Практическое занятие 3

КРУЧЕНИЕ БРУСЬЕВ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Кручение — это такай вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает единственный внутренний силовой фактор — крутящий момент, обозначаемый M_X или M_{KP}.

Деформация кручения возникает при нагружении бруса внешними парами сил, плоскости действия которых перпендикулярны его продольной оси. Моменты этих пар называются вращающими моментами и обозначаются T.

Брусья круглого сплошного или кольцевого поперечных сечений, испытывающие деформацию кручения , принято называть **валами**.

На рис. 1.1, *а* изображен вал, работающий на кручение под действием приложенных к нему вращающих моментов, а на рис. 1.1, *б*, действующие на вал вращающие моменты условно представлены парами сил.

Во всех случаях будем считать, что алгебраическая сумма вращающих моментов равна нулю $\sum m = 0$, т. е. вал находится в равновесии.

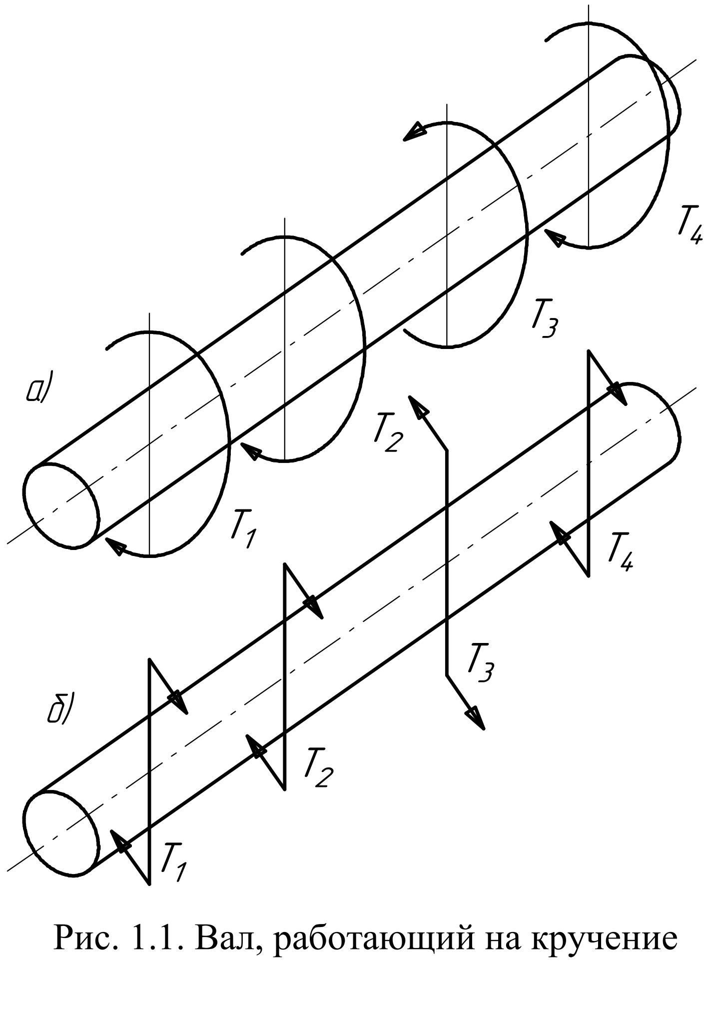

Рис. 1.1. Вал, работающий на кручение

На рис. 1.2, *а, б* изображен тот же брус в ортогональной проекции. При этом на рис. 1.2, *а* дан еще один способ условного изображения внешних моментов, часто применяемый в технической литературе; момент представлен парой сил в виде двух кружков. Кружок с точкой обозначает силу, направленную на наблюдателя, а кружок с крестом — силу, направленную от наблюдателя.

