Практическое занятие 2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В различных элементах конструкций и машин при их функционировании возникают только продольные усилия, которые вызывают в них деформацию растяжения или сжатия. Например, трос подъемника при подъеме груза растянут, колонны каркаса многоэтажного здания преимущественно сжаты, элементы ферм могут быть растянутыми или сжатыми и т. д.

В простейшем случае растянутый или сжатый брус – это брус с силами, приложенными в центрах тяжести торцевых сечений и направленными вдоль его оси в противоположные стороны (рис. 1.1, *а*, *б*).

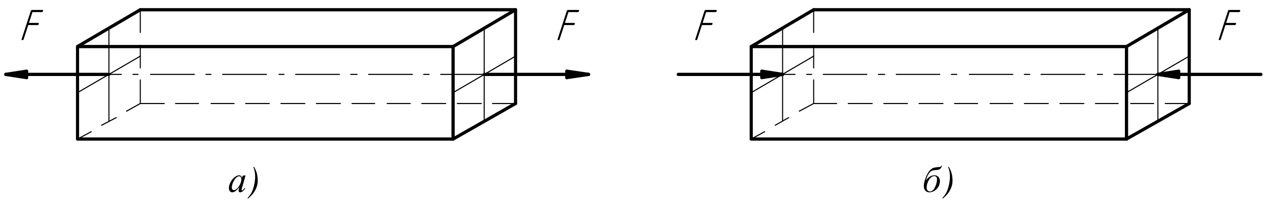

Рис. 1.1. Схемы растянутого (*а*) и сжатого (*б*) стержня

Прямые брусья, работающие на растяжение или сжатие, называют **стержнями**.

При работе стержня на растяжение или сжатие в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор — **продольная сила** N, представляющая собой равнодействующую внутренних элементарных нормальных сил (нормальных напряжений) σ, возникающих в поперечном сечении стержня (рис.1.2, *а*, *б*), т. е.

$$N = \int_A \sigma dA \qquad (1.1)$$

где dA – элементарная площадка поперечного сечения стержня.

Для расчета на прочность и для определения перемещений поперечных сечений стержня надо знать закон изменения продольных сил по его длине.

Для определения продольной силы используется метод сечений. Для этого стержень рассекается произвольной плоскостью, перпендикулярной продольной оси стержня на части и мысленно отбрасывается одна из частей. Действие отброшенной части стержня на оставшуюся (отсеченную) часть заменяется внутренней продольной силой N (рис. 1.2, *б*), которая определяется из условия равновесия $\sum X = 0$ рассматриваемой части стержня.

Продольная сила в произвольном поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекций на его продольную ось всех внешних сил, приложенных к отсеченной части стержня, т. е.

