|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **3.4.1.Цилиндрические и конические поверхности.**  **3.4.2.Поверхности вращения.**  **3.4.3.Поверхности второго порядка.**   |  | | --- | | С помощью векторов мы ввели понятие пространства и его размерности, в частности трехмерного. Рассмотрим в нем поверхности, которые "похожи" на поверхности, образованные вращением кривой второго порядка вокруг ее оси симметрии. Например, сфера может быть получена вращением окружности вокруг диаметра. Поверхность, описываемая некоторой линией, вращающейся вокруг неподвижной прямой *d*, называется поверхностью вращения с осью вращения *d*. Наряду с такими поверхностями мы встретимся и с более сложными случаями.  Пусть в пространстве задана  прямоугольная декартова система координат.  ***Поверхность второго порядка*** – геометрическое место точек, декартовы прямоугольные координаты которых, удовлетворяют уравнению вида  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494680765737/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/2.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/2.jpg?attredirects=0),                                                                              **(2.48)**  в котором хотя бы один из коэффициентов [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494680768929/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/3.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/3.jpg?attredirects=0) отличен от нуля. Уравнение (2.48) называется общим уравнением поверхности второго порядка.  Уравнение (2.48) может и не определять действительного геометрического образа, но для сохранения общности в таких случаях говорят, что оно определяет мнимую поверхность второго порядка. В зависимости от значений коэффициентов общего уравнения (2.48) оно может быть преобразовано с помощью параллельного переноса и поворота системы координат к одному из канонических видов, каждому из которых соответствует определённый класс поверхностей второго порядка. Среди них выделяют пять основных классов поверхностей: эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, конусы и цилиндры. Для каждой из этих поверхностей существует декартова прямоугольная система координат, в которой поверхность задается простым уравнением, называемым каноническим уравнением.  Перечисленные поверхности второго порядка относятся к так называемым нераспадающимся поверхностям второго порядка. Можно говорить о случаях вырождения – распадающихся поверхностях второго порядка, к которым относятся: пары пересекающихся плоскостей, пары мнимых пересекающихся плоскостей, пары параллельных плоскостей, пары мнимых параллельных плоскостей, пары совпадающих плоскостей.  Наша цель – указать канонические уравнения для поверхностей второго порядка и показать, как выглядят эти поверхности.  Поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494680773097/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/4.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/4.jpg?attredirects=0)  (*a* > 0, *b* > 0, *c* > 0),                                                                                                                                                **(2.49)**  называется ***эллипсоидом*** (рис. 2.22).  Свойства эллипсоида.  1.           Эллипсоид – ограниченная поверхность, поскольку из его уравнения следует, что [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494680776925/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/5.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/5.jpg?attredirects=0).  2.           Эллипсоид обладает  ·               центральной симметрией относительно начала координат,  ·               осевой симметрией относительно координатных осей,  ·               плоскостной симметрией относительно начала координат.  3.           В сечении эллипсоида плоскостью, перпендикулярной любой из координатных осей, получается эллипс (см. рис. 2.22).  https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494680781428/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/6.jpgТак же, как для эллипса, точки пересечения эллипсоида с координатными осями называются вершинами эллипсоида, центр симметрии – центром эллипсоида. Числа *а*, *b*, *с* называются полуосями. Если полуоси попарно различны, то эллипсоид называется трехосным.  Если две полуоси равны друг другу, то эллипсоид называется эллипсоидом вращения. Эллипсоид вращения может быть получен вращением эллипса вокруг одной из осей.  *Примечание.* ***Сфера*** является частным случаем эллипсоида при *а=b=с*. Тогда все равные полуоси обозначают *R* и уравнение (2.49) после умножения на *R2* принимает вид [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494680785435/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/7.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/7.jpg?attredirects=0).  Поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494680789379/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/8.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/8.jpg?attredirects=0)   (*a* > 0, *b* > 0),                                                                                                                                                              **(2.50)**  называется ***эллиптическим параболоидом*** (рис. 2.23).  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494680793098/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/9.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/9.jpg?attredirects=0)  Свойства эллиптического параболоида.  1.           Эллиптический параболоид – неограниченная поверхность, поскольку из его уравнения следует, что *z* ≥ 0 и принимает сколь угодно большие значения.  2.           Эллиптический параболоид обладает  ·         осевой симметрией относительно оси 0*z*,  ·         плоскостной симметрией относительно координатных осей 0*xz* и 0*yz*.  3.            В сечении эллиптического параболоида плоскостью, ортогональной оси 0*z*, получается эллипс, а плоскостями, ортогональными осям 0*x* и 0*y* –парабола. (см. рис. 2.23).       Можно получить эллиптический параболоид симметричный относительно оси 0*х* или 0*у*, для чего нужно в уравнении (2.50) поменять между собой переменные *х* и *z* или *у* и *z* соответственно.  