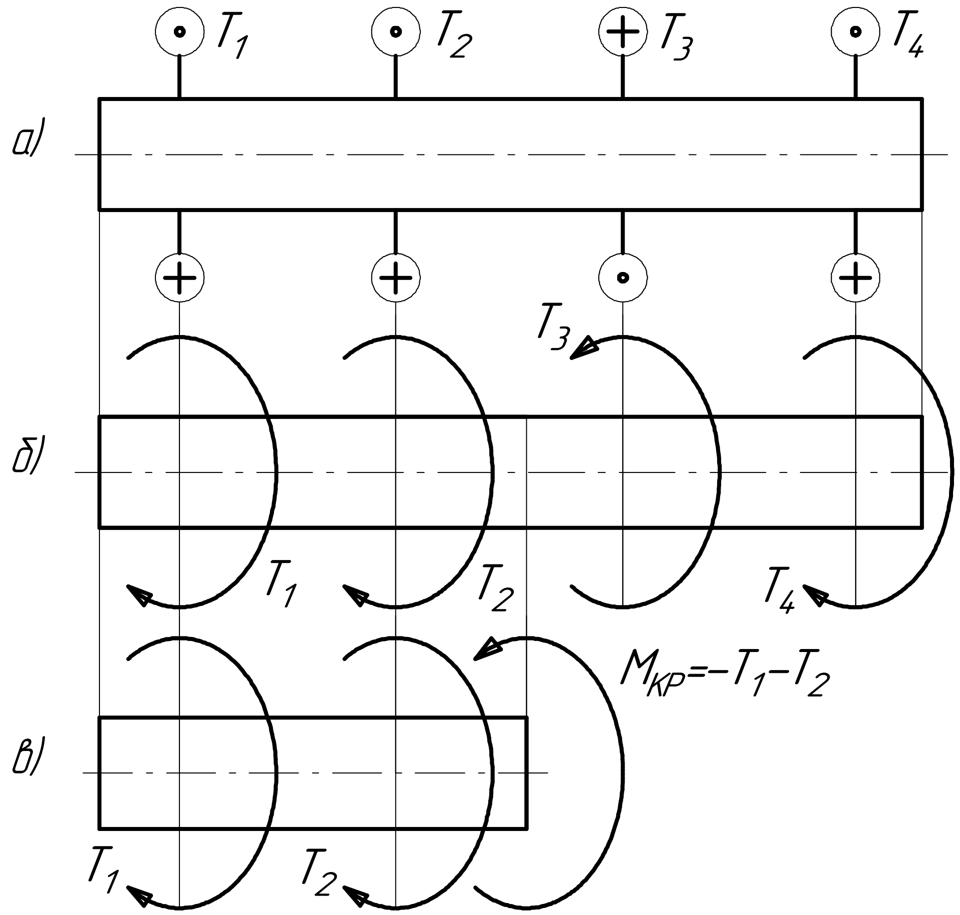

Рис. 1.2. Расчетная схема вала

Для расчета на прочность и определения деформаций поперечных сечений бруса надо знать закон изменения крутящих моментов по длине бруса

Применяя метод сечений и рассматривая равновесие отсеченной части вала (рис. 1.2, *в*), приходим к выводу, что внутренние силы, возникающие в поперечном сечении бруса, должны дать крутящий момент $M_{КР}$, уравновешивающий внешние моменты, приложенные к отсеченной части.

Таким образом, **крутящий момент в произвольном поперечном сечении вала численно равен сумме моментов относительно продольной оси вала всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого поперечного сечения**

$$M_{КР} = \sum T_i^{отс} . \tag{1.1}$$

Знак вращающего момента не имеет физического смысла, но для определенности при построении эпюр условно принимается следующее правило знаков. Будем считать вращающий момент положительным, если для наблюдателя, смотрящего на проведенное сечение, он представляется направленным по часовой стрелке (рис. 1.3, *а*).

График, показывающий закон изменения крутящих моментов по длине бруса, называется **эпюрой крутящих моментов.** Построение этих эпюр принципиально ничем не отличается от построения эпюр продольных сил при растяжении (сжатии) и производится на основе сформулированного выше правила вычисления крутящих моментов.

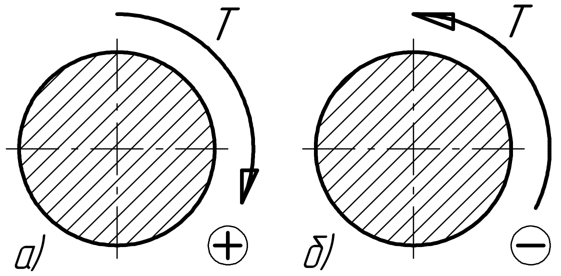

Рис. 1.3. К определению знака вращающего момента

При расчете валов, как правило, бывают заданы передаваемая мощность N в кВт или в л. с. и угловая скорость ω в сек$^{-1}$ или частота вращения n в об/мин. Вращающий момент, передаваемый шкивом (зубчатым колесом и т. п.), вычисляется по формуле

$$T = \frac{N}{\omega}, \tag{1.2}$$

где N в Вт и T в Н·м.

