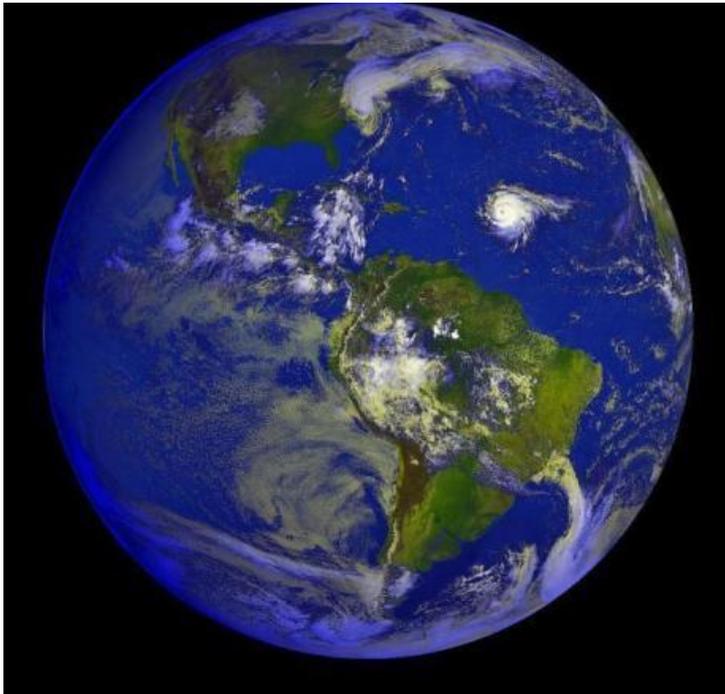


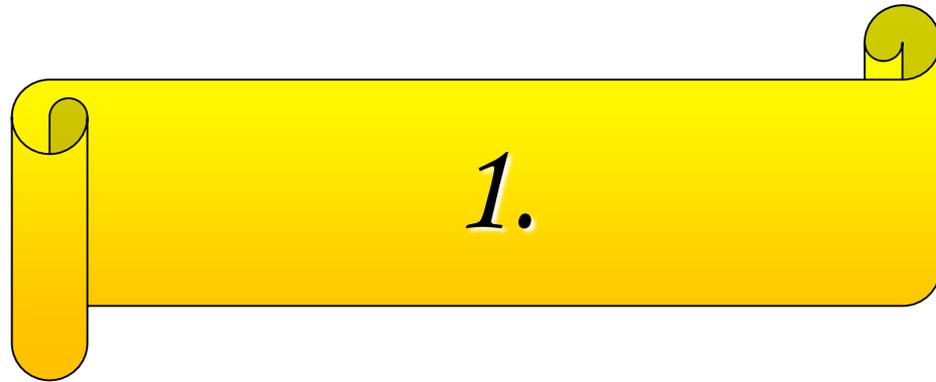
Динамика вращательного движения



Лекция 1.4.

План лекции

1. Динамика вращения точки и тела вокруг постоянной оси, понятие о моменте инерции материальной точки и тела.
2. Изменение момента инерции тела при переносе оси вращения. Теорема Штейнера.
3. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.
4. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса.
5. Кинетическая энергия вращающегося тела.

