Восточно-Сибирский
государственный университет
технологий и управления

Кафедра «Физика»

9

Колебания и волны

Осень 2017

Колебания

– процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени

Колебательная система (осциллятор) – система, совершающая колебания

По характеру воздействия на колебательную систему

- **Свободные** (или **собственные**) **колебания** – колебания, совершаемые за счет первоначально сообщенной энергии при отсутствии внешних воздействий на колебательную систему
- **Вынужденные колебания** – колебания, в процессе которых колебательная система подвергается воздействию внешней периодически действующей силы

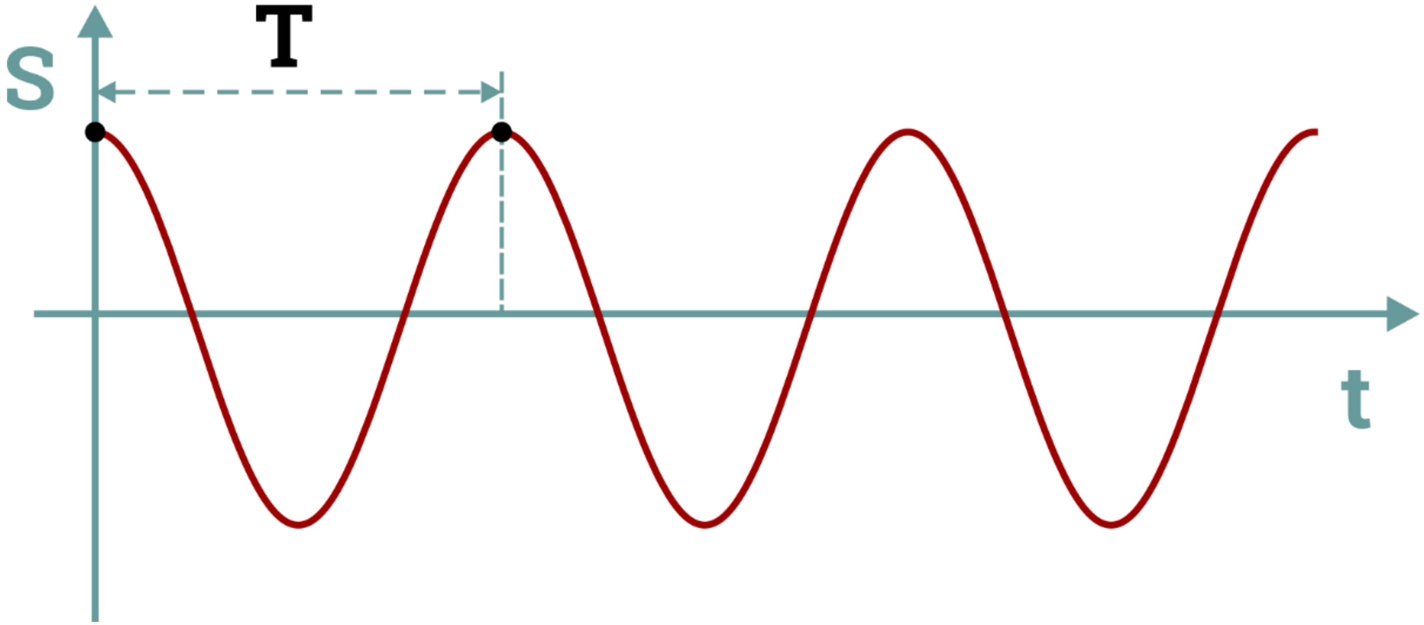
По характеру воздействия на колебательную систему

- **Автоколебания**, как и вынужденные, сопровождаются действием внешней силы, однако это воздействие управляется самой системой
- **Параметрические колебания** – колебания, при которых за счет действия внешней силы происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы

Гармонические колебания

– колебания, при которых колеблющаяся величина S изменяется со временем по **закону синуса** (**косинуса**)

$$S = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам:

- колебания, встречающиеся в природе и технике, часто близки к гармоническим
- различные периодические процессы (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как наложение гармонических колебаний (**преобразование Фурье**)

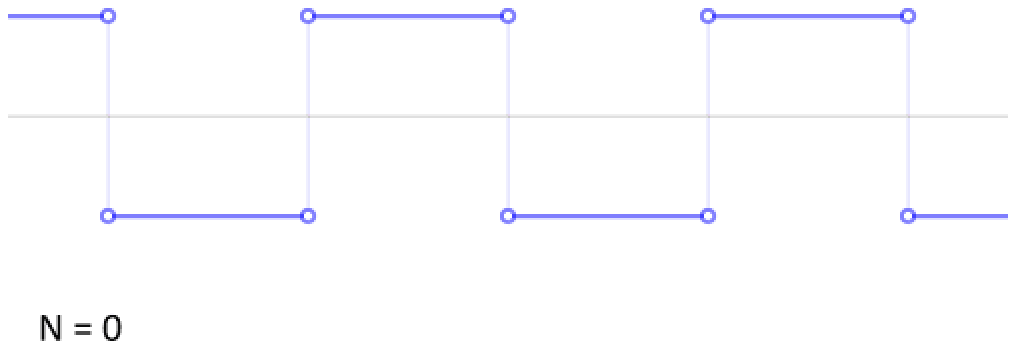
Разложение Фурье

$$S = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\boldsymbol{\omega_0} t + \varphi_1) +$$

$$+A_2 \cos(\boldsymbol{2\omega_0} t + \varphi_3) +$$

$$+A_3 \cos(\boldsymbol{3\omega_0} t + \varphi_3) + \cdots$$

$$+ A_n \cos(\boldsymbol{n\omega_0} t + \varphi_1)$$



$\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots, n\omega_0$ – **гармоники** сложного периодического колебания

Гармонические колебания

$$S = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

A – **амплитуда** колебания — максимальное значение колеблющейся величины

ω — круговая (**циклическая**) **частота**

$\varphi = (\omega t + \varphi_0)$ – **фаза** колебания – периодически изменяющийся аргумент косинуса

φ_0 – **начальная фаза** колебания

Формула Эйлера

Согласно формуле Эйлера, для комплексных чисел

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица

Уравнение гармонического колебания в комплексной форме

$$S = e^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

Вещественная часть выражения представляет собой гармоническое колебание

$$S = \mathrm{Re}\left(e^{i(\omega t + \varphi_0)}\right) = \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Период колебания

– время одного полного колебания

– промежуток времени T, за который фаза колебания получает приращение 2π

$$T = \frac{t}{N}$$

$$\omega(t + T) + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0 + 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Величина, обратная периоду колебаний, называется **частотой колебаний** – число полных колебаний, совершаемых в единицу времени

$$\nu = \frac{N}{t}, \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Единица частоты – **герц** (**Гц**)

1 Гц – частота периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса (одно полное колебание)

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$S = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{dS}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \boldsymbol{\pi})$$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2S}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