Вращающий момент в кН·м при N в кВт определяется по формуле

$$T = 9{,}55\frac{N}{n} \tag{1.3}$$

и при N в л. с.

$$T = 7{,}02\frac{N}{n}. \tag{1.4}$$

При кручении вала круглого (сплошного или кольцевого) поперечного сечения справедлива гипотеза плоских сечений, расстояния между поперечными сечениями остаются неизменными и их радиусы не искривляются. Касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения определяется по формуле

$$\tau = \frac{M_{KP}}{J_\rho}\cdot\rho, \tag{1.5}$$

где J_ρ — **полярный момент инерции поперечного сечения**; ρ — расстояние от центра сечения до рассматриваемой точки (рис.1.4).

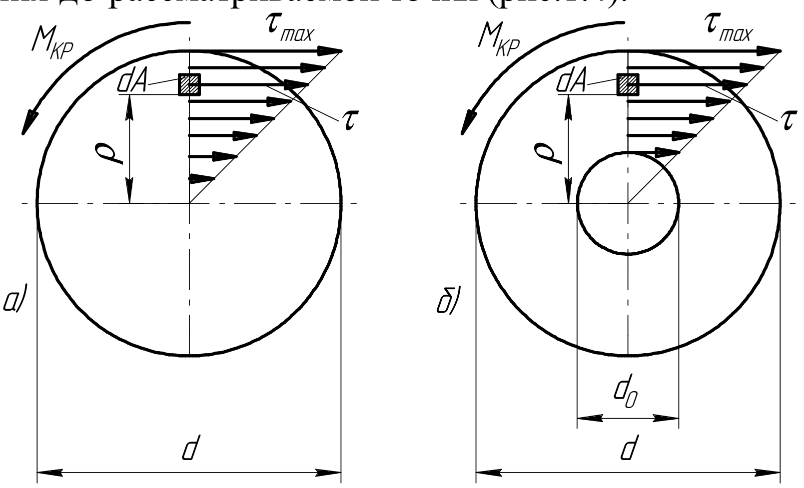

Рис. 1.4. Распределение касательных напряжений по поперечному сечению вала
а) сплошное поперечное сечение; *б*) кольцевое поперечное сечение

Полярный момент инерции представляет собой сумму произведений площадей элементарных площадок dA на квадраты их расстояний ρ до центра сечения, т. е.

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA.$$

Вычисление полярного момента инерции производится по следующим формулам:

для круга

$$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0{,}1d^4, \tag{1.6}$$

для кольца

$$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}\left(1-c^4\right) \approx 0{,}1d^4\left(1-c^4\right), \tag{1.7}$$

где $c = d_0/d$ - отношение внутреннего диаметра сечения к наружному (рис. 1.4, *б*).

Наибольшие касательные напряжения возникают в точках внешнего контура сечения и определяются по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{M_{KP}}{W_\rho}, \tag{1.8}$$

где $W_\rho = \dfrac{J_\rho}{d/2}$ - **полярный момент сопротивления сечения**, равный отношению полярного момента инерции к наружному радиусу сечения. Эта величина является геометрической характеристикой прочности при кручении бруса круглого поперечного сечения и определяется по формулам:

для круга

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2d^3, \tag{1.9}$$

для кольца

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}\left(1-c^4\right) \approx 0{,}2d^3\left(1-c^4\right). \tag{1.10}$$

Для расчетов на жесткость и решения статически неопределимых задач необходимо вычисление углов поворота поперечных сечений (деформаций).

В наиболее общем случае, когда крутящий момент или поперечное сечение (или обе эти величины) изменяются непрерывно (рис.1.5), угол закручивания (взаимный угол поворота концевых сечений бруса) вычисляется по формуле

$$\varphi = \sum \int_{l_i} \frac{M_{KP}dx}{GJ_\rho}, \tag{1.11}$$

где G – модуль сдвига - физическая константа материала, определяемая опытным путем (см. приложение 2). Модуль сдвига G связан с модулем продольной упругости E зависимостью $G = E/2(1+\mu)$, где μ - коэффициент Пуассона.

Произведение GJ_ρ называют **жесткостью сечения** вала при кручении.

