|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **3.2.1.Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола,**  **парабола.**  **Кривые второго порядка: эллипс, окружность, парабола, гипербола.**  **Кривыми второго порядка** на плоскости называются линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину.  Если такая плоскость пересекает все образующие одной полости конуса, то в сечении получается **эллипс**, при пересечении образующих обеих полостей – **гипербола**, а если секущая плоскость параллельна какой-либо образующей, то сечением конуса является **парабола**.  *Кривая второго порядка* на плоскости в прямоугольной системе координат описывается уравнением:  **Кривые второго порядка: эллипс, окружность, парабола, гипербола.**  **Кривыми второго порядка** на плоскости называются линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину.  Если такая плоскость пересекает все образующие одной полости конуса, то в сечении получается **эллипс**, при пересечении образующих обеих полостей – **гипербола**, а если секущая плоскость параллельна какой-либо образующей, то сечением конуса является **парабола**.  *Кривая второго порядка* на плоскости в прямоугольной системе координат описывается уравнением:  Эллипс.  Множество всех точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F 1 и F 2 есть заданная постоянная величина, называется ***эллипсом***.  *Каноническое уравнение эллипса.*  Для любого эллипса можно найти декартову систему координат такую, что эллипс будет описываться уравнением (каноническое уравнение эллипса):  ,где  Оно описывает эллипс с центром в начале координат, оси которого совпадают с осями координат. Число **a** называют *большой полуосью эллипса*, а число **b** – *его малой полуосью*.  *Свойства эллипса:*   * **Фокальное свойство.** Если *F*1 и *F*2 — фокусы эллипса, то для любой точки X, принадлежащей эллипсу, угол между касательной в этой точке и прямой ( *F*1*X*) равен углу между этой касательной и прямой ( *F*2*X*) . * Прямая, проведённая через середины отрезков, отсечённых двумя параллельными прямыми, пересекающими эллипс, всегда будет проходить через центр эллипса. Это позволяет построением с помощью циркуля и линейки легко получить центр эллипса, а в дальнейшем оси, вершины и фокусы. * Эволютой эллипса является астроида. * **Эксцентриситетом** эллипса называется отношение   . Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса. Чем эксцентриситет ближе к нулю, тем эллипс больше напоминает окружность и наоборот, чем эксцентриситет ближе к единице, тем он более вытянут.  Эллипс также можно описать как   * фигуру, которую можно получить из окружности, применяя аффинное преобразование * ортогональную проекцию окружность на плоскость. * Пересечение плоскости и кругового цилиндра.   **Окружность.**  **Окружность** — геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от заданной точки, называемой её центром, на заданное ненулевое расстояние, называемое её радиусом.  *Каноническое уравнение окружности.*  Общее уравнение окружности записывается как:  или  Точка  — центр окружности, *R* — её радиус.  Уравнение окружности радиуса *R* с центром в начале координат:  *Свойства окружности:*   * Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью одну общую точку (касательная); иметь с ней две общие точки (секущая). * Касательная к окружности всегда перпендикулярна её диаметру, один из концов которого является точкой касания. * Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну. * Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры. * Длину окружности с радиусом *R* можно вычислить по формуле *C* = 2π *R*. * Вписанный угол либо равен половине центрального угла, опирающегося на его дугу, либо дополняет половину этого угла до 180°.   + Два вписанных угла, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.   + Вписанный угол, опирающийся на дугу длиной в половину окружности равен 90°. * Угол между двумя секущими, проведенными из точки, лежащей вне окружности равен полуразности мер дуг, лежащих между секущими. * Угол между пересекающимися хордами равен полусумме мер дуги лежащей в угле и дуги напротив нее. * Угол между касательной и хордой равен половине дуги, стягиваемой хордой. * Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности. * При пересечении двух хорд произведение отрезков, на которые делится одна из них точкой пересечения, равно произведению отрезков другой. * Произведение длин расстояний от выбранной точки до двух точек пересечения окружности и секущей проходящей через выбранную точку не зависит от выбора секущей и равно абсолютной величине степени точки относительно окружности.   Квадрат длины отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей и равен абсолютной величине степени точки относительно окружности.   * Окружность является простой плоской кривой второго порядка. * Окружность является коническим сечением и частным случаем эллипса.   **Парабола.**  **Параболой** называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.  *Каноническое уравнение* параболы в прямоугольной системе координат:  (или  , если поменять местами оси)  где ***р*** (фокальный параметр) - расстояние от фокуса до директрисы  *Свойства параболы:*   * Парабола — кривая второго порядка. * Она имеет ось симметрии, называемой *осью параболы*. Ось проходит через фокус и перпендикулярна директрисе. * Пучок лучей параллельных оси, отражаясь в параболе, собирается в её фокусе. Для параболы с вершиной в начале координат (0; 0) и положительным направлением ветвей фокус находится в точке (0; 0,25). * Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ будет лежать на директрисе. * Парабола является антиподерой прямой. * Все параболы подобны. Расстояние между фокусом и директрисой определяет масштаб. * При вращении параболы вокруг оси симметрии получается эллиптический параболоид.   · Прямая пересекает параболу не более чем в двух точках.  · Эксцентриситет параболы *е*=1.  **Гипербола.**  Геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек есть величина постоянная, называют ***гиперболой*.**  Для любой гиперболы можно найти декартову систему координат такую, что гипербола будет описываться *уравнением*:  Числа  и  называются соответственно *вещественной* и *мнимой полуосями* гиперболы.  *Свойства гиперболы:*  · Гипербола имеет две оси симметрии (главные оси гиперболы) и центр симметрии (центр гиперболы). При этом одна из этих осей пересекается с гиперболой в двух точках, называемых вершинами гиперболы. Она называется действительной осью гиперболы (ось *Ох* для канонического выбора координатной системы). Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и называется ее мнимой осью (в канонических координатах – ось *Оу*). По обе стороны от нее расположены правая и левая ветви гиперболы. Фокусы гиперболы располагаются на ее действительной оси.  · Каждая гипербола имеет пару асимптот:  и  .  · Расстояние от начала координат до одного из фокусов гиперболы называют *фокусным расстоянием* гиперболы  .  · **Эксцентриситетом** гиперболы называется величина *е = с / а.*Эксцентриситет гиперболы *e*> 1  · Расстояние от вершины гиперболы до асимптоты вдоль направления параллельного оси ординат называется *малой* или *мнимой полуосью* гиперболы  .    Эллипс.  Множество всех точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F 1 и F 2 есть заданная постоянная величина, называется ***эллипсом***.  *Каноническое уравнение эллипса.*  Для любого эллипса можно найти декартову систему координат такую, что эллипс будет описываться уравнением (каноническое уравнение эллипса):  ,где  Оно описывает эллипс с центром в начале координат, оси которого совпадают с осями координат. Число **a** называют *большой полуосью эллипса*, а число **b** – *его малой полуосью*.  *Свойства эллипса:*   * **Фокальное свойство.** Если *F*1 и *F*2 — фокусы эллипса, то для любой точки X, принадлежащей эллипсу, угол между касательной в этой точке и прямой ( *F*1*X*) равен углу между этой касательной и прямой ( *F*2*X*) . * Прямая, проведённая через середины отрезков, отсечённых двумя параллельными прямыми, пересекающими эллипс, всегда будет проходить через центр эллипса. Это позволяет построением с помощью циркуля и линейки легко получить центр эллипса, а в дальнейшем оси, вершины и фокусы. * Эволютой эллипса является астроида. * **Эксцентриситетом** эллипса называется отношение   . Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса. Чем эксцентриситет ближе к нулю, тем эллипс больше напоминает окружность и наоборот, чем эксцентриситет ближе к единице, тем он более вытянут.  Эллипс также можно описать как   * фигуру, которую можно получить из окружности, применяя аффинное преобразование * ортогональную проекцию окружность на плоскость. * Пересечение плоскости и кругового цилиндра.   **Окружность.**  **Окружность** — геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от заданной точки, называемой её центром, на заданное ненулевое расстояние, называемое её радиусом.  *Каноническое уравнение окружности.*  Общее уравнение окружности записывается как:  или  Точка  — центр окружности, *R* — её радиус.  Уравнение окружности радиуса *R* с центром в начале координат:  *Свойства окружности:*   * Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью одну общую точку (касательная); иметь с ней две общие точки (секущая). * Касательная к окружности всегда перпендикулярна её диаметру, один из концов которого является точкой касания. * Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну. * Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры. * Длину окружности с радиусом *R* можно вычислить по формуле *C* = 2π *R*. * Вписанный угол либо равен половине центрального угла, опирающегося на его дугу, либо дополняет половину этого угла до 180°.   + Два вписанных угла, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.   + Вписанный угол, опирающийся на дугу длиной в половину окружности равен 90°. * Угол между двумя секущими, проведенными из точки, лежащей вне окружности равен полуразности мер дуг, лежащих между секущими. * Угол между пересекающимися хордами равен полусумме мер дуги лежащей в угле и дуги напротив нее. * Угол между касательной и хордой равен половине дуги, стягиваемой хордой. * Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности. * При пересечении двух хорд произведение отрезков, на которые делится одна из них точкой пересечения, равно произведению отрезков другой. * Произведение длин расстояний от выбранной точки до двух точек пересечения окружности и секущей проходящей через выбранную точку не зависит от выбора секущей и равно абсолютной величине степени точки относительно окружности.   