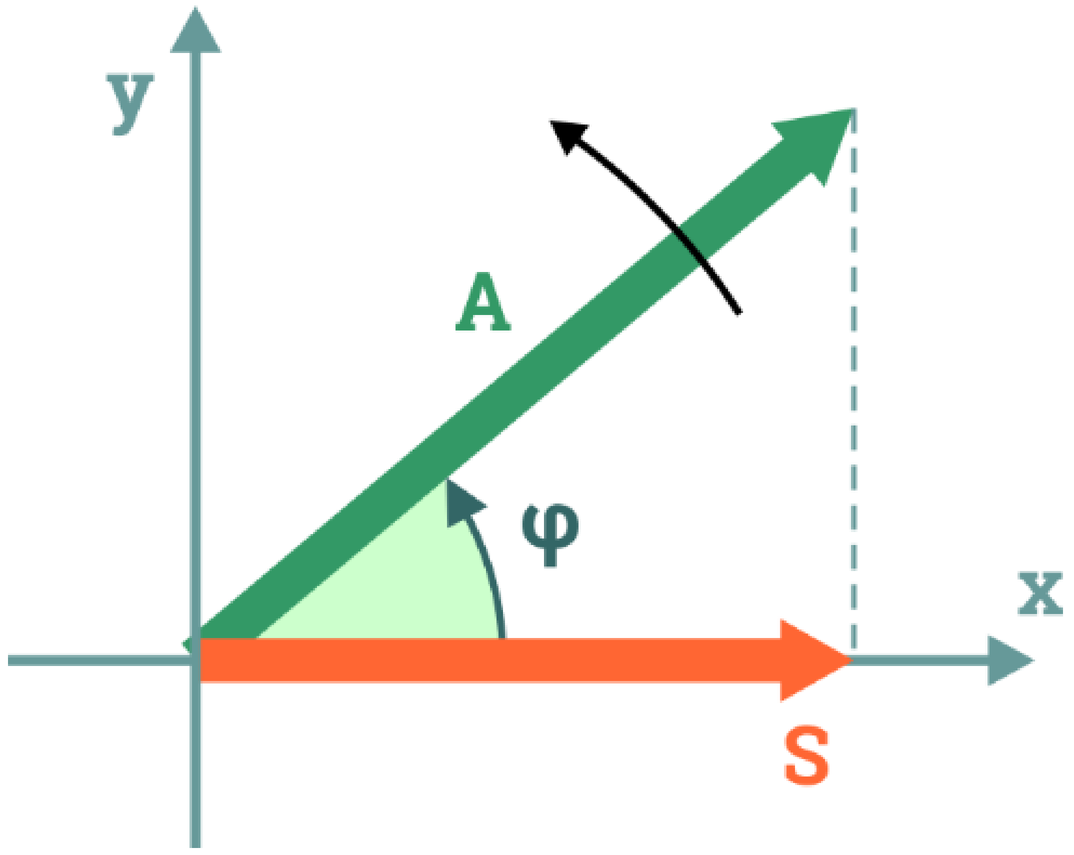
$$\frac{d^2S}{dt^2} - \omega_0^2 S = 0$$

Решение

$$S = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Метод векторных диаграмм

Гармоническое колебание можно представить **проекцией** вращающегося **вектора** на некоторую произвольно выбранную ось



Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

$$\begin{cases} S_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ S_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$S = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

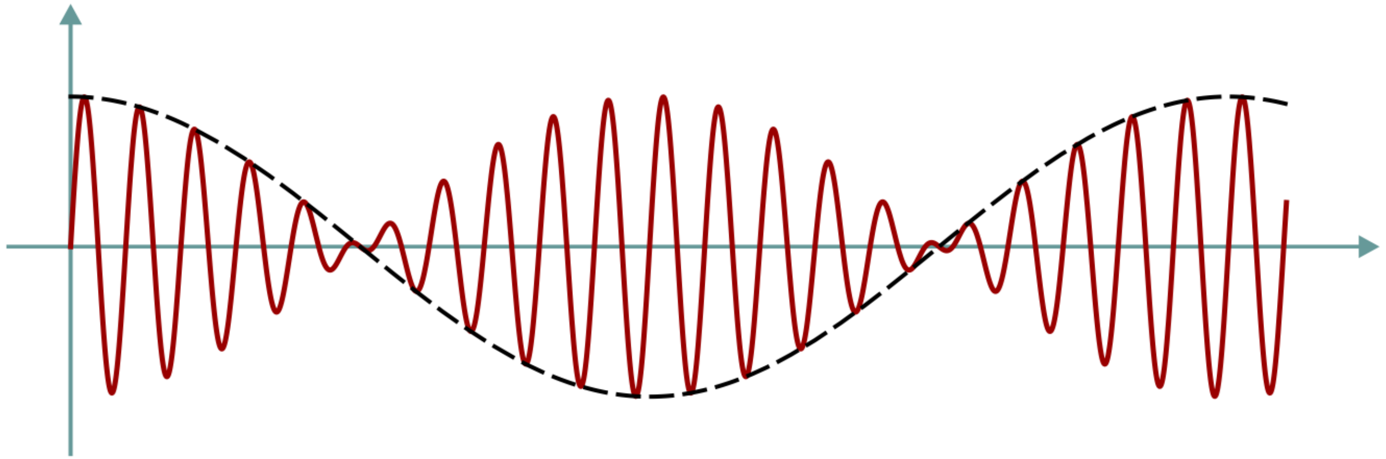
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

Биения

Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с **близкими частотами**

$\omega = \omega_2 = \omega_2$

$$\begin{cases} S_1 = A_1 \cos \omega_1 t \\ S_2 = A_2 \cos \omega_2 t \end{cases}$$



$$S = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_2}{2}\right) t \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_2}{2}\right) t = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) t \cdot \cos \omega t$$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t) \\ y = B\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

