

Решения задач по общей и социально-экономической статистике

Тема 1. Предмет и метод статистики. Сводка, группировка, ряд распределения

Задача 1.1.

Имеется информация о количестве книг, полученных студентами по абонементу за прошедший учебный год.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 4 | 7 | 6 | 5 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 3 | 6 | 5 | 4 | 7 | 6 | 6 | 5 | 3 |
| 2 | 4 | 2 | 3 | 5 | 7 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| 4 | 5 | 6 | 6 | 10 | 4 | 3 | 3 | 2 | 3 |

Построить вариационный, ранжированный, дискретный ряд распределения, обозначив элементы ряда.

Решение.

Выделяют три формы вариационного ряда: ранжированный ряд, дискретный ряд и интервальный ряд.

Ранжированный ряд – это распределение отдельных единиц совокупности в порядке возрастания или убывания исследуемого признака. Ранжированный ряд с обозначением номеров элементов ряда в исходной выборке приведен в табл. 1.

Таблица 1

| № | x |
|----|-----|
| 1 | 2 |
| 7 | 2 |
| 8 | 2 |
| 21 | 2 |
| 23 | 2 |
| 30 | 2 |
| 39 | 2 |
| 9 | 3 |
| 12 | 3 |
| 20 | 3 |
| 24 | 3 |
| 28 | 3 |
| 29 | 3 |
| 37 | 3 |
| 38 | 3 |

| | |
|----|----|
| 40 | 3 |
| 2 | 4 |
| 3 | 4 |
| 10 | 4 |
| 11 | 4 |
| 15 | 4 |
| 22 | 4 |
| 27 | 4 |
| 31 | 4 |
| 36 | 4 |
| 6 | 5 |
| 14 | 5 |
| 19 | 5 |
| 25 | 5 |
| 32 | 5 |
| 5 | 6 |
| 13 | 6 |
| 17 | 6 |
| 18 | 6 |
| 33 | 6 |
| 34 | 6 |
| 4 | 7 |
| 16 | 7 |
| 26 | 7 |
| 35 | 10 |

Дискретным вариационным рядом распределения называется ранжированная совокупность вариантов x_i с соответствующими им частотами или частностями.

Дискретный вариационный ряд для исходной выборки приведен в табл. 2.

Таблица 2

| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|----|
| x_i | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 |
| n_i | 7 | 9 | 9 | 5 | 6 | 3 | 1 |

Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или частостями попаданий в каждый из них значений величины.

Интервальный вариационный ряд для числа интервалов $L = 3$ приведен в табл. 3.

Таблица 3

| | | | |
|---|-----------------|-------|---------------|
| № | $x_i - x_{i+1}$ | n_i | $w_i = n_i/n$ |
| 1 | 2 – 4,6667 | 25 | 0,625 |
| 2 | 4,6667 – 7,3333 | 14 | 0,35 |

| | | | |
|---|-------------|----|-------|
| 3 | 7,3333 – 10 | 1 | 0,025 |
| | Всего | 40 | 1 |

Задача 1.2.

Имеются данные о стоимости основных фондов у 50 предприятий, тыс. руб.:

| | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 18,8 | 16,0 | 12,6 | 20,0 | 30,0 | 16,4 | 14,6 | 18,4 | 11,6 | 17,4 |
| 10,4 | 26,4 | 16,2 | 15,0 | 23,6 | 29,2 | 17,0 | 15,6 | 21,0 | 12,0 |
| 10,2 | 13,6 | 16,6 | 15,4 | 15,8 | 18,0 | 20,2 | 16,0 | 24,0 | 28,0 |
| 16,4 | 19,6 | 27,0 | 24,8 | 11,0 | 15,8 | 18,4 | 21,6 | 24,2 | 24,8 |
| 25,8 | 25,2 | 13,4 | 19,4 | 16,6 | 21,6 | 30,0 | 14,0 | 26,0 | 19,0 |

Построить ряд распределения, выделив 5 групп предприятий (с равными интервалами).

Решение.

Определим размах выборки: $R = x_{\max} - x_{\min} = 30 - 10,2 = 19,8$.

Отсюда величина интервала группирования равна

$$h = \frac{R}{L} = \frac{19,8}{5} = 3,96.$$

Ряд распределения приведен в табл. 4.

Таблица 4

| № | $x_i - x_{i+1}$ | n_i | $w_i = n_i/n$ |
|---|-----------------|-------|---------------|
| 1 | 10,2 – 14,16 | 9 | 0,18 |
| 2 | 14,16 – 18,12 | 16 | 0,32 |
| 3 | 18,12 – 22,08 | 11 | 0,22 |
| 4 | 22,08 – 26,04 | 8 | 0,16 |
| 5 | 26,04 – 30 | 6 | 0,12 |
| | Всего | 50 | 1 |

Задача 1.3.

Имеются следующие данные 25 предприятий легкой промышленности по величине балансовой прибыли и объему произведенной продукции:

| № предприятия | Объем произведенной продукции, млн. руб. | Валовая прибыль, млн. руб. |
|---------------|--|----------------------------|
| 1 | 653 | 45 |
| 2 | 305 | 11 |
| 3 | 508 | 33 |
| 4 | 482 | 27 |
| 5 | 766 | 55 |
| 6 | 800 | 64 |

| | | |
|----|-----|----|
| 7 | 343 | 14 |
| 8 | 545 | 37 |
| 9 | 603 | 41 |
| 10 | 798 | 59 |
| 11 | 474 | 28 |
| 12 | 642 | 43 |
| 13 | 402 | 23 |
| 14 | 552 | 35 |
| 15 | 732 | 54 |
| 16 | 412 | 26 |
| 17 | 798 | 58 |
| 18 | 501 | 30 |
| 19 | 602 | 41 |
| 20 | 558 | 36 |
| 21 | 308 | 12 |
| 22 | 700 | 50 |
| 23 | 496 | 29 |
| 24 | 577 | 38 |
| 25 | 688 | 49 |

С целью изучения зависимости между объемом произведенной продукции и валовой прибылью произведите группировку предприятий по объему произведенной продукции (факторный признак), образовав пять групп предприятий с равными интервалами.

По каждой группе и совокупности предприятий подсчитайте:

- 1) число предприятий;
- 2) объем произведенной продукции – всего и в среднем на одно предприятие;
- 3) валовую прибыль – всего и в среднем на одно предприятие.

Результаты представьте в виде групповой таблицы. Сделайте краткие выводы.

Решение.

Определяем шаг интервала по формуле

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{L},$$

где $L = 5$ – количество групп; $x_{\max} = 800$ млн. руб. – максимальное значение объема произведенной продукции; $x_{\min} = 305$ млн. руб. – минимальное значение объема произведенной продукции. Отсюда

$$h = \frac{800 - 305}{5} = 99 \text{ млн. руб.}$$

Определяем границы групп:

I: $305 + 99 = 404$

II: $404 + 99 = 503$

III: $503 + 99 = 602$

IV: $602 + 99 = 701$

V: $701 + 99 = 800$

Составляем рабочую таблицу.

Таблица 1

Рабочая таблица

| № п/п | Группы предприятий по объему произведенной продукции, млн. руб. | № предприятия | Объем произведенной продукции, млн. руб. | Валовая прибыль, млн. руб. |
|--------|---|---------------|--|----------------------------|
| I | 305 - 404 | 2 | 305 | 11 |
| | | 21 | 308 | 12 |
| | | 7 | 343 | 14 |
| | | 13 | 402 | 23 |
| Итого: | | 4 | 1358 | 60 |
| II | 404 - 503 | 16 | 412 | 26 |
| | | 11 | 474 | 28 |
| | | 4 | 482 | 27 |
| | | 23 | 496 | 29 |
| Итого: | | 18 | 501 | 30 |
| Итого: | | 5 | 2365 | 140 |
| III | 503 - 602 | 3 | 508 | 33 |
| | | 8 | 545 | 37 |
| | | 14 | 552 | 35 |
| | | 20 | 558 | 36 |
| | | 24 | 577 | 38 |
| Итого: | | 19 | 602 | 41 |
| Итого: | | 6 | 3342 | 220 |
| IV | 602 - 701 | 9 | 603 | 41 |
| | | 12 | 642 | 43 |
| | | 1 | 653 | 45 |
| | | 25 | 688 | 49 |
| | | 22 | 700 | 50 |
| Итого: | | 5 | 3286 | 228 |
| V | 701 - 800 | 15 | 732 | 54 |
| | | 5 | 766 | 55 |
| | | 10 | 798 | 59 |
| | | 17 | 798 | 58 |
| | | 6 | 800 | 64 |
| Итого: | | 5 | 3894 | 290 |

По рабочей таблице составим итоговую групповую таблицу.

Таблица 2

Групповая таблица

| № п/п | Группы предприятий по объему произведенной продукции, млн. руб. | Число предприятий | Объем произведенной продукции, млн. руб. | | Валовая прибыль, млн. руб. | |
|----------|---|-------------------|--|-----------|----------------------------|-----------|
| | | | Всего | В среднем | Всего | В среднем |
| I | 305 - 404 | 4 | 1358 | 339,5 | 60 | 15 |
| II | 404 - 503 | 5 | 2365 | 473 | 140 | 28 |
| III | 503 - 602 | 6 | 3342 | 557 | 220 | 36,67 |
| IV | 602 - 701 | 5 | 3286 | 657,2 | 228 | 45,6 |
| V | 701 - 800 | 5 | 3894 | 778,8 | 290 | 58 |
| В целом: | | 25 | 14245 | 569,8 | 938 | 37,52 |

Выводы. С увеличением объема произведенной продукции имеем рост валовой прибыли.

Задача 1.4.

По ряду предприятий легкой промышленности получены данные, представленные в таблице. Произведите группировку предприятий по размеру основных средств, образуя 6 групп с равными интервалами. По каждой группе подсчитайте:

1. число предприятий,
2. объем основных средств,
3. средний размер основных средств одного предприятия,
4. объем произведенной продукции,
5. выпуск продукции на 1000 рублей основных средств.

| № п/п | Среднесписочное число рабочих | Основные средства, тыс. руб | Объем произведенной продукции за год, млн. руб. | № п/п | Среднесписочное число рабочих | Основные средства, тыс. руб | Объем произведенной продукции за год, млн. руб. |
|-------|-------------------------------|-----------------------------|---|-------|-------------------------------|-----------------------------|---|
| 1 | 100 | 369 | 560 | 16 | 102 | 256 | 410 |
| 2 | 140 | 473 | 760 | 17 | 96 | 220 | 370 |
| 3 | 94 | 251 | 440 | 18 | 98 | 240 | 330 |
| 4 | 83 | 280 | 520 | 19 | 84 | 106 | 210 |
| 5 | 157 | 590 | 800 | 20 | 76 | 180 | 160 |
| 6 | 195 | 1200 | 960 | 21 | 96 | 250 | 300 |
| 7 | 54 | 160 | 310 | 22 | 85 | 230 | 240 |
| 8 | 120 | 480 | 570 | 23 | 110 | 370 | 240 |
| 9 | 180 | 970 | 820 | 24 | 112 | 350 | 230 |
| 10 | 125 | 400 | 440 | 25 | 67 | 125 | 150 |

| | | | | | | | |
|----|-----|-----|-----|----|-----|------|-----|
| 11 | 43 | 120 | 100 | 26 | 63 | 140 | 130 |
| 12 | 256 | 900 | 990 | 27 | 250 | 1150 | 920 |
| 13 | 182 | 670 | 870 | 28 | 212 | 790 | 650 |
| 14 | 124 | 500 | 410 | 29 | 184 | 290 | 340 |
| 15 | 110 | 379 | 310 | 30 | 137 | 275 | 320 |

Результаты расчета оформите в таблицы. Сделайте выводы.

Решение.

Составим таблицу с требуемыми показателями, выполнив упорядочение данных по возрастанию основных средств (табл. 1).

Таблица 1

| № п/п | Основные средства, тыс. руб | Объем произведенной продукции за год, млн. руб. | Выпуск продукции на 1000 рублей основных средств за год, млн. руб. |
|-------|-----------------------------|---|--|
| 19 | 106 | 210 | 1,981 |
| 11 | 120 | 100 | 0,833 |
| 25 | 125 | 150 | 1,200 |
| 26 | 140 | 130 | 0,929 |
| 7 | 160 | 310 | 1,938 |
| 20 | 180 | 160 | 0,889 |
| 17 | 220 | 370 | 1,682 |
| 22 | 230 | 240 | 1,043 |
| 18 | 240 | 330 | 1,375 |
| 21 | 250 | 300 | 1,200 |
| 3 | 251 | 440 | 1,753 |
| 16 | 256 | 410 | 1,602 |
| 30 | 275 | 320 | 1,164 |
| 4 | 280 | 520 | 1,857 |
| 29 | 290 | 340 | 1,172 |
| 24 | 350 | 230 | 0,657 |
| 1 | 369 | 560 | 1,518 |
| 23 | 370 | 240 | 0,649 |
| 15 | 379 | 310 | 0,818 |
| 10 | 400 | 440 | 1,100 |
| 2 | 473 | 760 | 1,607 |
| 8 | 480 | 570 | 1,188 |
| 14 | 500 | 410 | 0,820 |
| 5 | 590 | 800 | 1,356 |
| 13 | 670 | 870 | 1,299 |
| 28 | 790 | 650 | 0,823 |
| 12 | 900 | 990 | 1,100 |
| 9 | 970 | 820 | 0,845 |
| 27 | 1150 | 920 | 0,800 |
| 6 | 1200 | 960 | 0,800 |

Определяем размах выборки по основным средствам:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 1200 - 106 = 1094.$$

Отсюда величина интервала группирования равна

$$h = \frac{R}{L} = \frac{1094}{6} = 182,33 \text{ тыс. руб.}$$

Определяем границы групп:

I: $106 + 182,33 = 288,33$

II: $288,33 + 182,33 = 470,67$

III: $470,67 + 182,33 = 653$

IV: $653 + 182,33 = 835,33$

V: $835,33 + 182,33 = 1017,67$

VI: $1017,67 + 182,33 = 1200$

Результаты группировки по размеру основных средств приведены в табл. 2.