Квадрат длины отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей и равен абсолютной величине степени точки относительно окружности.   * Окружность является простой плоской кривой второго порядка. * Окружность является коническим сечением и частным случаем эллипса.   **Парабола.**  **Параболой** называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.  *Каноническое уравнение* параболы в прямоугольной системе координат:  (или  , если поменять местами оси)  где ***р*** (фокальный параметр) - расстояние от фокуса до директрисы  *Свойства параболы:*   * Парабола — кривая второго порядка. * Она имеет ось симметрии, называемой *осью параболы*. Ось проходит через фокус и перпендикулярна директрисе. * Пучок лучей параллельных оси, отражаясь в параболе, собирается в её фокусе. Для параболы с вершиной в начале координат (0; 0) и положительным направлением ветвей фокус находится в точке (0; 0,25). * Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ будет лежать на директрисе. * Парабола является антиподерой прямой. * Все параболы подобны. Расстояние между фокусом и директрисой определяет масштаб. * При вращении параболы вокруг оси симметрии получается эллиптический параболоид.   · Прямая пересекает параболу не более чем в двух точках.  · Эксцентриситет параболы *е*=1.  **Гипербола.**  Геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек есть величина постоянная, называют ***гиперболой*.**  Для любой гиперболы можно найти декартову систему координат такую, что гипербола будет описываться *уравнением*:  Числа  и  называются соответственно *вещественной* и *мнимой полуосями* гиперболы.  *Свойства гиперболы:*  · Гипербола имеет две оси симметрии (главные оси гиперболы) и центр симметрии (центр гиперболы). При этом одна из этих осей пересекается с гиперболой в двух точках, называемых вершинами гиперболы. Она называется действительной осью гиперболы (ось *Ох* для канонического выбора координатной системы). Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и называется ее мнимой осью (в канонических координатах – ось *Оу*). По обе стороны от нее расположены правая и левая ветви гиперболы. Фокусы гиперболы располагаются на ее действительной оси.  · Каждая гипербола имеет пару асимптот:  и  .  · Расстояние от начала координат до одного из фокусов гиперболы называют *фокусным расстоянием* гиперболы  .  · **Эксцентриситетом** гиперболы называется величина *е = с / а.*Эксцентриситет гиперболы *e*> 1  · Расстояние от вершины гиперболы до асимптоты вдоль направления параллельного оси ординат называется *малой* или *мнимой полуосью* гиперболы  .    Гипербола  **Гиперболой** называется множество точек плоскости, разность расстояний которых до двух заданных точек **https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-muuHJZ.png**и https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-bHs0Yk.png(фокусов), взятая по модулю, есть величина постояннаяhttps://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-z7uCzi.png, меньшая, чем расстояние между фокусамиhttps://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-EQoGQi.png.  *Уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ох, а начало координат посредине*  **Рис. 3**  *м*https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-6Xa9aQ.png*ежду фокусами имеет вид:https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-Onemeq.png*  *где* а *– длина действительной полуоси* b –*длина мнимой полуоси гиперболы(рис. 3).*  *Зависимость между параметрами гиперболы* а, b*и* с*выражается соотношением: https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-DOg2qn.png(8)*  Эксцентриситетом гиперболы называется отношения межфокусного расстояния к расстоянию между вершинами*:* https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-m_Vxj9.png*(9)*  *Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-JTgE5J.png(10)*  Директрисами гиперболы называются прямые, параллельные оси Оу и которые находятся от этой оси на расстоянии *https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-YSUPbT.png*  *Уравнения директрис: https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-w6wcjA.png(11)*  *Если фокусы гиперболы лежат на оси* Оу*, то ее уравнения имеет вид:*  https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-LFkhTy.png*(12)*  *а уравнения асимптот https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-i7Rc_X.png*  Парабола  **Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от заданной точки** https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-RS5Vyg.png(фокуса) и заданной прямой (директрисы).  https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-DmRHQp.png*Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Ох (рис. 4):*  https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-G41vM8.png  *Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Оу (рис. 5):*  https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-yGnIYC.png  *В обоих случаях вершина параболы, то есть точка, которая находится на оси симметрии, находится в начале координат.