



Динамика
вращательного движения

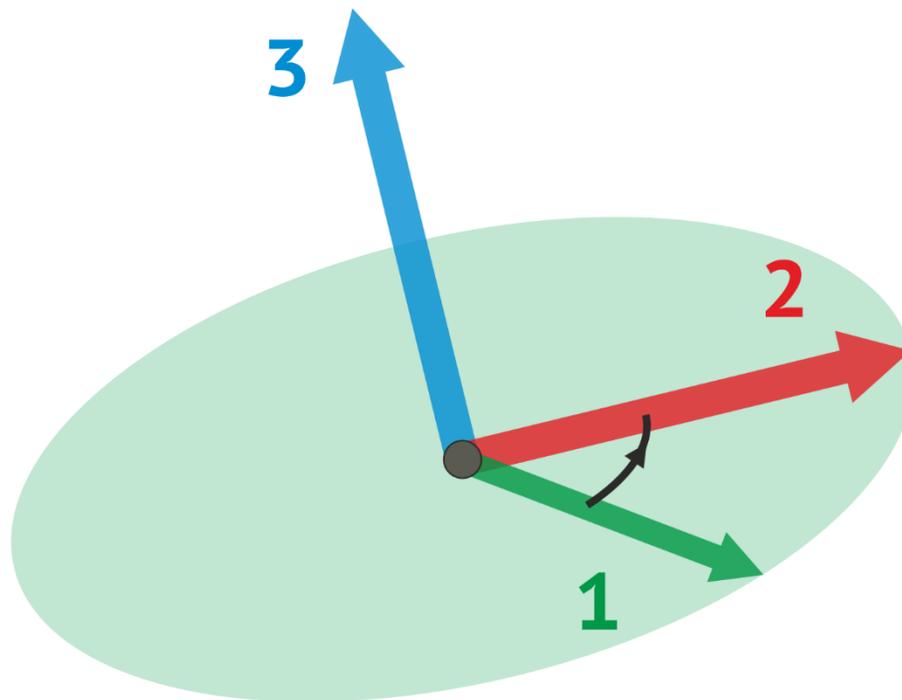
План

- Момент импульса частицы
- Момент силы
- Уравнение моментов
- Собственный момент импульса
- Момент инерции
- Кинетическая энергия вращающегося тела
- Связь динамики поступательного и вращательного движения

Правило правого винта

Если смотреть из конца 3-го вектора, то **наикратчайший** поворот от 1-го вектора ко 2-му будет происходить **против** часовой стрелки