Таблица 2

| № п/п | Группы предприятий по основным средствам, тыс. руб. | Число предприятий | Объем основных средств, тыс. руб. | | Объем произведенной продукции за год, млн. руб. | | Выпуск продукции на 1000 рублей основных средств, млн. руб. |
|---------|---|-------------------|-----------------------------------|-------------------------------|---|-------------------------------|---|
| | | | Всего | В среднем на одно предприятие | Всего | В среднем на одно предприятие | |
| I | 106 - 288,33 | 14 | 2833 | 202,36 | 3990 | 285,00 | 1,41 |
| II | 288,33 - 470,67 | 6 | 2158 | 359,67 | 2120 | 353,33 | 0,98 |
| III | 470,67 - 653 | 4 | 2043 | 510,75 | 2540 | 635,00 | 1,24 |
| IV | 653 - 835,33 | 2 | 1460 | 730,00 | 1520 | 760,00 | 1,04 |
| V | 835,33 - 1017,67 | 2 | 1870 | 935,00 | 1810 | 905,00 | 0,97 |
| VI | 1017,67 - 1200 | 2 | 2350 | 1175,00 | 1880 | 940,00 | 0,80 |
| В целом | | 30 | 12714 | 423,80 | 13860 | 462,00 | 1,09 |

Выводы.

С ростом основных средств наблюдается рост объема произведенной продукции. Однако выпуск продукции на 1000 рублей основных средств при этом имеет тенденцию к снижению.

Задача 1.5.

На основании исходных данных, представленных в таблице 1, произвести:

а) Структурную группировку предприятий отрасли по признаку "стоимость основных производственных фондов". Рассчитать число групп и величину интервала;

б) Аналитическую группировку и выявить характер зависимости между стоимостью основных производственных фондов (факторный признак) и выпуском продукции.

Каждую группу и в целом совокупность охарактеризовать следующими показателями:

- число предприятий;
- среднегодовая стоимость основных средств всего и в среднем на одно предприятие;
- стоимость продукции всего и в среднем на одно предприятие;
- фондоотдача основных средств.

Результаты расчетов представить в виде таблицы. Сделать выводы.

Таблица 1. Данные за отчетный год по работе предприятий отрасли

| № предприятия | Среднегодовая стоимость ОПФ, млн. руб. | Численность работников | Выпуск продукции, млн. руб. | Прибыль, млн. руб. | Потери рабочего времени, чел.-дн. |
|---------------|--|------------------------|-----------------------------|--------------------|-----------------------------------|
| 1 | 54,6 | 340 | 65 | 15,7 | 66 |
| 2 | 73,6 | 700 | 78 | 18 | 44 |
| 3 | 42 | 100 | 41 | 12,1 | 91 |
| 4 | 46 | 280 | 54 | 13,8 | 78 |
| 5 | 62 | 410 | 66 | 15,5 | 57,4 |
| 6 | 68,4 | 650 | 80 | 17,9 | 42 |
| 7 | 36 | 170 | 45 | 12,8 | 100 |
| 8 | 49,6 | 260 | 57 | 14,2 | 79,8 |
| 9 | 62,4 | 380 | 67 | 15,9 | 57 |
| 10 | 71,2 | 680 | 81 | 17,6 | 38 |
| 11 | 78,8 | 800 | 92 | 18,2 | 23,1 |
| 12 | 51 | 210 | 48 | 13 | 112 |
| 13 | 60,8 | 230 | 59 | 16,5 | 72 |
| 14 | 69 | 400 | 68 | 16,2 | 55,7 |
| 15 | 70,4 | 710 | 83 | 16,7 | 36 |
| 16 | 50 | 340 | 52 | 14,6 | 85,2 |
| 17 | 55,6 | 290 | 62 | 14,8 | 72,8 |
| 18 | 58,4 | 520 | 69 | 16,1 | 54,6 |
| 19 | 83,5 | 720 | 85 | 16,7 | 37 |
| 20 | 75,2 | 420 | 70 | 15,8 | 56,4 |

Решение.

1. На основе таблицы 1 составим таблицу 2 с необходимыми признаками. Фондоотдачу определим как отношение стоимости продукции к среднегодовой стоимости основных производственных фондов.

Таблица 2

| № предприятия | Среднегодовая стоимость ОПФ, млн. руб. | Выпуск продукции, млн. руб. | Фондоотдача |
|---------------|--|-----------------------------|-------------|
| 1 | 54,6 | 65 | 1,190 |
| 2 | 73,6 | 78 | 1,060 |
| 3 | 42 | 41 | 0,976 |
| 4 | 46 | 54 | 1,174 |
| 5 | 62 | 66 | 1,065 |
| 6 | 68,4 | 80 | 1,170 |
| 7 | 36 | 45 | 1,250 |
| 8 | 49,6 | 57 | 1,149 |
| 9 | 62,4 | 67 | 1,074 |
| 10 | 71,2 | 81 | 1,138 |
| 11 | 78,8 | 92 | 1,168 |
| 12 | 51 | 48 | 0,941 |
| 13 | 60,8 | 59 | 0,970 |
| 14 | 69 | 68 | 0,986 |
| 15 | 70,4 | 83 | 1,179 |
| 16 | 50 | 52 | 1,040 |
| 17 | 55,6 | 62 | 1,115 |
| 18 | 58,4 | 69 | 1,182 |
| 19 | 83,5 | 85 | 1,018 |
| 20 | 75,2 | 70 | 0,931 |

Рассчитаем число групп по формуле Старджесса

$$L = 1 + [3,322 \cdot \lg n] = 1 + [3,322 \cdot \lg 20] = 5.$$

Тогда величина интервала группирования по факторному признаку X "стоимость основных производственных фондов" равна

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{L} = \frac{83,5 - 36}{5} = 9,5 \text{ млн. руб.}$$

Определяем границы групп:

$$\text{I: } 36 + 9,5 = 45,5$$

$$\text{II: } 45,5 + 9,5 = 55$$

$$\text{III: } 55 + 9,5 = 64,5$$

$$\text{IV: } 64,5 + 9,5 = 74$$

$$\text{V: } 74 + 9,5 = 83,5$$

Составляем структурную группировку предприятий по признаку "стоимость основных производственных фондов" (табл. 3).

Таблица 3

| № п/п | Группы предприятий по среднегодовой стоимости ОПФ, млн. руб. | №№ предприятий | Среднегодовая стоимость ОПФ, млн. руб. | Выпуск продукции, млн. руб. | Фондоотдача |
|-------|--|----------------|--|-----------------------------|-------------|
| I | 36 - 45,5 | 7 | 36 | 45 | 1,250 |
| | | 3 | 42 | 41 | 0,976 |
| | Итого: | 2 | 78 | 86 | 1,103 |
| II | 45,5 - 55 | 4 | 46 | 54 | 1,174 |
| | | 8 | 49,6 | 57 | 1,149 |
| | | 16 | 50 | 52 | 1,040 |
| | | 12 | 51 | 48 | 0,941 |
| | | 1 | 54,6 | 65 | 1,190 |
| | Итого: | 5 | 251,2 | 276 | 1,099 |
| III | 55 - 64,5 | 17 | 55,6 | 62 | 1,115 |
| | | 18 | 58,4 | 69 | 1,182 |
| | | 13 | 60,8 | 59 | 0,970 |
| | | 5 | 62 | 66 | 1,065 |
| | | 9 | 62,4 | 67 | 1,074 |
| | Итого: | 5 | 299,2 | 323 | 1,080 |
| IV | 64,5 - 74 | 6 | 68,4 | 80 | 1,170 |
| | | 14 | 69 | 68 | 0,986 |
| | | 15 | 70,4 | 83 | 1,179 |
| | | 10 | 71,2 | 81 | 1,138 |
| | | 2 | 73,6 | 78 | 1,060 |
| | Итого: | 5 | 352,6 | 390 | 1,106 |
| V | 74 - 83,5 | 20 | 75,2 | 70 | 0,931 |
| | | 11 | 78,8 | 92 | 1,168 |
| | | 19 | 83,5 | 85 | 1,018 |
| | Итого: | 3 | 237,5 | 247 | 1,040 |

Составляем аналитическую группировку предприятий по признаку "стоимость основных производственных фондов" (табл. 4).

Таблица 4

| № п/п | Группы предприятий по среднегодовой стоимости ОПФ, млн. руб. | Число предприятий | Среднегодовая стоимость ОПФ, млн. руб. | | Выпуск продукции, млн. руб. | | Средняя фондоотдача |
|-------|--|-------------------|--|-----------|-----------------------------|-----------|---------------------|
| | | | Всего | В среднем | Всего | В среднем | |
| I | 36 - 45,5 | 2 | 78 | 39,00 | 86 | 43,00 | 1,103 |

| | | | | | | | |
|--------|-----------|----|--------|-------|------|-------|-------|
| II | 45,5 - 55 | 5 | 251,2 | 50,24 | 276 | 55,20 | 1,099 |
| III | 55 - 64,5 | 5 | 299,2 | 59,84 | 323 | 64,60 | 1,080 |
| IV | 64,5 - 74 | 5 | 352,6 | 70,52 | 390 | 78,00 | 1,106 |
| V | 74 - 83,5 | 3 | 237,5 | 79,17 | 247 | 82,33 | 1,040 |
| Всего: | | 20 | 1218,5 | 60,93 | 1322 | 66,10 | 1,085 |

Выводы.

С увеличением стоимости основных производственных фондов наблюдается:

- рост выпуска продукции;
- снижение фондоотдачи.

Задача 1.6.

В таблице приведены данные о зарегистрированном уставном капитале 15 банков с иностранным участием и доле нерезидентов в нем по состоянию на 1 июля 2004 года.

| Наименование банка | Уставный капитал, млн. руб. | Доли нерезидентов в уставном капитале, % |
|--------------------|-----------------------------|--|
| Банк 1 | 4600 | 100,0 |
| Банк 2 | 1160 | 25,0 |
| Банк 3 | 3800 | 91,0 |
| Банк 4 | 650 | 11,8 |
| Банк 5 | 6770 | 15,0 |
| Банк 6 | 100 | 19,9 |
| Банк 7 | 1890 | 60,0 |
| Банк 8 | 1482 | 0,3 |
| Банк 9 | 103 | 0,6 |
| Банк 10 | 3100 | 100,0 |
| Банк 11 | 550 | 17,0 |
| Банк 12 | 250 | 0,7 |
| Банк 13 | 6 | 0,8 |
| Банк 14 | 2930 | 100,0 |
| Банк 15 | 1080 | 0,7 |

Сгруппируйте банки по доле нерезидентов в уставном капитале, выделив группы, в которых она составляет 100%, от 20 до 100%, от 1 до 20%, до 1%.

Рассчитайте по каждой группе число банков, их удельный вес, совокупный и средний уставный капитал по каждой группе и по банку в целом.

Результаты оформите в виде таблицы, и укажите ее вид.

Решение.

Сгруппируем исходную таблицу по доле нерезидентов в уставном капитале, выделив группы, в которых она составляет 100%, от 20% до 100%, от 1% до 20%, до 1%. В результате получим четыре группы банков. В первую группу попали 3 банка (1-й, 10-й, 14-й), во вторую – 3 банка (2-й, 3-й, 7-й), в третью – 4 банка (4-й, 5-й, 6-й, 11-й), в четвертую – 5 банков (8-й, 9-й, 12-й, 13-й, 15-й). Результаты группировки оформим в виде следующей таблицы, являющейся типологической группировкой.

| Доли нерезидентов в уставном капитале, % | Наименование банка | Уставный капитал, млн. руб. | Средний уставный капитал, млн. руб. | Удельный вес, % |
|--|--------------------|-----------------------------|-------------------------------------|-----------------|
| Группа 1, 100% | Банк 1 | 4600 | 4600 | 16,16 |
| | Банк 10 | 3100 | 3100 | 10,89 |
| | Банк 14 | 2930 | 2930 | 10,29 |
| | Всего 3 банка | 10630 | 3543,33 | 37,34 |
| Группа 2, от 20% до 100% | Банк 3 | 3800 | 3800 | 13,35 |
| | Банк 7 | 1890 | 1890 | 6,64 |
| | Банк 2 | 1160 | 1160 | 4,07 |
| | Всего 3 банка | 6850 | 2283,33 | 24,06 |
| Группа 3, от 1% до 20% | Банк 6 | 100 | 100 | 0,35 |
| | Банк 11 | 550 | 550 | 1,93 |
| | Банк 5 | 6770 | 6770 | 23,78 |
| | Банк 4 | 650 | 650 | 2,28 |
| | Всего 4 банка | 8070 | 2017,50 | 28,34 |
| Группа 4, менее 1% | Банк 13 | 6 | 6 | 0,02 |
| | Банк 12 | 250 | 250 | 0,88 |
| | Банк 15 | 1080 | 1080 | 3,79 |
| | Банк 9 | 103 | 103 | 0,36 |
| | Банк 8 | 1482 | 1482 | 5,21 |
| | Всего 5 банков | 2921 | 584,20 | 10,26 |

Составим итоговую таблицу:

| Доли нерезидентов в уставном капитале, % | Количество банков | Суммарный уставный капитал, млн. руб. | Средний уставный капитал, млн. руб. | Удельный вес, % |
|--|-------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|-----------------|
| 100% | 3 | 10630 | 3543,33 | 37,34 |
| 20% - 100% | 3 | 6850 | 2283,33 | 24,06 |
| 1% - 20% | 4 | 8070 | 2017,50 | 28,34 |
| Менее 1% | 5 | 2921 | 584,20 | 10,26 |

Задача 1.7.

