|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **3.2.1.Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола,** **парабола.** **Кривые второго порядка: эллипс, окружность, парабола, гипербола.****Кривыми второго порядка** на плоскости называются линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину.Если такая плоскость пересекает все образующие одной полости конуса, то в сечении получается **эллипс**, при пересечении образующих обеих полостей – **гипербола**, а если секущая плоскость параллельна какой-либо образующей, то сечением конуса является **парабола**.*Кривая второго порядка* на плоскости в прямоугольной системе координат описывается уравнением: **Кривые второго порядка: эллипс, окружность, парабола, гипербола.****Кривыми второго порядка** на плоскости называются линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину.Если такая плоскость пересекает все образующие одной полости конуса, то в сечении получается **эллипс**, при пересечении образующих обеих полостей – **гипербола**, а если секущая плоскость параллельна какой-либо образующей, то сечением конуса является **парабола**.*Кривая второго порядка* на плоскости в прямоугольной системе координат описывается уравнением: Эллипс.Множество всех точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F 1 и F 2 есть заданная постоянная величина, называется ***эллипсом***.*Каноническое уравнение эллипса.*Для любого эллипса можно найти декартову систему координат такую, что эллипс будет описываться уравнением (каноническое уравнение эллипса):,где Оно описывает эллипс с центром в начале координат, оси которого совпадают с осями координат. Число **a** называют *большой полуосью эллипса*, а число **b** – *его малой полуосью*.*Свойства эллипса:** **Фокальное свойство.** Если *F*1 и *F*2 — фокусы эллипса, то для любой точки X, принадлежащей эллипсу, угол между касательной в этой точке и прямой ( *F*1*X*) равен углу между этой касательной и прямой ( *F*2*X*) .
* Прямая, проведённая через середины отрезков, отсечённых двумя параллельными прямыми, пересекающими эллипс, всегда будет проходить через центр эллипса. Это позволяет построением с помощью циркуля и линейки легко получить центр эллипса, а в дальнейшем оси, вершины и фокусы.
* Эволютой эллипса является астроида.
* **Эксцентриситетом** эллипса называется отношение

. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса. Чем эксцентриситет ближе к нулю, тем эллипс больше напоминает окружность и наоборот, чем эксцентриситет ближе к единице, тем он более вытянут. Эллипс также можно описать как* фигуру, которую можно получить из окружности, применяя аффинное преобразование
* ортогональную проекцию окружность на плоскость.
* Пересечение плоскости и кругового цилиндра.

**Окружность.****Окружность** — геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от заданной точки, называемой её центром, на заданное ненулевое расстояние, называемое её радиусом.*Каноническое уравнение окружности.*Общее уравнение окружности записывается как:илиТочка — центр окружности, *R* — её радиус.Уравнение окружности радиуса *R* с центром в начале координат:*Свойства окружности:** Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью одну общую точку (касательная); иметь с ней две общие точки (секущая).
* Касательная к окружности всегда перпендикулярна её диаметру, один из концов которого является точкой касания.
* Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.
* Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры.
* Длину окружности с радиусом *R* можно вычислить по формуле *C* = 2π *R*.
* Вписанный угол либо равен половине центрального угла, опирающегося на его дугу, либо дополняет половину этого угла до 180°.
	+ Два вписанных угла, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
	+ Вписанный угол, опирающийся на дугу длиной в половину окружности равен 90°.
* Угол между двумя секущими, проведенными из точки, лежащей вне окружности равен полуразности мер дуг, лежащих между секущими.
* Угол между пересекающимися хордами равен полусумме мер дуги лежащей в угле и дуги напротив нее.
* Угол между касательной и хордой равен половине дуги, стягиваемой хордой.
* Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.
* При пересечении двух хорд произведение отрезков, на которые делится одна из них точкой пересечения, равно произведению отрезков другой.
* Произведение длин расстояний от выбранной точки до двух точек пересечения окружности и секущей проходящей через выбранную точку не зависит от выбора секущей и равно абсолютной величине степени точки относительно окружности.

Квадрат длины отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей и равен абсолютной величине степени точки относительно окружности. * Окружность является простой плоской кривой второго порядка.
* Окружность является коническим сечением и частным случаем эллипса.