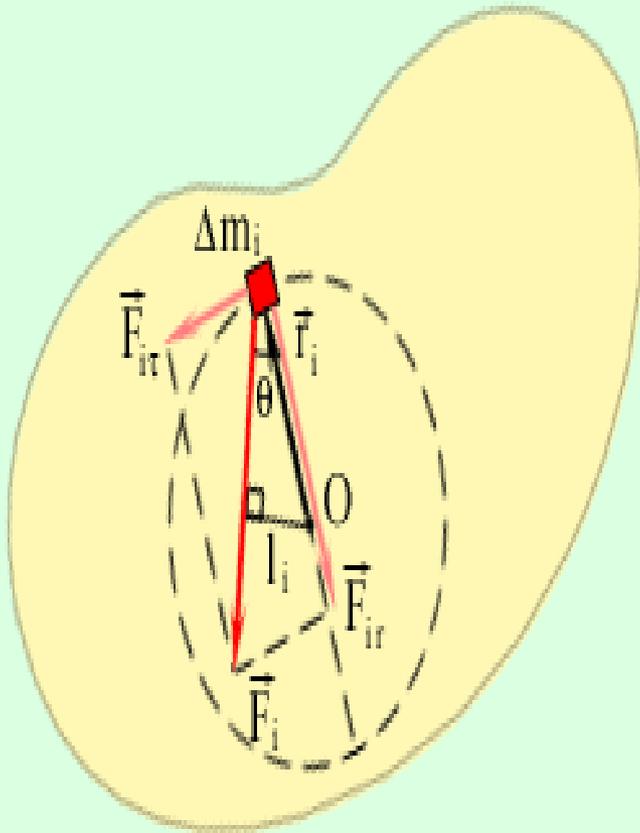


1.

*Динамика вращения точки и
тела вокруг постоянной оси,
понятие о моменте инерции
материальной точки и тела*

При вращательном движении наряду с понятием «масса» вводится понятие «момент инерции» J

Масса - мера инертности тела при поступательном движении.



$$J_i = m_i \cdot R_i^2$$

Момент инерции материальной точки вращающейся вокруг неподвижной оси, равен произведению массы этой точки на квадрат расстояния до оси.

Любое тело можно рассматривать как совокупность материальных точек, не смещающихся друг относительно друга.

Тело, не поддающееся деформации, называется абсолютно твердым.

Момент инерции твердого тела равен сумме моментов инерций материальных точек, из которых это тело состоит

$$J = \sum_{i=1}^n m_i \cdot R_i^2$$



Если тело имеет равномерно распределенную массу, то момент инерции определяется интегрированием

$$J = \int R^2 dm$$

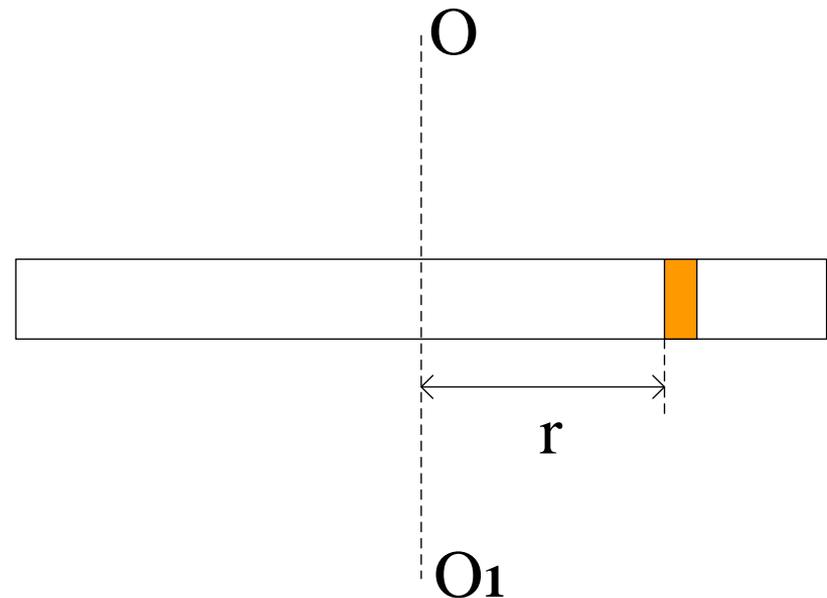
Размерность момента инерции определяется из соотношения

$$J = m \cdot R^2 \quad [\text{кг} \cdot \text{м}^2]$$

Момент инерции твердого тела

$$J_i = m_i r_i^2$$

$$J = \sum J_i$$



Для тел правильной геометрической формы выведены формулы для расчета момента инерции.

Рассмотрим случай, когда ось вращения проходит через центр масс этих тел.

