Любая С.И.

ЛЕКЦИЯ №3

Тема: “Динамика вращательного движения”.

Цель лекции: изучить основные положения динамики вращательного движения. Дать определения момента инерции, момента импульса, кинетической энергии.

План лекции.

1. Динамика вращения точки и тела вокруг постоянной оси, понятие о моменте инерции материальной точки и тела.
2. Изменение момента инерции тела при переносе оси вращения. Теорема Штейнера.
3. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.
4. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса.
5. Кинетическая энергия вращающегося тела.

1. Динамика вращения точки и тела вокруг постоянной оси, понятие о моменте инерции материальной точки и тела.

При вращательном движении наряду с понятием “масса” вводится понятие “момент инерции” J.

Масса – мера инертности тела.

Любая С.И.

Пусть материальная точка m_i находится на расстоянии R от оси вращения O–O′. Приложим к этой точке силу F_i. Под действием силы точка начнет вращательное движение вокруг оси O–O′. Момент инерции материальной точки определим по формуле

$$J_i = m_i \cdot R_i^2 \qquad (1)$$

<u>*Момент инерции материальной точки*</u>, вращающейся вокруг неподвижной оси, равен произведению массы этой точки на квадрат расстояния до оси.

Любое тело можно рассматривать как совокупность материальных точек, не смещающихся друг относительно друга. Такое, не поддающееся деформации тело, называется абсолютно твердым.

<u>*Момент инерции твердого тела*</u> равен сумме моментов инерций материальных точек, из которых это тедо состоит

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot R_i^2 \qquad (2)$$

Если тело имеет равномерно распределенную массу, то момент инерции определяется интегрированием

$$J = \int R^2 dm \qquad (3)$$

Размерность момента инерции определяется из соотношения

Любая С.И.

$$J = mR^2 \qquad [кг \cdot м^2]$$

Для тел правильной геометрической формы выведены формулы для расчета момента инерции. Рассмотрим случай, когда ось вращения проходит через центр масс этих тел.

1) стержень

$$J = \frac{1}{12} m l^2 \tag{4}$$

где m – маса тела; l – длина стеожня.

2) диск

$$J = \frac{1}{2} m R^2 \tag{5}$$

где m – масса диска; R – радиус.

3) кольцо (тонкостенный цилиндр)

$$J = mR^2 \tag{6}$$

4) шар

$$J = \frac{2}{3} m R^2 \tag{7}$$

Последние два являются моментами инерции сложной геометрической формы, их тяжело подсчитать; они находятся опытным путем.

Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении. Он играет такую же роль, что и масса при описании поступательного движения. Но если масса считается величиной постоянной, то момент инерции данного тела зависит от положения оси вращения.

2. Изменение момента инерции тела при переносе оси вращения.

Если для какого-либо тела известен его момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести, то легко может быть найден и момент инерции относительно любой оси, параллельной первой.

Например, для диска

$$J = J_c + md^2 \qquad (8)$$

теорема Штейнера

где Jc – момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести;

m – масса диска;

d – расстояние между осями.

Теорема Штейнера: *момент инерции относительно любой оси вращения равен моменту инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр тяжести, сложенному с произведением массы тела* *на квадрат расстояния от центра тяжести тела до оси вращения.*

Для диска

$$J = \frac{1}{2} m R^2 + m d^2 . \qquad (9)$$

3. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси O–O′. Разобьем это тело на элементарные учатски m_i. Выбираем произвольную материальную точку, принадлежащую этому телу. Точка вместе с вращающимся телом описывает окружность. Проведем от точки линию и обозначим ее r_i. Приложим к точке силу F_i.

Под действием силы $\overline{F}_i$, направленной перпендикулярно к оси по касательной к окружности, описываемой материальной точкой, движущаяся точка начнет вращательное движение. По второму закону Ньютона

$$F_i = m_i a_i , \qquad a_i = \frac{dV_i}{dt} . \qquad (10)$$

Используем формулу, устанавливающую связь между линейной и угловой скоростью

$$V_i = \omega R_i , \qquad (11)$$

где ω – угловая скорость; у всех точек вращающегося тела она одинакова.