**Парабола.****Параболой** называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.*Каноническое уравнение* параболы в прямоугольной системе координат:(или , если поменять местами оси)где ***р*** (фокальный параметр) - расстояние от фокуса до директрисы*Свойства параболы:** Парабола — кривая второго порядка.
* Она имеет ось симметрии, называемой *осью параболы*. Ось проходит через фокус и перпендикулярна директрисе.
* Пучок лучей параллельных оси, отражаясь в параболе, собирается в её фокусе. Для параболы с вершиной в начале координат (0; 0) и положительным направлением ветвей фокус находится в точке (0; 0,25).
* Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ будет лежать на директрисе.
* Парабола является антиподерой прямой.
* Все параболы подобны. Расстояние между фокусом и директрисой определяет масштаб.
* При вращении параболы вокруг оси симметрии получается эллиптический параболоид.

· Прямая пересекает параболу не более чем в двух точках.· Эксцентриситет параболы *е*=1.**Гипербола.**Геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек есть величина постоянная, называют ***гиперболой*.**Для любой гиперболы можно найти декартову систему координат такую, что гипербола будет описываться *уравнением*:Числа и называются соответственно *вещественной* и *мнимой полуосями* гиперболы.*Свойства гиперболы:*· Гипербола имеет две оси симметрии (главные оси гиперболы) и центр симметрии (центр гиперболы). При этом одна из этих осей пересекается с гиперболой в двух точках, называемых вершинами гиперболы. Она называется действительной осью гиперболы (ось *Ох* для канонического выбора координатной системы). Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и называется ее мнимой осью (в канонических координатах – ось *Оу*). По обе стороны от нее расположены правая и левая ветви гиперболы. Фокусы гиперболы располагаются на ее действительной оси.· Каждая гипербола имеет пару асимптот: и .· Расстояние от начала координат до одного из фокусов гиперболы называют *фокусным расстоянием* гиперболы .· **Эксцентриситетом** гиперболы называется величина *е = с / а.*Эксцентриситет гиперболы *e*> 1· Расстояние от вершины гиперболы до асимптоты вдоль направления параллельного оси ординат называется *малой* или *мнимой полуосью* гиперболы .  Эллипс.Множество всех точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F 1 и F 2 есть заданная постоянная величина, называется ***эллипсом***.*Каноническое уравнение эллипса.*Для любого эллипса можно найти декартову систему координат такую, что эллипс будет описываться уравнением (каноническое уравнение эллипса):,где Оно описывает эллипс с центром в начале координат, оси которого совпадают с осями координат. Число **a** называют *большой полуосью эллипса*, а число **b** – *его малой полуосью*.*Свойства эллипса:** **Фокальное свойство.** Если *F*1 и *F*2 — фокусы эллипса, то для любой точки X, принадлежащей эллипсу, угол между касательной в этой точке и прямой ( *F*1*X*) равен углу между этой касательной и прямой ( *F*2*X*) .
* Прямая, проведённая через середины отрезков, отсечённых двумя параллельными прямыми, пересекающими эллипс, всегда будет проходить через центр эллипса. Это позволяет построением с помощью циркуля и линейки легко получить центр эллипса, а в дальнейшем оси, вершины и фокусы.
* Эволютой эллипса является астроида.
* **Эксцентриситетом** эллипса называется отношение

. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса. Чем эксцентриситет ближе к нулю, тем эллипс больше напоминает окружность и наоборот, чем эксцентриситет ближе к единице, тем он более вытянут. Эллипс также можно описать как* фигуру, которую можно получить из окружности, применяя аффинное преобразование
* ортогональную проекцию окружность на плоскость.
* Пересечение плоскости и кругового цилиндра.