1. Стержень

$$J = \frac{1}{12} ml^2$$

где **m** – масса тела; **l** – длина стержня

2. Диск

$$J = \frac{1}{2} mR^2$$

где **m** – масса диска; **R** – радиус

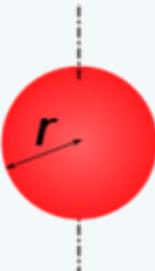
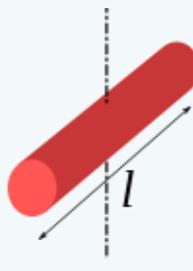
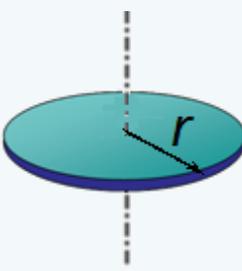
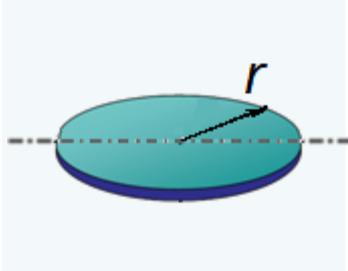
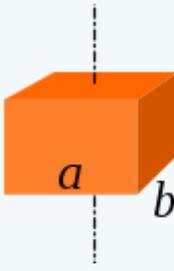
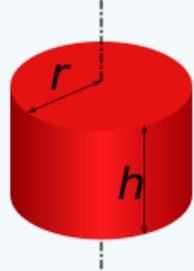
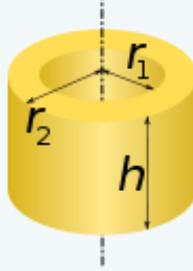
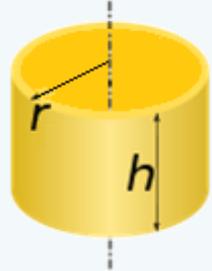
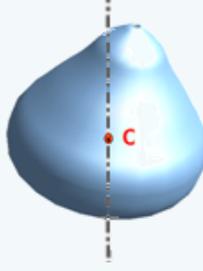
3. Кольцо (тонкостенный цилиндр)

$$J = mR^2$$

4. Шаг

$$J = \frac{2}{5} mR^2$$

Моменты инерции некоторых тел

Шар	Тонкостенная сфера	Однородный стержень	Диск	Диск
 $I = \frac{2}{5}mr^2$	 $I = \frac{2}{3}mr^2$	 $I = \frac{1}{12}ml^2$	 $I = \frac{1}{2}mr^2$	 $I = \frac{1}{4}mr^2$
Однородная пластинка	Сплошной цилиндр	Толстостенный цилиндр	Тонкостенный цилиндр	Произвольное тело
 $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	 $I = \frac{1}{2}mr^2$	 $I = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$	 $I = mr^2$	 $I = \sum m_i r_i^2$

Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Он играет такую же роль, что и масса при описании поступательного движения. Но если **масса** считается величиной постоянной, то **момент инерции** данного тела зависит от положения оси вращения.

***2. Изменение момента
инерции тела при переносе
оси вращения***

Если для какого-либо тела известен его момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести, то легко может быть найден и момент инерции относительно любой оси, параллельной первой.