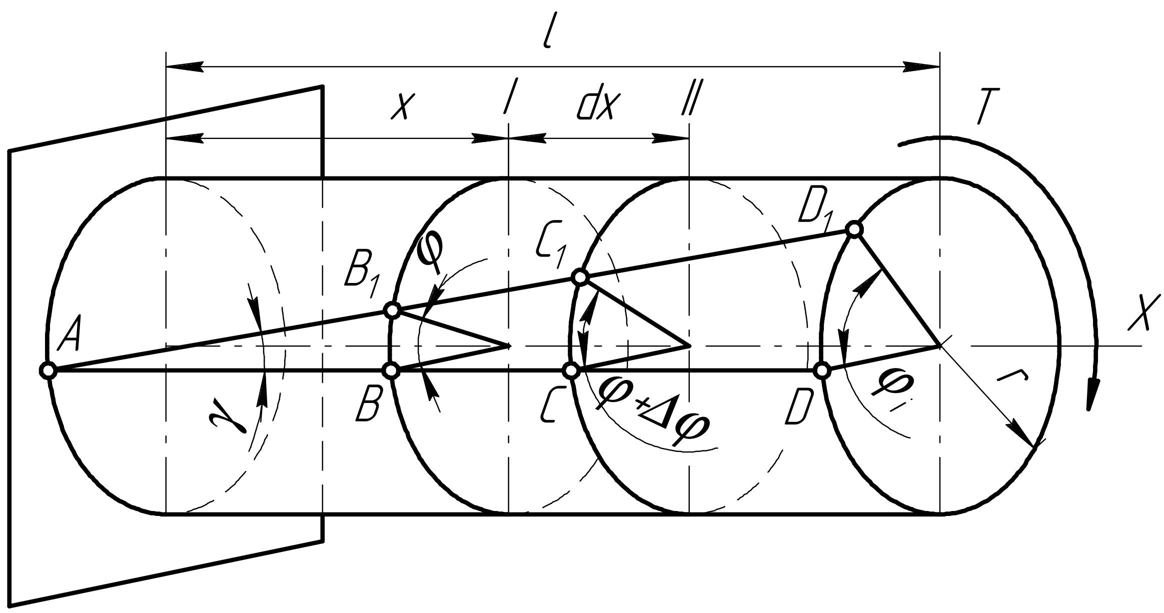

Рис. 1.5. К определению деформаций кручения вала

Если крутящий момент и поперечное сечение постоянны в пределах каждого из участков, то формула (1.11) принимает вид

$$\varphi = \sum \frac{M_{KP} \cdot l_i}{G \cdot J_\rho}\ , \tag{1.12}$$

где l_i — длина i-го участка.

Для отдельного участка постоянного сечения при M_{KP} = const угол закручивания определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot J_\rho}\ . \tag{1.13}$$

Все приведенные формулы дают значение угла φ в радианах. Если необходимо найти его в градусах, то в формулу (1.13) вводится отношение $180^o/\pi$, т.е.

$$\varphi^o = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot J_\rho}. \tag{1.14}$$

Условие прочности при кручении имеет следующий вид:

$$\tau_{\max} = \frac{\left|M_{KP.\max}\right|}{W_\rho} \le [\tau]\ , \tag{1.15}$$

где $\tau_{\max} = (0{,}5\ldots0{,}6)[\sigma]$ – допускаемое напряжение при чистом кручении.

Как и для условия прочности при растяжении, по уравнению (1.15) можно решить три рода задач в зависимости от того, что нужно найти:

1) определить напряжение, действующее в поперечных сечениях вала, и сравнить его с допускаемым (проверочный расчет);

2) найти допускаемую величину крутящего момента;

3) определить диаметр вала, т. е. подобрать сечение вала (проектный расчет).

Чаще всего приходится решать третью задачу. Из условия прочности (1.15) находят момент сопротивления при кручении по формуле:

$$W_\rho = \frac{M_{KP}}{[\tau]} \ . \qquad (1.16)$$

Поскольку $W_\rho = 0{,}2d^3$ для вала с круглым поперечным сечением, то диаметр вала в мм, найдется из выражения

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{|M_{KP.\max}|}{0{,}2 \cdot [\tau]}} = 0{,}172\ \sqrt[3]{\frac{|M_{KP.\max}|}{[\tau]}} \ . \qquad (1.17)$$