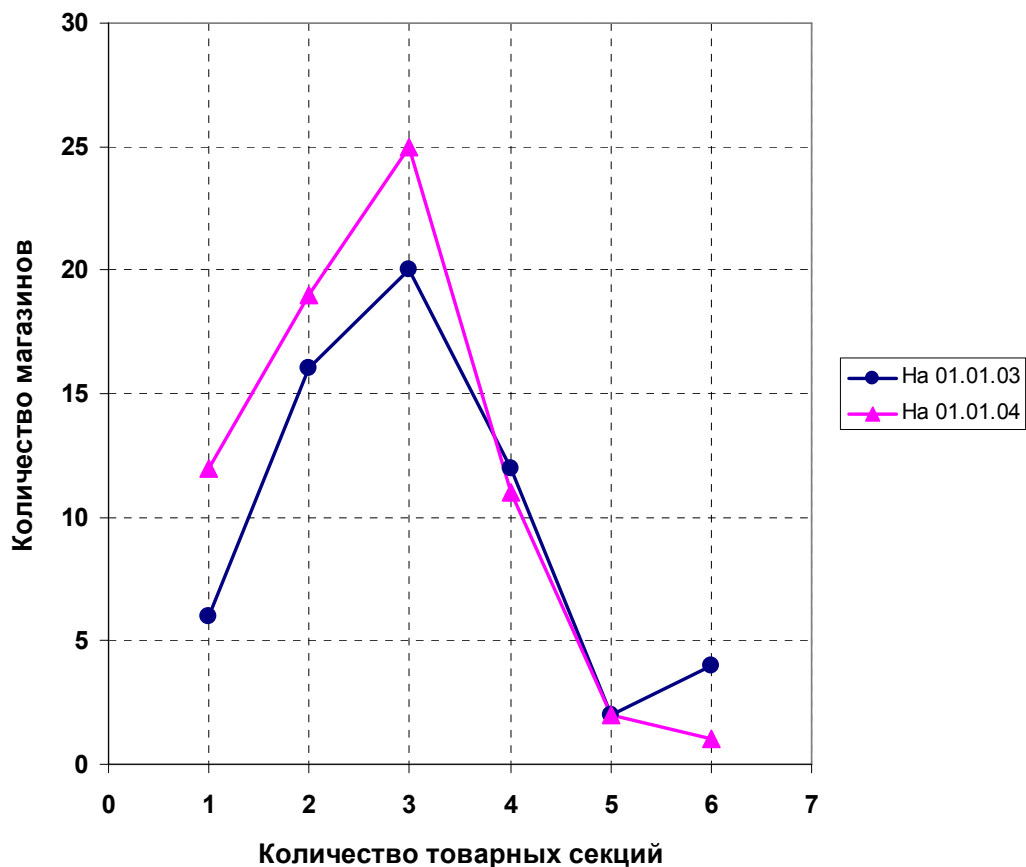
В таблице приведено распределение магазинов района по количеству товарных секций.

| Количество товарных секций | На 01.01.03 | | На 01.01.04 | |
|----------------------------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|
| | Количество магазинов | % к итогу | Количество магазинов | % к итогу |
| 1 | 6 | 10 | 12 | 17 |
| 2 | 16 | 27 | 19 | 27 |
| 3 | 20 | 33 | 25 | 36 |
| 4 | 12 | 20 | 11 | 16 |
| 5 | 2 | 7 | 2 | 3 |
| 6 | 4 | 3 | 1 | 1 |
| Итого | 60 | 100 | 70 | 100 |

Изобразите приведенное распределение графически в виде полигона.

Решение.

Полигоны распределения количества магазинов в зависимости от числа товарных секций на 01.01.03 и 01.01.04 приведены на рисунке.



Задача 1.8.

Имеются следующие выборочные данные (выборка 10%-ная механическая) о стоимости основных производственных фондов и выпуске продукции по 30 однородным предприятиям одной из отраслей промышленности за год, млн руб.:

Таблица 1

Исходные данные

| № предприятия п/п | Среднегодовая стоимость основных производственных фондов, млн. руб. | Выпуск продукции, млн. руб. |
|------------------------------|--|--|
| 1 | 31,6 | 31 |
| 2 | 25 | 27,5 |
| 3 | 15 | 25 |
| 4 | 32,5 | 34 |
| 5 | 42 | 41 |
| 6 | 38 | 36 |
| 7 | 29 | 28,6 |
| 8 | 19 | 24 |
| 9 | 40 | 40 |
| 10 | 49 | 46 |
| 11 | 31,4 | 35 |
| 12 | 28 | 29 |
| 13 | 20 | 20 |
| 14 | 31,5 | 33,6 |
| 15 | 26 | 28,9 |
| 16 | 35 | 37 |
| 17 | 30 | 30 |
| 18 | 37 | 37 |
| 19 | 31 | 33,8 |
| 20 | 24 | 24 |
| 21 | 31 | 33 |
| 22 | 32 | 32,6 |
| 23 | 43 | 42 |
| 24 | 32 | 30 |
| 25 | 41 | 39 |
| 26 | 45 | 48 |
| 27 | 33 | 35 |
| 28 | 40 | 41 |
| 29 | 55 | 50 |
| 30 | 43 | 43 |

По исходным данным:

1. Постройте статистический ряд распределения предприятий по признаку – среднегодовая стоимость основных производственных фондов, образовав, пять групп с равными интервалами.

2. Постройте графики полученного ряда распределения. Графически определите значения моды и медианы.

3. Рассчитайте характеристики интервального ряда распределения: среднюю арифметическую, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, моду и медиану.

4. Вычислите среднюю арифметическую по исходным данным, сравните ее с аналогичным показателем, рассчитанным в п.3 для интервального ряда распределения. Объясните причину их расхождения.

Сделайте выводы по результатам выполнения задания.

Решение.

1. Определяем шаг интервала:

$$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n},$$

где n – количество групп; x_{\max} – максимальное значение среднегодовая стоимость основных производственных фондов, млн. руб.; x_{\min} – минимальное значение фондоотдачи, млн. руб.

$$i = \frac{55 - 15}{5} = 8 \text{ млн. руб.}$$

Определяем границы групп:

$$\text{I: } 15 + 8 = 23$$

$$\text{II: } 23 + 8 = 31$$

$$\text{III: } 31 + 8 = 39$$

$$\text{IV: } 39 + 8 = 47$$

$$\text{V: } 47 + 8 = 55$$

Составляем рабочую таблицу.

Таблица 2

Рабочая таблица

| № п/п | Группы предприятий по среднегодовой стоимости основных производственных фондов, млн. руб. | № предприятия п/п | Среднегодовая стоимость основных производственных фондов, млн. руб. | Выпуск продукции, млн. руб. |
|-------|---|-------------------|---|-----------------------------|
|-------|---|-------------------|---|-----------------------------|

| | | | | |
|--------|---------|--------|------|------|
| I | 15 - 23 | 3 | 15 | 25 |
| | | 8 | 19 | 24 |
| | | 13 | 20 | 20 |
| Итого: | | 3 | 54 | 69 |
| II | 23 - 31 | 20 | 24 | 24 |
| | | 2 | 25 | 27,5 |
| | | 15 | 26 | 28,9 |
| | | 12 | 28 | 29 |
| | | 7 | 29 | 28,6 |
| | | 17 | 30 | 30 |
| Итого: | | 6 | 162 | 168 |
| III | 31 - 39 | 19 | 31 | 33,8 |
| | | 21 | 31 | 33 |
| | | 11 | 31,4 | 35 |
| | | 14 | 31,5 | 33,6 |
| | | 1 | 31,6 | 31 |
| | | 22 | 32 | 32,6 |
| | | 24 | 32 | 30 |
| | | 4 | 32,5 | 34 |
| | | 27 | 33 | 35 |
| | | 16 | 35 | 37 |
| | | 18 | 37 | 37 |
| | | 6 | 38 | 36 |
| | | Итого: | | 12 |
| IV | 39 - 47 | 9 | 40 | 40 |
| | | 28 | 40 | 41 |
| | | 25 | 41 | 39 |
| | | 5 | 42 | 41 |
| | | 23 | 43 | 42 |
| | | 30 | 43 | 43 |
| | | 26 | 45 | 48 |
| Итого: | | 7 | 294 | 294 |
| V | 47 - 55 | 10 | 49 | 46 |
| | | 29 | 55 | 50 |
| Итого: | | 2 | 104 | 96 |
| Всего: | | 30 | 1010 | 1035 |

Строим ряд распределения по признаку среднегодовой стоимости основных производственных фондов.

Таблица 3

Ряд распределения

| № п/п | Группы | Показатели | Накопленные |
|-------|--------|------------|-------------|
|-------|--------|------------|-------------|

| | предприятий по среднегодовой стоимости основных производственных фондов, млн. руб. | Абсолютное число | В % к итогу | частоты |
|---------------|---|-------------------------|--------------------|----------------|
| I | 15 - 23 | 3 | 10,00 | 3 |
| II | 23 - 31 | 6 | 20,00 | 9 |
| III | 31 - 39 | 12 | 40,00 | 21 |
| IV | 39 - 47 | 7 | 23,33 | 28 |
| V | 47 - 55 | 2 | 6,67 | 30 |
| Итого: | | 30 | 100 | — |

$$\text{Показатель в \% к итогу} = \frac{\text{Абсолютное число}}{\sum \text{абсолютных чисел}} \cdot 100\%$$

$$\text{I: Показатель в \% к итогу} = \frac{3}{30} \cdot 100\% = 10,00\%$$

$$\text{II: Показатель в \% к итогу} = \frac{6}{30} \cdot 100\% = 20,00\%$$

$$\text{III: Показатель в \% к итогу} = \frac{12}{30} \cdot 100\% = 40,00\%$$

$$\text{IV: Показатель в \% к итогу} = \frac{7}{30} \cdot 100\% = 23,33\%$$

$$\text{V: Показатель в \% к итогу} = \frac{2}{30} \cdot 100\% = 6,67\%$$

Накопленные частоты:

$$\text{I: } 3$$

$$\text{II: } 3 + 6 = 9$$

$$\text{III: } 9 + 12 = 21$$

$$\text{IV: } 21 + 7 = 28$$

$$\text{V: } 28 + 2 = 30$$

2. Строим графики полученного ряда распределения и находим графически значения моды и медианы.

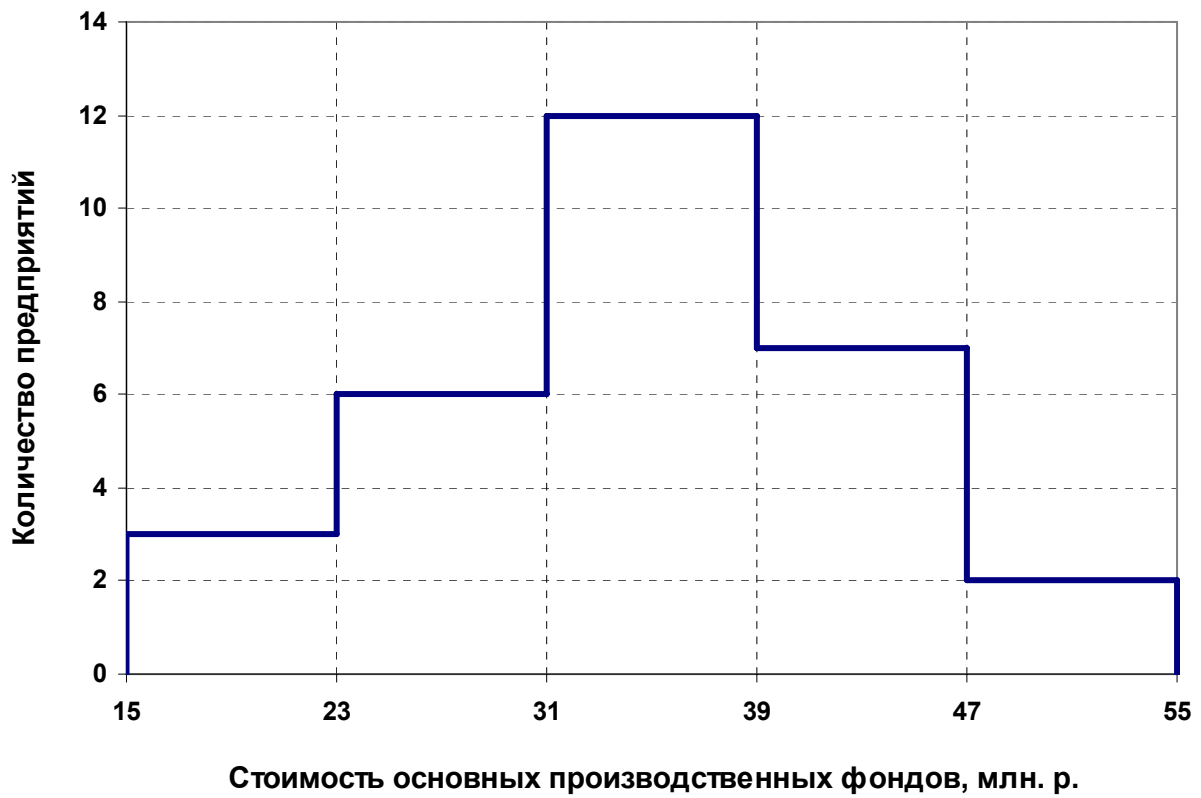


Рис. 1. Гистограмма.

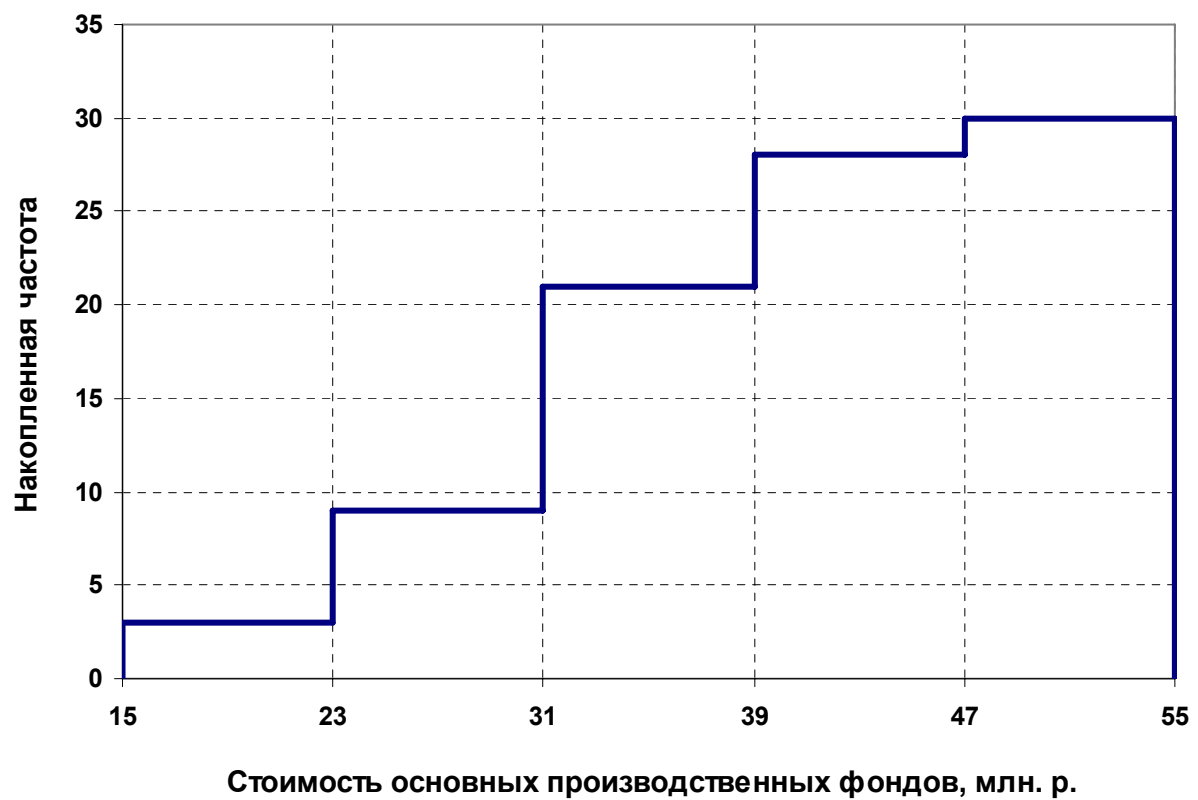


Рис. 2. Кумулянта.