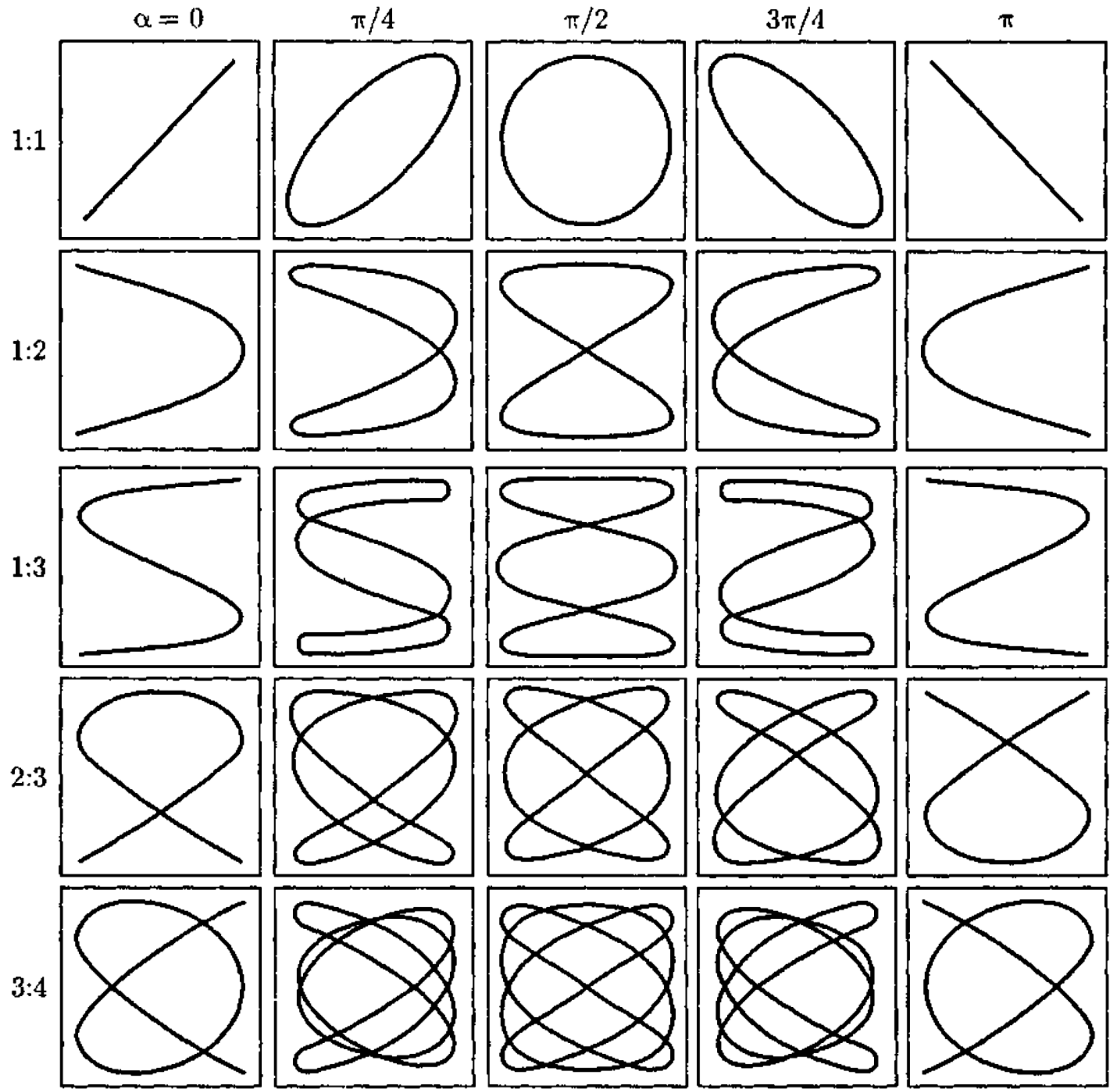
$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\alpha$$

Так как траектория результирующего колебания имеет форму эллипса, то такие колебания называются **эллиптически поляризованными**

Фигуры Лиссажу

Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания

Вид этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частоты разности фаз складываемых колебаний



Механические гармонические колебания

Смещение

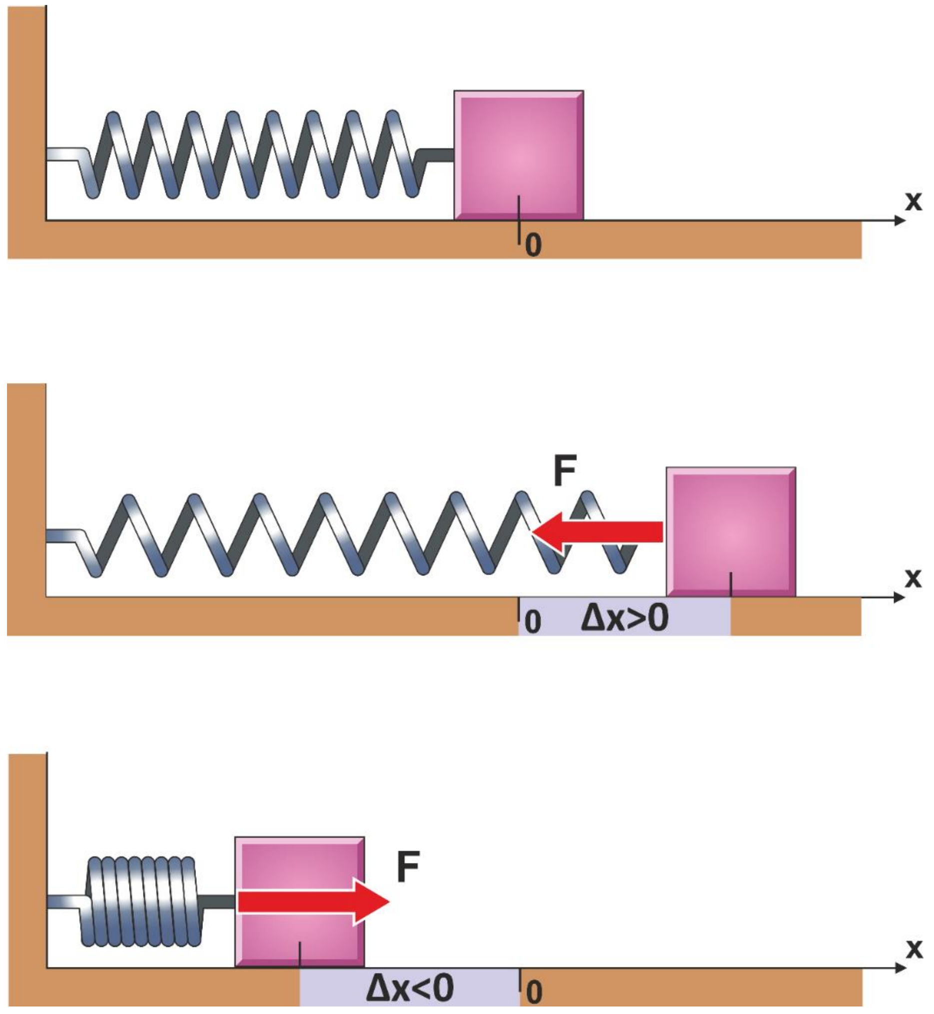
$$x = S = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Скорость, Ускорение, Сила,

$$v = \frac{dS}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$= \boldsymbol{A\omega_0} \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$= \boldsymbol{A\omega_0^2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) = -\omega_0^2 x$$

$$F = ma = -m\omega_0^2 x$$



Энергия колебаний

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 - \cos\mathbf{2}(\omega_0 t + \varphi)]$$

$$E_п = -\int_0^x F(x)dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 + \cos\mathbf{2}(\omega_0 t + \varphi)]$$

