Лекция 2.1.
Закон кулона. Напряженность электростатического поля

План:

1. Электрический заряд
2. Закон Кулона
3. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля
4. Принцип суперпозиции. Поле диполя
5. Теорема Гаусса
6. Применение теоремы Гаусса к расчету полей
7. Циркуляция вектора напряженности

1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД

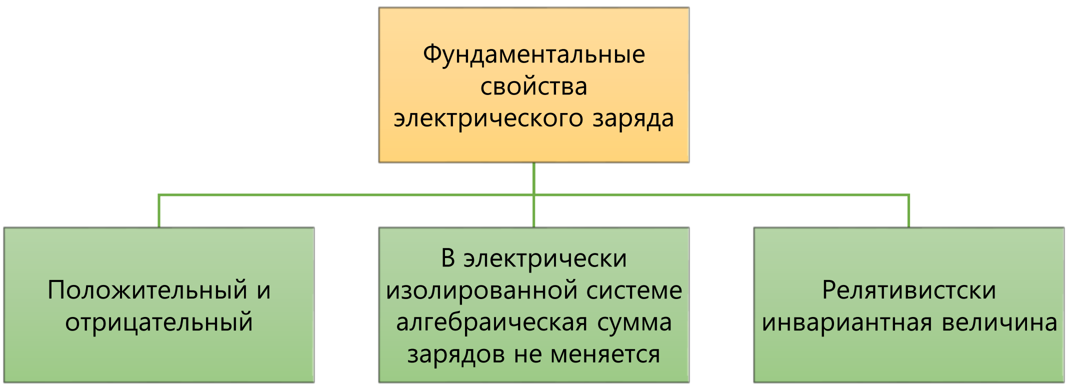
Еще в глубокой древности было известно, что янтарь, потертый о шерсть, притягивает легкие предметы. Английский врач Джильберт (конец XVI в.) назвал тела, способные после натирания притягивать легкие предметы, **наэлектризованными**. Сейчас мы говорим, что тела при этом *приобретают электрические заряды*. Несмотря на огромное разнообразие веществ в природе, существует только два типа электрических зарядов: заряды, подобные возникающим на стекле, потертом о кожу (их назвали положительными), и заряды, подобные возникающим на эбоните, потертом о мех (их назвали отрицательными), одноименные заряды друг от друга отталкиваются, разноименные – притягиваются.

В настоящее время известно, что в основе всего разнообразия явлений природы лежат **четыре фундаментальных взаимодействия** между частицами – *сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное*.

Каждый вид взаимодействия связывается с определенной характеристикой частицы. Например, гравитационное зависит от масс частиц, электромагнитное – от электрических зарядов.

Электрический заряд частицы является одной из основных, первичных ее характеристик и он имеет следующие фундаментальные свойства:

1. Существует в двух видах: положительный и отрицательный;
2. **Закон сохранения электрического заряда** (Майкл Фарадей, 1843):



В любой электрически изолированной системе алгебраическая сумма заряда не меняется

Все тела в природе способны электризоваться, т. е. приобретать электрический заряд. Электризация тел может осуществляться различными способами: соприкосновением (трением), электростатической индукцией и т. д.

Всякий процесс заряжения сводится к разделению зарядов, при котором на одном из тел (или части тела) появляется избыток положительного заряда, а на другом (или другой части тела) — избыток отрицательного заряда.

Общее количество зарядов обоих знаков, содержащихся в телах, не изменяется: эти заряды только перераспределяются между телами.

3. Электрический заряд — величина **релятивистски инвариантная**, т. е. не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от того, движется этот заряд или покоится.

Опытным путем (1910–1914) американский физик Роберт Эндрюс Милликен (1868–1953) показал, что электрический заряд **дискретен.**

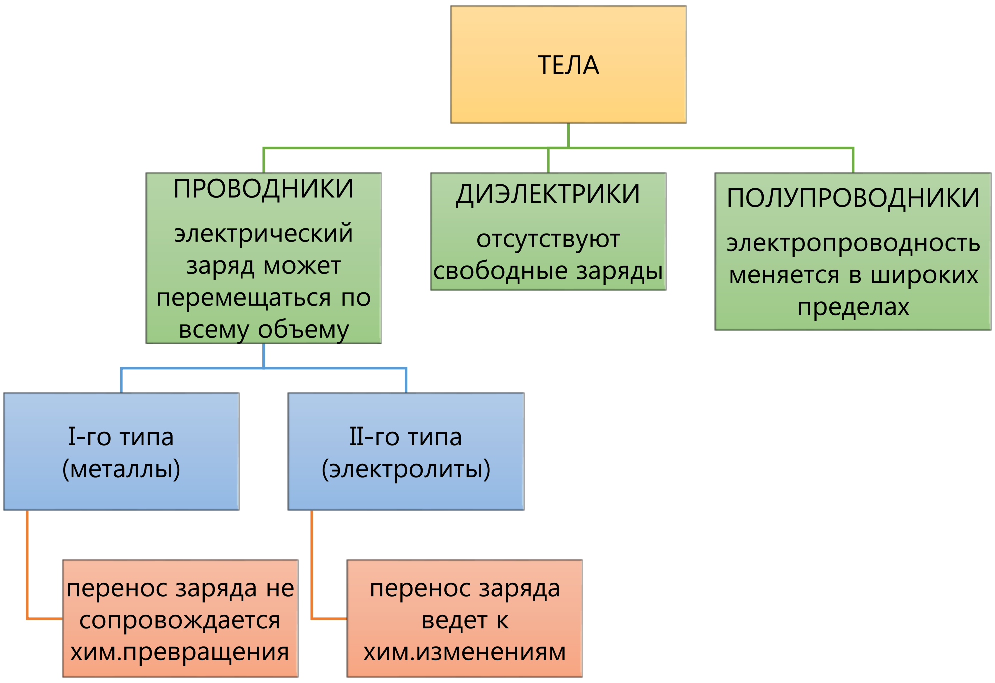
Заряд любого тела составляет целое кратное от **элементарного электрического заряда** e ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Кл*).