$$N_i = \sum F_i^{отс.} \qquad (1.2)$$

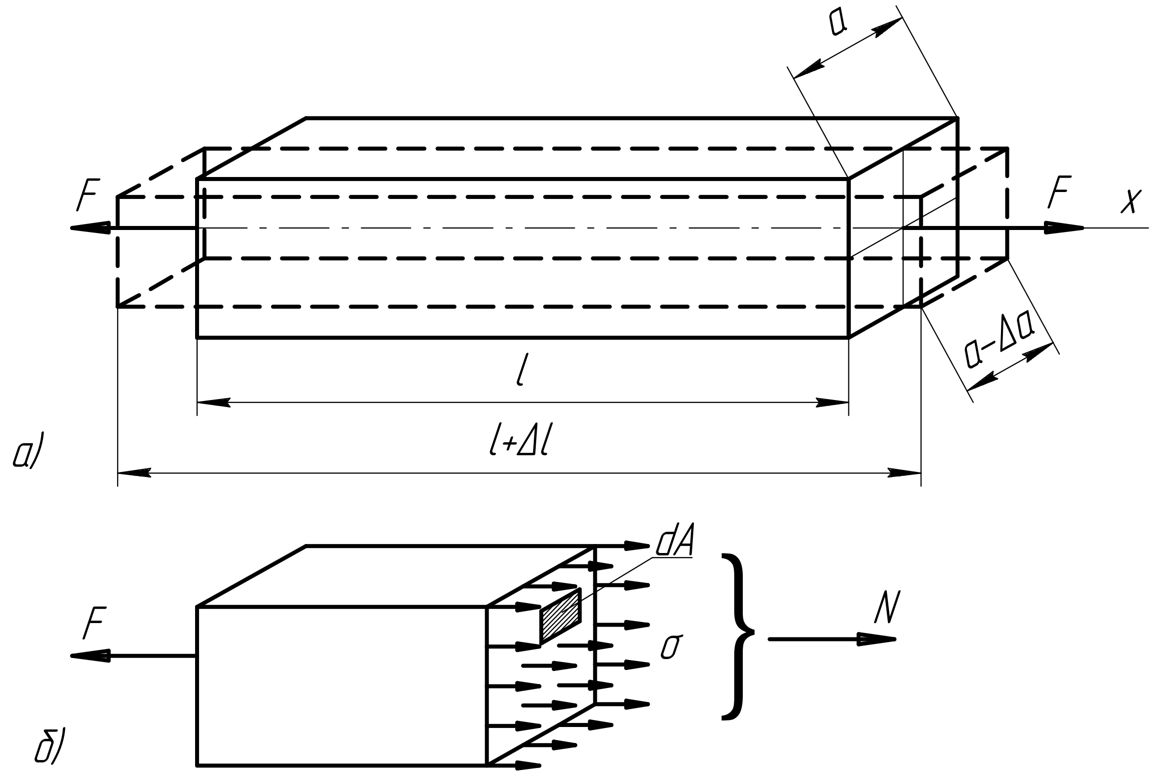

Рис. 1.2. Напряжения и деформации при растяжении

а – схема стержня; *б* – отсеченная часть

При растяжении продольную силу принято считать положительной.

Закон изменения продольной силы по длине бруса представляют в виде графика — эпюры продольных сил. При построении эпюры аргументом является координата поперечного сечения, а функцией — продольная сила.

В поперечных сечениях бруса возникают только **нормальные** напряжения σ.

Из гипотезы плоских сечений Я. Бернулли следует, **что при растяжении или сжатии стержня нормальные напряжения распределены по его поперечному сечению равномерно,** т. е. $\sigma = const$. Из формулы (1.1) получаем

$$\sigma = \frac{N}{A}, \tag{1.3}$$

где A — площадь поперечного сечения стержня.

Отношение удлинения (укорочения) Δl, называемое абсолютной продольной деформацией стержня к его первоначальной длине l , называется относительным удлинением (укорочением) или **относительной продольной деформацией** ε:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{1.4}$$

Для упругих материалов в известных пределах, зависящих от свойств материала, между продольной деформацией и соответствующим нормальным напряжением существует линейная зависимость

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (1.5)$$

где E — модуль продольной упругости — физическая константа, характеризующая жесткость материала при линейной деформации. Например, для стали $E = (2{,}0\ldots2{,}15)10^5$ МПа.

Зависимость (1.5) является математическим выражением **закона Гука** при линейной деформации.

Как известно, при растяжении стержня, размеры поперечного сечения уменьшаются, а при сжатии — увеличиваются.

Отношение абсолютного укорочения Δa стороны поперечного сечения стержня к ее первоначальной длине a (рис. 1.2, *а*), называется **относительной поперечной деформацией** ε_1. Отношение поперечной деформации ε_1 к продольной ε, взятое по абсолютной величине, называется **коэффициентом Пуассона** (или коэффициентом поперечной деформации)

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right|$$

Коэффициент Пуассона является физической константой данного материала. Значения его лежат в пределах 0…0,50 ($\mu = 0$ для пробки и $\mu = 0{,}50$ для парафина). Для подавляющего большинства металлов и сплавов $\mu = 0{,}25\ldots0{,}35$.