Подставим значение линейной скорости в формулу ускорения

$$a_i = \frac{d(\omega R_i)}{dt} = R_i \frac{d\omega}{dt}. \qquad (12)$$

Подставим значение ускорения во второй закон Ньютона

$$F_i = m_i R_i \frac{d\omega}{dt}, \qquad (13)$$

умножим обе части последнего равенства на R_i и просуммируем его

$$\sum_{i=1}^{n} F_i R_i = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \frac{d\omega}{dt}, \qquad (14)$$

где $\sum_{i=1}^{n} F_i R_i$ – момент силы;

$\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$ – момент инерции;

$\frac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение.

$$M = J \cdot \varepsilon \qquad (15)$$

основное уравнение динамики вращательного движения или второй закон

Ньютона для вращательного движения.

Выразим угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{M}{J}. \qquad (16)$$

<u>Угловое ускорение</u> вращающегося тела прямо пропорционально суммарному моменту всех сил, действующих на тело, и обратно пропорционально моменту инерции тела.

Поступательное движение	**Вращательное движение**
$F = ma$, $a = \frac{F}{m}$	$M = J\varepsilon$, $\varepsilon = \frac{M}{J}$

Основной закон динамики

<u>Момент вращающейся силы</u>, приложенной к телу, равен произведению момента инерции тела на угловое ускорение.

$$M = J\varepsilon$$

Подставим значение ε в формулу (15) и подведем момент инерции под знак дифференциала

$$M = \frac{d(J\omega)}{dt}. \qquad (17)$$

4. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса.

Величину Jω формулы (17) обозначим как L

$$J\omega = L \qquad (18)$$

момент импульса (импульс – mV)

Если момент внешних сил, приложенных к телу, равен нулю (M = 0), то есть $\frac{d(J\omega)}{dt} = 0$. Дифференциал равен нулю, когда значение числа под дифференциалом постоянно, а это может быть только в том случае, если момент импульса

$$L = J\omega = const.$$

Закон сохранения момента импульса: *при отсутствии момента сил (M = 0), момент количества движения остается постоянным (L = const).*

Сохранение момента количества движения может быть продемонстрировано с помощью “скамьи Жуковского” – скамеечки, которая может без трения вращаться вокруг вертикальной оси. Когда человек опускает руки, момент инерции его уменьшается и человек начинает вращаться быстрее и наоборот.

5. Кинетическая энергия вращающегося тела.

При поступательном движении кинетическая энергия тела определяется по формуле (для материальной точки)

$$E_{кин_i} = \frac{m_i V_i^2}{2}. \qquad (19)$$

Пусть материальная точка m_i, вращаясь вокруг оси O–O′, имеет линейную скорость V_i. Кинетическая энергия материальной точки m_i определяется

$$V_i = \omega R_i. \qquad (20)$$

Подставим значение линейной скорости в формулу кинетической энергии

$$E_{кин_i} = \frac{m_i \omega^2 R_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} m_i R_i^2, \qquad (21)$$

для всего тела

$$E_{кин} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega^2}{2} m_i R_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = J \frac{\omega^2}{2}, \qquad (22)$$

$$E_{кин} = J \frac{\omega^2}{2}, \qquad (23)$$

кинетическая энергия вращающегося тела

Если тело одновременно учавствует во вращательном и поступательном движениях, то его полная энергия определится по формуле

$$E_{кин} = J\frac{\omega^2}{2} + \frac{mV^2}{2}, \qquad (24)$$

Например, колесо автомобиля.

Сопоставим между собой величины, характеризующие поступательное и вращательное движения.

Поступательное движение	**Вращательное движение**
Линейная скорость $\vec{V}$	*Угловая скорость* $\vec{\omega}$
Линейное ускорение $\vec{a}$	*Угловое ускорение* $\vec{\varepsilon}$
Сила $\vec{F}$	*Момент силы* $\vec{M}$
Импульс $m\vec{V}$	*Момент импульса* $J\vec{\omega}$
Масса m	*Момент инерции* J
Второй закон Ньютона	
$F = ma$	$M = J\varepsilon$
Кинетическая энергия	
$E_к = \frac{mV^2}{2}$	$E_к = \frac{J\omega^2}{2}$