**Окружность.****Окружность** — геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от заданной точки, называемой её центром, на заданное ненулевое расстояние, называемое её радиусом.*Каноническое уравнение окружности.*Общее уравнение окружности записывается как:илиТочка — центр окружности, *R* — её радиус.Уравнение окружности радиуса *R* с центром в начале координат:*Свойства окружности:** Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью одну общую точку (касательная); иметь с ней две общие точки (секущая).
* Касательная к окружности всегда перпендикулярна её диаметру, один из концов которого является точкой касания.
* Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.
* Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры.
* Длину окружности с радиусом *R* можно вычислить по формуле *C* = 2π *R*.
* Вписанный угол либо равен половине центрального угла, опирающегося на его дугу, либо дополняет половину этого угла до 180°.
	+ Два вписанных угла, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
	+ Вписанный угол, опирающийся на дугу длиной в половину окружности равен 90°.
* Угол между двумя секущими, проведенными из точки, лежащей вне окружности равен полуразности мер дуг, лежащих между секущими.
* Угол между пересекающимися хордами равен полусумме мер дуги лежащей в угле и дуги напротив нее.
* Угол между касательной и хордой равен половине дуги, стягиваемой хордой.
* Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.
* При пересечении двух хорд произведение отрезков, на которые делится одна из них точкой пересечения, равно произведению отрезков другой.
* Произведение длин расстояний от выбранной точки до двух точек пересечения окружности и секущей проходящей через выбранную точку не зависит от выбора секущей и равно абсолютной величине степени точки относительно окружности.

Квадрат длины отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей и равен абсолютной величине степени точки относительно окружности. * Окружность является простой плоской кривой второго порядка.
* Окружность является коническим сечением и частным случаем эллипса.

**Парабола.****Параболой** называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.*Каноническое уравнение* параболы в прямоугольной системе координат:(или , если поменять местами оси)где ***р*** (фокальный параметр) - расстояние от фокуса до директрисы*Свойства параболы:** Парабола — кривая второго порядка.
* Она имеет ось симметрии, называемой *осью параболы*. Ось проходит через фокус и перпендикулярна директрисе.
* Пучок лучей параллельных оси, отражаясь в параболе, собирается в её фокусе. Для параболы с вершиной в начале координат (0; 0) и положительным направлением ветвей фокус находится в точке (0; 0,25).
* Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ будет лежать на директрисе.
* Парабола является антиподерой прямой.
* Все параболы подобны. Расстояние между фокусом и директрисой определяет масштаб.
* При вращении параболы вокруг оси симметрии получается эллиптический параболоид.

· Прямая пересекает параболу не более чем в двух точках.· Эксцентриситет параболы *е*=1.**Гипербола.**Геометрическое место точек плоскости, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек есть величина постоянная, называют ***гиперболой*.**Для любой гиперболы можно найти декартову систему координат такую, что гипербола будет описываться *уравнением*:Числа и называются соответственно *вещественной* и *мнимой полуосями* гиперболы.*Свойства гиперболы:*· Гипербола имеет две оси симметрии (главные оси гиперболы) и центр симметрии (центр гиперболы). При этом одна из этих осей пересекается с гиперболой в двух точках, называемых вершинами гиперболы. Она называется действительной осью гиперболы (ось *Ох* для канонического выбора координатной системы). Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и называется ее мнимой осью (в канонических координатах – ось *Оу*). По обе стороны от нее расположены правая и левая ветви гиперболы. Фокусы гиперболы располагаются на ее действительной оси.· Каждая гипербола имеет пару асимптот: и .· Расстояние от начала координат до одного из фокусов гиперболы называют *фокусным расстоянием* гиперболы .· **Эксцентриситетом** гиперболы называется величина *е = с / а.*Эксцентриситет гиперболы *e*> 1· Расстояние от вершины гиперболы до асимптоты вдоль направления параллельного оси ординат называется *малой* или *мнимой полуосью* гиперболы .  Гипербола**Гиперболой** называется множество точек плоскости, разность расстояний которых до двух заданных точек **https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-muuHJZ.png**и https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-bHs0Yk.png(фокусов), взятая по модулю, есть величина постояннаяhttps://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-z7uCzi.png, меньшая, чем расстояние между фокусамиhttps://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-EQoGQi.png.*Уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ох, а начало координат посредине* **Рис. 3***м*https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-6Xa9aQ.png*ежду фокусами имеет вид:https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-Onemeq.png**где* а *– длина действительной полуоси* b –*длина мнимой полуоси гиперболы(рис. 3).**Зависимость между параметрами гиперболы* а, b*и* с*выражается соотношением: https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-DOg2qn.png(8)*Эксцентриситетом гиперболы называется отношения межфокусного расстояния к расстоянию между вершинами*:* https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-m_Vxj9.png*(9)**Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-JTgE5J.png(10)*Директрисами гиперболы называются прямые, параллельные оси Оу и которые находятся от этой оси на расстоянии *https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-YSUPbT.png**Уравнения директрис: https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-w6wcjA.png(11)**Если фокусы гиперболы лежат на оси* Оу*, то ее уравнения имеет вид:*https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-LFkhTy.png*(12)**а уравнения асимптот https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-i7Rc_X.png*Парабола**Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от заданной точки** https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-RS5Vyg.png(фокуса) и заданной прямой (директрисы).https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-DmRHQp.png*Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Ох (рис. 4):*https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-G41vM8.png*Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Оу (рис. 5):*https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-yGnIYC.png*В обоих случаях вершина параболы, то есть точка, которая находится на оси симметрии, находится в начале координат.**Парабола https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-aAcusc.pngимеет фокусhttps://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-rq6uyR.pngи директрисуhttps://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-3E0GTX.png**Парабола https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-XLbdND.pngимеет фокусhttps://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-qYi6Dp.pngи директрисуhttps://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-NvG_pf.png**Директориальное свойство кривых второго порядка: отношения расстояний от данной точки кривой к его фокусу иd к соответствующей директрисе есть величина постоянная, которая равняется эксцентриситету кривой:https://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-zMC2wx.pnghttps://studfile.net/html/2706/490/html_vuHstSuGyb.llnY/img-NP63jv.png***3.2.2.Их геометрические свойства и уравнения.**  **Каноническое уравнение параболы**