В зависимости от концентрации свободных зарядов тела делятся на проводники, диэлектрики и полупроводники.

Проводники — тела, в которых электрический заряд может перемещаться по всему его объему.

Единица электрического заряда — **кулон** (Кл) — электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А за время 1 с.

Электрон и протон являются соответственно носителями элементарных отрицательного и положительного зарядов.



Проводники делятся на две группы: 1) **проводники первого рода** (металлы) — перенос в них зарядов (свободных электронов) не сопровождается химическими превращениями; 2) **проводники второго рода** (например, расплавленные соли, растворы кислот) — перенос в них зарядов (положительных и отрицательных ионов) ведет к химическим изменениям.

Диэлектрики (например, стекло, пластмассы) — тела, в которых практически отсутствуют свободные заряды.

Полупроводники (например, германий, кремний) занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками.

Указанное деление тел является весьма условным, однако большое различие в них концентраций свободных зарядов обусловливает огромные качественные различия в их поведении и оправдывает поэтому деление тел на проводники, диэлектрики и полупроводники.

2. ЗАКОН КУЛОНА

Закон взаимодействия неподвижных точечных электрических зарядов установлен в 1785 г. Шарлем Огюстеном де Кулоном с помощью крутильных весов.

Шарль Огюсте́н де Куло́н (фр. Charles-Augustin de Coulomb, 14 июня 1736— 23 августа 1806) — французский военный инженер и учёный-физик, исследователь электромагнитных и механических явлений; член Парижской Академии наук

Точечным называется заряд, сосредоточенный на теле, линейные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, с которыми он взаимодействует.

Понятие точечного заряда, как и материальной точки, является физической абстракцией.

Закон Кулона: сила взаимодействия F между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними:

$$F = k\frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2},$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

Сила F направлена по прямой, соединяющей взаимодействующие заряды, т. е. является центральной, и соответствует притяжению ($F<0$) в случае разноименных зарядов и отталкиванию ($F>0$) в случае одноименных зарядов. Эта сила называется **кулоновской силой**.

В векторной форме закон Кулона имеет вид:

$$\mathbf{F}_{12} = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}_{12}}{r}, \qquad (1)$$

◄ **Закон Кулона**

где $\mathbf{F}_{12}$ – сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2;
$\mathbf{r}_{12}$ – радиус-вектор, соединяющий заряд q_2 с зарядом q_1;
$r = |\mathbf{r}_{12}|$ (**рис.1**).

На заряд q_2 со стороны заряда q_1 действует сила $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

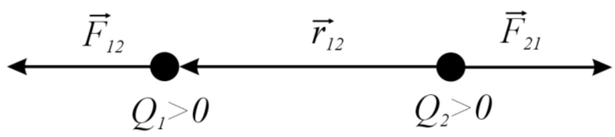


Рис.1.

В СИ коэффициент пропорциональности равен

$$k = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)}$$

Тогда закон Кулона запишется в окончательном виде:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2} \qquad (2)$$

◄ **Закон Кулона**

Величина ε_0 называется **электрической постоянной**; она относится к числу фундаментальных физических постоянных и равна

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\frac{Кл^2}{Н \cdot м^2} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\frac{Ф}{м}, \qquad (3)$$

◄ **Диэлектрическая постоянная**

где **фарад** (Ф) — единица электрической емкости.

Тогда

$$\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)} = 9 \cdot 10^9 \frac{м}{Ф}$$

3. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Если в пространство, окружающее электрический заряд, внести другой заряд, то на него будет действовать кулоновская сила; значит, в пространстве, окружающем электрические заряды, существует электрическое **силовое поле**.

