования (27) и (28) осуществляют переход от координат точки в новом базисе к ее координатам в старом базисе.

Аналогично выводятся формулы обратного преобразования – от старого базиса к новому. Нужно лишь поочередно умножить равенство (26) на векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \tag{29}$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta. \tag{30}$$

Нетрудно проверить, что формулы (27) и (28) представляют собой частный случай общих формул преобразования (24).

Пример. Пусть новая система координат получена поворотом исходной двухмерной прямоугольной системы на угол $\theta = 45°$. Выразить произведение $x'y'$ координат точки в новой системе через координаты точки в исходной системе.

Решение. Применяя формулы (29) и (30) и учитывая, что $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, получаем

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \qquad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y),$$

$$x'y' = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(y + x)(y - x) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2).$$

Литература

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М. Наука, 1987.
2. *Бугров Я.* С. *Никояьский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М. Наука, 1988.
3. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые её приложения. – М. Наука, 1979.
4. *Ильин В.Л., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. – М. Наука, 1984.
5. Сборник задач по математике под ред. Ефимова А.В. и Демидовича Б.П. Часть 1. – М. Наука, 1988.
6. *Беклемишева Л.А., Петрович АЮ.. Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М. Наука, 1987.
7. *Данко П.Е.*, *Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1980.
8. *Каплан Н.А.* Практические занятия по высшей математике.(в 3-х томах). – Харьков: Изд-во ХГУ, т. 1–1965.
9. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М. Наука, 1987.

Разложение по базису

$$\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_3 \boldsymbol{e}_3$$

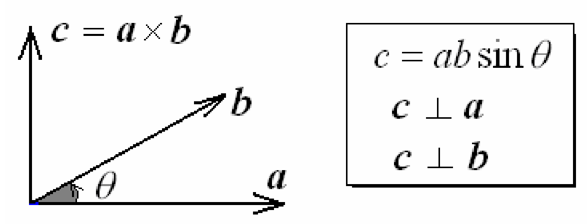
$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$$

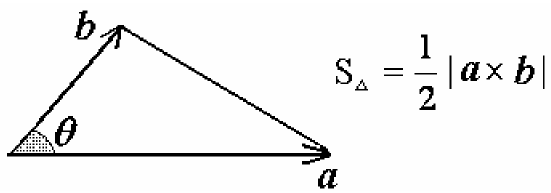
Скалярное произведение векторов: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

1. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
2. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a\, b \cos\theta$
3. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a \operatorname{Pr} oj_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = b \operatorname{Pr} oj_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$
4. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$
5. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$
6. $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
7. $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{a\, b} = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

Векторное произведение векторов: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

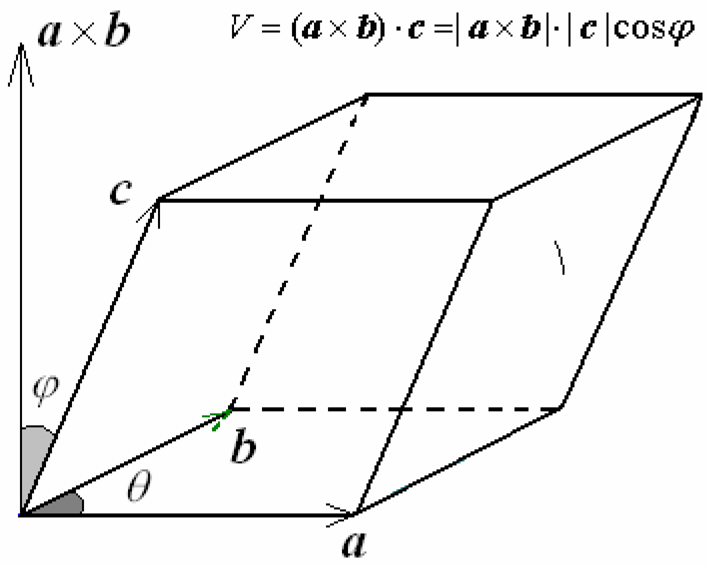
1. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$





2. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$
3. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$

Смешанное произведение векторов: $([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$



1. $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

2. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

3. ***abc*** = ***cab*** = ***bca***

4. ***abc*** = – ***bac*** = – ***acb***

Преобразование координат точки при повороте системы координат

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$