Диаметр вала находится для наиболее нагруженного участка если вал постоянного диаметра или участка, в сечении которого действуют максимальные касательные напряжения, если вал ступенчатый. Для расчета наружного диаметра пустотелых валов имеем следующее выражение:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{|M_{KP.\max}|}{0{,}2 \cdot [\tau] \cdot (1-c^4)}} = 0{,}172\ \sqrt[3]{\frac{|M_{KP.\max}|}{[\tau] \cdot (1-c^4)}} \ , \qquad (1.18)$$

Вал механизма или машины, испытывающий чрезмерно большие углы закручивания, может отрицательно влиять на режим работы механизма в котором он установлен например, могут возникать нежелательные крутильные колебания, снижаться срок службы подшипников. Поэтому помимо условия прочности должно соблюдаться и условие жесткости. Расчет на жесткость должен обеспечить условие, чтобы относительный угол закручивания (т. е. угол закручивания на единицу длины, например 1 метр), обозначаемый Θ, не превышал допускаемого угла закручивания $[\Theta]$, зависящего от назначения рассчитываемого вала. Единых норм жесткости, общих для различных отраслей машиностроения, не существует. В качестве наиболее распространенных значений можно указать:

$$[\Theta] = (4{,}38\ \dots\ 17{,}5)\cdot 10^{-6}\ \text{рад/мм} = (0{,}25\dots 1{,}0)\cdot 10^{-3}\ \text{град/мм}.$$

Формула для расчета на жесткость (проверочный расчет) имеет вид:

$$\Theta_{\max} = \frac{M_{KP}}{G \cdot J_\rho} \leq [\Theta] \ , \qquad (1.19)$$

где M_{KP} в Н·мм, G в МПа, J_ρ в мм^4, Θ и $[\Theta]$ в рад/мм.

При проектном расчете из этой формулы определяется требуемая величина полярного момента инерции, а затем — требуемый диаметр вала (или участка вала) в мм по формуле:

$$d \geq 15{,}3 \cdot \sqrt[4]{\frac{M_{KP}}{G \cdot [\Theta]}}. \qquad (1.20)$$

Для пустотелого вала наружный диаметр определяется из выражения:

$$d \geq 15{,}3 \cdot \sqrt[4]{\frac{M_{KP}}{G \cdot [\Theta] \cdot (1-c^4)}} \ . \qquad (1.21)$$

Системы, в которых значения в частности, крутящих моментов не могут быть определены только из уравнений статики, называются статически неопределимыми. Для их решения дополнительно к уравнениям статики должны быть составлены уравнения перемещений (деформаций).

2. ПРИМЕР РАСЧЕТА НА КРУЧЕНИЕ

Задача 2.1. Для заданного стального вала (рис. 2.1, *а*) требуется: построить в масштабе эпюру крутящих моментов M_K ; из условия прочности определить диаметр вала; построить в масштабе эпюры касательных напряжений τ и углов закручивания φ сечений вала.

Принять модуль сдвига $G = 8{\cdot}10^4$ МПа, допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 80$ МПа.