$$\mathbf{3} = [\mathbf{1}, \mathbf{2}]$$



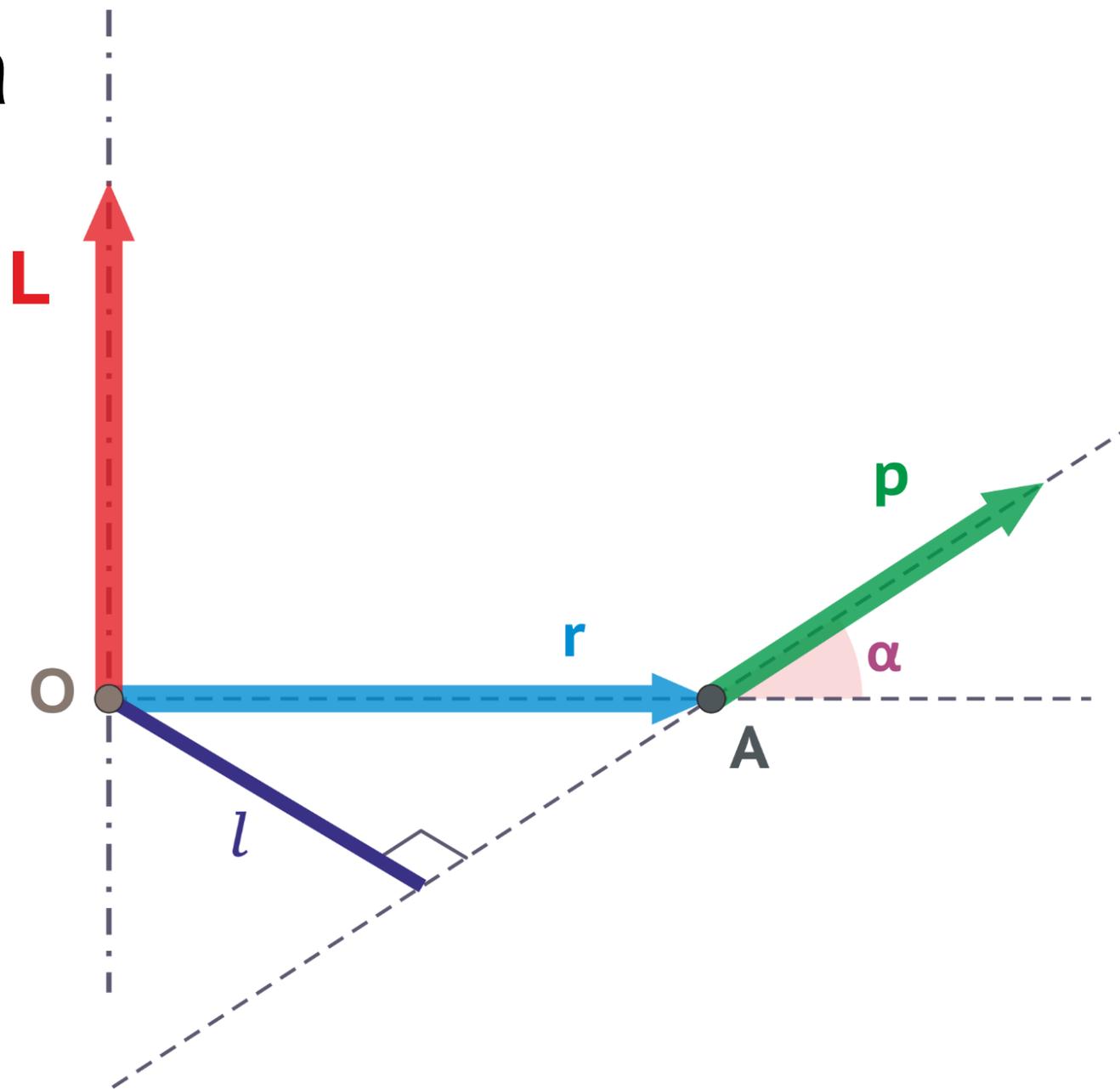
Момент импульса

— вектор L , равный
векторному произведению
векторов r и p :

$$L = [r, P]$$

$$L = r \cdot p \cdot \sin \alpha = l \cdot p$$

$$L = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \right]$$



Момент силы

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}, \mathbf{p}] = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{p} \right] + \left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]$$

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{p} \right] \equiv 0 \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

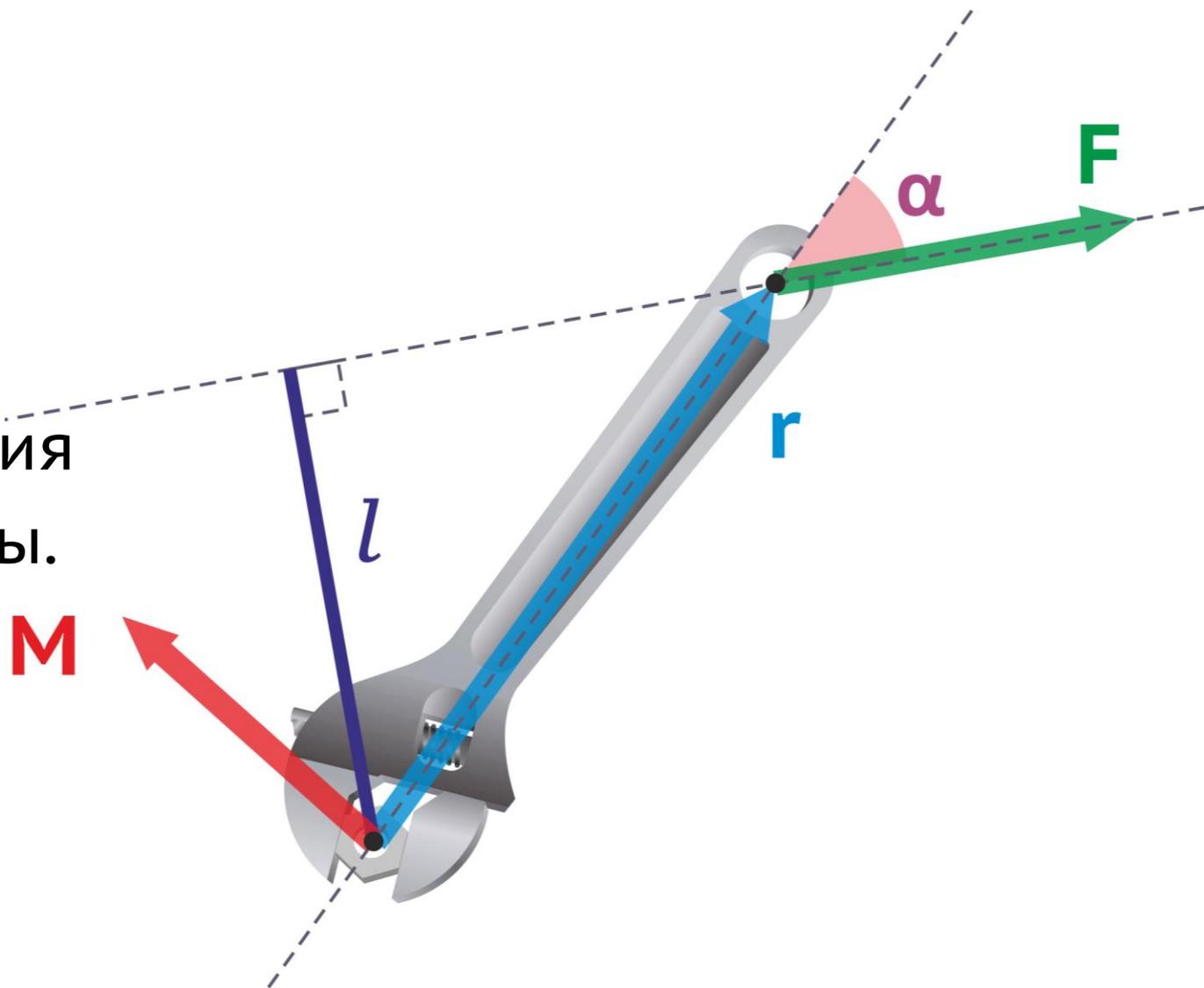
$$\frac{dL}{dt} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]$$