Согласно представлениям современной физики, поле реально существует и наряду с веществом является одной из форм существования материи, посредством которого осуществляются определенные взаимодействия между макроскопическими телами или частицами, входящими в состав вещества. В данном случае говорят об электрическом поле – поле, посредством которого взаимодействуют электрические заряды.

Свойства электрического поля

- Материально, т.е. существует независимо от нас, от наших представлений о нем
- Порождается электрическим зарядом
- Обнаруживается по действию на электрических заряд
- Не имеет границ
- Распространяется в пространстве с конечной скоростью, равной скорости света

Мы будем рассматривать электрические поля, которые создаются неподвижными электрическими зарядами и называются **электростатическими**.

Для обнаружения и опытного исследования электростатического поля используется пробный точечный положительный заряд – такой заряд, который не искажает исследуемое поле (не вызывает перераспределения зарядов, создающие их поле). Если в поле, создаваемое зарядом q, поместить пробный заряд q_0, то на него действует сила $\mathbf{F}$, различная в разных точках поля, которая, согласно закону Кулона (2), пропорциональна пробному заряду q_0. Поэтому отношение $\frac{F}{q_0}$ не зависит от q_0 и характеризует электростатическое поле в той точке, где пробный заряд находится. Эта величина называется напряженностью и является силовой характеристикой электростатического поля.

Единица измерения напряженности электрического заряда **– вольт на метр**

$$E = \left[\frac{B}{м}\right]$$

Из формулы (4) следует, что единица напряженности электростатического поля — ньютон на кулон (*Н/Кл*): 1 *Н/Кл* — напряженность такого поля, которое на точечный заряд 1 *Кл* действует с силой в 1 *Н*; *1Н/Кл=1В/м*, где *В* (вольт) — единица потенциала электростатического поля.

Напряженность электростатического поля в данной точке есть физическая величина, определяемая силой, действующей на пробный единичный положительный заряд, помещенный в эту точку поля

◄ **Напряженность электрического поля**

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \qquad (4)$$

Как следует из формул (4) и (1), напряженность поля точечного заряда в вакууме

$$\mathbf{E} = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)}\frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad \text{или} \quad E = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)}\frac{q}{r^2} \qquad (5)$$

Направление вектора $\mathbf{E}$ совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд. Если поле создается положительным зарядом, то вектор $\mathbf{F}$ направлен вдоль радиус-вектора от заряда во внешнее пространство (отталкивание пробного положительного заряда); если поле создается отрицательным зарядом, то вектор $\mathbf{E}$ направлен к заряду (**рис.2**).

Графически электростатическое поле изображают с помощью **линий напряженности:**

Линии напряженности — линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\mathbf{E}$ (**рис.3**).

Линиям напряженности приписывается направление, совпадающее с направлением вектора напряженности.

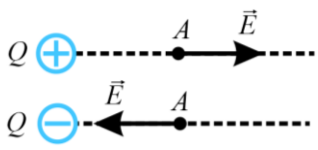


Рис.2

Так как в каждой данной точке пространства вектор напряженности имеет лишь одно направление, то линии напряженности никогда не пересекаются.

Для **однородного поля** (когда вектор напряженности в любой точке постоянен по величине и направлению) линии напряженности параллельны вектору напряженности.

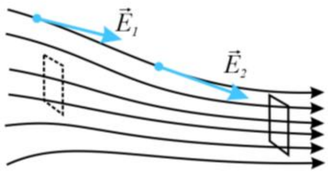


Рис.3 Линии напряженности неоднородного поля

Если поле создается точечным зарядом, то линии напряженности — радиальные прямые, выходящие из заряда, если он положителен (**рис.4а**), и входящие в него, если заряд отрицателен (**рис.4б**).

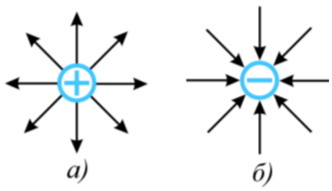


Рис.4

Вследствие большой наглядности графический способ представления электростатического поля широко применяется в электротехнике.

Чтобы с помощью линий напряженности можно было характеризовать не только направление, но и значение напряженности электростатического поля, условились проводить их с определенной густотой (**рис.3**). Число линий напряженности, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряженности, должно быть равно модулю вектора $\mathbf{E}$. Тогда число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку dS, нормаль $\mathbf{n}$ которой образует угол α с вектором $\mathbf{E}$, равно $EdS\cos\alpha = E_n dS$, где E_n – проекция вектора $\mathbf{E}$ на нормаль $\mathbf{n}$ к площадке dS (**рис.5**). Величина

$$d\Phi_E = E_n dS = \mathbf{E}d\mathbf{S}$$

называется **потоком вектора напряженности** через площадку dS.

◄ **Поток вектора напряженности**

Здесь $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$ – вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с направлением нормали $\mathbf{n}$ к площадке.