$$J = J_c + md^2$$

Теорема Штейнера

где

J_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести

m – масса диска

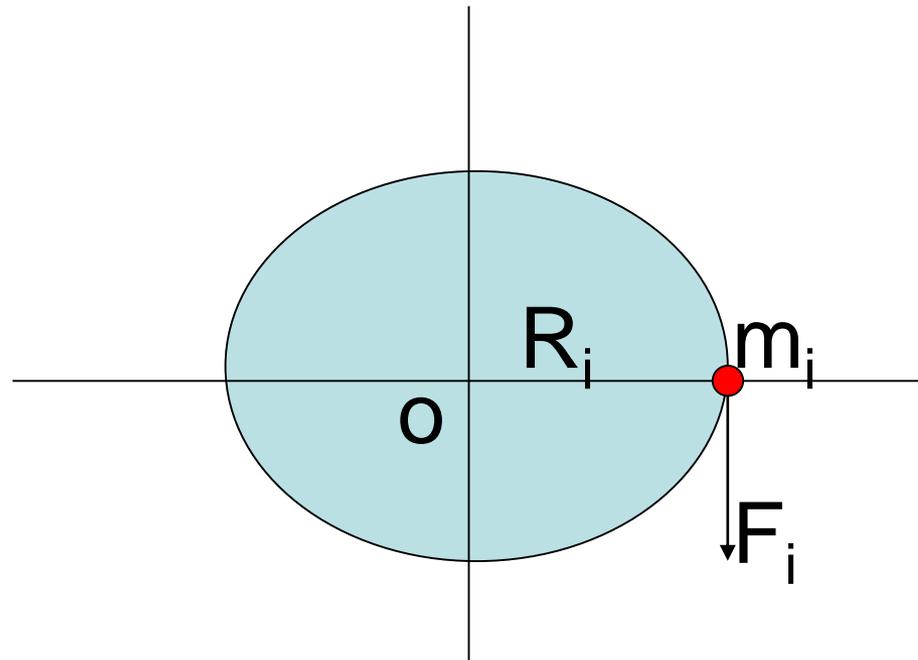
d – расстояние между осями

Теорема Штейнера:

Момент инерции относительно любой оси вращения равен моменту инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр тяжести, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния от центра тяжести тела до оси вращения.

*Уравнение динамики
вращательного движения
твёрдого тела
относительно
неподвижной оси*

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси $O-O'$. Разобьем это тело на элементарные участки. Выбираем произвольную материальную точку m_i , принадлежащую этому телу. Точка вместе с вращающимся телом описывает окружность. Проведем от точки линию и обозначим ее R_i . Приложим к точке силу F_i



Под действием силы \bar{F}_i , направленной перпендикулярно к оси по касательной к окружности, описываемой материальной точкой, движущаяся точка начнет вращательное движение. По второму закону Ньютона.

$$F_i = m_i a_i, \quad a_i = \frac{d v_i}{dt}$$

Используем формулу, устанавливающую связь между линейной и угловой скоростью

$$v_i = \omega r_i$$

Где ω – угловая скорость; у всех точек вращающегося тела она одинакова

Подставим значение линейной скорости в формулу ускорения

$$a_i = \frac{d(\omega r_i)}{dt} = r_i \frac{d\omega}{dt}$$

Подставим значение ускорения во второй закон Ньютона

$$F_i = m_i r_i \frac{d\omega}{dt}$$

умножим обе части последнего равенства на r_i и просуммируем его

$$\sum_{i=1}^n F_i r_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \frac{d\omega}{dt}$$

где:

$$\sum_{i=1}^n F_i r_i$$

- момент силы M

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

- момент инерции

$$\frac{d\omega}{dt}$$

- угловое ускорение

Момент силы – это скалярная физическая величина, равная произведению силы на плечо



$$M = \sum_{i=1}^n F_i r_i$$



Плечо – кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения

$$M = J \cdot \varepsilon$$



Основное уравнение динамики вращательного движения или второй закон Ньютона для вращательного движения.

Момент вращающейся силы приложенной к телу, равен произведению момента инерции тела на угловое ускорение.



Выразим угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{M}{J}$$



Угловое ускорение вращающегося тела прямо пропорционально суммарному моменту всех сил, действующих на тело, и обратно пропорционально моменту инерции тела.

$$\varepsilon = \frac{M}{J}$$


Подставим значение ε в формулу $M = J \cdot \varepsilon$ и подведем момент инерции под знак дифференциала.

$$M = \frac{d(J\omega)}{dt} \quad (*)$$



***Момент импульса. Закон
сохранения момента
импульса***

Аналогия математического описания

Поступательное движение

- Из основного уравнения динамики поступательного движения

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta(m\vec{v}) = \Delta\vec{p}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} (\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{v}), \quad [p] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$

- Произведение массы тела на скорость его движения - импульс тела.
- В отсутствие действия сил импульс тела сохраняется:

$$0 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta\vec{p}, \Rightarrow \vec{p} = \text{const}$$