Если полуоси равны *a=b*, то параболоид называется параболоидом вращения и может быть получен вращением параболы вокруг ее оси симметрии. При этом в сечении параболоида вращения плоскостью, перпендикулярной оси 0*z*, получается окружность.          Поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494680799227/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/10.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/10.jpg?attredirects=0),                                                                                                                                                                     **(2.51)**  называется ***гиперболическим параболоидом*** (рис. 2.24).  Свойства гиперболического параболоида.  1.           Гиперболический параболоид – неограниченная поверхность, поскольку из его уравнения следует, что *z* – любое число.  2.           Гиперболический параболоид обладает  ·               осевой симметрией относительно оси 0*z*,  ·               плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей 0*xz* и 0*yz*.  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494680802955/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/11.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/11.jpg?attredirects=0)          3.    В сечении гиперболического параболоида плоскостью, ортогональной оси координат 0*z*, получается гипербола, а плоскостями, ортогональными осям 0*x* и 0*y*, – парабола (см. рис. 2.24).  4. Гиперболический параболоид может быть получен поступательным перемещением в пространстве параболы так, что ее вершина перемещается вдоль другой параболы, ось которой параллельна оси первой параболы, а ветви направлены противоположно, причем их плоскости взаимно перпендикулярны.  5. Поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494680806943/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/12.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/12.jpg?attredirects=0) (*a* > 0, *b* > 0, *c* > 0),                                                               **(2.52)**  называется ***однополостным гиперболоидом*** (рис. 2.25).  https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494680810842/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/13.jpg  Свойства однополостного гиперболоида.  1.           Однополостный гиперболоид – неограниченная поверхность, поскольку из его уравнения следует, что *z* – любое число.  2.           Однополостный гиперболоид обладает  ·               центральной симметрией относительно начала координат,  ·               осевой симметрией относительно всех координатных осей,  ·  плоскостной симметрией относительно всех координатных плоскостей.  3. В сечении однополостного гиперболоида плоскостью, перпендикулярной оси координат 0*z*, получается эллипс, а плоскостями, ортогональными осям 0*x* и 0*y*, – гипербола (см. рис. 2.25).           Если в уравнении (2.52) *a=b*, то сечения однополостного гиперболоида плоскостями, параллельными плоскости *х*0*у*, являются окружностями. В этом случае поверхность называется однополостным гиперболоидом вращения.  Поверхность, задаваемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнением  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494683696303/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/15.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/15.jpg?attredirects=0) (*a* > 0, *b* > 0, *c* > 0),                                                                                                                                               **(2.53)**  называется ***двуполостным гиперболоидом*** (рис. 2.26)***.***  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494680814266/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/14.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/14.jpg?attredirects=0)  Свойства двуполостного гиперболоида.  1.          Двуполостный гиперболоид – неограниченная поверхность, поскольку из его уравнения следует, что |*z*|*≥c* и неограничен сверху.  2.          Двуполостный гиперболоид обладает  ·         центральной симметрией относительно начала координат,  ·         осевой симметрией относительно всех координатных осей,  ·         плоскостной симметрией относительно всех координатных плоскостей.  3.          В сечении однополостного гиперболоида плоскостью, перпендикулярной оси координат 0*z*, при |*z*|*>c* получается эллипс, при |*z*|*=c* – точка, а в сечении плоскостями, перпендику­лярными осям 0*x* и 0*y*, – гипербола (см. рис. 2.26).   Если в уравнении (2.53) *a=b* , то сечения двуполостного гиперболоида плоскостями, параллельными плоскости *х*0*у*, являются окружностями. В этом случае поверхность называется двуполостным гиперболоидом вращения.  ***Примечание.*** Если уравнение поверхности в прямоугольной системе координат имеет вид: *F*(*x*2*+y*2*;z*)=0, то эта поверхность – поверхность вращения с осью вращения *0z*. Аналогично: *F*(*x*2*+z*2*;y*)=0 – поверхность вращения с осью вращения 0*у*,  *F*(*z*2*+y*2*;x*)=0 – с осью вращения 0*х*  С учетом данного примечания могут быть записаны уравнения для рассмотренных выше поверхностей вращения, если осью вращения являются оси 0*х* или 0*у*.  ***Цилиндрическая поверхность*** образуется движением прямой линии, скользящей по некоторой неподвижной замкнутой или незамкнутой кривой и остающейся параллельной своему исходному положению. Множество прямолинейных образующих представляет собой непрерывный каркас цилиндрической поверхности. Через каждую точку поверхности проходит одна прямолинейная образующая. Неподвижная кривая, по которой скользит образующая, называется направляющей. Если направляющая линия является кривой второго порядка, то и цилиндрическая поверхность – второго порядка.  Если уравнение поверхности не содержит в явном виде какой–либо переменной, то это уравнение определяет в пространстве цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси отсутствующего переменного и направляющей, которая в плоскости двух других переменных имеет то же самое уравнение.  