Удлинение или укорочение (абсолютная продольная деформация) стержня длиной l, имеющего постоянное поперечное сечение, при условии, что продольная сила во всех сечениях одинакова, определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}\ , \qquad (1.6)$$

Выражение (1.6) называют **формулой Гука**, а произведение EA условно называют жесткостью сечения стержня при растяжении (сжатии).

В случае если стержень имеет ступенчато-переменное сечение, то для определения деформации формулу (1.6) следует применять отдельно к каждому из участков, в пределах которого $A = const$ и $N = const$ и результаты просуммировать:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{k} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i l_i}{EA_i}\ , \qquad (1.7)$$

где k – количество участков с постоянной площадью поперечного сечения.

Если сечение стержня или продольная сила, или обе эти величины меняются непрерывно по его длине (например, брус в виде усеченного конуса или брус, растягиваемый действием собственной силы тяжести), то деформацию стержня следует определять по формуле

$$\Delta l = \int_l \frac{N dx}{EA} \qquad (1.8)$$

В частном случае стержня постоянного сечения, находящегося под действием собственного веса, изменение его длины определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{Gl}{2EA} \ , \tag{1.9}$$

где G — вес стержня.

В наиболее общем случае, когда законы изменения поперечного сечения и продольной силы различны для отдельных участков бруса, изменение его длины определяется по формуле

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{k} \int_{l} \frac{Ndx}{EA} \tag{1.10}$$

Расчеты на прочность при растяжении (сжатии) в зависимости от постановки задачи или цели расчета, могут быть разделены на три типа:

1) проверка прочности (проверочный расчет);
2) определение допускаемой нагрузки (разновидность проверочного расчета);
3) определение требуемых размеров поперечного сечения бруса (проектный расчет).

При проверочном расчете нагрузки, размеры и материал (допускаемое или предельное напряжения) известны. В результате расчета определяется наибольшее расчетное напряжение $\sigma_{\max}$ и сравнивается с допускаемым. Расчетная зависимость (условие прочности) в этом случае имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \le [\sigma] \tag{1.11}$$

где $\sigma_{\max}$ и N — соответственно максимальное нормальное напряжение и продольная сила в опасном поперечном сечении (т. е. сечении, в котором возникают наибольшие напряжения); A — его площадь; $[\sigma]$ — допускаемое напряжение.

Если вместо допускаемого напряжения задано предельное, то проверка прочности производится по зависимости

$$n = \frac{\sigma_{ПРЕД}}{\sigma_{\max}} \ge [n] \tag{1.12}$$

где n — коэффициент запаса прочности (фактический) для опасного сечения бруса; $[n]$ — требуемый (заданный или нормативный) коэффициент запаса прочности; $\sigma_{ПРЕД}$ — предельное напряжение, при достижении которого появляются заметные пластические деформации (если материал пластичный) или происходит хрупкое разрушение (если материал хрупкий). Эти напряжения определяются опытным путем при механических испытаниях материалов; $\sigma_{\max}$ — напряжение в опасном сечении.

Зависимости для двух остальных случаев расчета получаются путем преобразования формулы (1.11).

Допускаемая нагрузка на деталь или элемент конструкции определяется из выражения:

$$[N] \leq A \cdot [\sigma] \tag{1.13}$$

При проектном расчете требуемая площадь опасного сечения определяется по формуле

$$A \geq \frac{|N|}{[\sigma]} \tag{1.14}$$

Для стержней из материалов, которые неодинаково сопротивляются растяжению и сжатию (например, чугун), опасным может оказаться не то сечение, где возникают наибольшие (по абсолютной величине) напряжения. **Опасным является сечение, для которого коэффициент запаса прочности минимален**. Такое определение понятия «опасное сечение» является наиболее общим.

Если использование только уравнений равновесия для отсеченной части бруса или какой-либо системы не позволяет определить внутренние силы, систему называют статически неопределимой. Для ее решения необходимо составить помимо уравнений статики дополнительные уравнения перемещений (деформаций), основанные на рассмотрении геометрической стороны деформации системы и использовании закона Гука.