Вращательное движение

- Из основного уравнения динамики вращательного движения

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} = I \frac{\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1}{\Delta t}$$

$$\vec{M}\Delta t = I\vec{\omega}_2 - I\vec{\omega}_1 = \Delta(I\vec{\omega}) = \Delta\vec{L}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} (\vec{L} \uparrow\uparrow \vec{v}), \quad [L] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$$

- Произведение момента инерции тела на угловую скорость его вращения - момент импульса.
 - При равенстве нулю суммарного момента сил
- $$0 = I\vec{\omega}_2 - I\vec{\omega}_1 = \Delta\vec{L}, \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Величину $J\omega$ формулы (*) обозначим как L

$$J\omega = L$$

момент импульса – это физическая величина, равная произведению момента инерции тела на угловую скорость.



$$m \cdot v = p \quad \text{импульс тела}$$

Если момент внешних сил, приложенных к телу, равен нулю ($M = 0$), то есть

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = 0$$

Дифференциал равен нулю, когда значение числа под дифференциалом постоянно, а это может быть только в том случае, если момент импульса

$$L = J\omega = \text{const}$$



Закон сохранения момента импульса при отсутствии момента сил ($M = 0$), момент количества движения остается постоянным ($L = \text{const}$).



Закон сохранения момента импульса

- Момент импульса системы тел сохраняется неизменным при любых взаимодействиях внутри системы, если результирующий момент внешних сил, действующих на неё, равен нулю.

$$\text{При } \vec{M} = 0 \quad \vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const}$$

- Следствия из закона сохранения момента импульса

- в случае изменения скорости вращения одной части системы другая также изменит скорость вращения, но в противоположную сторону таким образом, что момент импульса системы не изменится;
- если момент инерции замкнутой системы в процессе вращения изменяется, то изменяется и её угловая скорость таким образом, что момент импульса системы останется тем же самым
- в случае, когда сумма моментов внешних сил относительно некоторой оси равняется нулю, момент импульса системы относительно этой же оси остается постоянным.

- Экспериментальная проверка. [Опыты со скамьёй Жуковского](#)

- Границы применимости. Закон сохранения момента импульса выполняется в инерциальных системах отсчёта.



Особенности применения

Закон сохранения момента импульса
выполняется, если:

1. сумма моментов внешних сил равна нулю (силы при этом могут не уравниваться);
2. тело движется в центральном силовом поле (при отсутствии других внешних сил; относительно центра поля)

Закон сохранения момента импульса
применяют:

1. когда характер изменения со временем сил взаимодействия между частями системы сложен или неизвестен;
2. относительно одной и той же оси для всех моментов импульса и сил;
3. как к полностью, так и частично изолированным системам.

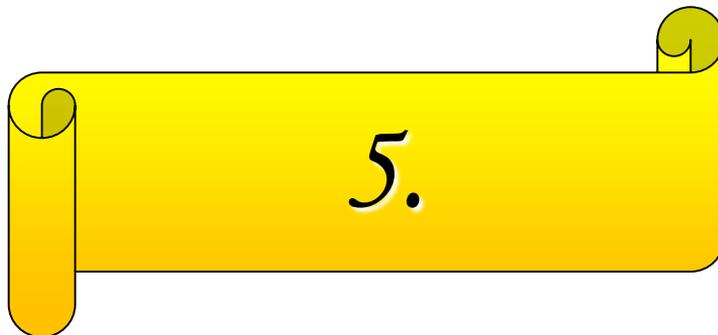


Основное уравнение динамики вращательного движения.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad L = J\omega$$

$$M = J \frac{d\omega}{dt} \quad \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$$

$$M = J\varepsilon$$



***Кинетическая энергия
вращающегося тела***

При поступательном движении кинетическая энергия тела определяется по формуле (для материальной точки)

$$E_{\text{кин}} = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Кинетическая энергия

вращаясь вокруг оси с
определяется

материальной точки m_i ,
линейной скоростью v_i ,

$$v_i = \omega R_i$$

Подставим значение линейной скорости в формулу кинетической энергии.