Достаточно нарисовать на плоскости *х*0*у* направляющую, уравнение которой на этой плоскости совпадает с уравнением самой поверхности, и затем через точки направляющей провести образующие параллельно оси *0z*. Для наглядности следует построить также одно–два сечения плоскостями, параллельными плоскости *х*0*у*. В каждом таком сечении получим такую же кривую, как и исходная направляющая. Аналогично поступают, рассматривая направляющую в плоскости *х*0*z* или *у*0*z*.  Цилиндрическая поверхность является бесконечной в направлении своих образующих. Часть замкнутой цилиндрической поверхности, заключенная между двумя плоскими параллельными сечениями, называется ***цилиндром***, а фигуры сечения – его основаниями. Сечение цилиндрической поверхности плоскостью, перпендикулярной ее образующим, называется нормальным. В зависимости от формы нормального сечения цилиндры бывают:  1) эллиптические – нормальное сечение представляет собой эллипс (рис. 2.27а), каноническое уравнение  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494683644627/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/16.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/16.jpg?attredirects=0);                                                                                                                                                                                                                 **(2.54)**  2) круговые – нормальное сечение круг, при *a=b=r*   уравнение  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494683648785/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/17.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/17.jpg?attredirects=0);                                                                                                                                                                                                                  (**2.55)**  3) гиперболические – нормальное сечение гипербола (рис. 2.27б),  каноническое уравнение  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494683652979/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/18.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/18.jpg?attredirects=0);                                                                                                                                                                                                                    **(2.56)**  4) параболические – нормальное сечение парабола (рис. 2.27в),  каноническое уравнение  *x*2*=*2*py*;                                                                                                                                                                                                     **(2.57)**  5) общего вида – нормальное сечение кривая случайного вида.  Если за основание цилиндра принимается его нормальное сечение, цилиндр называют прямым (рис. 2.27). Если за основание цилиндра принимается одно из косых сечений, цилиндр называют наклонным. Например, наклонные сечения прямого кругового цилиндра являются эллипсами. Наклонные сечения прямого эллиптического цилиндра в общем случае – эллипсы. Однако его всегда можно пересечь плоскостью, наклонной к его образующим, таким образом, что в сечении получится круг.  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494683657454/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/19.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/19.jpg?attredirects=0)  ***Конической поверхностью*** называется поверхность, производимая движением прямой, перемещающейся в пространстве так, что она при этом постоянно проходит через неподвижную точку и пересекает данную линию. Данная прямая называется образующей, линия – направляющей, а точка – вершиной конической поверхности (рис. 2.28).  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494683661419/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/20.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/20.jpg?attredirects=0)  ***Конусом*** называется тело, ограниченное частью конической поверхности, расположенной по одну сторону от вершины, и плоскостью, пересекающей все образующие по ту же сторону от вершины. Часть конической поверхности, ограниченная этой плоскостью, называется боковой поверхностью, а часть плоскости, отсекаемая боковой поверхностью, – основанием конуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания, называется высотой конуса.  Конус называется прямым круговым, если его основание есть круг, а высота проходит через центр основания. Такой конус можно рассматривать как тело, происходящее от вращения прямоугольного треугольника, вокруг катета  как оси. При этом гипотенуза описывает боковую поверхность, а катет – основание конуса.  В курсе геометрии общеобразовательной школы рассматривается только прямой круговой конус, который для краткости называется просто конусом.  Если вершина конуса расположена в начале координат, направляющая кривая — эллипс с полуосями *а* и *b*, плоскость которого находится на расстоянии *с* от начала координат, то уравнение эллиптического конуса имеет вид:  [https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494683665240/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/21.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/21.jpg?attredirects=0)  (*a* >0, *b* >0, *c* >0).                                                                                                                                                 **(2.58)**  При *а* = *b* конус становится круговым.    ***Примечание.*** По аналогии с коническими сечениями (аналогично теореме 2.1) существуют и ***вырожденные поверхности второго порядка***. Так, уравнением второго порядка *x*2 = 0 описывается пара совпадающих плоскостей, уравнением *x*2 = 1 – пара параллельных плоскостей, уравнением *x*2 – *y*2 = 0 – пара пересекающихся плоскостей. Уравнение *x*2 + *y*2 + *z*2 = 0 описывает точку с координатами (0;0;0). Существуют и другие вырожденные случаи. Полная теория поверхностей второго порядка рассматривается в курсе аналитической геометрии[https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/_/rsrc/1494685239902/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/22.jpg](https://www.sites.google.com/site/vyssaamatem/kupit-ucastok/ii-10-poverhnosti-vtorogo-poradka/22.jpg?attredirects=0) | |
|  |  |
|  |  |
|  |  |