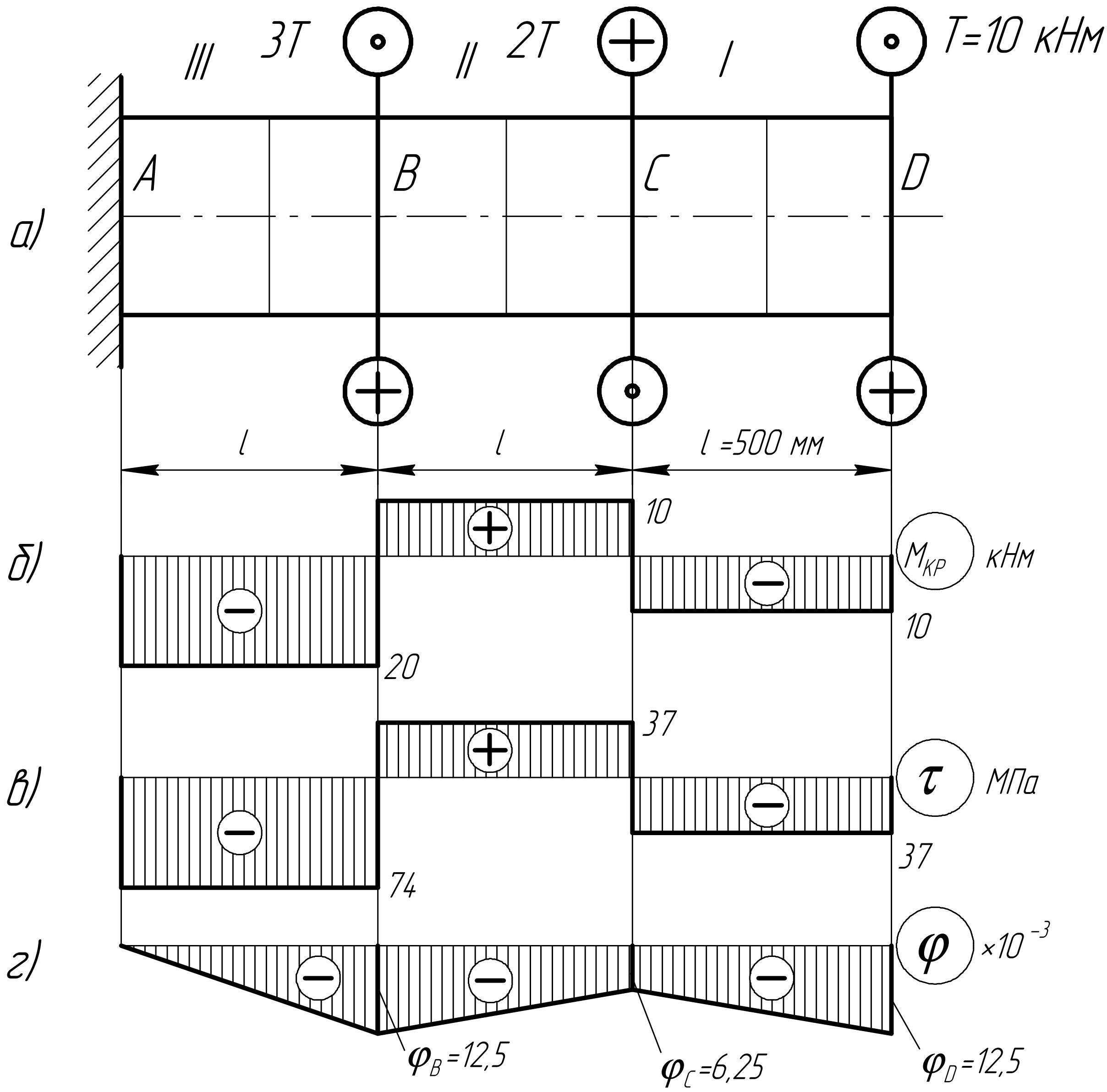

Рис. 2.1. Расчетная схема вала и эпюры расчетных величин

Решение.

1. Разбиваем вал на участки, начиная от незакрепленного конца. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние вращающие моменты. Заданный вал имеет три участка, обозначенные соответственно *I*, *II, III*. Сечения, в которых необходимо определить углы закручивания (деформацию), обозначаем *A*, *B*, *C* и *D*.

2. Применяя метод сечений, по формуле определяем крутящие моменты в поперечных сечениях вала.

Проводим произвольное сечение на участке *I*, мысленно отбрасываем левую часть вала и рассматриваем равновесие отсеченной правой части. Крутящий момент в этом сечении по формуле (1.1) равна алгебраической сумме всех внешних вращающих моментов, действующих на рассматриваемую (отсеченную) часть. При этом, вращающий момент условно считается положительным, если для наблюдателя, смотрящего на проведенное сечение, он направлен по часовой стрелке.

$$M_{KP1} = -T = -10 \text{ кН·м} = -10 \cdot 10^6 \text{ Н·м}.$$

Выполняя аналогичные операции для других участков вала, получим

$$M_{KP2} = -T + 2T = -10 + 20 = 10 \text{ кН·м} = 10 \cdot 10^6 \text{ Н·м},$$

$$M_{KP3} = -T + 2T - 3T = -10 + 20 - 30 = -20 \text{ кН·м} = -20 \cdot 10^6 \text{ Н·м}.$$

3. По полученным данным строим график (эпюру), показывающий изменение крутящего момента M_{KP} по длине стержня. Для этого, проведя ось абсцисс эпюры параллельно оси стержня, откладываем в выбранном масштабе значения крутящих моментов по оси ординат. Так как в пределах одного или нескольких участков крутящий момент не меняется, то эпюра ограничена прямыми линиями, параллельными оси абсцисс. Полученную эпюру принято штриховать линиями перпендикулярными оси стержня. При этом, каждая линия штриховки (ордината графика) в соответствующем масштабе выражает величину крутящего момента в лежащем против нее поперечном сечении стержня (рис. 2.1, *б*).