Графически находим моду. Максимальная частота у III группы:

$$M_o = (31 + 39)/2 = 35 \text{ млн. руб.}$$

$$N_{Me} = \frac{\sum f}{2} = \frac{30}{2} = 15.$$

Графически находим медиану: $M_e = (31 + 39)/2 = 35$ млн. руб.

3. Рассчитываем характеристики интервального ряда распределения: среднюю арифметическую, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, моду и медиану.

Таблица 4

Расчетная таблица для характеристик ряда распределения

| № п/п | Группы предприятий по ОПФ, млн. руб (x) | Количество предприятий (f _i) | Середина интервала (x _i) | x _i f _i | (x _i - \bar{x}) | (x _i - \bar{x}) ² | (x _i - \bar{x}) ² × f _i |
|-------|---|--|--------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--|---|
| I | 15 - 23 | 3 | 19 | 57 | -15,733 | 247,538 | 742,613 |
| II | 23 - 31 | 6 | 27 | 162 | -7,7333 | 59,8044 | 358,827 |
| III | 31 - 39 | 12 | 35 | 420 | 0,26667 | 0,07111 | 0,85333 |
| IV | 39 - 47 | 7 | 43 | 301 | 8,26667 | 68,3378 | 478,364 |
| V | 47 - 55 | 2 | 51 | 102 | 16,2667 | 264,604 | 529,209 |
| | Итого: | 30 | — | 1042 | — | — | 2109,87 |

$$I: x_1 = \frac{15 + 23}{2} = 19$$

$$II: x_2 = \frac{23 + 31}{2} = 27$$

$$III: x_3 = \frac{31 + 39}{2} = 35$$

$$IV: x_4 = \frac{39 + 47}{2} = 43$$

$$V: x_5 = \frac{47 + 55}{2} = 51$$

Рассчитываем среднюю стоимость основных производственных фондов:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{1042}{30} = 34,733 \text{ млн. руб.}$$

Вычисляем дисперсию:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{2109,87}{30} = 70,329.$$

Находим среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{70,329} = 8,386 \text{ млн. руб.}$$

Находим коэффициент вариации:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{8,386}{34,733} \cdot 100\% = 24,14\%.$$

Рассчитываем моду:

$$Mo = x_{Mo} + i \cdot \frac{f_{Mo} - f_{Mo-1}}{(f_{Mo} - f_{Mo-1}) + (f_{Mo} - f_{Mo+1})} = 31 + 8 \cdot \frac{12 - 6}{(12 - 6) + (12 - 7)} = 35,36 \text{ млн. руб.}$$

Рассчитываем медиану:

$$Me = x_{Me} + i \cdot \frac{\sum f - S_{Me-1}}{f_{Me}} = 31 + 8 \cdot \frac{\frac{30}{2} - 9}{12} = 35,0 \text{ млн. руб.}$$

4. Вычислим среднюю арифметическую стоимости основных производственных фондов по исходным данным:

$$\bar{x}^* = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30} = \frac{1010}{30} = 33,667 \text{ млн. руб.}$$

Расхождение между \bar{x}^* и \bar{x} объясняется тем, что интервальная оценка не учитывает фактические значения наблюдений внутри интервалов. Средняя арифметическая \bar{x}^* является более точной оценкой.

Вывод. Из расчетных данных среднеквадратического отклонения и коэффициента вариации можно сказать, что совокупность предприятий относительно стоимости основных производственных фондов однородная, средняя типична и ей можно доверять.

Задача 1.9.

Известны следующие данные по основным показателям деятельности крупнейших банков одной из областей России (данные условны):

| № п/п | Сумма активов | Собственный капитал | Привлеченные ресурсы | Балансовая прибыль | Объем вложений в государственные ценные бумаги | Ссудная задолженность |
|-------|---------------|---------------------|----------------------|--------------------|--|-----------------------|
| 1 | 645,6 | 12 | 27,1 | 8,1 | 3,5 | 30,8 |
| 2 | 636,9 | 70,4 | 56,3 | 9,5 | 12,6 | 25,7 |
| 3 | 629 | 41 | 95,7 | 38,4 | 13,3 | 26,4 |
| 4 | 619,6 | 120,8 | 44,8 | 38,4 | 4,4 | 25,3 |
| 5 | 616,4 | 49,4 | 108,7 | 13,4 | 15 | 20,9 |
| 6 | 614,4 | 50,3 | 108,1 | 30,1 | 19,1 | 47,3 |

| | | | | | | |
|----|-------|-------|-------|------|------|------|
| 7 | 608,6 | 70 | 76,1 | 37,8 | 19,2 | 43,7 |
| 8 | 601,1 | 52,4 | 26,3 | 41,1 | 3,7 | 29,1 |
| 9 | 600,2 | 42 | 46 | 9,3 | 5,2 | 56,1 |
| 10 | 600 | 27,3 | 24,4 | 39,3 | 13,1 | 24,9 |
| 11 | 592,9 | 72 | 65,5 | 8,6 | 16,7 | 39,6 |
| 12 | 591,7 | 22,4 | 76 | 40,5 | 7,5 | 59,6 |
| 13 | 585,5 | 39,3 | 106,9 | 45,3 | 6,7 | 44,9 |
| 14 | 578,6 | 70 | 89,5 | 8,4 | 11,2 | 32,2 |
| 15 | 577,5 | 22,9 | 84 | 12,8 | 19,3 | 45,1 |
| 16 | 553,7 | 119,3 | 89,4 | 44,7 | 19,4 | 24,5 |
| 17 | 543,6 | 49,6 | 93,8 | 8,8 | 5,7 | 31,1 |
| 18 | 542 | 88,6 | 26,7 | 32,2 | 7,8 | 37,1 |
| 19 | 517 | 43,7 | 108,1 | 20,3 | 8,3 | 23,1 |
| 20 | 516,7 | 90,5 | 25,2 | 12,2 | 9,7 | 15,8 |

Задание:

- 1) Постройте аналитическую группировку коммерческих банков по привлеченным ресурсам и выявите взаимосвязь между привлеченными ресурсами и объемом вложений в государственные ценные бумаги. Сделайте выводы и изобразите графически ряд распределения;
- 2) Определите аналитически и графически структурные средние (моду и медиану);
- 3) Вычислите показатели вариации.

Решение.

Определим число групп по формуле Стерджесса

$$L = 1 + [3,322 \lg N] = 1 + [3,322 \lg 20] = 5,$$

т.е. разбиваем диапазон значений привлеченных ресурсов на 5 интервалов.

Величина интервала группировки равна

$$h = \frac{R}{L} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{L} = \frac{108,7 - 24,4}{5} = 16,86.$$

Аналитическая группировка коммерческих банков по привлеченным ресурсам имеет следующий вид (табл. 1):

Таблица 1.

| Группа банков по привлеченным ресурсам | Количество банков | В среднем на один банк | | | | |
|--|-------------------|------------------------|---------------------|--------------------|--|-----------------------|
| | | Сумма активов | Собственный капитал | Балансовая прибыль | Объем вложений в государственные ценные бумаги | Ссудная задолженность |
| 24,4 - 41,26 | 5 | 581,08 | 54,16 | 26,58 | 7,56 | 27,54 |
| 41,26 - 58,12 | 3 | 618,90 | 77,73 | 19,07 | 7,40 | 35,70 |

| | | | | | | |
|---------------|---|--------|-------|-------|-------|-------|
| 58,12 - 74,98 | 1 | 592,90 | 72,00 | 8,60 | 16,70 | 39,60 |
| 74,98 - 91,84 | 5 | 582,02 | 60,92 | 28,84 | 15,32 | 41,02 |
| 91,84 - 108,7 | 6 | 584,32 | 45,55 | 26,05 | 11,35 | 32,28 |

Из полученной аналитической группировки видим, что взаимосвязь между привлеченными ресурсами и объемом вложений в государственные ценные бумаги имеет U-образный характер. Вначале при увеличении привлеченных ресурсов наблюдается рост объема вложений в государственные ценные бумаги, и максимум достигается для третьей группы (объем привлеченных ресурсов привлеченных ресурсов 58,12 – 74,98 усл. ед.), при этом достигается максимум вложений в государственные ценные бумаги, равный в среднем на один банк 16,7 усл. ед. Затем начинается убывание вложений в государственные ценные бумаги при дальнейшем увеличении привлеченных ресурсов.

Статистический ряд распределения привлеченных ресурсов с 5 группами с равными интервалами имеет вид (табл. 2):

Таблица 2.

| № группы | Привлеченные ресурсы, усл. ед. | Число банков | Относительная частота | Накопленная сумма частот |
|----------|--------------------------------|--------------|-----------------------|--------------------------|
| 1 | 90 – 109 | 5 | 0,25 | 0,25 |
| 2 | 109 – 128 | 3 | 0,15 | 0,4 |
| 3 | 128 – 147 | 1 | 0,05 | 0,45 |
| 4 | 147 – 166 | 5 | 0,25 | 0,7 |
| 5 | 166 – 185 | 6 | 0,3 | 1 |

Изобразим графически ряд распределения (рис. 1).

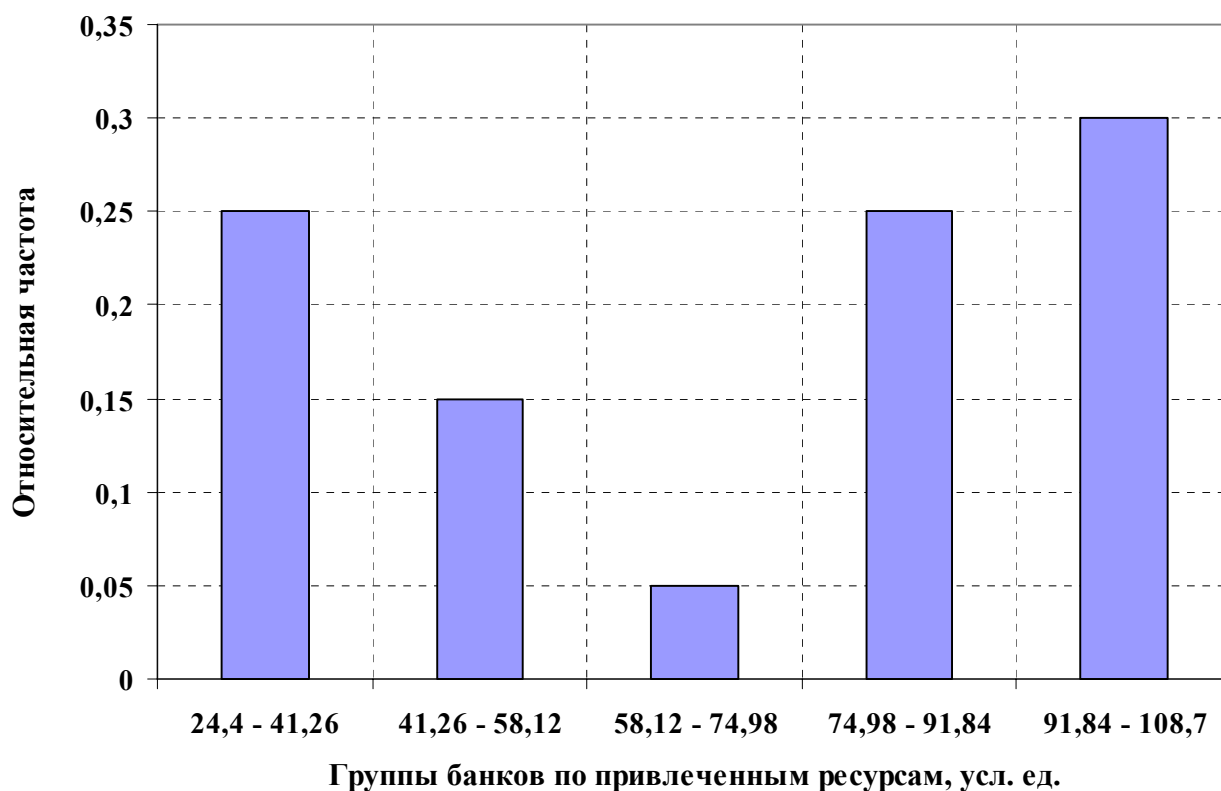


Рис. 1. Ряд распределения банков по привлеченным ресурсам.

Из ряда распределения видим, что мода (максимум относительной частоты) достигается в 5-м интервале и равна его середине

$$Mo = \frac{91,84 + 108,7}{2} = 100,27 \text{ усл. ед.}$$

Медиана ряда распределения соответствует интервалу, в котором накопленная сумма частот равна 0,5. Это – 4-й интервал. Таким образом, медиана равна середине 4-го интервала

$$Me = \frac{74,98 + 91,84}{2} = 83,41 \text{ усл. ед.}$$

Результаты группирования распределения банков по привлеченным ресурсам приведены в таблице.

Таблица 3.

| № группы | Диапазон, усл. ед. | Кол-во значений, n_i | Среднее групповое, x_i |
|----------|--------------------|------------------------|--------------------------|
| 1 | 24,4 - 41,26 | 5 | 32,83 |
| 2 | 41,26 - 58,12 | 3 | 49,69 |
| 3 | 58,12 - 74,98 | 1 | 66,55 |
| 4 | 74,98 - 91,84 | 5 | 83,41 |
| 5 | 91,84 - 108,7 | 6 | 100,27 |

Среднее значение привлеченных ресурсов определим по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{32,83 \cdot 5 + \dots + 100,27 \cdot 6}{5 + \dots + 6} = \frac{1398,44}{20} = 69,92 \text{ усл. ед.}$$

Для расчета показателей вариации составим промежуточную таблицу (табл. 4).