2. ПРИМЕР РАСЧЕТА НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Задача 2.1. Построить эпюру продольных сил. Из условия прочности определить площадь опасного сечения и используя заданное соотношение площадей найти площади поперечных сечений остальных участков стержня. Построить эпюры нормальных напряжений и перемещений сечений по длине ступенчатого стержня, нагруженного, как показано на рис. 2.1, *а*. Принять материал стержня сталь Ст. 3 ($[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2{,}0 \cdot 10^5$ МПа).
Собственным весом стержня пренебречь.

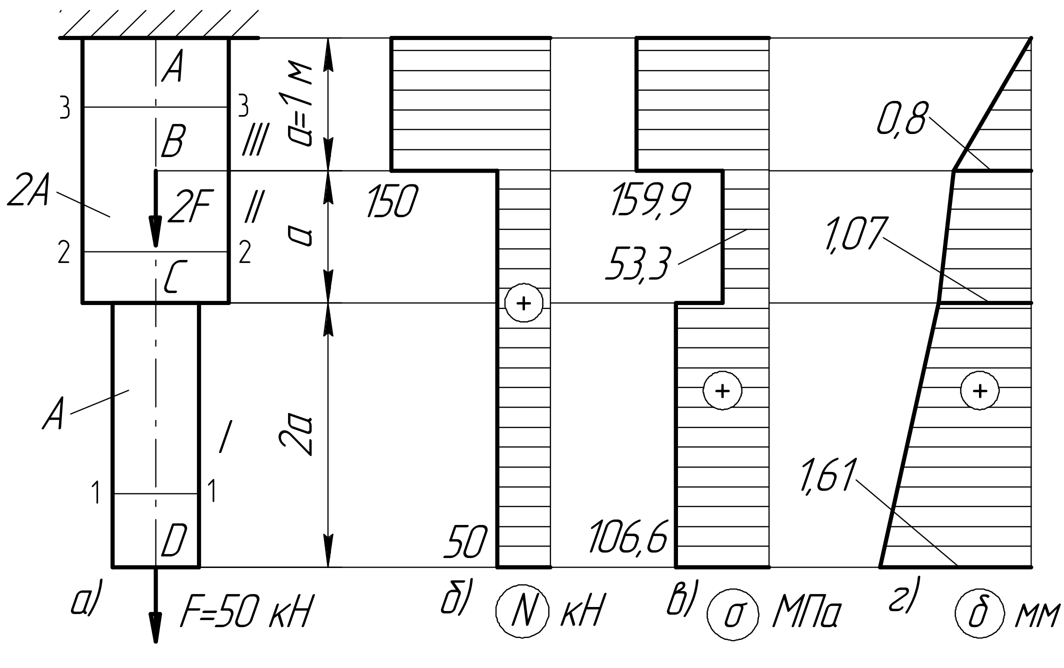

Рис. 2.1. Расчетная схема стержня и эпюры расчетных величин

Решение.

1. Разобьем стержень на участки, начиная от незакрепленного конца. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы и сечения, в которых изменяется площадь поперечного сечения. Таким образом, заданный стержень имеет три участка, обозначенные соответственно *I, II, III*. Границы участков, перемещения которых нужно определить, обозначим *A, B, C* и *D*.

2. Применяя метод сечений, определяем продольные силы в поперечных сечениях стержня по участкам по формуле (1.2).

Проведем произвольное сечение 1 – 1 на участке *I*, мысленно отбросим верхнюю часть и рассмотрим равновесие отсеченной нижней части. Продольная сила в этом сечении по формуле (1.2) равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих на рассматриваемую отсеченную часть. При этом, силу растягивающую стержень считаем положительной, а сжимающую – отрицательной.

$$N_1 = F = 50 \text{ кН}.$$

Выполняя аналогичные операции на других участках стержня, получим

$$N_2 = F = 50 \text{ кН}, \quad N_3 = F + 2F = 3F = 150 \text{ кН}.$$

3. По полученным данным строим график (эпюру), показывающий изменение продольной силы N по длине стержня. Для этого, проведя ось абсцисс эпюры параллельно оси стержня, откладываем в выбранном масштабе значения продольных сил по оси ординат. Так как в пределах одного или нескольких участков продольная сила не меняется, то эпюра ограничена прямыми линиями, параллельными оси абсцисс. Полученную эпюру принято штриховать штриховкой перпендикулярной оси стержня. При этом, каждая линия штриховки (ордината графика) в соответствующем масштабе выражает величину продольной силы в лежащем против нее поперечном сечении стержня (рис. 2.1, *б*).