Выбор направления вектора $\mathbf{n}$ (а следовательно, и $d\mathbf{S}$) условен, так как его можно направить в любую сторону. Единица потока вектора напряженности электростатического поля – *1 В·м.*

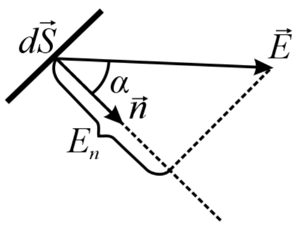


Рис.5. Расчет потока вектора напряженности

Для произвольной замкнутой поверхности S поток вектора $\mathbf{E}$ сквозь эту поверхность (где интеграл берется по замкнутой поверхности S)

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} \qquad (6)$$

Поток вектора $\mathbf{E}$ является алгебраической величиной: зависит не только от конфигурации поля $\mathbf{E}$, но и от выбора направления $\mathbf{n}$. Для замкнутых поверхностей за положительное направление нормали принимается внешняя нормаль, т. е. нормаль, направленная наружу области, охватываемой поверхностью.

4. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ. ПОЛЕ ДИПОЛЯ

Рассмотрим метод определения модуля и направления вектора напряженности $\mathbf{E}$ в каждой точке электростатического поля, создаваемого системой неподвижных зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Опыт показывает, что к кулоновским силам применим рассмотренный в механике принцип независимости действия сил, т. е. результирующая сила $\mathbf{F}$, действующая со стороны поля на пробный заряд q_0, равна векторной сумме сил F_i, приложенных к нему со стороны каждого из зарядов q_i:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \tag{7}$$

Согласно (7), $\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}$ и $\mathbf{F}_i = q_0 \mathbf{E}_i$, где $\mathbf{E}$ – напряженность результирующего поля, а $\mathbf{E}_i$ – напряженность поля, создаваемого зарядом q_i. Подставляя последние выражения в (7), получаем

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{8}$$

◄ **Принцип суперпозиций полей**

Формула (8) выражает **принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей:**

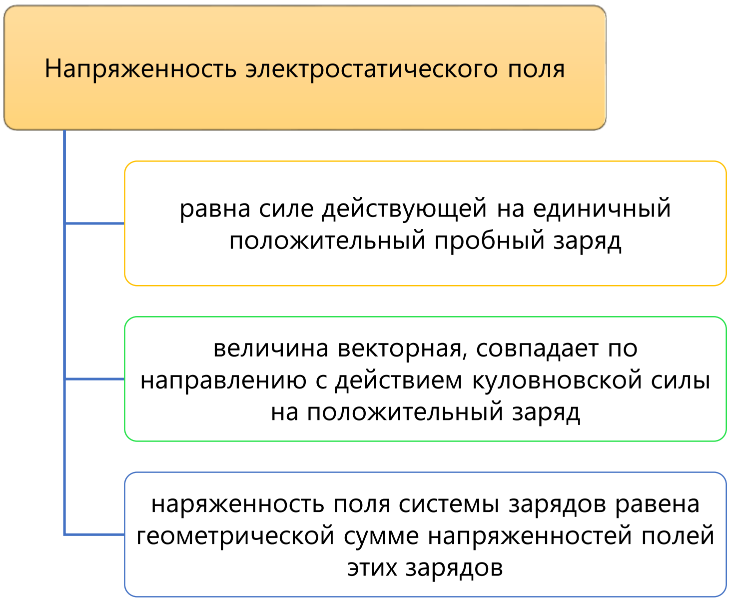
Напряженность $\mathbf{E}$ результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

Принцип суперпозиции позволяет рассчитать электростатические поля любой системы неподвижных зарядов, поскольку если заряды не точечные, то их можно всегда свести к совокупности точечных зарядов.

В истории развития физики имела место борьба двух теорий: дальнодействия и близкодействия. В теории **дальнодействия** принимается, что электрические явления определяются мгновенным взаимодействием зарядов на любых расстояниях.

Согласно теории **близкодействия**, все электрические явления определяются изменениями полей зарядов, причем эти изменения распространяются в пространстве от точки к точке с конечной скоростью.

Применительно к электростатическим полям обе теории дают одинаковые результаты, хорошо согласующиеся с опытом.



Переход же к явлениям, обусловленным движением электрических зарядов, приводит к несостоятельности теории дальнодействия, поэтому современной теорией взаимодействия заряженных частиц является теория близкодействия.

Распределение зарядов.

Для упрощения математических расчетов во многих случаях бывает удобно игнорировать тот факт, что заряды имеют дискретную структуру (электроны, ядра), и считать, что они «размазаны» определенным образом в пространстве.

При переходе к непрерывному распределению вводят понятие плотности зарядов – объемной ρ, поверхностной σ и линейной λ. Формулы плотностей запишутся, как

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \qquad \sigma = \frac{dq}{dS}, \qquad \lambda = \frac{dq}{dl},$$

◀ Объемная, поверхностная, линейная плотность

где dq – заряд, заключенные соответственно в объеме dV, на поверхности dS и на длине dl.