Таблица 4. Расчет показателей вариации.

| Диапазон, усл. ед. | n_i | x_i | $x_i n_i$ | $ x_i - \bar{x} $ | $ x_i - \bar{x} n_i$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2 n_i$ |
|--------------------|-------|--------|-----------|-------------------|-----------------------|---------------------|-------------------------|
| 24,4 - 41,26 | 5 | 32,83 | 164,15 | 37,09 | 185,46 | 1375,82 | 6879,08 |
| 41,26 - 58,12 | 3 | 49,69 | 149,07 | 20,23 | 60,70 | 409,33 | 1228,00 |
| 58,12 - 74,98 | 1 | 66,55 | 66,55 | 3,37 | 3,37 | 11,37 | 11,37 |
| 74,98 - 91,84 | 5 | 83,41 | 417,05 | 13,49 | 67,44 | 181,93 | 909,63 |
| 91,84 - 108,7 | 6 | 100,27 | 601,62 | 30,35 | 182,09 | 921,00 | 5526,01 |
| Итого | 20 | | 1398,44 | | 499,06 | | 14554,09 |

Определим показатели вариации.

Размах вариации равен

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 108,7 - 24,4 = 84,3.$$

Среднее линейное отклонение равно

$$\bar{d} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| n_i}{\sum n_i} = \frac{499,06}{20} = 24,95.$$

Дисперсия равна

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{14554,09}{20} = 727,70.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{727,70} = 26,98.$$

Коэффициент осцилляции:

$$K_o = \frac{R}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{84,9}{69,92} \cdot 100\% = 120,6\%.$$

Относительное линейное отклонение:

$$K_{\bar{d}} = \frac{\bar{d}}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{24,95}{69,92} \cdot 100\% = 35,7\%.$$

Коэффициент вариации:

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{26,98}{69,92} \cdot 100\% = 38,6\%.$$

Т.к. коэффициент вариации больше 30%, то делаем вывод о том, что выборка банков относительно привлеченных ресурсов является не однородной.

Задача 1.10.

Имеются следующие данные о возрастном составе группы практикантов, проходящих обучение на промышленном предприятии:

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 18 | 38 | 28 | 29 | 26 | 38 | 34 | 22 | 28 | 30 |
| 22 | 23 | 35 | 33 | 27 | 24 | 30 | 32 | 28 | 25 |
| 29 | 26 | 31 | 24 | 29 | 27 | 32 | 25 | 29 | 20 |

Построить интервальный ряд распределения. Изобразить в виде гистограммы и кумулянты. Рассчитать моду и медиану.

Решение.

Определим по формуле Старджесса число интервалов

$$L = 1 + [3,322 \lg n] = 1 + [\lg 30] = 5 .$$

Определяем шаг интервала:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{L} ,$$

где n – количество групп; x_{\max} – максимальное значение возраста практикантов; x_{\min} – минимальное значение возраста практикантов.

$$h = \frac{38 - 18}{5} = 4 .$$

Определяем границы групп:

I: $18 + 4 = 22$

II: $22 + 4 = 26$

III: $26 + 4 = 30$

IV: $30 + 4 = 34$

V: $34 + 4 = 38$

Строим интервальный ряд распределения.

| № п/п | Группы практикантов по возрасту | Показатели | | Накопленные частоты |
|-------|---------------------------------|------------------|-------------|---------------------|
| | | Абсолютное число | В % к итогу | |
| I | 18 - 22 | 4 | 13,33 | 4 |
| II | 22 - 26 | 7 | 23,33 | 11 |

| | | | | |
|---------------|---------|-----------|------------|----------|
| III | 26 - 30 | 11 | 36,67 | 22 |
| IV | 30 - 34 | 5 | 16,67 | 27 |
| V | 34 - 38 | 3 | 10,00 | 30 |
| Итого: | | 30 | 100 | — |

Строим графики полученного ряда распределения и находим графически значения моды и медианы.

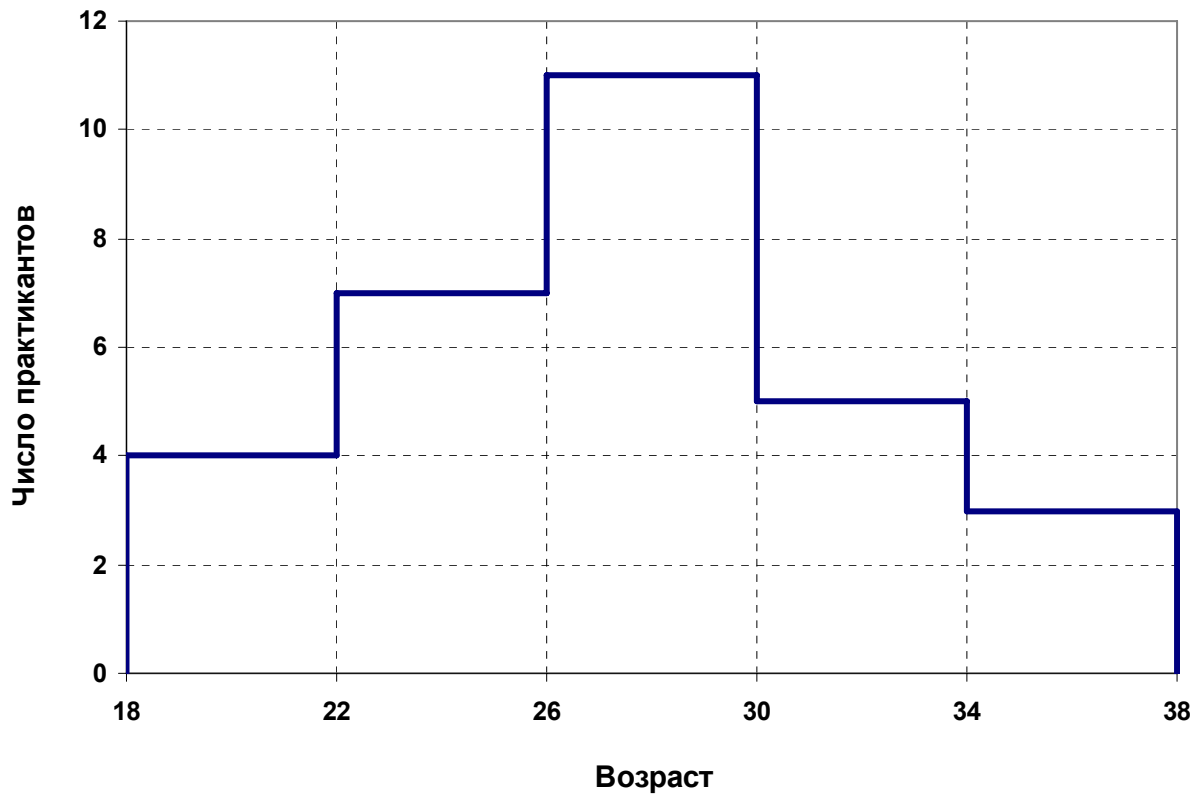


Рис. 1. Гистограмма.

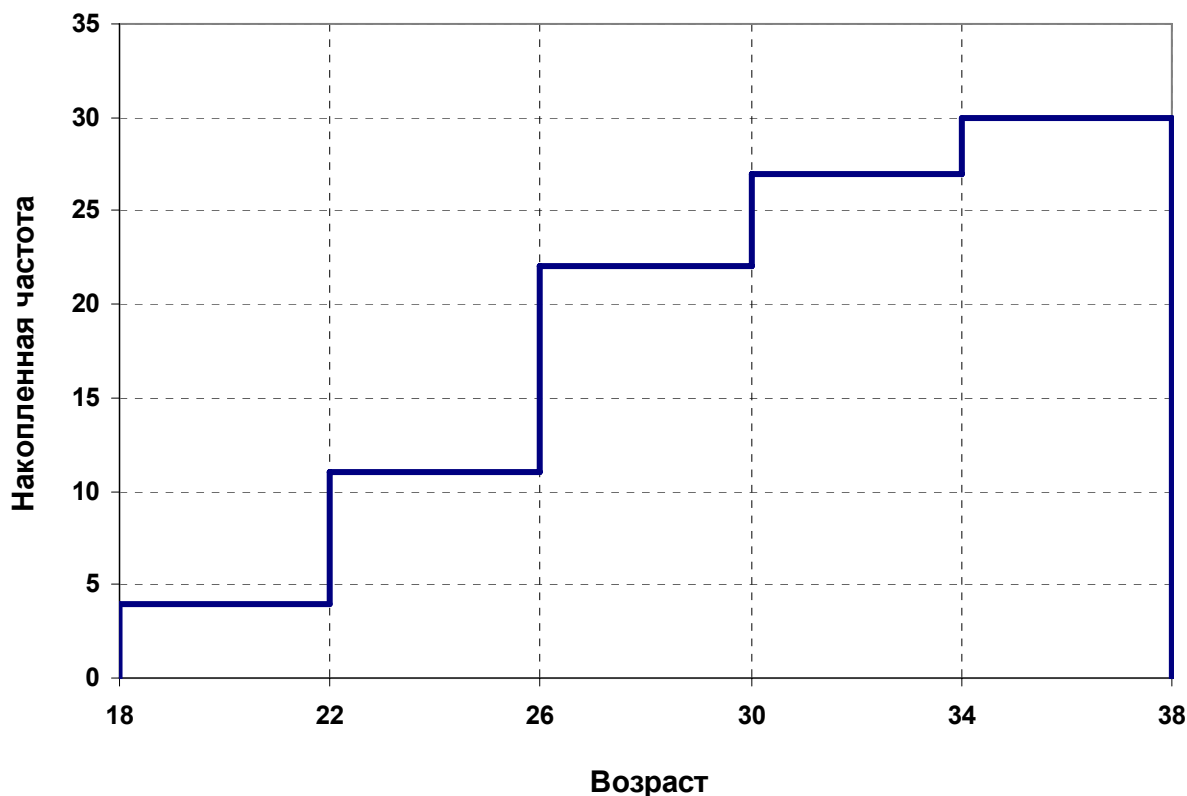


Рис. 2. Кумулянта.

Графически находим моду. Максимальная частота у III группы:

$$M_o = (26 + 30)/2 = 28.$$

Графически находим медиану: $M_e = (26 + 30)/2 = 28$.

Рассчитываем моду:

$$M_o = x_{M_o} + i \cdot \frac{f_{M_o} - f_{M_o-1}}{(f_{M_o} - f_{M_o-1}) + (f_{M_o} - f_{M_o+1})} = 26 + 4 \cdot \frac{11 - 7}{(11 - 7) + (11 - 5)} = 27,6.$$

Рассчитываем медиану:

$$M_e = x_{M_e} + i \cdot \frac{\sum f - S_{M_e-1}}{f_{M_e}} = 26 + 4 \cdot \frac{30 - 11}{11} = 27,45.$$

Задача 1.11.

Рабочие фирмы по производству пластиковых окон характеризуются следующими показателями:

| № п/п | Образование | Стаж работы | Выработка, шт. | Месячная зарплата, тыс. руб. |
|-------|-------------|-------------|----------------|------------------------------|
| 1 | начальное | 0 | 28 | 1,4 |
| 2 | среднее | 0 | 35 | 1,5 |

| | | | | |
|----|----------------------|----|----|------|
| 3 | среднее | 20 | 68 | 2,4 |
| 4 | неполное среднее | 20 | 65 | 2,5 |
| 5 | среднее специальное | 9 | 55 | 1,85 |
| 6 | высшее | 20 | 65 | 2,5 |
| 7 | начальное | 6 | 45 | 1,5 |
| 8 | среднее | 25 | 68 | 2,4 |
| 9 | неполное среднее | 14 | 55 | 1,8 |
| 10 | среднее специальное | 0 | 40 | 1,5 |
| 11 | неполное среднее | 13 | 56 | 1,85 |
| 12 | высшее | 5 | 48 | 1,6 |
| 13 | начальное | 12 | 50 | 1,75 |
| 14 | неполное среднее | 20 | 65 | 2,2 |
| 15 | среднее специальное | 1 | 42 | 1,55 |
| 16 | среднее | 1 | 40 | 1,5 |
| 17 | среднее специальное | 2 | 42 | 1,6 |
| 18 | среднее | 26 | 70 | 2,8 |
| 19 | незаконченное высшее | 25 | 70 | 2,8 |
| 20 | неполное среднее | 17 | 60 | 1,8 |
| 21 | начальное | 18 | 55 | 1,7 |
| 22 | среднее | 18 | 71 | 3 |
| 23 | неполное среднее | 25 | 60 | 2,5 |
| 24 | среднее специальное | 25 | 70 | 3 |
| 25 | неполное среднее | 25 | 62 | 2,6 |
| 26 | среднее | 1 | 40 | 1,5 |
| 27 | незаконченное высшее | 10 | 65 | 2,6 |
| 28 | начальное | 16 | 54 | 1,6 |
| 29 | неполное среднее | 26 | 65 | 2,8 |
| 30 | среднее специальное | 22 | 68 | 2,9 |
| 31 | неполное среднее | 3 | 32 | 1,5 |

Используя комбинацию признаков, проведите типологическую группировку рабочих по уровню квалификации, применяя специализацию признаков.

В пределах выделенных типов, проведите аналитическую группировку для оценки связи между стажем работы и средней выработкой.

Результаты представьте в табличной форме.

Решение.

Виды группировок.

1. Типологическая – с помощью разбиения совокупности на группы устанавливаются разные типы единиц совокупности.
2. Аналитическая (комбинационная) – носит многомерный характер – группировка одновременно по двум признакам: результирующий (признак следствия) и факторный (причина).

Проведем типологическую группировку рабочих по уровню квалификации (см. табл. 1).

Таблица 1.

Типологическая группировка рабочих по уровню квалификации

| Образование | № п/п | Стаж работы | Выработка, шт. | Месячная зарплата, тыс. руб. |
|----------------------|-------|-------------|----------------|------------------------------|
| начальное | 1 | 0 | 28 | 1,4 |
| | 7 | 6 | 45 | 1,5 |
| | 13 | 12 | 50 | 1,75 |
| | 21 | 18 | 55 | 1,7 |
| | 28 | 16 | 54 | 1,6 |
| неполное среднее | 4 | 20 | 65 | 2,5 |
| | 9 | 14 | 55 | 1,8 |
| | 11 | 13 | 56 | 1,85 |
| | 14 | 20 | 65 | 2,2 |
| | 20 | 17 | 60 | 1,8 |
| | 23 | 25 | 60 | 2,5 |
| | 25 | 25 | 62 | 2,6 |
| | 29 | 26 | 65 | 2,8 |
| | 31 | 3 | 32 | 1,5 |
| среднее | 2 | 0 | 35 | 1,5 |
| | 3 | 20 | 68 | 2,4 |
| | 8 | 25 | 68 | 2,4 |
| | 16 | 1 | 40 | 1,5 |
| | 18 | 26 | 70 | 2,8 |
| | 22 | 18 | 71 | 3 |
| | 26 | 1 | 40 | 1,5 |
| среднее специальное | 5 | 9 | 55 | 1,85 |
| | 10 | 0 | 40 | 1,5 |
| | 15 | 1 | 42 | 1,55 |
| | 17 | 2 | 42 | 1,6 |
| | 24 | 25 | 70 | 3 |
| | 30 | 22 | 68 | 2,9 |
| незаконченное высшее | 19 | 25 | 70 | 2,8 |
| | 27 | 10 | 65 | 2,6 |
| высшее | 6 | 20 | 65 | 2,5 |
| | 12 | 5 | 48 | 1,6 |

В пределах выделенных типов проведем аналитическую группировку (см. табл. 2).