$$E_{\text{кин}} = \frac{m_i \omega^2 R_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} m_i R_i^2$$

Для всего тела

$$E_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega^2}{2} m_i R_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i R_i^2 = J \frac{\omega^2}{2}$$

$$E_{\text{кин}} = J \frac{\omega^2}{2}$$



Кинетическая энергия вращающегося тела

Если тело одновременно участвует во вращательном и поступательном движениях, то его **полная энергия** определится по формуле:

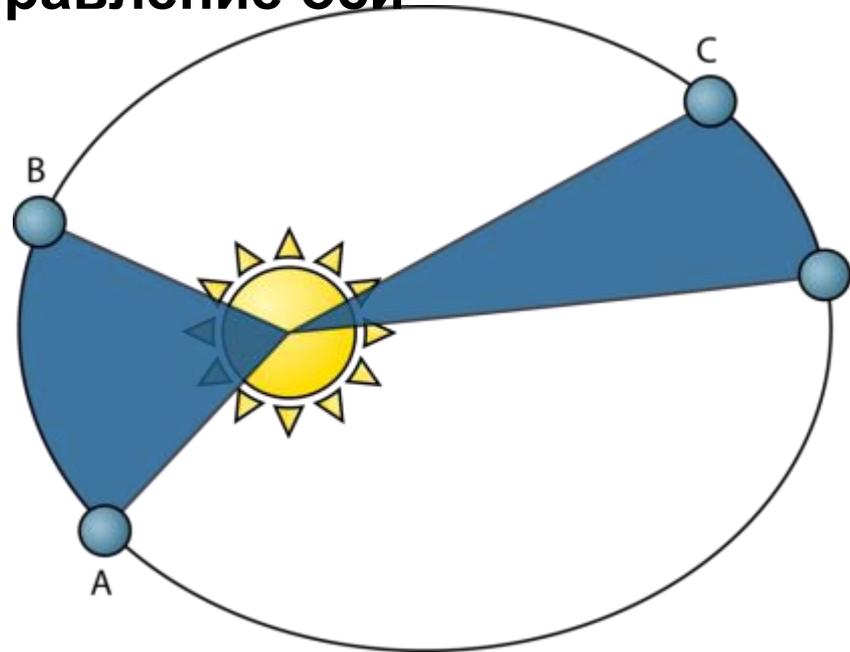
$$E_{\text{кин}} = J \frac{\omega^2}{2} + \frac{m v^2}{2}$$

Поступательное движение		Вращательное движение	
<i>Линейная скорость</i>	\vec{v}	<i>Угловая скорость</i>	$\vec{\omega}$
<i>Линейное ускорение</i>	\vec{a}	<i>Угловое ускорение</i>	$\vec{\varepsilon}$
<i>Сила</i>	\vec{F}	<i>Момент силы</i>	$M = r \cdot F$
<i>Импульс</i>	$P = m\vec{v}$	<i>Момент импульса</i>	$L = J\vec{\omega}$
<i>Механическая работа</i>	$A = F \cdot S$	<i>Работа</i>	$A = M \cdot \varphi$
<i>Масса</i>	m	<i>Момент инерции</i>	J
Второй закон Ньютона			
$F = ma$		$M = J\varepsilon$	
Кинетическая энергия			
$E_{кин} = \frac{mv^2}{2}$		$E_{кин} = \frac{J\omega^2}{2}$	