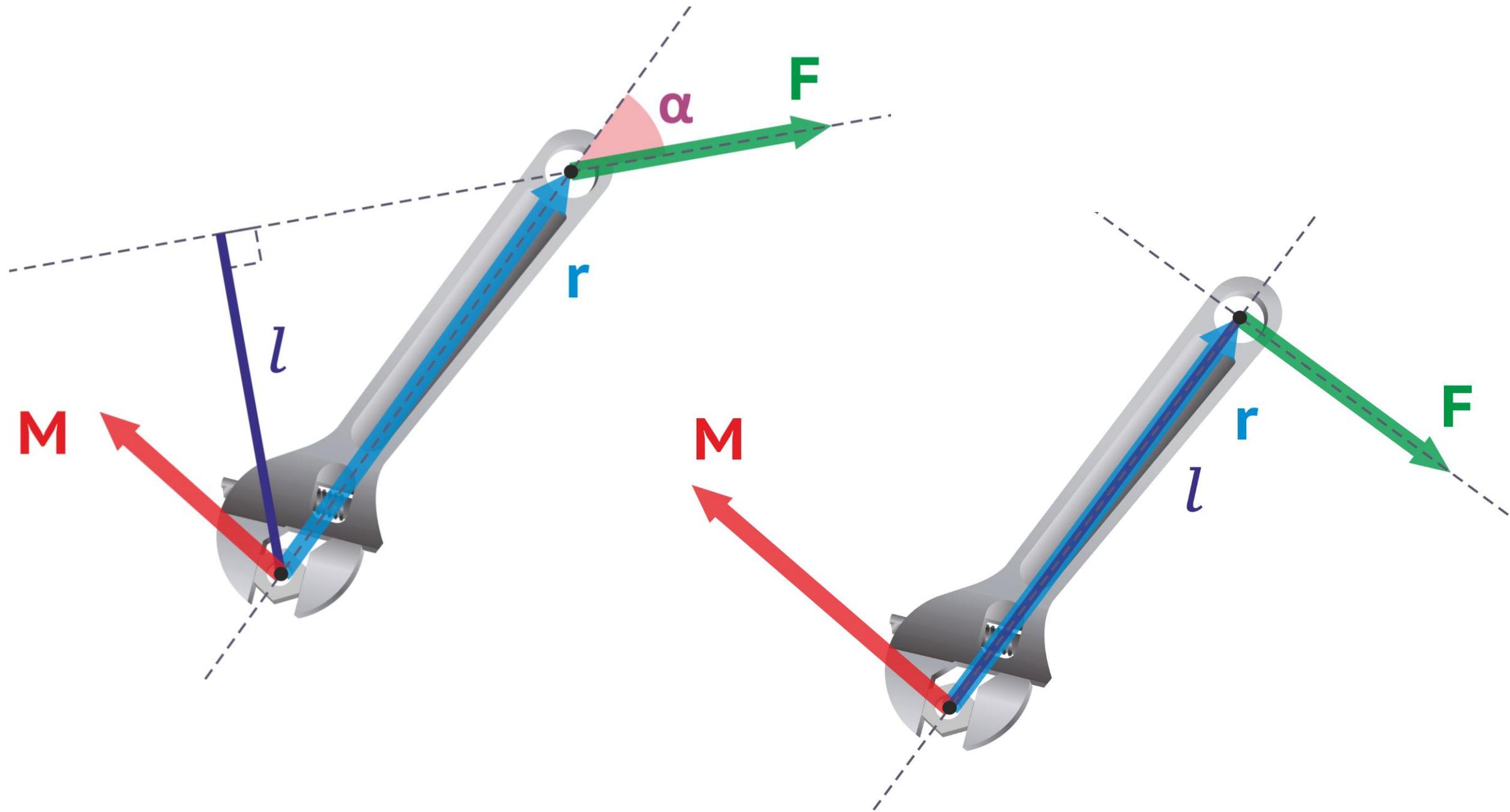
Момент силы

– *векторная* физическая величина, равная произведению радиус-вектора \mathbf{r} точки приложения силы на вектор \mathbf{F} этой силы.