С учетом этих распределений формула (8) может быть представлена в другой форме, заменив q_i на $dq = \rho dV$ и Σ на $\int$:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho dV}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r},$$
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma dS}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad (8a)$$
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda dl}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

где интегрирование проводится по всему пространству, в котором плотность зарядов отлична от нуля.

Таким образом, зная распределение зарядов, мы можем полностью решить задачу о нахождении напряженности электрического поля по формуле (8), если распределение дискретно, или оп формулам (8a), если распределение непрерывно.

В общем случае расчет напряженности через распределение зарядов сопряжен с большими трудностями.

Действительно, для нахождения $\mathbf{E}$ надо вычислить сначала его проекции E_x, E_y, E_z, а это по существу три интеграла.

И только в тех случаях, когда система зарядов обладает той или иной симметрией, задача, как правило, значительно облегчается.

Поле диполя.

Применим принцип суперпозиции применим для расчета электростатического поля электрического диполя.

Электрический диполь — система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля.

Вектор, направленный по оси диполя (прямой, проходящей через оба заряда) от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними, называется **плечом диполя $\mathbf{l}$.**

$$\mathbf{p} = |q|\mathbf{l} \tag{9}$$

◄ **Дипольный момент**

Вектор (9) совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению заряда $|q|$ на плечо $\mathbf{l}$, называется **электрическим моментом диполя** или **дипольным моментом** (**рис.6**).

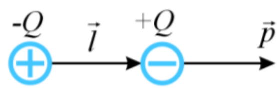


Рис.6. Диполь

Согласно принципу суперпозиции (8), напряженность $\mathbf{E}$ поля диполя в произвольной точке

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- ,$$

где $\mathbf{E}_+$ и $\mathbf{E}_-$ – напряженности полей, создаваемых соответственно положительным и отрицательным зарядами.

Воспользовавшись этой формулой, рассчитаем напряженность поля в произвольной точке на продолжении оси диполя и на перпендикуляре к середине его оси.

1. Напряженность поля на продолжении оси диполя в точке A (**рис.7**). Как видно из рисунка, напряженность поля диполя в точке A направлена по оси диполя и по модулю равна

$$E_A = E_+ + E_-$$

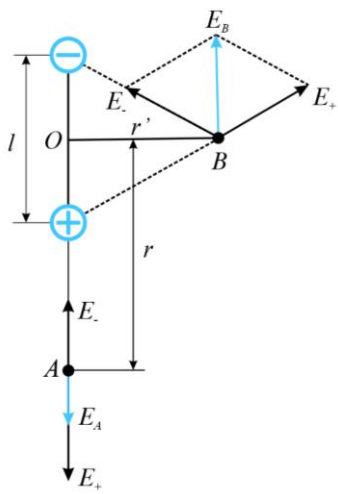


Рис.7. Расчет поля диполя

Обозначив расстояние от точки A до середины оси диполя через r, на основании формулы (5) для вакуума можно записать

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2}\right] =$$

$$= \frac{q}{(4\pi\varepsilon_0)} \frac{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2 - \left(r-\frac{l}{2}\right)^2}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}$$

Согласно определению диполя, $\frac{l}{2} << r$, поэтому

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$

◄ **Поле диполя на оси**

2. Напряженность поля на перпендикуляре, восставленном к оси из его середины, в точке B (**рис. 7**). Точка B равноудалена от зарядов, поэтому

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r')^2 + \frac{l^2}{4}} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r')^2}, \qquad (10)$$

где r' – расстояние от точки B до середины плеча диполя.

Из подобия равнобедренных треугольников, опирающихся на плечо диполя и вектор $\mathbf{E}_B$, получим

$$\frac{E_B}{E_+} = \frac{1}{\sqrt{(r')^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \approx \frac{1}{r'},$$

откуда

$$E_B = E_+\left(\frac{l}{r'}\right) \qquad (11)$$

Подставив в выражение (11) значение (10), получим

$$E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{(r')^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{(r')^3}$$

◄ **Поле диполя на перпендикуляре**

Вектор E_B имеет направление, противоположное вектору электрического момента диполя (вектор $\mathbf{p}$ направлен от отрицательного заряда к положительному).

5. ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

Вычисление напряженности поля системы электрических зарядов с помощью принципа суперпозиции электростатических полей можно значительно упростить, используя выведенную немецким ученым Карлом Фридрихом Гауссом (1777–1855) теорему, определяющую поток вектора напряженности электрического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность.

В соответствии с формулой (6) поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность радиуса r, охватывающую точечный заряд q, находящийся в ее центре (**рис.8**), равен

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Этот результат справедлив для замкнутой поверхности любой формы. Действительно, если окружить сферу (**рис.8**) произвольной замкнутой поверхностью, то каждая линия напряженности, пронизывающая сферу, пройдет и сквозь эту поверхность.