Примеры проявления закона сохранения момента импульса

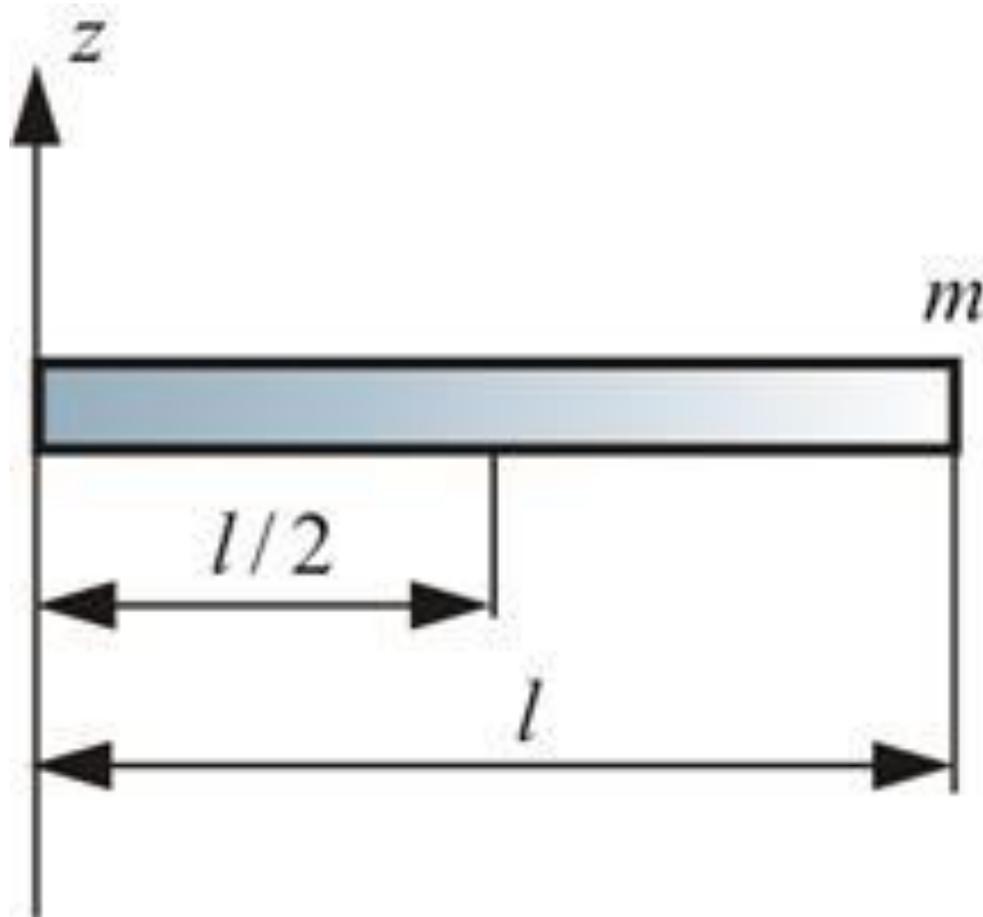
- Замечательной особенностью вращательного движения является **свойство вращающихся тел при отсутствии взаимодействий с другими телами сохранять неизменными не только момент импульса, но и направление оси вращения в пространстве.**

1. [Суточное вращение Земли.](#)
2. [Гироскопы](#)
3. [Вертолёт](#)
4. [Цирковые аттракционы](#)
5. [Балет](#)
6. [Фигурное катание](#)
7. [Гимнастика \(сальто\)](#)
8. [Прыжки в воду](#)
9. [Игровые виды спорта](#)



Примеры решения задачи на расчет момента инерции

1. Рассчитать момент инерции стержня массой m длиной l вращающегося вокруг оси, проходящей через конец стержня



Решение:

$$I_z = I_c + ma^2$$

Теорема Штейнера, т.к.
ось не проходит через
центр масс стержня

$$I_c = \frac{1}{12} ml^2$$

$$a = \frac{l}{2}$$

$$I_z = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

2. Рассчитать момент инерции системы тел, состоящих из человека массой $m=60$ кг, вращающегося на платформе массой $M=250$ кг, радиусом $R=2$ м. Человек находится на краю платформы. Считать человека материальной точкой.

Решение

$$1) \quad I = I_{\text{платформы}} + I_{\text{человека}}$$

$$2) \quad I_{\text{платформы}} = \frac{MR^2}{2}$$

$$3) \quad I_{\text{человека}} = mR^2$$

$$4) \quad I = \frac{MR^2}{2} + mR^2 =$$

$$R^2 \left(\frac{M}{2} + m \right) = 4(125 + 60) = 740 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$