*  *Парабола https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-aAcusc.pngимеет фокусhttps://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-rq6uyR.pngи директрисуhttps://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-3E0GTX.png*  *Парабола https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-XLbdND.pngимеет фокусhttps://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-qYi6Dp.pngи директрисуhttps://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-NvG_pf.png*  *Директориальное свойство кривых второго порядка: отношения расстояний от данной точки кривой к его фокусу иd к соответствующей директрисе есть величина постоянная, которая равняется эксцентриситету кривой:https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-zMC2wx.pnghttps://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-NP63jv.png*  **3.2.2.Их геометрические свойства и уравнения.**  **Каноническое уравнение параболы**   |  | | --- | | **(**[**схема 22**](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-pomesenie/shema-22)**)**  C:\Users\Admin\Desktop\Лекции-В.М\Рис.к лекциям\Канонич.параб..jpg  ***Параболой*** называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса), и данной прямой (директрисы).  Произведем выбор осей: 0*x* проходит через фокус перпендикулярно директрисе («+» от директрисы к *F*); за начало координат возьмем середину  отрезка от  до директрисы. Длину *|OF|* обозначим через [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516749887/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/1.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/1.jpg?attredirects=0)(*p* – параметр параболы); ось 0*y* проведём через точку *O* параллельно директрисе. Поместим вершину параболы в точку *O*. Пусть *M(x;y)* – произвольная точка параболы, *K* – основание перпендикуляра, опущенного из точки *M* на директрису, то есть точка [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485517147379/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/10.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/10.jpg?attredirects=0)  .  По определению *|KM|=|MF|*, тогда с учетом  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516753866/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/2.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/2.jpg?attredirects=0), получим уравнение  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516759827/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/3.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/3.jpg?attredirects=0). Возведем это равенство в квадрат:  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516763579/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/4.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/4.jpg?attredirects=0).                                                                                   **(2.19)**  ***Это каноническое уравнение параболы*** ветвью вправо (рис. 2.8).    [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516768149/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/5.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/5.jpg?attredirects=0)  Очевидно, что *x≥*0 и каждому *x* соответствует два значения *y*, равных по величине и противоположных по знаку, следовательно, парабола симметрична относительно оси 0*x*.  ***Эксцентриситет параболы*** (аналогично эллипсу и гиперболе) определяется формулой:  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516772912/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/6.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/6.jpg?attredirects=0).Можно показать, что парабола ветвью влево (рис. 2.9), имеет уравнение *y2= –* 2*px*.  Для параболы ветвями вверх (рис. 2.10) или вниз (рис. 2.11) уравнения выводятся аналогично уравнению (2.19) и имеют соответственно канонический вид  *x*2*=*2*py* и *y*2*=*2*px.*  **Пример 2.7.**Составить уравнение линии, для каждой точки которой ее расстояние до точки *A*(3;–4) равно расстоянию до прямой *y=*2.  Полученное уравнение привести к каноническому виду.  *Решение.* Пусть *M(x;y)*– текущая точка искомой кривой. Опустим из точки *M* перпендикуляр *MB* на прямую *y=*2. Тогда точка *B*  имеет координаты *(x;*2*)*. Так как по условию *MA=MB*, то  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516776940/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/7.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/7.jpg?attredirects=0)  Полученное уравнение определяет параболу ветвью вниз и с вершиной в точке *O’(*3;–1*)*. Точка *A(*3;–4*)* является фокусом параболы. Для приведения уравнения к простейшему (каноническому) виду положим *x–*3*=x’*, *y+*1*=y’*. Тогда в системе координат  *x’*0*’y’* уравнение параболы принимает следующий вид:  *x’2=* –12 *y’.*    *[https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516780897/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/8.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/8.jpg?attredirects=0)*  *Примечание.* При вращении параболы вокруг ее оси образуется ***параболоид вращения*** | |