4. Из условия прочности по формуле (1.17) определим требуемый диаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{|M_{KP.\max}|}{0{,}2 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{20 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 80}} = 10^2 \cdot \sqrt[3]{1{,}25} = 1{,}08 \cdot 10^2 = 108 \text{ мм}.$$

Полученное значение диаметра вала округляем до ближайшего большего значения из стандартного ряда по ГОСТ 6636-60: 10; 10,5; 11; 11,5; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 33; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 52; 55; 60; 63; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 125; 130 и далее через 10 мм. Принимаем $d = 110$ мм.

5. По формуле (1.8) определяем касательные напряжения, возникающие в

поперечных сечениях участков вала:

$$\tau_1 = \frac{M_{KP1}}{W_\rho} = -\frac{10 \cdot 10^6}{2{,}7 \cdot 10^5} \approx -37 \text{ МПа},$$

где $W_\rho = 0{,}2 \cdot d^3 = 0{,}2 \cdot 110^3 \approx 2{,}7 \cdot 10^5$ мм^3.

$$\tau_2 = \frac{M_{KP2}}{W_\rho} = \frac{10 \cdot 10^6}{2{,}7 \cdot 10^5} \approx 37 \text{ МПа},$$

$$\tau_3 = \frac{M_{KP3}}{W_\rho} = -\frac{20 \cdot 10^6}{2{,}7 \cdot 10^5} \approx -74 \text{ МПа}.$$

6. По полученным данным аналогично эпюре крутящих моментов, строим эпюру касательных напряжений (рис. 2.1, *в*).

7. Определяем углы закручивания (в радианах) на границах участков вала, начиная от защемленного левого конца по формулам (1.12) и (1.13):

$$\varphi_A = 0 \text{ (сечение закреплено)},$$

$$\varphi_B = \frac{M_{KP3} \cdot l}{G \cdot J_\rho} = -\frac{20 \cdot 10^6 \cdot 500}{8 \cdot 10^4 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7} = -12{,}5 \cdot 10^{-3},$$

где $J_\rho = 0{,}1 \cdot d^4 = 0{,}1 \cdot 110^4 \approx 1{,}5 \cdot 10^7$ мм^4.

$$\varphi_C = \varphi_B + \frac{M_{KP2} \cdot l}{G \cdot J_\rho} = -12{,}5 \cdot 10^{-3} + \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 500}{8 \cdot 10^4 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7} = -12{,}5 \cdot 10^{-3} + 6{,}25 \cdot 10^{-3} =$$

$$= -6{,}25 \cdot 10^{-3},$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \frac{M_{KP1} \cdot l}{G \cdot J_\rho} = -6{,}25 \cdot 10^{-3} - \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 500}{8 \cdot 10^4 \cdot 1{,}5 \cdot 10^7} = -12{,}5 \cdot 10^{-3} - 6{,}25 \cdot 10^{-3} =$$

$$= -12{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

8. По полученным данным строим эпюру углов закручивания вала (рис. 2.1, *г*).

9. Определяем полную угловую деформацию вала;

$$\varphi_{\text{полн.}} = \varphi_A + \varphi_B + \varphi_C + \varphi_D = -12{,}5 \cdot 10^{-3} - 6{,}25 \cdot 10^{-3} - 12{,}5 \cdot 10^{-3} = -31{,}25 * 10^{-3}$$

Решите любую задачу любого варианта

З А Д А Ч А № 5

КРУЧЕНИЕ СТАЛЬНОГО ВАЛА

1. Условия задачи.

Для заданного стального вала требуется:

1) построить в масштабе эпюру крутящих моментов M_K;
2) из условия прочности определить диаметр вала;
3) построить в масштабе эпюры касательных напряжений τ и углов закручивания φ сечений вала.
4) определить полную угловую деформацию вала $\varphi_{\text{полн.}}$

Модуль сдвига $G = 8\cdot10^4$ МПа, допускаемое напряжение $[\tau] = 80$ МПа.

Длины остальных участков стержня принять равными: $l_2 = l_1$; $l_3 = l_1$.

2. Таблица числовых вариантов.

ВАРИАНТ	ВЕЛИЧИНЫ	
	T, кН·м	***l₁***, мм
1	10	850
2	8	900
3	12	1000
4	14	700
5	16	600
6	18	500
7	20	400
8	22	300
9	7	450
10	6	800

Расчетные схемы валов