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]$$

$$M = r \cdot F \sin \alpha = l \cdot F$$





Уравнение моментов

Производная по времени от момента импульса L частицы относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета равна моменту равнодействующей силы M относительно той же точки O :

$$\frac{dL}{dt} = M$$

$$\frac{dP}{dt} = F \text{ второй з. Ньютона}$$

$$L_2 - L_1 = \int_{t_1}^{t_2} M dt$$

Уравнение моментов (5) позволяет решить две задачи:

- Найти момент силы \mathbf{M} относительно интересующей нас точки O в любой момент времени t , если известна зависимость от времени момента импульса $\mathbf{L}(t)$ частицы относительно той же точки;
- Определить приращение момента импульса частицы $\Delta\mathbf{L}$ относительно точки O за любой промежуток времени, если известна зависимость от времени момента силы $\mathbf{M}(t)$, действующего на эту частицу относительно той же точки O .

Собственный момент импульса

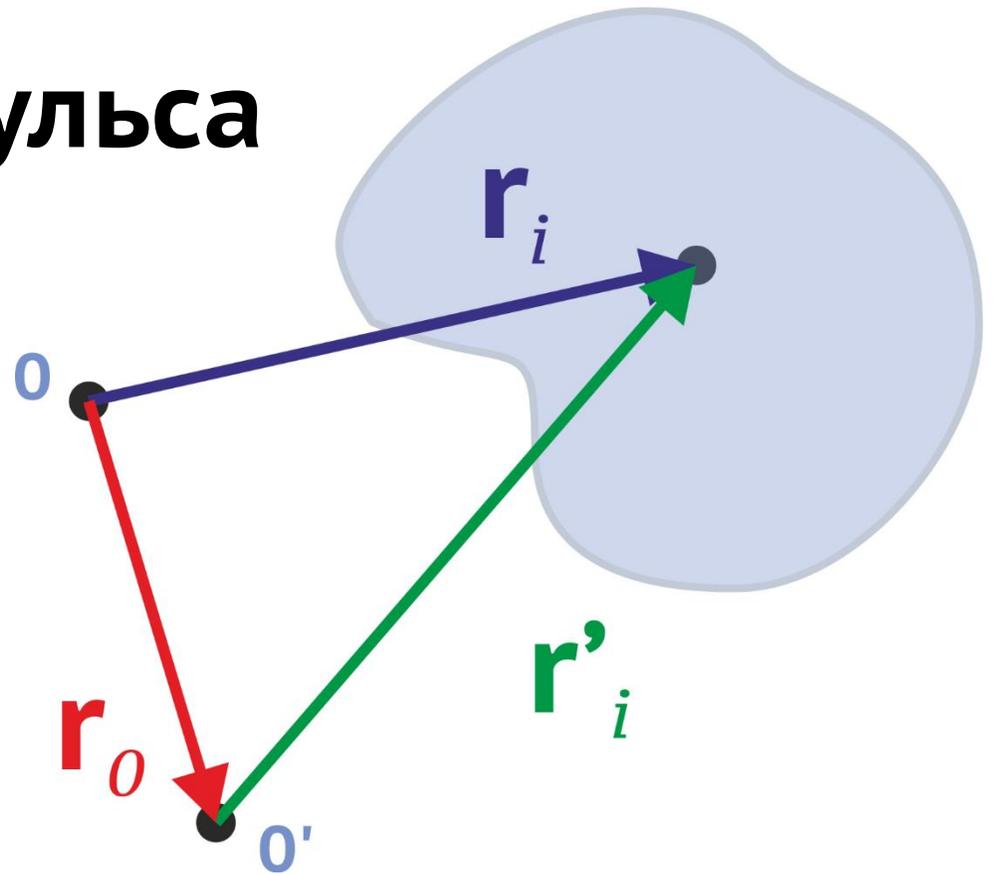
M – суммарный момент сил относительно точки O ,