$$E = E_k + E_п = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

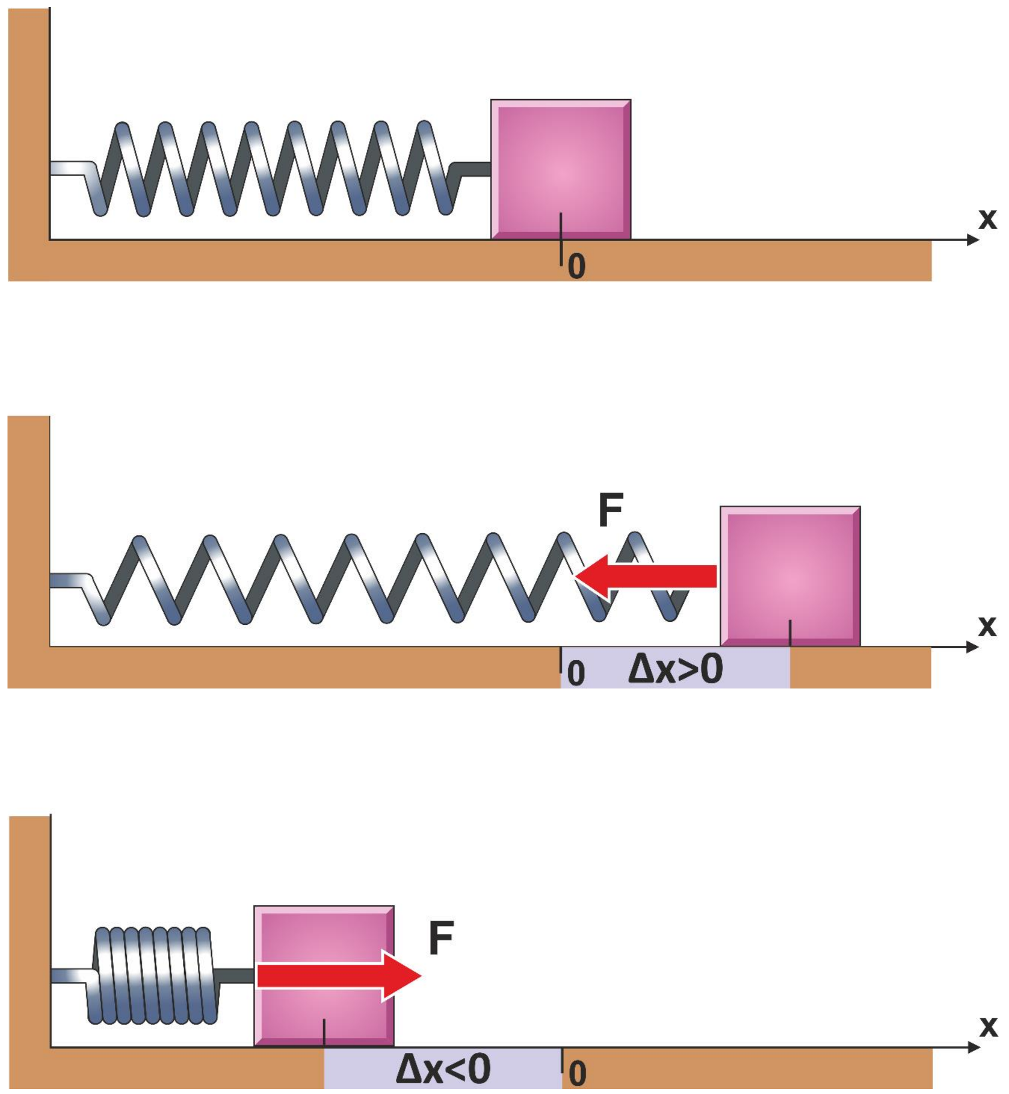
Пружинный маятник

$$ma = -kx$$

$$a + \frac{k}{m}x = 0$$

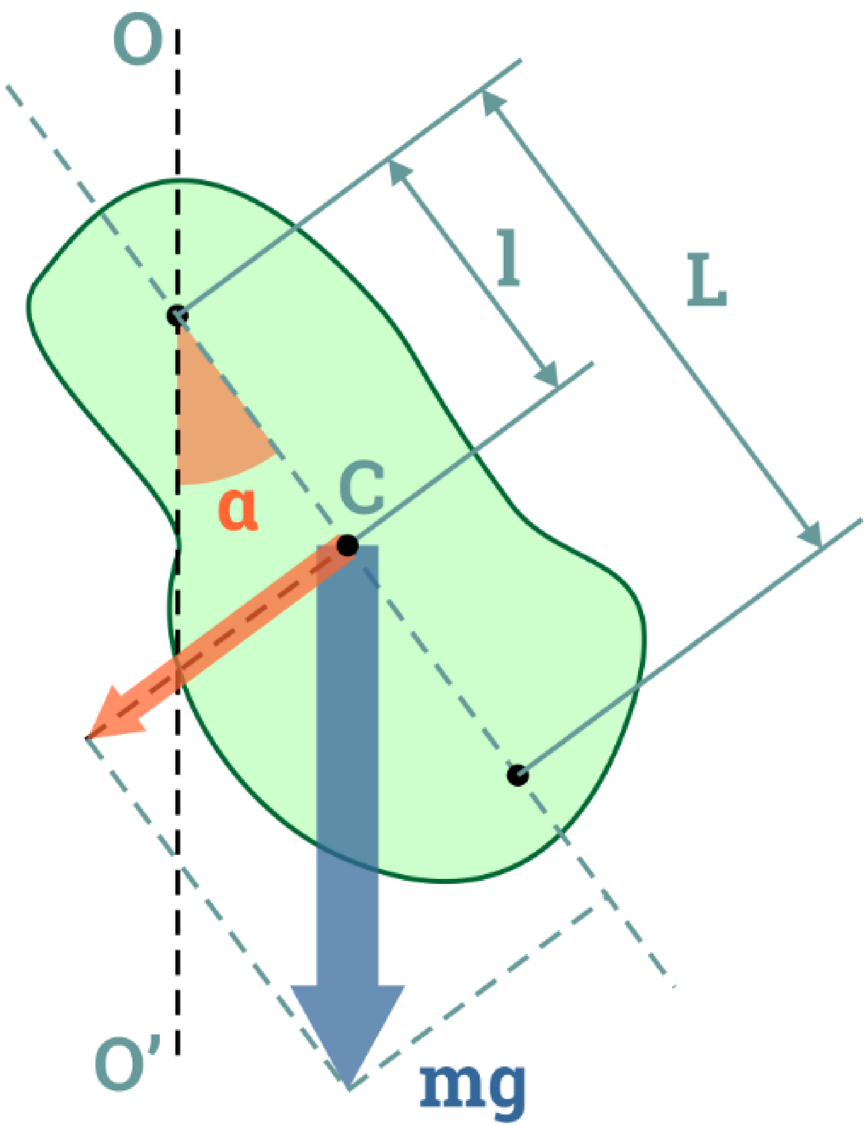
$$a = -\frac{k}{m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



Физический маятник

– это **твердое тело**, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку, не совпадающую с центром масс тела