Если замкнутая поверхность произвольной формы охватывает заряд (**рис.9**), то при пересечении любой выбранной линии напряженности с поверхностью она то входит в нее, то выходит из нее.

Нечетное число пересечений при вычислении потока в конечном счете сводится к одному пересечению, так как поток считается положительным, если линии напряженности выходят из поверхности, и отрицательным для линий, входящих в поверхность.

Если замкнутая поверхность не охватывает заряда, то поток сквозь нее равен нулю, так как число линий напряженности, входящих в поверхность, равно числу линий напряженности, выходящих из нее.

Таким образом, для поверхности любой формы, если она замкнута и заключает в себя точечный заряд q, поток вектора $\mathbf{E}$ будет равен $\frac{q}{\varepsilon_0}$, т. е.

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (12)$$

Знак потока совпадает со знаком заряда q.

Рассмотрим общий случай произвольной поверхности, окружающей n зарядов. В соответствии с принципом суперпозиции (8) напряженность $\mathbf{E}$ поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей E_i полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$. Поэтому

Иоганн Карл Фри́дрих Га́усс
(нем. Johann Carl Friedrich Gauß; 30 апреля 1777, Брауншвейг — 23 февраля 1855, Гёттинген) — немецкий математик, астроном и физик, считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков».

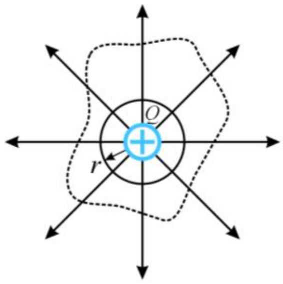


Рис.8

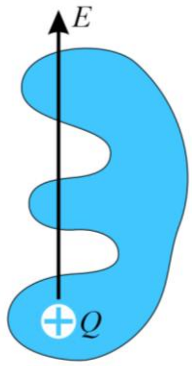


Рис.9

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \oint_S (\sum_i E_i)dS = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i d\mathbf{S}$$

Согласно (12), каждый из интегралов, стоящий под знаком суммы, равен $\frac{q_i}{\varepsilon_0}$. Следовательно,

$$\oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i \qquad (13)$$

◄ **Теорема Гаусса для поля в вакууме**

Формула (13) выражает **теорему Гаусса для электростатического поля в вакууме:**

Поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0.

Эта теорема выведена математически для векторного поля любой природы русским математиком **Михаилом Васильевичем Остроградским** (1801–1862), а затем независимо от него применительно к электростатическому полю – **Карлом Фридрихом Гауссом.**

В общем случае электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой объемной плотностью $\rho = \frac{dq}{dV}$, различной в разных местах пространства. Тогда суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности S, охватывающей некоторый объем V,

$$\sum_i q_i = \int_V \rho dV \qquad (14)$$

Используя формулу (14), теорему Гаусса (13) можно записать так:

$$\oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

6. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАУССА К РАСЧЕТУ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ВАКУУМЕ

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости. Бесконечная плоскость (**рис.10**) заряжена с постоянной **поверхностной плотностью** $+\sigma$. Линии напряженности перпендикулярны рассматриваемой плоскости и направлены от нее в обе стороны.

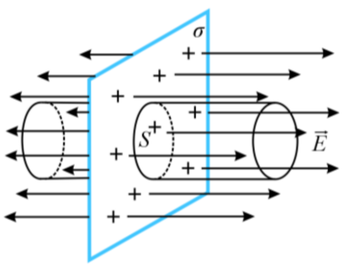


Рис. 10. Бесконечная плоскость

В качестве замкнутой поверхности мысленно построим цилиндр, основания которого параллельны заряженной плоскости, а ось перпендикулярна ей. Так как образующие цилиндра параллельны линиям напряженности ($\cos\alpha = 0$), то поток вектора напряженности сквозь боковую поверхность цилиндра равен нулю, а полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь его основания (площади оснований равны и для основания E_n совпадает с E, т. е. равен $2ES$. Заряд, заключенный внутри построенной цилиндрической поверхности, равен $\sigma \cdot S$.

Согласно теореме Гаусса (13) $2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$, откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (15)$$

◄ **Поле заряженной бесконечной плоскости**

Из формулы (15) вытекает, что E не зависит от длины цилиндра, т. е. напряженность поля на любых расстояниях одинакова по модулю, иными словами, поле равномерно заряженной плоскости однородно.

2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей (**рис. 11**). Пусть плоскости заряжены равномерно разноименными зарядами с поверхностными плотностями $+\sigma$ и $-\sigma$.