M' – относительно точки O' , радиус-вектор которой r_0

$$r_i = r'_i + r_0$$

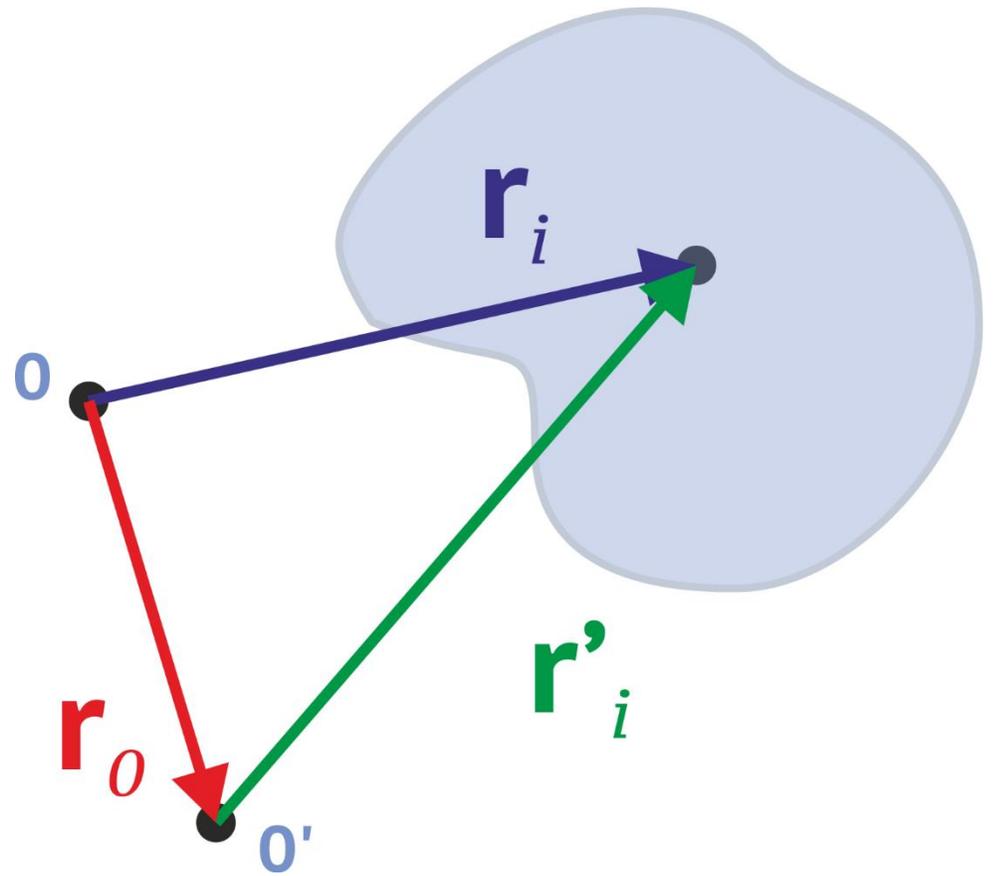
$$M = \sum [r_i, F_i] = \sum [r'_i, F_i] + \sum [r_0, F_i] = M' + [r_0, F]$$