Физический маятник

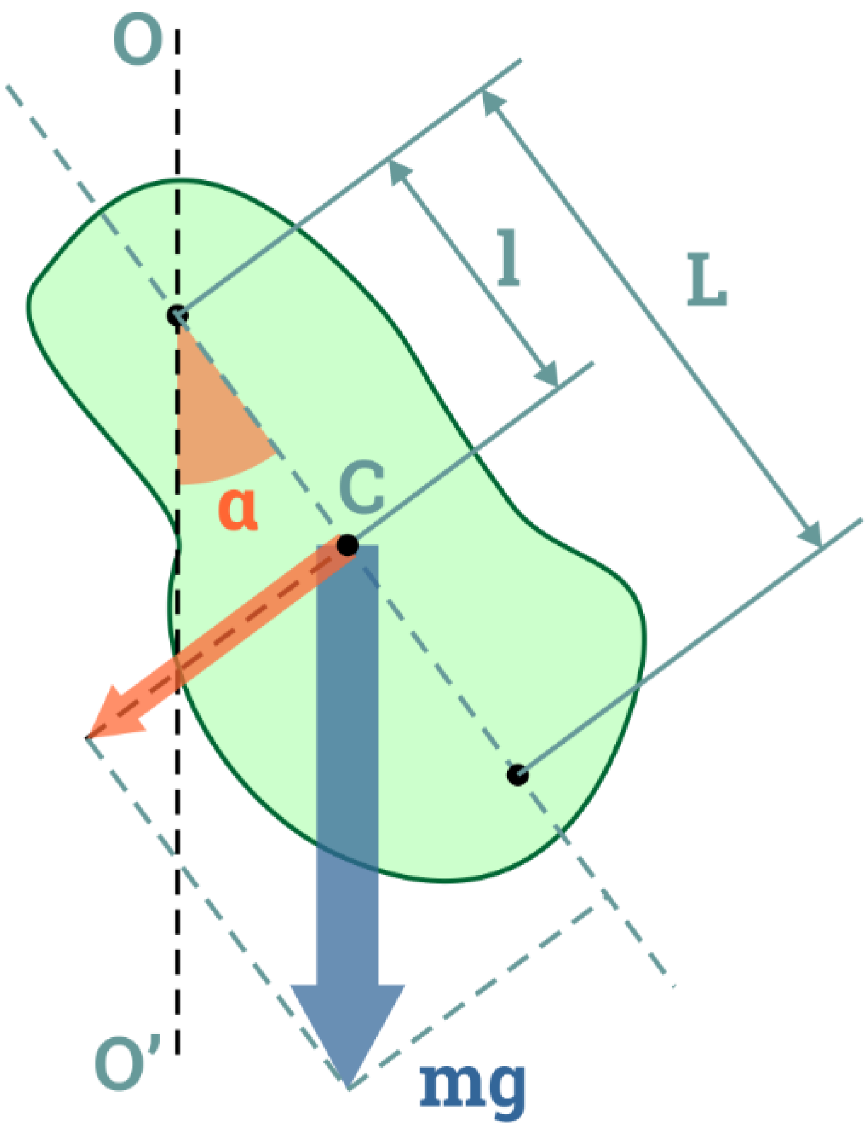
$$M = I\varepsilon = I\ddot{\alpha} = -mgl\sin\alpha$$

$$\approx -mgl \cdot \alpha$$

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$$

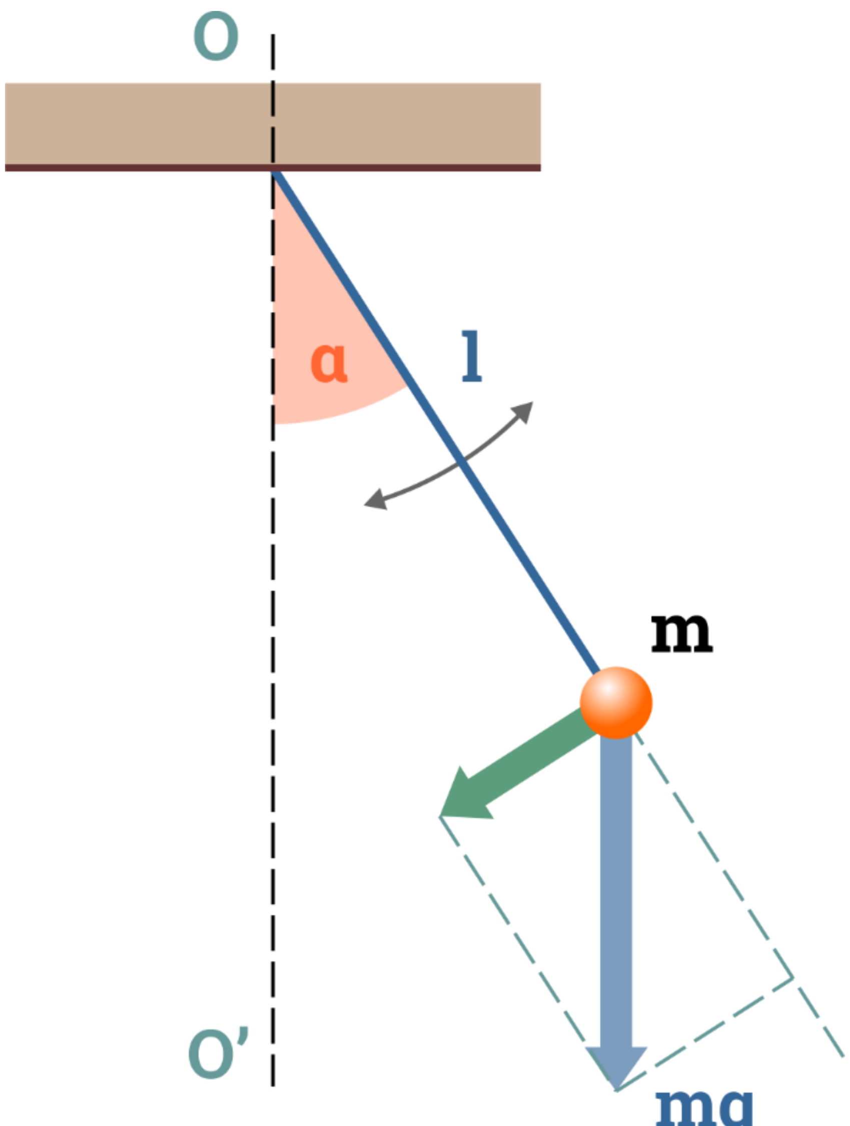
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



Математический маятник

– это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой *m*, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести



Математический маятник

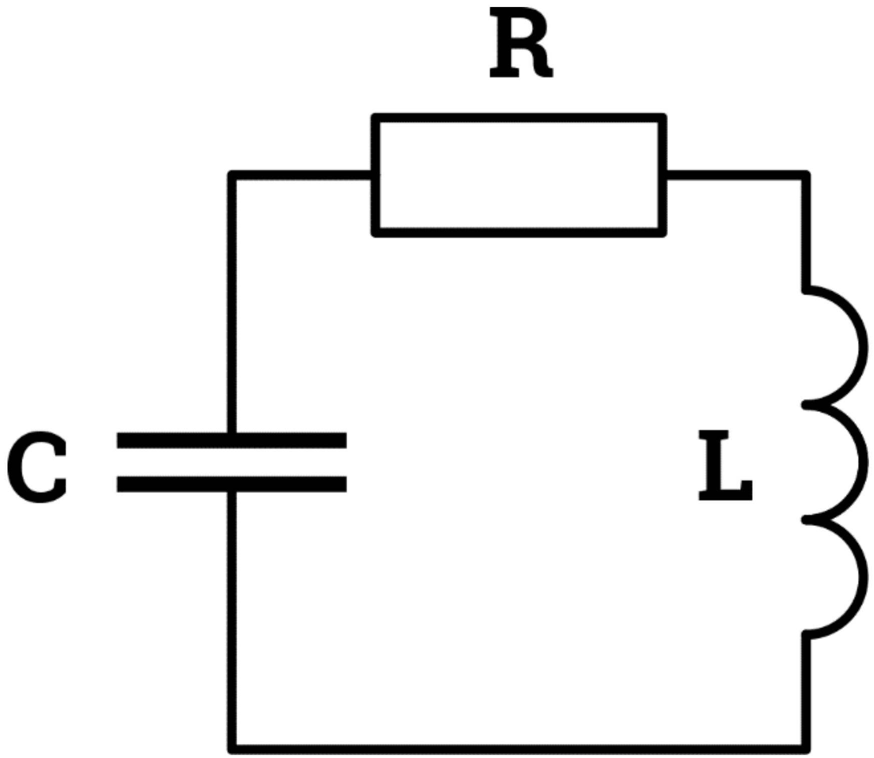
$$I = ml^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Приведенная длина физического маятника — это длина такого математического маятника, **период** колебаний которого **совпадает** с периодом колебаний данного физического маятника

Колебательный контур

– цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R

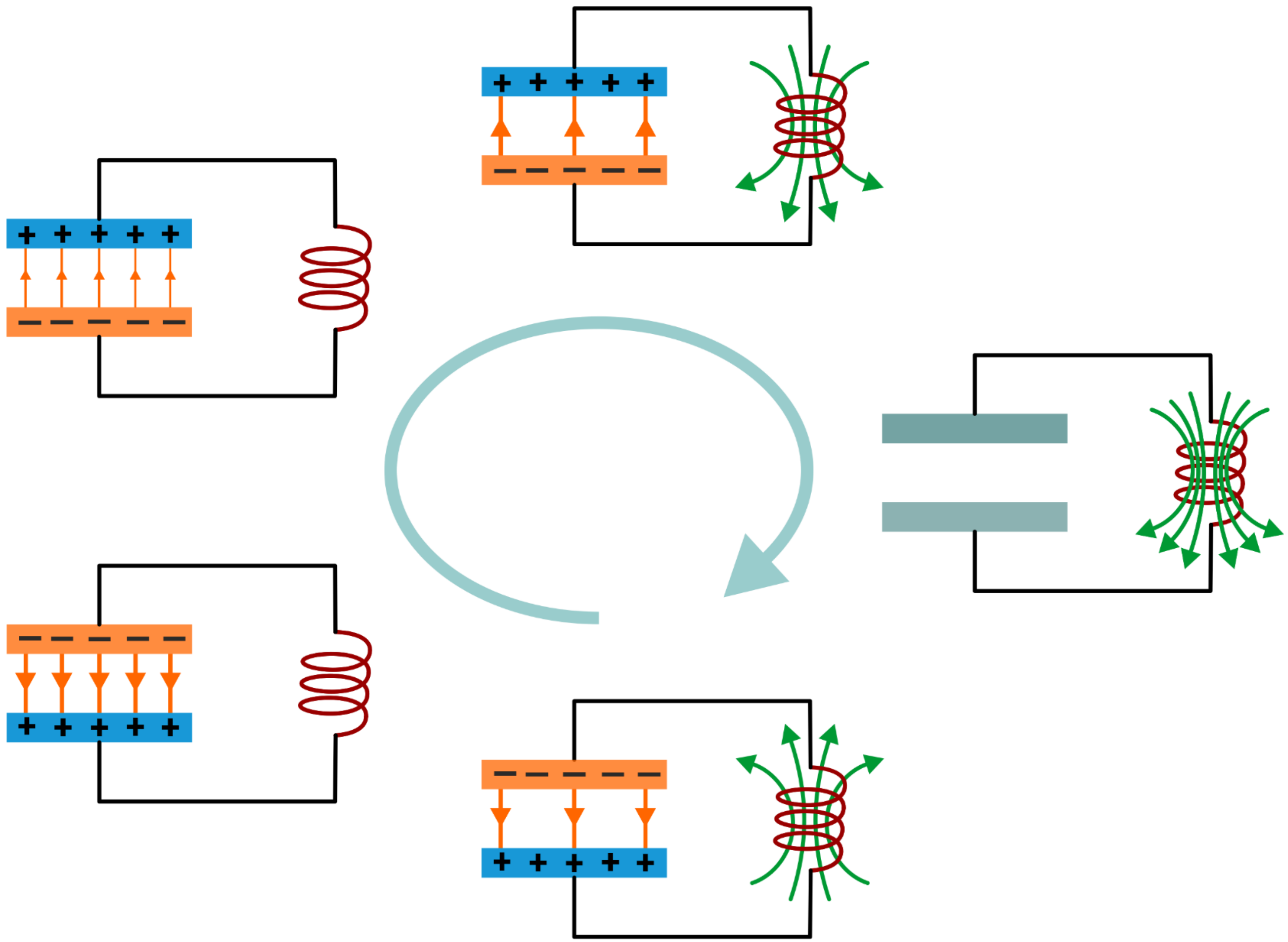


Уравнение электромагнитных колебаний:

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

Колебательный контур



Колебательный контур

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0$$

$$L\ddot{q} + \dot{q}R + \frac{q}{C} = 0$$

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\boldsymbol{q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$I = \dot{q} = -q_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\boldsymbol{I = I_m\, cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})}$$

$$\boldsymbol{U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} = U_m\, cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

Свободные затухающие колебания

Затухающие колебания – колебания, амплитуды которых из-за **потерь энергии** реальной колебательной системой с течением времени уменьшаются

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

δ – коэффициент затухания

ω_0 – собственная частота колебательной системы

Свободные затухающие колебания

$S = e^{-\delta t} u$

$\ddot{u} + (\omega_0^2 - \delta^2) u = 0$

$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$

$u = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Уравнение затухающих колебаний

$\boldsymbol{S = A_0 e^{-\delta t} \, cos(\omega_0 t + \varphi)}$

$A = A_0 e^{-\delta t}$ – амплитуда

Свободные затухающие колебания

Время релаксации

$$\tau = \frac{1}{\delta}$$

–промежуток времени в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в $\boldsymbol{e}$ раз

Свободные затухающие колебания

Декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$$

Логарифмический декремент затухания

$$\vartheta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в **е** раз

Свободные затухающие колебания

Добротность

$$Q = \frac{\pi}{\vartheta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Добротность Q характеризует резонансные свойства колебательной системы

Затухающие колебания пружинного маятника

$$F_{\text{тр}} = -ru = -r\dot{x}$$

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \delta = \frac{r}{2m}$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\sqrt{km}}{r}$$