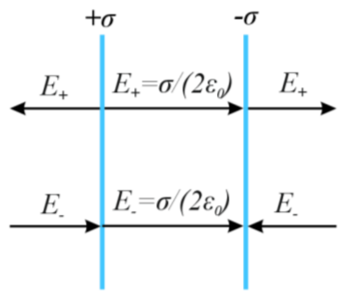


Рис. 11. Две бесконечные плоскости

Поле таких плоскостей найдем как суперпозицию полей, создаваемых каждой из плоскостей в отдельности. На рисунке верхние стрелки соответствуют полю от положительно заряженной плоскости, нижние — от отрицательной плоскости. Слева и справа от плоскостей поля вычитаются (линии напряженности направлены навстречу друг другу), поэтому здесь напряженность поля $E = 0$. В области между плоскостями $E = E_+ + E_-$ (E_+ и E_- определяются по формуле (15)), поэтому результирующая напряженность

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (16)$$

◄ **Поле двух заряженных бесконечных плоскостией**

Таким образом, результирующая напряженность поля в области между плоскостями описывается формулой (16), а вне объема, ограниченного плоскостями, равна нулю.

3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности. Сферическая поверхность радиуса R с общим зарядом q заряжена равномерно с поверхностной плотностью $+\sigma$. Благодаря равномерному распределению заряда по поверхности поле, создаваемое им, обладает сферической симметрией. Поэтому линии напряженности направлены радиально (**рис.12**).

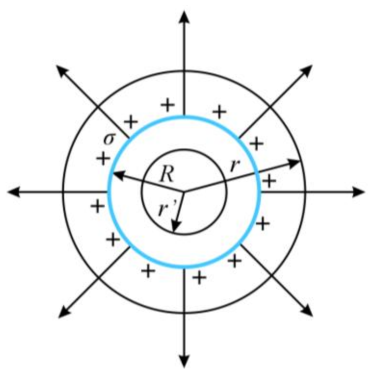


Рис. 12. Заряженная сфера

Построим мысленно сферу радиуса r, имеющую общий центр с заряженной сферой. Если $r > R$, то внутрь поверхности попадает весь заряд q, создающий рассматриваемое поле, и, по теореме Гаусса (13), $4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$, откуда

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad (r \geq R) \qquad (17)$$

◄ **Поле заряженной сферы**

При $r > R$ поле убывает с расстоянием r по такому же закону, как у точечного заряда. График зависимости E от r приведен на **рис. 13**.

Если $r' < R$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферической поверхности электростатическое поле отсутствует ($E = 0$).

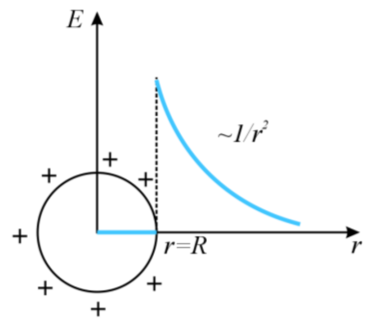


Рис. 13. Поле заряженной сферы

4. Поле объемно заряженного шара. Шар радиуса R с общим зарядом q заряжен равномерно с объемной плотностью ρ. Учитывая соображения симметрии (см. **п. 3**), можно показать, что для напряженности поля вне шара получится тот же результат, что и в предыдущем случае (см. (17)). Внутри же шара напряженность поля будет другая.

Сфера радиуса $r' < R$ охватывает заряд $q' = \frac{4}{3}\pi r'^2 \rho$.

Поэтому, согласно теореме Гаусса (13), $4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3}\frac{\pi r'^3 \rho}{\varepsilon_0}$.

Учитывая, что $\rho = \frac{q}{\frac{4\pi R^3}{3}}$, получаем

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3} r' \qquad (r' \leq R) \qquad (18)$$

◄ **Поле заряженного шара**

Таким образом, напряженность поля вне равномерно заряженного шара описывается формулой (17), а внутри его изменяется линейно с расстоянием r' согласно выражению (18). График зависимости E от r для рассмотренного случая приведен на **рис.14**.

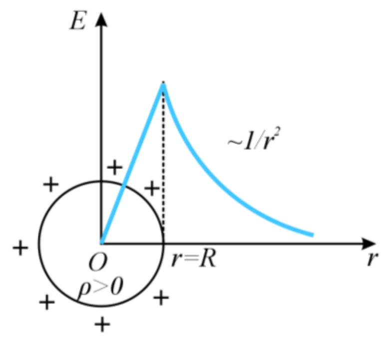


Рис. 14. Поле заряженного шара

5. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити). Бесконечный цилиндр радиуса R (**рис.15**) заряжен равномерно с **линейной плотностью** λ ($\lambda = \frac{dQ}{dl}$ – заряд, приходящийся на единицу длины).

Из соображений симметрии следует, что линии напряженности будут направлены по радиусам круговых сечений цилиндра с одинаковой густотой во все стороны относительно оси цилиндра. В качестве замкнутой поверхности мысленно построим коаксиальный с заряженным цилиндр радиуса r и высотой l. Поток вектора $\vec{E}$ сквозь торцы коаксиального цилиндра равен нулю (торцы параллельны линиям напряженности), а сквозь боковую поверхность равен $2\pi rlE$. По теореме Гаусса (13), при $r > R$ $2\pi rlE = \dfrac{\lambda l}{\varepsilon_0}$, откуда

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} \quad (r \geq R) \tag{19}$$

◄ **Поле заряженной нити**

Если $r < R$, то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому в этой области $E = 0$. Таким образом, напряженность поля вне равномерно заряженного бесконечного цилиндра определяется выражением (19), внутри же его поле отсутствует.