Таблица 2

Аналитическая группировка рабочих по уровню квалификации

| Образование | Кол-во рабочих в | Стаж работы | Выработка, шт. | Месячная зарплата, тыс. руб. |
|-------------|------------------|-------------|----------------|------------------------------|
|-------------|------------------|-------------|----------------|------------------------------|

| | группе | Ощй | Средний | Общая | Средняя | Общая | Средняя |
|-------------------------|--------|-----|---------|-------|---------|-------|---------|
| начальное | 5 | 52 | 10,4 | 232 | 46,4 | 7,95 | 1,6 |
| неполное среднее | 9 | 163 | 18,1 | 520 | 57,8 | 19,55 | 2,2 |
| среднее | 7 | 91 | 13,0 | 392 | 56,0 | 15,1 | 2,2 |
| среднее специальное | 6 | 59 | 9,8 | 317 | 52,8 | 12,4 | 2,1 |
| незаконченное высшее | 2 | 35 | 17,5 | 135 | 67,5 | 5,4 | 2,7 |
| высшее | 2 | 25 | 12,5 | 113 | 56,5 | 4,1 | 2,1 |

Задача 1.12.

1. Определите объект наблюдения и единицу совокупности специальных статистических обследований: 1) перепись населения; 2) инвентаризация технических средств обучения в ВУЗах города по состоянию на 1.01; 3) единовременный учет рабочих промышленности по разрядам по состоянию на 15.05; 4) учет плодовых деревьев на приусадебных участках по состоянию на 01.06.

2. Что называется объективным временем наблюдения? Что называется критическим моментом?

Решение.

1. Под **объектом наблюдения** понимается некоторая статистическая совокупность, в которой протекают исследуемые социально-экономические явления и процессы. Объектом наблюдения может быть совокупность физических лиц (население отдельного региона, страны; лица, занятые на предприятиях отрасли), физические единицы (станки, машины, жилые дома), юридические лица (предприятия, фермерские хозяйства, коммерческие банки, учебные заведения).

Чтобы определить объект статистического наблюдения, необходимо установить границы изучаемой совокупности. Для этого следует указать важнейшие признаки, отличающие его от других сходных объектов. Например, прежде чем проводить обследование рентабельности промышленных предприятий, следует определить формы собственности, организационно-правовые формы предприятий, отрасли промышленности и регионы, подлежащие наблюдению. Всякий объект статистического наблюдения состоит из отдельных элементов – единиц наблюдения.

Единицей наблюдения называют составной элемент объекта, являющийся носителем признаков, подлежащих регистрации. Например, при демографических обследованиях

единицей наблюдения может быть человек, но может быть и семья; при бюджетных обследованиях – семья или домашнее хозяйство.

1) Перепись населения. Объект наблюдения – население страны, единица наблюдения – человек.

2) Инвентаризация технических средств обучения в ВУЗах города по состоянию на 1.01. Объект наблюдения – ВУЗы города, единица наблюдения – техническое средство обучения.

3) Единовременный учет рабочих промышленности по разрядам по состоянию на 15.05. Объект наблюдения – промышленные предприятия, единица наблюдения – рабочий.

4) Учет плодовых деревьев на приусадебных участках по состоянию на 01.06. Объект наблюдения – приусадебные участки, единица наблюдения – плодовое дерево.

2. Время, к которому относятся регистрируемые сведения, называется объективным временем наблюдения. Это может быть либо определенный момент, либо тот или иной период (сутки, декада, месяц, квартал, год). Момент времени, к которому приурочены регистрируемые сведения, называют критическим моментом наблюдения. Например, критическим моментом при микропереписи населения 1997 г. был 0 часов в ночь с 13 на 14 февраля. Устанавливая критический момент, можно с фотографической точностью отразить истинное состояние явления в определенный момент времени. Сроком наблюдения в микропереписи населения 1997 г. являлся период с 8 часов утра 14 февраля до 23 февраля включительно, т. е. 10 дней.

Задача 1.13.

1. Определите объект наблюдения, единицу наблюдения и единицу совокупности специальных статистических обследований: 1) переоценка в основных фондах на предприятиях объединения по состоянию на 1.01; 2) перепись специального оборудования в научно-исследовательских институтах по состоянию на 1.01.; 3) перепись населения; 4) единовременный учет рабочих промышленности по разрядам по состоянию на 15.05.

2. Как различают наблюдение по охвату единиц совокупности?

Решение.

1. 1) Переоценка в основных фондах на предприятиях объединения по состоянию на 1.01. Объект наблюдения – предприятия объединения, единица наблюдения – основные фонды.

2) Перепись специального оборудования в научно-исследовательских институтах по состоянию на 1.01. Объект наблюдения – научно-исследовательские институты, единица наблюдения – специальное оборудование.

3) Перепись населения. Объект наблюдения – население страны, единица наблюдения – человек.

4) Единовременный учет рабочих промышленности по разрядам по состоянию на 15.05. Объект наблюдения – промышленные предприятия, единица наблюдения – рабочий.

2. С точки зрения полноты охвата фактов статистическое наблюдение может быть сплошным и несплошным. Сплошное наблюдение представляет собой полный учет всех единиц изучаемой совокупности. Несплошное наблюдение организуют как учет части единиц совокупности, на основе которой можно получить обобщающую характеристику всей совокупности.

Задача 1.14.

В результате 10% выборочного обследования методом случайного бесповторного отбора коммерческих банков были получены следующие данные:

| № банка по порядку | Число сотрудников | Прибыль, млн. руб. |
|--------------------|-------------------|--------------------|
| 1 | 103 | 31 |
| 2 | 102 | 28 |
| 3 | 315 | 146 |
| 4 | 300 | 133 |
| 5 | 220 | 109 |
| 6 | 196 | 27 |
| 7 | 270 | 131 |
| 8 | 374 | 155 |
| 9 | 431 | 82 |
| 10 | 192 | 35 |
| 11 | 319 | 135 |
| 12 | 203 | 20 |
| 13 | 210 | 91 |
| 14 | 303 | 102 |
| 15 | 500 | 112 |
| 16 | 700 | 136 |
| 17 | 177 | 56 |
| 18 | 256 | 128 |
| 19 | 145 | 25 |
| 20 | 162 | 46 |
| 21 | 121 | 39 |
| 22 | 136 | 40 |
| 23 | 157 | 57 |
| 24 | 320 | 170 |
| 25 | 297 | 108 |

Проведите статистический анализ полученных данных. Для этой цели:

1. Постройте статистический ряд распределения банков по размеру прибыли, выделив 4 группы с равными интервалами.

2. Постройте графики ряда распределения: гистограмму, кумулянту, полигон.

3. Постройте групповую таблицу по размеру прибыли, выделив 4 группы с равными интервалами. По каждой группе посчитайте: число банков; прибыль – всего и в среднем на один банк; число сотрудников – всего и в среднем на один банк.

Сделайте выводы.

Решение.

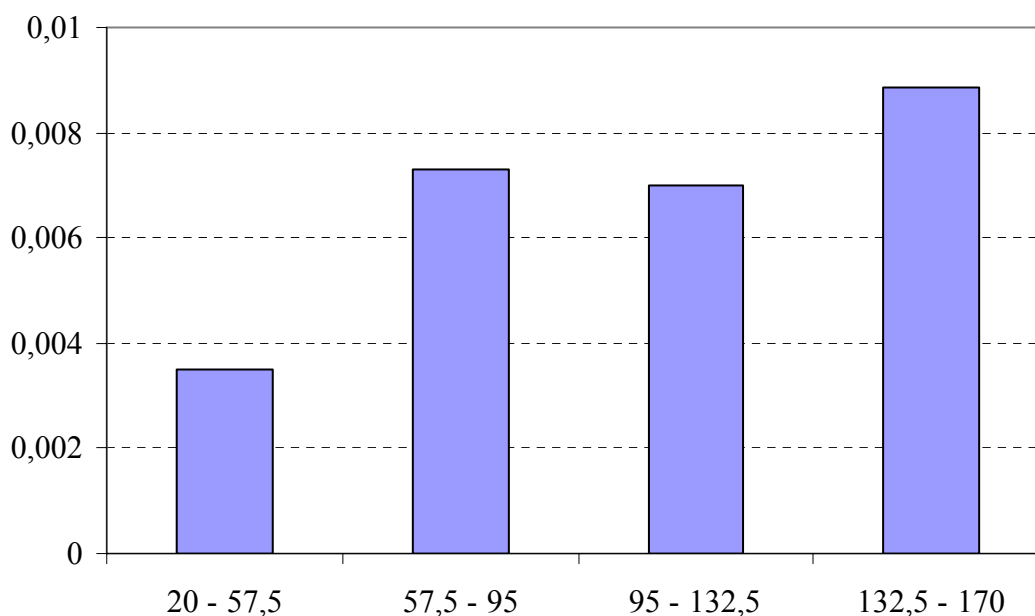
1. Построим статистический ряд распределения банков по размеру прибыли, выделив 4 группы с равными интервалами. Величина интервала группировки равна

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{4} = \frac{170 - 20}{4} = 37,5.$$

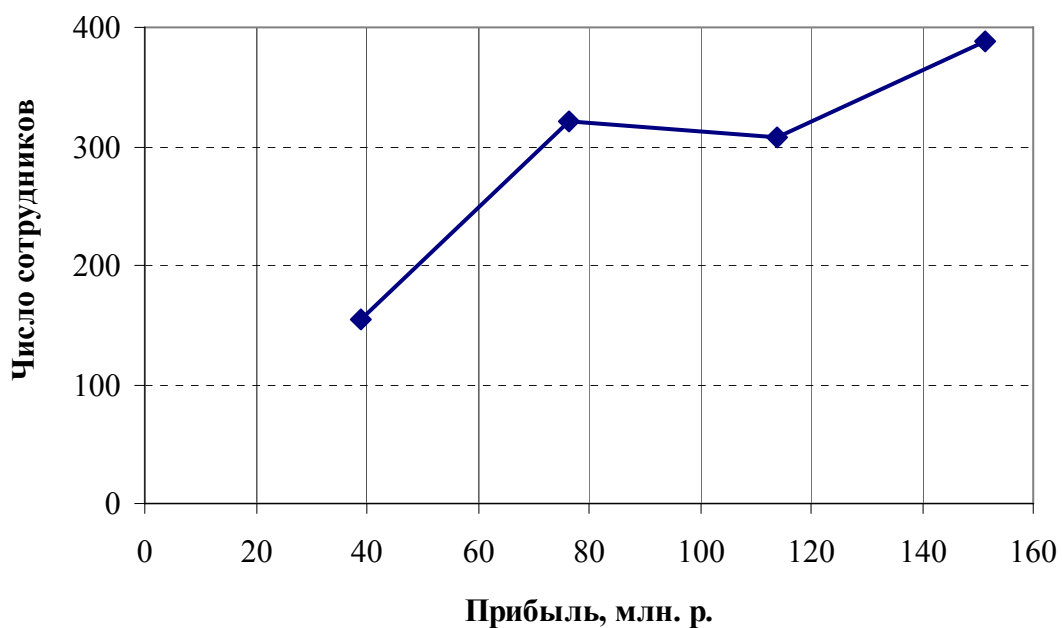
Тогда статистический ряд распределения банков по размеру прибыли с 4 группами с равными интервалами имеет вид

| № группы | Прибыль, млн. руб. | Число сотрудников |
|----------|--------------------|-------------------|
| 1 | 20 - 57,5 | 154 |
| 2 | 57,5 - 95 | 320,5 |
| 3 | 95 - 132,5 | 307,667 |
| 4 | 132,5 - 170 | 388 |

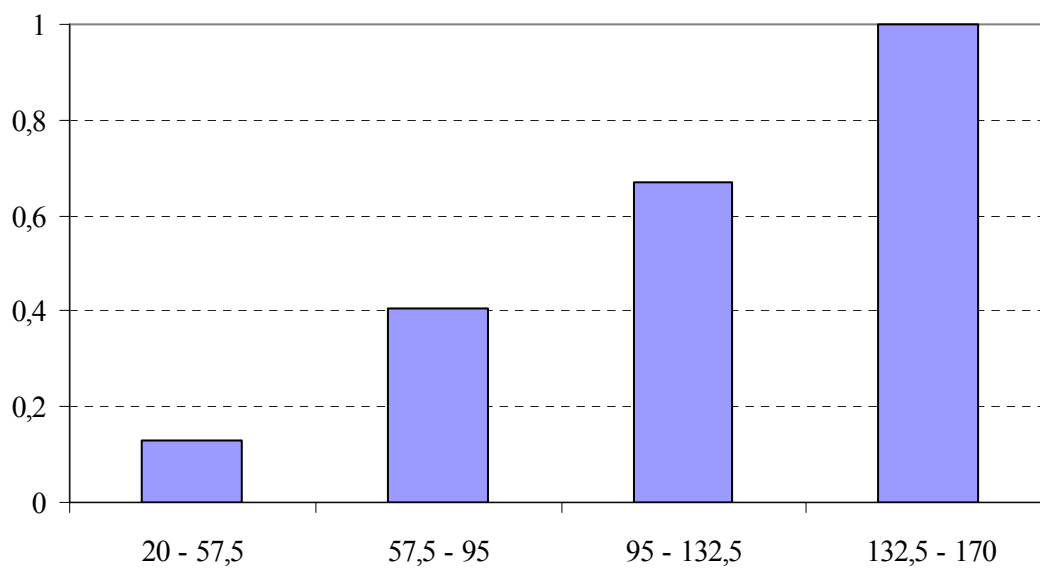
2. Гистограмма имеет вид:



Полигон имеет вид:



Кумулянта имеет вид:



Групповая таблица по размеру прибыли имеет вид:

| № группы | Прибыль, млн. р. | Число банков | Прибыль, млн. р. | | Число сотрудников | |
|----------|------------------|--------------|------------------|------------------------|-------------------|------------------------|
| | | | Всего | В среднем на один банк | Всего | В среднем на один банк |
| 1 | 20 - 57,5 | 11 | 404 | 36,727 | 1694 | 154 |
| 2 | 57,5 - 95 | 2 | 173 | 86,5 | 641 | 320,5 |
| 3 | 95 - 132,5 | 6 | 690 | 115 | 1846 | 307,667 |
| 4 | 132,5 - 170 | 6 | 875 | 145,833 | 2328 | 388 |

Выводы. С увеличением прибыли наблюдается рост численности работников.