Затухающие колебания в электрическом колебательном контуре

Дифференциальное уравнение колебаний

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0$$

Уравнение колебаний

$$q = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Вынужденные колебания

– колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы или внешней периодически изменяющейся ЭДС

$$X = X_0 \cos(\omega_{\text{внеш}} t + \varphi)$$

Механические колебания $X_0 = \frac{F_0}{m}$

Электромагнитные колебания $X_0 = \frac{U_0}{L}$

Вынужденные колебания

$$\ddot{S} + 2\delta\dot{S} + \omega_0^2 S = X_0 \cos(\omega_{\text{внеш}} t + \varphi)$$

Общее решение ОДУ $\quad S = S_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$

Частное решение $\quad S = S_0 e^{ikt}$

$$S_0 e^{kt}(-k^2 + 2i\delta k + \omega_0^2) = X_0 e^{i(\omega_{\text{внеш}} t)}$$

$$k = \omega_{\text{внеш}}$$

Вынужденные колебания

$$S = S_0 e^{ikt} = S_0 e^{i\omega_{\text{внеш}} t} = A e^{i\omega_{\text{внеш}} t} e^{-i\varphi} = A e^{i(\omega_{\text{внеш}} t - \varphi)}$$

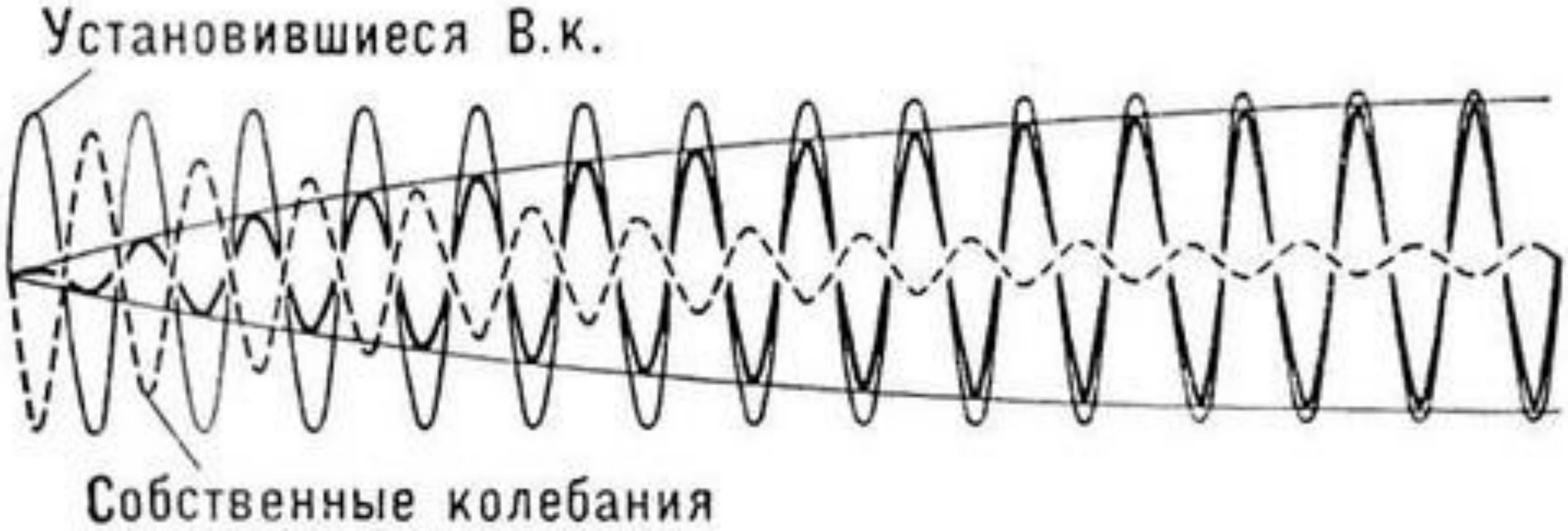
$$S_0 = A\, e^{-i\varphi}$$

$$A = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{внеш}}^2)^2 + 4\delta^2 \omega_{\text{внеш}}^2}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\delta\omega_{\text{внеш}}}{\omega_0^2 - \omega_{\text{внеш}}^2}\right)$$

Вынужденные колебания

$$S = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{внеш}}^2)^2 + 4\delta^2\omega_{\text{внеш}}^2}} \cos(\omega_{\text{внеш}} t - \varphi)$$



Резонанс

– резкое увеличение амплитуды результирующих колебаний при приближении частоты внешней вынуждающей силы к собственной частоте колебательной системы