$$F = \sum F_i$$

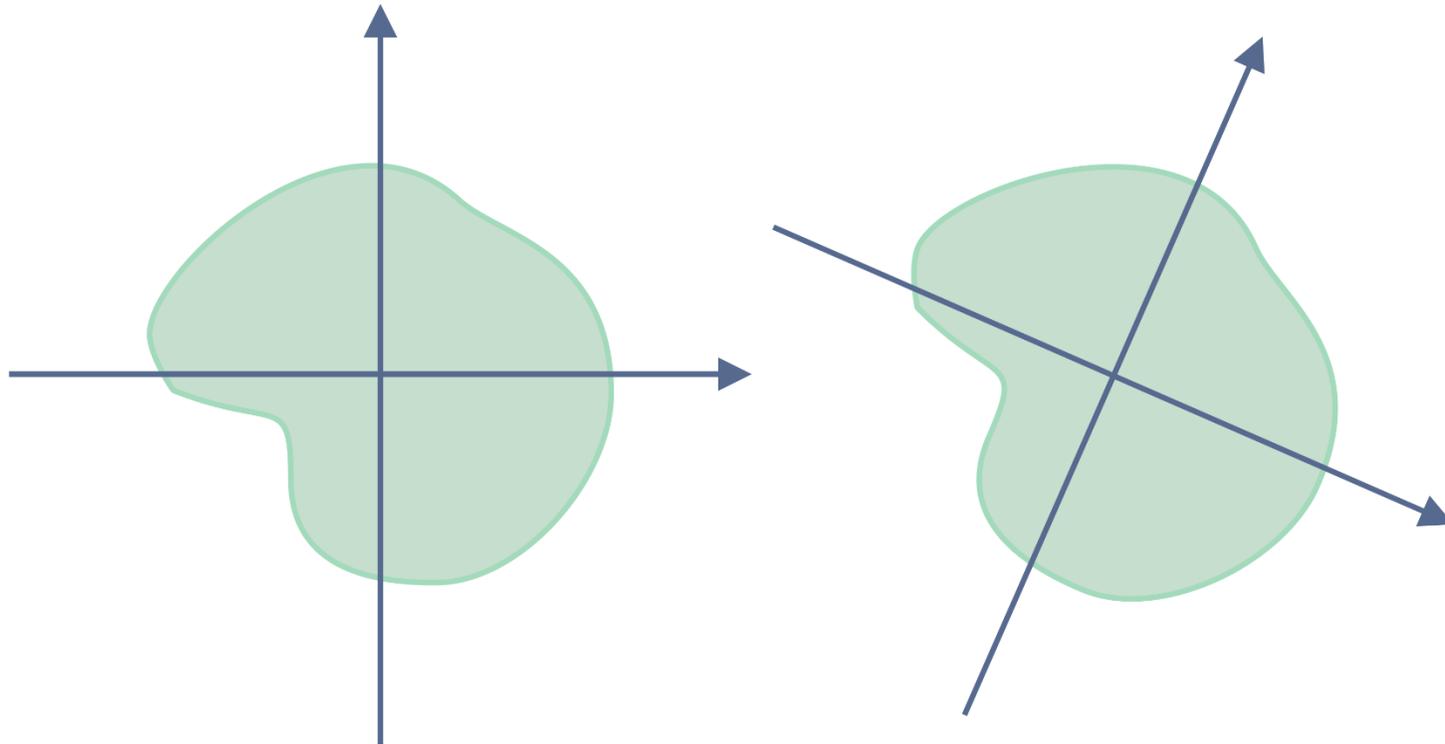


$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{r}_0, \mathbf{F}]$$

Если $\mathbf{F} = 0$, то суммарный момент внешних сил не зависит от выбора точки, относительно которой его определяют



C-система – это система отсчета, жестко связанная с центром масс системы частиц и перемещающаяся поступательно по отношению к инерциальным системам



$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{вз/дейст}} + \mathbf{F}_{\text{инерц}} = 0$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}'$$

В С-системе суммарный момент всех внешних сил, включая силы инерции, не зависит от выбора точки О.

В С-системе суммарный момент сил инерции относительно центра инерции всегда равен нулю.

Собственный момент импульса

$$L = \sum [r_i, p_i] = \sum [r'_i, p_i] + \sum [r_0, p_i] = L' + [r_0, p]$$

В С-системе $p = 0$

В С-системе момент импульса системы частиц не зависит от выбора точки, относительно которой его определяют

Собственный момент импульса системы L_C — момент импульса системы в С-системе

Собственный момент импульса

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_C$$

$$\mathbf{L} = \sum [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}_i] = \sum [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}'_i] + \sum [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{V}_C] = L_C + [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_C]$$

Момент импульса системы частиц складывается из ее собственного момента импульса и момента , обусловленного движением системы частиц как целого

Собственный момент импульса

$$\frac{dL_c}{dt} = M_{\text{вз/дейст}}$$

Производная по времени от собственного момента импульса системы равна суммарному моменту всех внешних сил взаимодействия относительно центра инерции данной системы.

Момент инерции

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$L_i = \boldsymbol{r}_i \cdot m_i \cdot \boldsymbol{v}_i = m_i \cdot \boldsymbol{r}_i^2 \cdot \boldsymbol{\omega}_i$$

$$L = \sum L_i = \sum m_i \cdot \boldsymbol{r}_i^2 \cdot \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega} \sum m_i \cdot \boldsymbol{r}_i^2 = \boldsymbol{\omega} \cdot I$$

$$I = \sum m_i \cdot \boldsymbol{r}_i^2$$

Момент инерции

– величина, равная сумме произведений элементарных масс тела на квадрат их расстояний от оси вращения.