Задача 1.15.

По данным о стаже работы 29 рабочих цеха (количество лет) составить дискретный вариационный ряд.

5, 4, 6, 3, 4, 1, 2, 6, 2, 13, 1, 6, 1, 3, 4, 4, 5, 1, 2, 3, 3, 4, 1, 5, 4, 13, 6, 6, 5.

Определить средний уровень ряда, моду и медиану стажа работы.

Решение.

Дискретный вариационный ряд имеет вид:

| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|----|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 13 |
| n_i | 5 | 3 | 4 | 6 | 4 | 5 | 2 |

Средний уровень ряда равен

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{123}{29} = 4,241.$$

Мода равна 4. Медиана равна $x_{(15)} = 4$.

Тема 2. Абсолютные и относительные величины

Задача 2.1.

В таблице приведены данные о продажах автомобилей в одном из автосалонов города за 1 квартал прошедшего года. Определите структуру продаж.

| Марка автомобиля | Число проданных автомобилей |
|------------------|-----------------------------|
| Skoda | 245 |
| Hyundai | 100 |
| Daewoo | 125 |
| Nissan | 274 |
| Renault | 231 |
| Kia | 170 |
| Итого | 1145 |

Решение.

Структура продаж представлена в табл. 1 и на рис. 1.

Структура продаж автомобилей

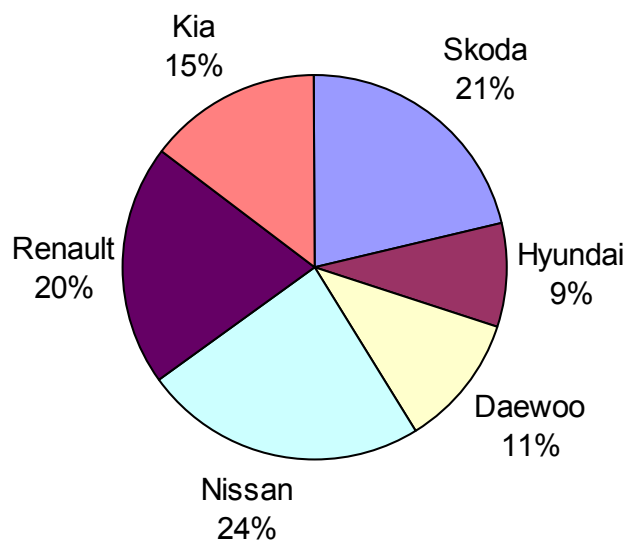


Рис. 1. Структура продаж автомобилей.

Таблица 1

| Марка автомобиля | Число проданных автомобилей | Процент от общего числа, % |
|------------------|-----------------------------|----------------------------|
| Skoda | 245 | 21,40 |
| Hyundai | 100 | 8,73 |
| Daewoo | 125 | 10,92 |
| Nissan | 274 | 23,93 |
| Renault | 231 | 20,17 |
| Kia | 170 | 14,85 |
| Итого | 1145 | 100 |

Задача 2.2.

По региону имеются следующие данные о вводе в эксплуатацию жилой площади:

| Вид жилых домов | Введено в эксплуатацию, тыс. кв. м. | |
|-----------------|-------------------------------------|---------|
| | 2003 г. | 2004 г. |
| Кирпичные | 5000 | 5100 |
| Панельные | 2800 | 2500 |
| Монолитные | 3400 | 3200 |

Определить:

- 1) динамику ввода жилья в эксплуатацию;
- 2) структуру введенного жилья.

Решение.

Динамика ввода жилья в эксплуатацию определяется как индивидуальный индекс по вводу каждого вида жилья в эксплуатацию. Структура характеризуется долей каждого из видов жилых домов в общем количестве введенного в эксплуатацию жилья. Результаты приведем в табл. 1.

Таблица 1

| Вид жилых домов | Введено в эксплуатацию, тыс. кв. м. | | Динамика ввода жилья в эксплуатацию, % | Структура введенного жилья, % | |
|-----------------|-------------------------------------|---------|--|-------------------------------|---------|
| | 2003 г. | 2004 г. | | 2003 г. | 2004 г. |
| Кирпичные | 5000 | 5100 | 102,00 | 44,64 | 47,22 |
| Панельные | 2800 | 2500 | 89,29 | 25,00 | 23,15 |
| Монолитные | 3400 | 3200 | 94,12 | 30,36 | 29,63 |
| Всего | 11200 | 10800 | 96,43 | 100,00 | 100,00 |

Задача 2.3.

Натуральный баланс сахара в регионе характеризуется следующими данными, млн. тонн:

| | |
|-----------------------|------|
| Запасы на начало года | 2,2 |
| Произведено | 23,4 |
| Потреблено | 16,6 |

в том числе:

| | |
|--------------------------------|------|
| - производственное потребление | 6,4 |
| - потребление населением | 10,2 |
| Вывоз за пределы региона | 7,0 |

Определить:

- 1) запасы сахара на конец года;
- 2) соотношение потребленного и вывезенного сахара;
- 3) структуру потребления.

Решение.

Запасы сахара на конец года составят

$$Z = 2,2 + 23,4 - 16,6 - 7 = 2 \text{ млн. т.,}$$

т.е. запас сахара за год уменьшился на 0,2 млн. тонн.

Соотношение потребленного и вывезенного сахара составляет

$$d = \frac{16,6}{7} = 2,371,$$

т.е. потреблено сахара в 2,37 раза больше, чем вывезено.

Структуру потребления представим в виде табл. 1. Из табл. 1 видно, что основное потребление сахара (61,5% от всего количества потребленного сахара) в регионе осуществляется населением.

Таблица 1

| Вид потребления | Кол-во, млн. тонн | Структура потребления, % |
|------------------------------|-------------------|--------------------------|
| Производственное потребление | 6,4 | 38,55 |
| Потребление населением | 10,2 | 61,45 |
| Всего | 16,6 | 100,00 |

Задача 2.4.

Имеются исходные данные о выпуске продукции по трем участкам цеха.

| Номер участка | План на 1 квартал, млн. руб. | Фактически на 1 квартал, млн. руб. |
|---------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| 1 | 28 | 30 |
| 2 | 35 | 33,2 |
| 3 | 32 | 33,8 |
| Итого: | 95 | 97 |

Определить:

1. Процент выполнения плана по участкам и в целом по цеху.
2. Плановое задание на 2 квартал, если относительная величина планового задания установлена 102%.

Решение.

1. Процент выполнения плана по участкам составил:

- для участка 1 $p_1 = \frac{30}{28} \cdot 100\% = 107,14\%$,

- для участка 2 $p_2 = \frac{33,2}{35} \cdot 100\% = 94,86\%$,

- для участка 3 $p_3 = \frac{33,8}{32} \cdot 100\% = 105,63\%$.

Процент выполнения плана в целом по цеху составил

$$P = \frac{97}{95} \cdot 100\% = 102,11\%.$$

2. Плановое задание на 2 квартал по участкам составляет:

- для участка 1 $p_1^2 = 28 \cdot 1,02 = 28,56$ млн. руб.,

- для участка 2 $p_2^2 = 35 \cdot 1,02 = 35,7$ млн. руб.,

- для участка 3 $p_3^2 = 32 \cdot 1,02 = 32,64$ млн. руб.,

Плановое задание на 2 квартал в целом по цеху составляет

$$P^2 = 95 \cdot 1,02 = 96,9 \text{ млн. руб.}$$

Задача 2.5.

В таблице приведены данные о привлечении средств населения во вклады, включающие темп роста показателя в отчетном году в сравнении с предшествующим годом.

| Период | Предшествующий год | Отчетный год | Темп роста, % |
|--------|-----------------------|--------------|------------------|
|--------|-----------------------|--------------|------------------|

| | Фактически, тыс. руб. | Прогноз, тыс. руб. | Фактически, тыс. руб. | Реализация прогноза, % | |
|---------------|-----------------------|--------------------|-----------------------|------------------------|-------|
| I квартал | | 5564 | | | 119,7 |
| II квартал | | | | 104,3 | 104,2 |
| 2-е полугодие | | 7889 | 8170 | | 106,8 |
| Год | 14392 | | 15572 | 87,7 | 108,2 |

Дополните таблицу, рассчитав недостающие показатели. Назовите виды относительных величин в таблице.

Решение.

Дополненная таблица после расчета недостающих показателей имеет следующий вид:

| Период | Предшествующий год | Отчетный год | | | Темп роста, % |
|---------------|-----------------------|--------------------|-----------------------|------------------------|---------------|
| | Фактически, тыс. руб. | Прогноз, тыс. руб. | Фактически, тыс. руб. | Реализация прогноза, % | |
| I квартал | 2434,41 | 5564 | 2913,99 | 52,37 | 119,7 |
| II квартал | 4307,12 | 4302,99 | 4488,01 | 104,3 | 104,2 |
| 2-е полугодие | 7649,81 | 7889 | 8170 | 103,56 | 106,8 |
| Год | 14392 | 17755,99 | 15572 | 87,7 | 108,2 |

Относительный показатель представляет собой результат деления одного абсолютного показателя на другой и выражает соотношение между количественными характеристиками социально-экономических процессов и явлений. Все используемые на практике относительные показатели можно разделить на следующие виды: показатели динамики, плана, реализации плана, структуры, координации, интенсивности и уровня экономического развития, сравнения. В таблице используются следующие относительные величины: показатели динамики, плана и реализации плана.

Задача 2.6.

Имеются исходные данные о выпуске продукции по трем участкам цеха.

| Номер участка | План на I квартал, млн. руб. | Фактически за I квартал, млн. руб. |
|---------------|------------------------------|------------------------------------|
| 1 | 28,0 | 30,0 |
| 2 | 35,0 | 33,2 |
| 3 | 32,0 | 33,8 |
| Итого | 95,0 | 97,0 |

Определить:

1. Процент выполнения плана по участкам и в целом по цеху.
2. Плановое задание на 2 квартал, если относительная величина планового задания установлена 102%.

Решение.

1. Процент выполнения плана равен:

- по участку 1

$$i_1 = \frac{30}{28} = 1,071, \text{ или } 107,1\%,$$

- по участку 2

$$i_2 = \frac{33,2}{35} = 0,949, \text{ или } 94,9\%,$$

- по участку 3

$$i_3 = \frac{33,8}{32} = 1,056, \text{ или } 105,6\%,$$

- в целом по цеху

$$i = \frac{97}{95} = 1,021, \text{ или } 102,1\%,$$

Плановое задание на 2 квартал равно:

- по участку 1

$$i_1'' = 30 \cdot 1,02 = 30,6 \text{ млн. руб.},$$

- по участку 2

$$i_2'' = 33,2 \cdot 1,02 = 33,864 \text{ млн. руб.},$$

- по участку 3

$$i_3'' = 33,8 \cdot 1,02 = 34,476 \text{ млн. руб.},$$

- в целом по цеху

$$i_n = 97 \cdot 1,02 = 98,94 \text{ млн. руб.}.$$

Задача 2.7.

За отчетный период предприятие выработало мыла и моющих средств по видам:

| Виды мыла и моющих средств | % жирности | Количество произведенной продукции, кг |
|----------------------------|------------|--|
| Мыло хозяйственное | 72 | 1100 |
| Мыло хозяйственное | 60 | 800 |

| | | |
|--------------------|----|------|
| Мыло хозяйственное | 40 | 600 |
| Мыло туалетное | 80 | 900 |
| Стиральный порошок | 10 | 3000 |

Определите:

- 1) Общий объем произведенной предприятием продукции в условно-натуральных единицах, приняв а условную единицу мыло 40%-ной жирности;
- 2) Относительную величину задания по объему продукции на предстоящий период, если плановое задание на будущий период рассчитано в объеме 6650 кг в условной жирности.

Решение.

Пересчитаем объем выпуска каждой продукции в условно-натуральных единицах, приняв а условную единицу мыло 40%-ной жирности:

- мыло хозяйственное, 72% жирности – $1100 \cdot 72 / 40 = 1980$ усл. кг.;
- мыло хозяйственное, 60% жирности – $800 \cdot 60 / 40 = 1200$ усл. кг.;
- мыло хозяйственное, 40% жирности – $600 \cdot 40 / 40 = 600$ усл. кг.;
- мыло туалетное, 80% жирности – $900 \cdot 80 / 40 = 1800$ усл. кг.;
- стиральный порошок $3000 \cdot 10 / 40 = 750$ усл. кг.

Отсюда общий объем произведенной предприятием продукции в условно-натуральных единицах мыла 40%-ной жирности будет равен:

$$S = 1980 + 1200 + 600 + 1800 + 750 = 6330 \text{ усл. кг.}$$

Относительная величина задания по объему продукции на предстоящий период составит

$$d = 6330 / 6650 = 0,952, \text{ или } 95,2\%.$$

Задача 2.8.

Имеются данные о движении товаров в магазине, тыс. руб.:

| Наименование товарных групп | Остатки товаров на начало квартала | Поступило товаров | Документированный расход товаров | Остатки товаров на конец квартала |
|-----------------------------|------------------------------------|-------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| Хлопчатобумажные ткани | 185 | 141 | - | 126 |
| Шелковые ткани | 63 | 74 | - | 25 |
| Одежда и белье | 340 | 610 | 30 | 320 |
| Трикотажные изделия | 151 | 340 | - | 190 |
| Всего товаров | 739 | 1165 | 30 | 661 |

Вычислите по каждой группе товаров:

- 1) Оборот;
- 2) Удельный вес каждой группы в обороте;
- 3) Уровень реализации;
- 4) Степень оседания товаров в запасах;
- 5) Уровень обновления товарных ресурсов.

Решение оформите в таблице. Сделайте выводы.

Решение.