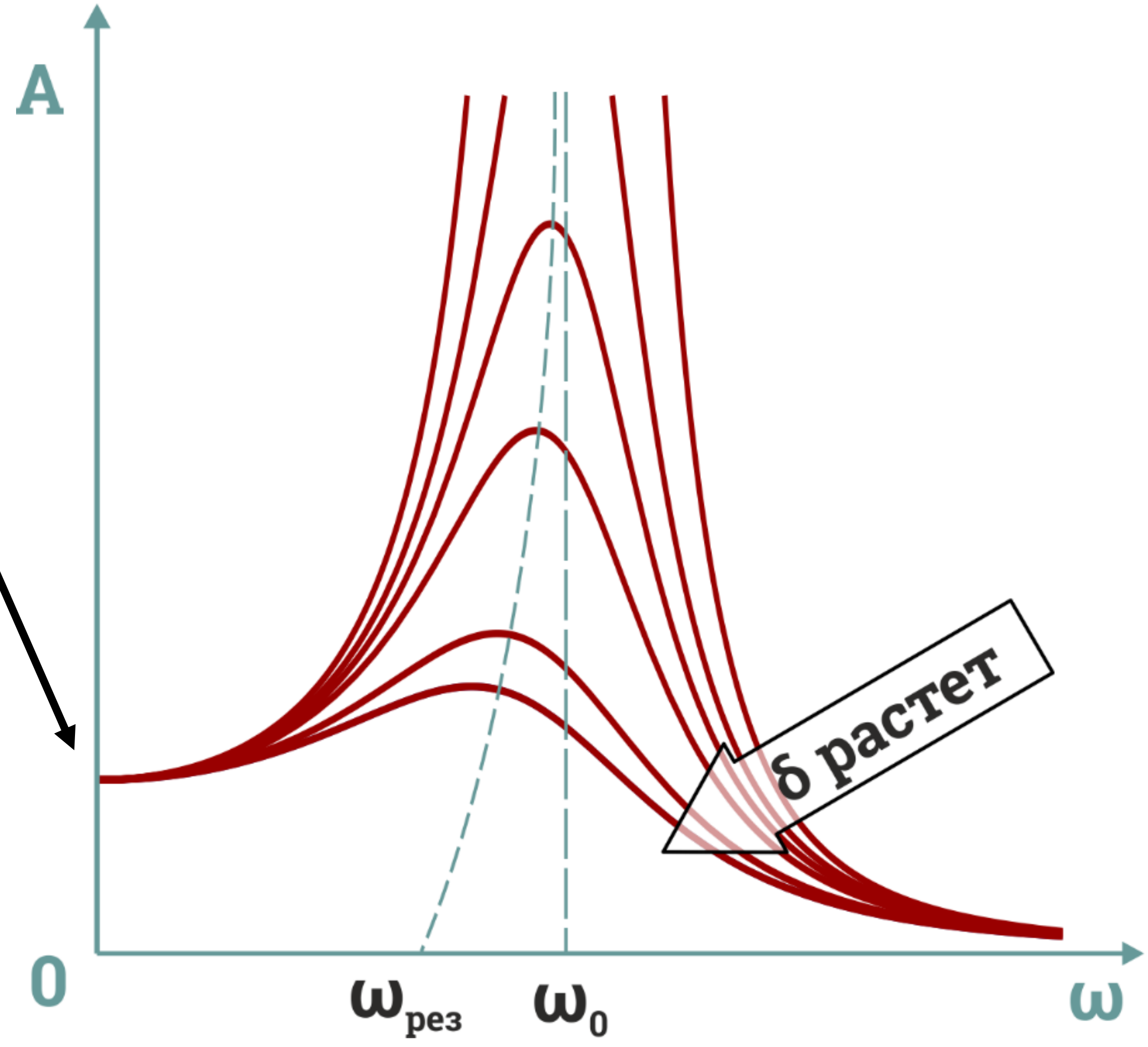
Резонанс

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Статическое отклонение $\frac{X_0}{\omega_0^2}$

$$A_{\text{рез}} = \frac{X_0}{2\delta\omega_0} = Q\frac{X_0}{\omega_0^2}$$

Добротность Q характеризует резонансные свойства колебательной системы



Колебания

Свободные незатухающие

$$\frac{d^2S}{dt^2} - \omega_0^2 S = 0$$

Свободные затухающие

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

Вынужденные

$$\ddot{S} + 2\delta\dot{S} + \omega_0^2 S = X_0 \cos(\omega_{\text{внеш}} t + \varphi)$$

Волны

Волновым процессом (или **волной**) – процесс распространения колебаний в сплошной среде называется

Основным свойством всех волн, независимо от их природы, является **перенос энергии без переноса вещества**

Волны

- **Упругие**
- **Электромагнитные**
- **Волны на поверхности жидкости**

Упругими (или **механическими**) волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде

Волны

В **продольных волнах** частицы среды колеблются в направлении распространения волны, в **поперечных** — в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны

Продольные волны возникают **деформации сжатия и растяжения**, т. е. твердых, жидких и газообразных телах

Поперечные волны – **при деформации сдвига**, т. е. в твердых телах

Волны

Волновой фронт – геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t

Волновой поверхность – геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе

- Сферическая
- Плоская

Упругие волны

Упругая волна называется **гармонической**, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими

Длина волны λ – расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе

Длина волны равна тому расстоянию, на которое распространяется определенная фаза колебания за период

$$\lambda = v \cdot T$$

Уравнение бегущей волны

Бегущими волнами называются волны, которые переносят в пространстве энергию.

Перенос энергии волнами количественно характеризуется **вектором плотности потока энергии.**

Этот вектор для упругих волн называется **вектором Умова**

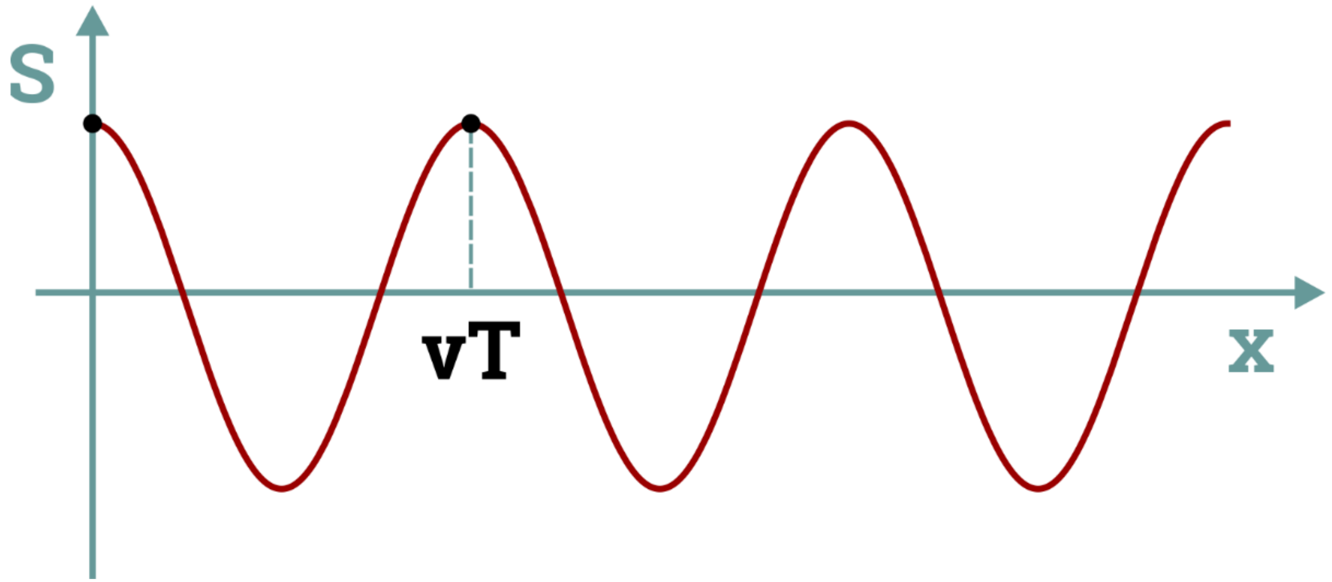
Уравнение бегущей волны

$$S(x,t) = A\cos[\omega(t-\tau)+\varphi_0] = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right]$$

$$S(x,t) = A\cos[\omega t - \boldsymbol{k}x + \varphi_0]$$

Волновое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$$



Фазовая скорость

– скорость перемещения фазы волны

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0 = const$$

$$dt - \frac{1}{v}dx = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$ – фазовая скорость

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

$$\Delta S = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

Оператор Лапласа (лапласиан)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Принцип суперпозиции

При распространении в линейной среде нескольких волн **каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют**,

а **результирующее смещение** частицы среды в любой момент времени **равно геометрической сумме смещений**, которые получают частицы, участвуя в каждом из слагающих волновых процессов

Групповая скорость

Волновым пакетом называется суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, занимающая в каждый момент времени ограниченную область пространства

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

Стоячие волны

– это волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами, а в случае поперечных волн и одинаковой поляризацией

$$\begin{cases} S_1 = A\cos(\omega t - kx) \\ S_2 = A\cos(\omega t + kx) \end{cases}$$

$$S = S_1 + S_2 = 2A\cos kx \cos \omega t = 2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos \omega t$$

Стоячие волны

Пучности стоячей волны – точки, в которых амплитуда колебаний максимальна $A_{\text{ст}} = 2A$

$$x_{\text{пуч}} = \pm m\frac{\lambda}{2}$$

Узлы стоячей волны – точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю $A_{\text{ст}} = 0$

$$x_{\text{узл}} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$$