4. Из условия прочности (1.14) определим размеры опасного сечения стержня.

Для этого найдем на каком участке в сечении возникают максимальные (по абсолютной величине) единичные нормальные напряжения, приняв площадь поперечного сечения первого участка $A_1 = 1$, а второго и третьего по заданному соотношению $A_2 = 2$, $A_3 = 2$. По формуле (1.3) единичные напряжения по участкам равны

$$\sigma_1' = \frac{N_1}{A_1} = \frac{50}{1} = 50 \text{ МПа}, \ \sigma_2' = \frac{N_2}{A_2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ МПа}, \ \sigma_3' = \frac{N_3}{A_3} = \frac{150}{2} = 75 \text{ МПа}.$$

Таким образом, опасное сечение находится на участке *III* и из условия прочности следует определять площадь поперечного сечения A_3 этого участка.

$$A_3 \geq \frac{|N_3|}{[\sigma]} = \frac{150 \cdot 10^3}{160} = 937{,}5 \text{ мм}^2.$$

Полученное значение площади округляем до целого числа. Принимаем A_3 = 938 мм^2. Значения площадей поперечных сечений других участков определяем по заданному соотношению: $A_2 = A_3 = 938$ мм^2, $A_1 = A_3/2 = 469$ мм^2.

5. По формуле (1.3) определяем нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях участков стержня:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{50 \cdot 10^3}{469} = 106{,}6 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{50 \cdot 10^3}{938} = 53{,}3 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{150 \cdot 10^3}{938} = 159{,}9 \text{ МПа}.$$

6. По полученным данным аналогично эпюре продольных сил, строим эпюру нормальных напряжений (рис. 2.1, *в*).

7. Определяем перемещения границ участков стержня, начиная от защемленного верхнего конца по формуле (1.7).

$$\delta_A = 0 \text{ (сечение закреплено)},$$

$$\delta_B = \Delta l_{AB} = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 938} = 0{,}8 \; мм,$$

$$\delta_C = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = \delta_B + \frac{N_2 \cdot l_2}{EA_2} = 0{,}8 + \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 938} = 0{,}8 + 0{,}27 = 1{,}07 \; мм,$$

$$\delta_D = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = \delta_C + \frac{N_1 \cdot l_1}{EA_1} = 1{,}07 + \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 469} = 1{,}07 + 0{,}54 =$$

$$= 1{,}61 мм.$$

8. По полученным данным строим эпюру перемещений (рис. 2.1, *г*). Полная продольная деформация стержня $\Delta l_{\text{полн}} = 1{,}61$ *мм*.

Решите любую задачу, любого варианта из представленных ниже.

З А Д А Ч А № 1

РАСЧЕТ СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ - СЖАТИЕ

1. Условия задачи.

Для заданного металлического стержня требуется:

1) построить эпюру продольных сил N_i ;
2) из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать площади A_i поперечных сечений стержня на каждой ступени. Величину допускаемых нормальных напряжений принять равной [σ] = 100 МПа;
3) построить эпюру нормальных напряжений σ_i ;
4) построить эпюру перемещений δ_i поперечных сечений, приняв модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ Мпа и определить полное удлинение (укорочение) стержня $\Delta l_{полн}$.

Собственным весом стержня пренебречь.

2. Таблица числовых вариантов.

Параметры задачи	**Числовые варианты**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
F, кН	20	30	50	40	60	25	35	55	45	65
l, м	0,6	0,5	0,3	0,4	0,2	0,4	0,3	0,2	0,5	0,3

Расчетные схемы стержней