|  |
| --- |
| **(**[**схема 22**](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-pomesenie/shema-22)**)**C:\Users\Admin\Desktop\Лекции-В.М\Рис.к лекциям\Канонич.параб..jpg***Параболой*** называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса), и данной прямой (директрисы).Произведем выбор осей: 0*x* проходит через фокус перпендикулярно директрисе («+» от директрисы к *F*); за начало координат возьмем середину  отрезка от  до директрисы. Длину *|OF|* обозначим через https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516749887/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/1.jpg(*p* – параметр параболы); ось 0*y* проведём через точку *O* параллельно директрисе. Поместим вершину параболы в точку *O*. Пусть *M(x;y)* – произвольная точка параболы, *K* – основание перпендикуляра, опущенного из точки *M* на директрису, то есть точка https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485517147379/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/10.jpg  .По определению *|KM|=|MF|*, тогда с учетом  https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516753866/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/2.jpg, получим уравнениеhttps://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516759827/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/3.jpg. Возведем это равенство в квадрат:https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516763579/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/4.jpg.                                                                                   **(2.19)*****Это каноническое уравнение параболы*** ветвью вправо (рис. 2.8). https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516768149/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/5.jpgОчевидно, что *x≥*0 и каждому *x* соответствует два значения *y*, равных по величине и противоположных по знаку, следовательно, парабола симметрична относительно оси 0*x*.***Эксцентриситет параболы*** (аналогично эллипсу и гиперболе) определяется формулой:https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516772912/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/6.jpg.Можно показать, что парабола ветвью влево (рис. 2.9), имеет уравнение *y2= –* 2*px*.Для параболы ветвями вверх (рис. 2.10) или вниз (рис. 2.11) уравнения выводятся аналогично уравнению (2.19) и имеют соответственно канонический вид  *x*2*=*2*py* и *y*2*=*2*px.*  **Пример 2.7.**Составить уравнение линии, для каждой точки которой ее расстояние до точки *A*(3;–4) равно расстоянию до прямой *y=*2.  Полученное уравнение привести к каноническому виду.*Решение.* Пусть *M(x;y)*– текущая точка искомой кривой. Опустим из точки *M* перпендикуляр *MB* на прямую *y=*2. Тогда точка *B*  имеет координаты *(x;*2*)*. Так как по условию *MA=MB*, то  https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516776940/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/7.jpgПолученное уравнение определяет параболу ветвью вниз и с вершиной в точке *O’(*3;–1*)*. Точка *A(*3;–4*)* является фокусом параболы. Для приведения уравнения к простейшему (каноническому) виду положим *x–*3*=x’*, *y+*1*=y’*. Тогда в системе координат  *x’*0*’y’* уравнение параболы принимает следующий вид:  *x’2=* –12 *y’.**https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1485516780897/kupit-ucastok/ii-4-kanoniceskoe-uravnenie-paraboly/8.jpg**Примечание.* При вращении параболы вокруг ее оси образуется ***параболоид вращения***  |

 |