$$I = \sum m_i \cdot r_i^2$$

Величина аддитивная

$$I = I_1 + I_2 + \dots$$

$$I = \int r^2 dm = \int \rho dV$$

Моменты инерции однородных тел

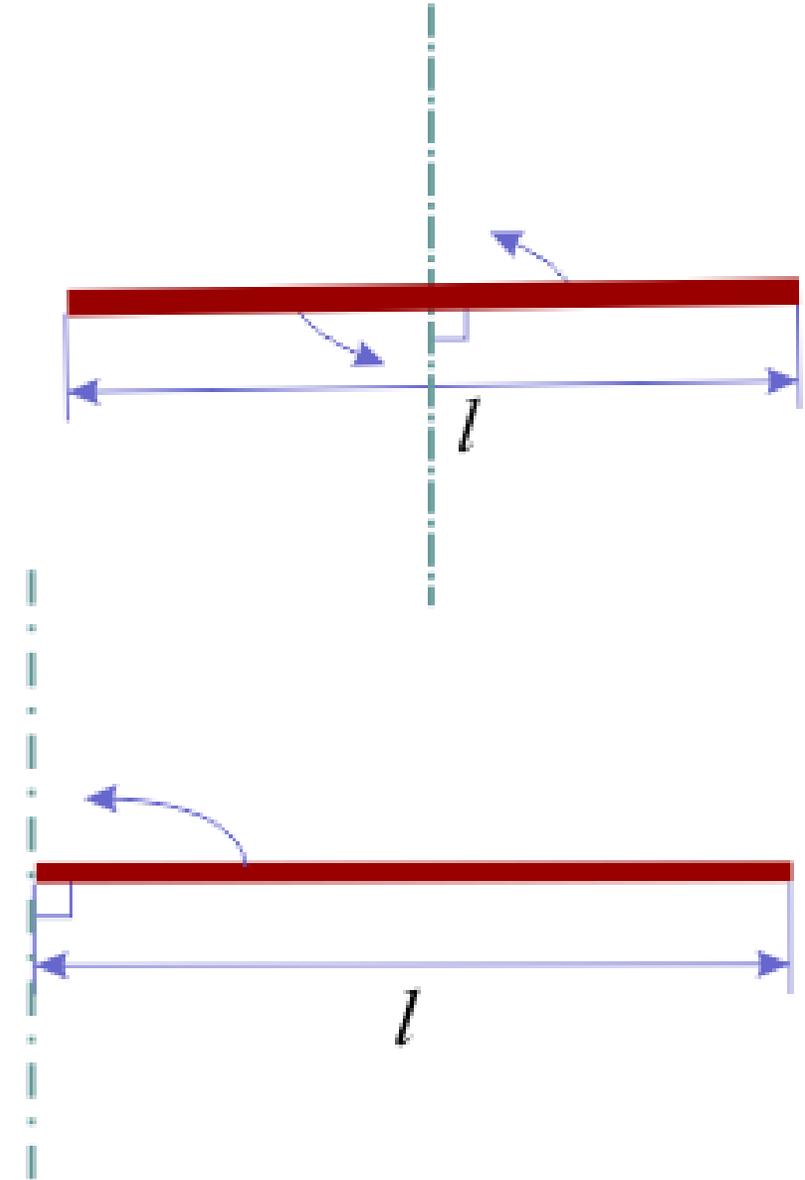
Тонкий стержень длиной l

Перпендикулярно стержню и проходит через его середину

$$I = \frac{ml^2}{12}$$

Перпендикулярно стержню и проходит через его конец

$$I = \frac{ml^2}{3}$$

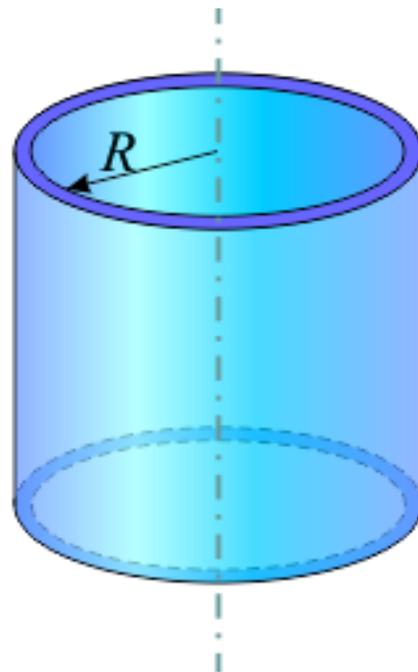


Моменты инерции однородных тел

Полый тонкостенный цилиндр
радиуса R

Совпадает с осью цилиндра

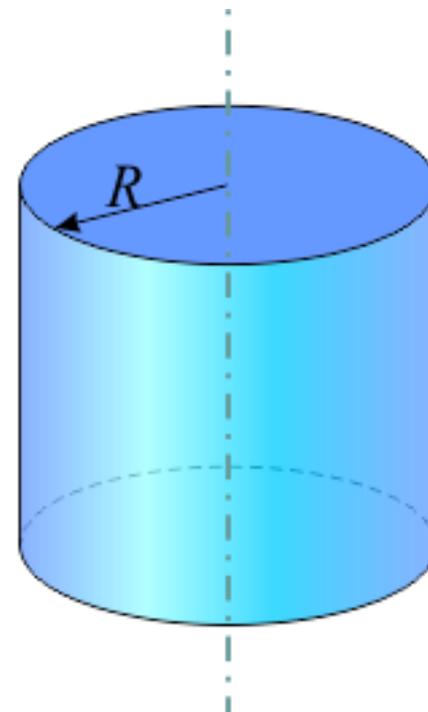
$$I = mR^2$$



Сплошной цилиндр радиуса R

Совпадает с осью цилиндра

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

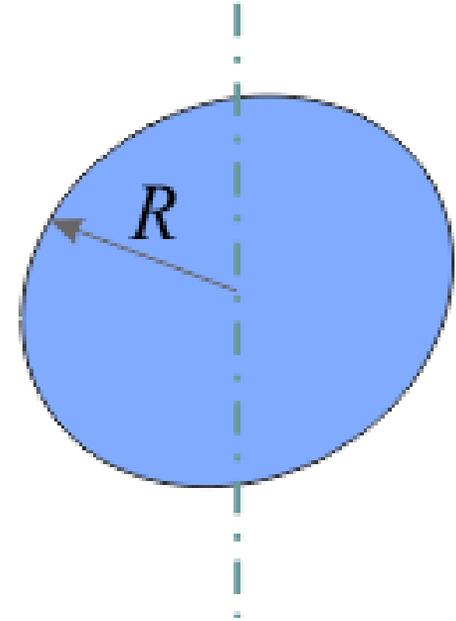


Моменты инерции однородных тел

Тонкий диск радиуса R

Совпадает с диаметром диска

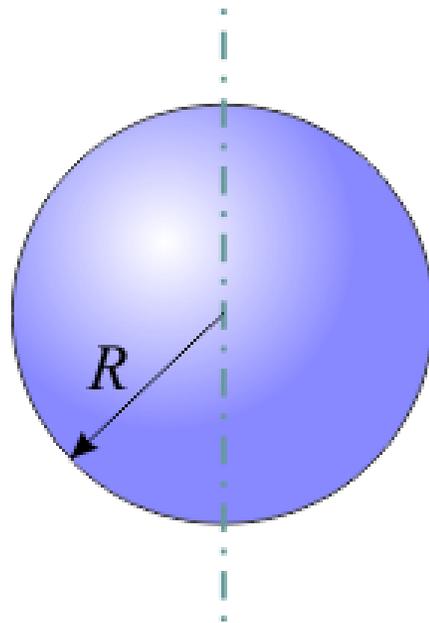
$$I = \frac{mR^2}{4}$$



Шар радиуса R

Проходит через центр шара

$$I = \frac{2mR^2}{5}$$

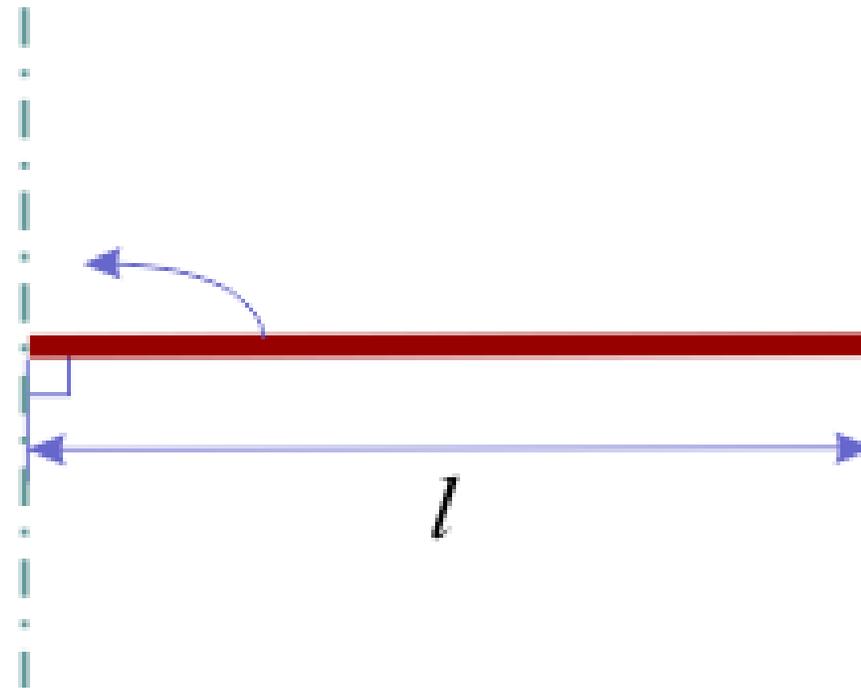


Теорема Штейнера

Момент инерции относительно произвольной оси z равен моменту инерции относительно оси параллельной данной и проходящей через центр масс тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями

$$I = I_C + m \cdot a^2$$

Пример



$$I = I_C + ma^2 = \frac{ml^2}{12} + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

Динамика вращательного движения

$$\frac{dL_c}{dt} = M_{\text{вз/дейст}}$$

$$I \cdot \varepsilon = M$$

момент инерции является аналогом массы для вращательного движения

Закон сохранения момента импульса

$$\frac{dL_C}{dt} = M_{\text{вз/дейст}}$$

$$M_{\text{вз/дейст}} = 0$$

$$\frac{dL_C}{dt} = 0$$

$$L_C = \text{const}$$

$$I\omega = \text{const}$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Кинетическая энергия вращающегося тела

$$E_K = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$E_K = \frac{mv^2}{2}$$

Движение

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ

Мера инертности тела

 m , масса I , момент инерции

Количество движения

 p , импульс L , момент импульса

Мера взаимодействия тел

 F , сила M , момент силы

Кинетическая энергия

$$E_K = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_K = \frac{I\omega^2}{2}$$

Основное уравнение
динамики

$$\frac{dp}{dt} = F$$

$$\frac{dL_C}{dt} = M$$