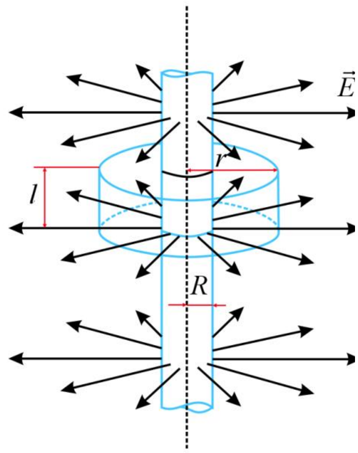


Рис. 15. Бесконечный цилиндр (нить)

Общие выводы о применении теоремы Гаусса.

Полученные в этих примерах результаты можно получить и непосредственным интегрированием (8а). Однако, использование теоремы Гаусса позволило решать эти задачи несравненно более простым путем.

Тем не менее число задач, легко решаемых с помощью теоремы Гаусса, весьма ограниченно. Уже при решении задачи о нахождении поля такого симметричного распределения заряда, как у равномерно заряженного диска, теорема Гаусса оказывается бессильной. В этом случае конфигурация поля оказывается слишком сложной, и замкнутой поверхности, обладающей необходимой для простоты вычисления потока вектора **E** формой, здесь нет.

Использование теоремы Гаусса для расчета полей эффективно лишь в тех случаях, где поле обладает специальной симметрией (плоской, цилиндрической или сферической). Симметрия должна быть такой, чтобы можно было найти достаточно простую замкнутую поверхность S и вычисление потока вектора **E** можно было свести к простому умножению E (или E_n) на площадь S или ее часть.

7. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Если в электростатическом поле точечного заряда q из точки *1* в точку *2* вдоль произвольной траектории (**рис.16**) перемещается другой точечный заряд q_0, то сила, приложенная к заряду, совершает работу.

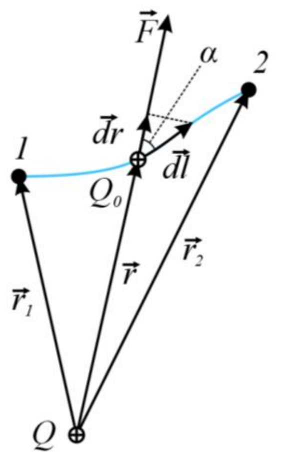


Рис. 16

Работа силы **F** на элементарном перемещении $d\mathbf{l}$ равна

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{l} = Fdl\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot q_0}{r^2}dl\cos\alpha$$

Так как $dl\cos\alpha = dr$, то

$$dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \cdot q_0}{r^2}dr$$

Работа при перемещении заряда q_0 из точки *1* в точку *2*

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q \cdot q_0}{r_1} - \frac{q \cdot q_0}{r_2}) \qquad (20)$$

не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной *1* и конечной *2* точек.

Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является **потенциальным**, а электростатические силы – **консервативными**.

Из формулы (20) следует, что работа, совершаемая при перемещении электрического заряда во внешнем электростатическом поле по любому замкнутому пути L, равна нулю, т.е.

$$\oint_L dA = 0 \qquad (21)$$

Циркуля́цией ве́кторного по́ля называется криволинейный интеграл второго рода, взятый по произвольному замкнутому контуру

Если в качестве заряда, переносимого в электростатическом поле, взять единичный точечный положительный заряд, то элементарная работа сил поля на пути $d\mathbf{l}$ равна $\mathbf{E}d\mathbf{l} = E_l dl$, где $E_l = E\cos\alpha$ – проекция вектора E на направление элементарного перемещения. Тогда формулу (21) можно записать в виде выражения (22), которое составляет **теорему о циркуляции вектора напряженности**:

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = \oint_L E_l dl = 0 \qquad (22)$$

◄ **Теорема о циркуляции вектора напряженности**

Интеграл $\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = \oint_L E_l dl = 0$ называется **циркуляцией вектора напряженности**.

Силовое поле, обладающее свойством (22), называется потенциальным.

Из обращения в нуль циркуляции вектора E следует, что линии напряженности электростатического поля не могут быть замкнутыми, они начинаются и кончаются на зарядах или же уходят в бесконечность.

Формула (22) справедлива только для электростатического поля. В дальнейшем будет показано, что для поля движущихся зарядов условие (22) не выполняется (для него циркуляция вектора напряженности отлична от нуля).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 2003.
2. Трофимова Т.И. Курс Физики. М.- Академия, 2007.
3. Савельев П.В. Курс физики. Изд. 4, Т. 1, 2, 3. – СПб.: Лань, 2008.