Результаты расчета приведены в таблице.

| Наименование товарных групп | Остатки товаров на начало квартала | Поступило товаров | Документированный расход товаров | Остатки товаров на конец квартала | Оборот | Удельный вес в обороте | Уровень реализации | Степень оседания товара в запасах | Уровень обновления товарных ресурсов |
|-----------------------------|------------------------------------|-------------------|----------------------------------|-----------------------------------|--------|------------------------|--------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|
| Хлопчатобумажные ткани | 185 | 141 | 0 | 126 | 200 | 16,1% | 61,3% | 38,7% | 76,2% |
| Шелковые ткани | 63 | 74 | 0 | 25 | 112 | 9,0% | 81,8% | 18,2% | 117,5% |
| Одежда и белье | 340 | 610 | 30 | 320 | 630 | 50,7% | 66,3% | 33,7% | 179,4% |
| Трикотажные изделия | 151 | 340 | 0 | 190 | 301 | 24,2% | 61,3% | 38,7% | 225,2% |
| Всего товаров | 739 | 1165 | 30 | 661 | 1243 | 100,0% | 65,3% | 34,7% | 157,6% |

Выводы.

- 1) Более половины оборота обеспечено за счет реализации одежды и белья.
- 2) Наибольший уровень реализации у шелковых тканей.
- 3) Наименьшая степень оседания в запасах у шелковых тканей.
- 4) Наибольший уровень обновления у трикотажных изделий.

Задача 2.9.

Имеются следующие данные о стоимости имущества предприятия торговли млн. руб.

| Год | Отчетные данные | | | |
|------|-----------------|------|------|------|
| | 1.01 | 1.04 | 1.07 | 1.10 |
| 1997 | 62 | 65 | 70 | 68 |
| 1998 | 68 | 70 | 75 | 78 |
| 1999 | 80 | 84 | 88 | 90 |
| 2000 | 95 | - | - | - |

Определите абсолютное и относительное изменение среднегодовой стоимости имущества в 1999 году по сравнению с 1997 и 1998 гг.

Решение.

Определим среднегодовую стоимость имущества по формуле средней хронологической.

Среднегодовая стоимость имущества в 1999 году равна

$$\bar{x}_{1999} = \frac{\frac{80}{2} + 84 + 88 + 90 + \frac{95}{2}}{4} = \frac{349,5}{4} = 87,375 \text{ млн. руб.}$$

Среднегодовая стоимость имущества в 1998 году равна

$$\bar{x}_{1998} = \frac{\frac{68}{2} + 70 + 75 + 78 + \frac{80}{2}}{4} = \frac{297}{4} = 74,25 \text{ млн. руб.}$$

Среднегодовая стоимость имущества в 1997 году равна

$$\bar{x}_{1997} = \frac{\frac{62}{2} + 65 + 70 + 68 + \frac{68}{2}}{4} = \frac{268}{4} = 67 \text{ млн. руб.}$$

Абсолютное изменение среднегодовой стоимости имущества в 1999 году по сравнению с 1997 составило

$$\Delta_{1997} = \bar{x}_{1999} - \bar{x}_{1997} = 87,75 - 67 = 20,375 \text{ млн. руб.}$$

Относительное изменение среднегодовой стоимости имущества в 1999 году по сравнению с 1997 составило

$$\delta_{1997} = \frac{\bar{x}_{1999} - \bar{x}_{1997}}{\bar{x}_{1997}} = \frac{87,75 - 67}{67} = \frac{20,375}{67} = 0,304, \text{ или } 30,4\%.$$

Абсолютное изменение среднегодовой стоимости имущества в 1999 году по сравнению с 1998 составило

$$\Delta_{1998} = \bar{x}_{1999} - \bar{x}_{1998} = 87,75 - 74,25 = 13,125 \text{ млн. руб.}$$

Относительное изменение среднегодовой стоимости имущества в 1999 году по сравнению с 1998 составило

$$\delta_{1998} = \frac{\bar{x}_{1999} - \bar{x}_{1998}}{\bar{x}_{1998}} = \frac{87,75 - 74,25}{74,25} = \frac{13,125}{74,25} = 0,177, \text{ или } 17,7\%.$$

Задача 2.10.

По предприятию имеются данные об объемах произведенной продукции за 1-й квартал:

| № цеха | Товарная продукция по плану, млн. руб. | Выполнение плана по товарной продукции, % |
|--------|---|--|
| 1 | 10 | 103,5 |
| 2 | 24 | 98 |
| 3 | 42,5 | 106 |

Определить: 1) процент выполнения плана по выпуску товарной продукции в целом по предприятию; 2) удельный вес цехов в общем объеме товарооборота (с точностью до 0,1%).

Решение.

1. Процент выполнения плана по выпуску товарной продукции в целом по предприятию определим по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{p} = \frac{\sum p_i v_i}{\sum v_i} = \frac{103,5 \cdot 10 + 98 \cdot 24 + 106 \cdot 42,5}{10 + 24 + 42,5} = \frac{7892}{76,5} = 103,2\%.$$

2. Удельный вес цехов в общем объеме товарооборота определяем по формуле

$$r_j = \frac{p_j v_j}{\sum p_i v_i}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Подставив исходные данные, получим удельные веса цехов в общем объеме товарооборота:

- для 1-го цеха $r_1 = \frac{p_1 v_1}{\sum p_i v_i} = \frac{1035}{7892} = 0,131$, или 13,1%;

- для 2-го цеха $r_2 = \frac{p_2 v_2}{\sum p_i v_i} = \frac{2352}{7892} = 0,298$, или 29,8%;

- для 3-го цеха $r_3 = \frac{p_3 v_3}{\sum p_i v_i} = \frac{4505}{7892} = 0,571$, или 57,1%.

Задача 2.11.

Годовым планом предприятия предусматривался рост выпуска товарной продукции на 8,5%. Фактически прирост товарной продукции за этот год составил 3,1%. Определите относительную величину выполнения плана по выпуску товарной продукции.

Решение.

Выпуск товарной продукции в следующем году должен быть равен 108,5% от прошлогоднего выпуска. Фактически объем выпуска составил 103,1% от прошлогоднего выпуска. Следовательно, относительная величина выполнения плана по выпуску товарной продукции составляет

$$103,1 / 108,5 = 0,95, \text{ или } 95\%.$$

Задача 2.12.

Имеются данные о внешнеторговом обороте России со странами дальнего и ближнего зарубежья (млн. долл).

| | I квартал | II квартал |
|---------|-----------|------------|
| Экспорт | 20972 | 22761 |
| Импорт | 14824 | 18269 |

Вычислите относительные показатели структуры, динамики. Сделайте анализ результатов.

Решение.

Относительные показатели структуры запишем в виде таблицы 1

Таблица 1

| | I квартал | II квартал |
|---------|-----------|------------|
| Экспорт | 58,6% | 55,5% |
| Импорт | 41,4% | 44,5% |
| Всего | 100,0% | 100,0% |

Показатели динамики запишем в виде таблицы 2

Таблица 2

| | I квартал | II квартал |
|---------|-----------|------------|
| Экспорт | 100,0% | 108,5% |
| Импорт | 100,0% | 123,2% |
| Всего | 100,0% | 114,6% |

Анализ результатов.

Доля экспорта во II квартале сократилась с 58,6% до 55,5%, а доля импорта, наоборот, выросла с 41,4% до 44,5%.

Экспорт в денежном выражении во II квартале увеличился по сравнению с I кварталом на 8,5%. Импорт в денежном выражении во II квартале увеличился по сравнению с I кварталом на 23,2%. Внешнеторговый оборот России со странами дальнего и ближнего зарубежья во II квартале увеличился по сравнению с I кварталом на 14,6%.

Задача 2.13.

По двум предприятиям за отчетный год имеются следующие данные:

| № предприятия | Выпуск продукции, млн. р. | Среднесписочная численность рабочих, чел. |
|---------------|------------------------------|--|
| 1 | 180 | 1200 |
| 2 | 316,5 | 1980 |

Определите различие (в %) в уровне годовой производительности труда работников двух предприятий.

Решение.

Уровень годовой производительности труда работников предприятия равен отношению выпуска продукции за отчетный год к среднесписочной численности рабочих.

Уровень годовой производительности труда работников 1-го предприятия равен

$$P_1 = \frac{180}{1200} = 0,15 \text{ млн. р./чел.}$$

Уровень годовой производительности труда работников 2-го предприятия равен

$$P_2 = \frac{316,5}{1980} = 0,1598 \text{ млн. р./чел.}$$

Различие (в %) в уровне годовой производительности труда работников двух предприятий равно

$$\delta P = \frac{P_2 - P_1}{P_1} \cdot 100\% = \frac{0,1598 - 0,15}{0,15} \cdot 100\% = 6,57\% ,$$

т.е. уровень годовой производительности труда работников 2-го предприятия выше чем на 1-м предприятии на 6,57%.

Задача 2.14.

Определите, как изменилась производительность труда работникаа сельскохозяйственного предприятия, если известно, что объем производства сельскохозяйственной продукции вырос на 21%, а индекс численности работающих составил 1,1.

Решение.

Производительность труда P равна отношению объема производства V к численности работающих Q

$$P = \frac{V}{Q} .$$

Орношение производительностей труда в текущем и базисном периоде равно

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{V_1}{Q_1} \cdot \frac{Q_0}{V_0} = \frac{V_1}{V_0} \cdot \frac{Q_0}{Q_1} = \frac{1,21}{1,1} = 1,1,$$

т.е. производительность труда работника сельскохозяйственного предприятия выросла в текущем периоде по сравнению с базисным в 1,1 раза, или на 10%.

Задача 2.15.

На основе данных табл. 1 (результаты деятельности предприятия за отчетный год) определите:

- относительную величину выполнения плана по выпуску продукции;
- относительную величину выполнения плана по численности работников;
- плановую и фактическую величину выработки одного работника и выполнение плана по выработке;
- плановую и фактическую динамику показателей.

Результаты расчетов оформите в таблицу.

Таблица 1

| | Показатели | | |
|--|------------|------------|----------------|
| | По плану | Фактически | В прошлом году |
| 1. Объем товарной продукции, млн. руб. | 12,0 | 13,1 | 11,8 |
| 2. Численность работающих, чел. | 400 | 410 | 395 |

2. Имеются следующие данные по затратам на производство продукции металлургического завода за год: (табл. 2).

Таблица 2

| № п/п | Элементы затрат | Сумма, млн. руб. |
|-------|---|------------------|
| 1 | Основные сырье и материалы | 25,1 |
| 2 | Вспомогательные материалы | 2,6 |
| 3 | Топливо | 4,9 |
| 4 | Энергия | 1,7 |
| 5 | Амортизация | 3,1 |
| 6 | Заработная плата и отчисления на соцстрахование | 5,3 |
| 7 | Прочие расходы | 1,3 |

Определите относительные величины структуры затрат и изобразите полученные данные в виде секторной диаграммы.

3. Что это за величины:

- а) на 100 рабочих со сдельной оплатой труда приходится 38 - с повременной;
 б) 69% населения РСФСР по данным переписи населения проживало в городах.

Решение.

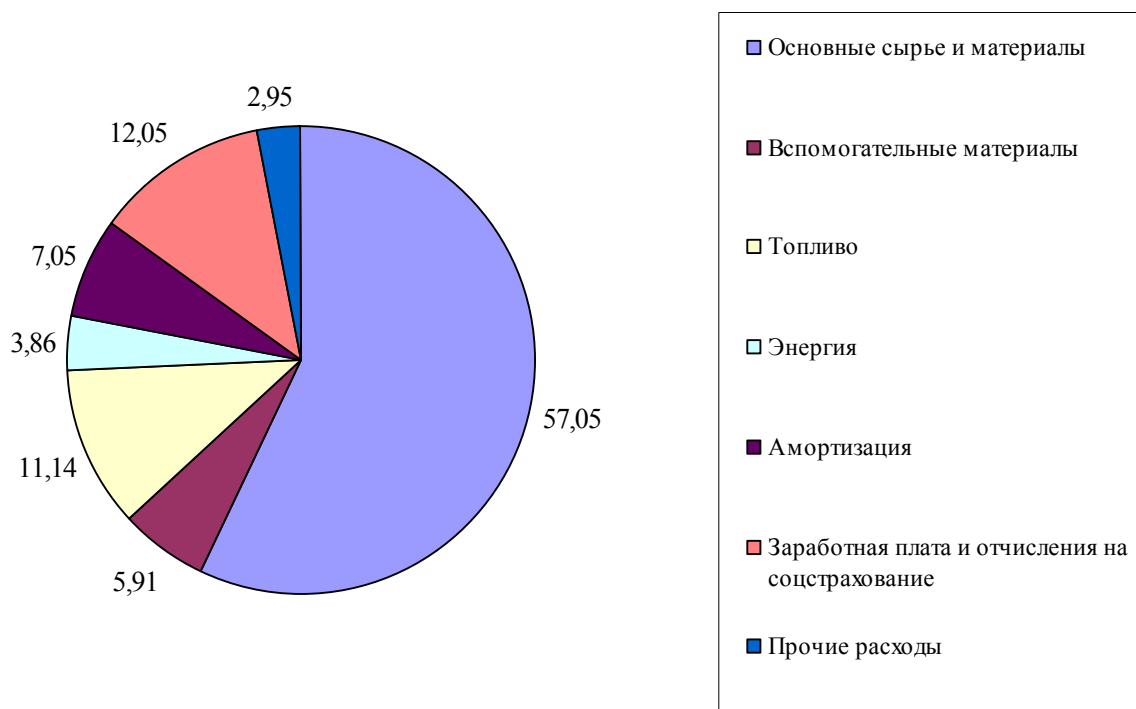
1. Результаты расчетов относительных показателей оформим в виде следующей таблицы

| Результат | Показатели | |
|---|-------------------------------------|------------------------------|
| | Объем товарной продукции, млн. руб. | Численность работающих, чел. |
| По плану | 12 | 400 |
| Фактически | 13,1 | 410 |
| В прошлом году | 11,8 | 395 |
| Относительна величина выполнения плана | 1,092 | 1,025 |
| Плановая величина выработки одного работника | 0,030 | |
| Фактическая величина выработки одного работника | 0,032 | |
| Выполнение плана по выработке | 1,065 | |
| Плановая динамика показателей | 1,017 | 1,013 |
| Фактическая динамика показателей | 1,110 | 1,038 |

2. Определим относительные величины структуры затрат и приведем их в виде таблицы и секторной диаграммы.

| № п/п | Элементы затрат | Сумма, млн. руб. | Относительные величины структуры затрат, % |
|--------------|---|------------------|--|
| 1 | Основные сырье и материалы | 25,1 | 57,05 |
| 2 | Вспомогательные материалы | 2,6 | 5,91 |
| 3 | Топливо | 4,9 | 11,14 |
| 4 | Энергия | 1,7 | 3,86 |
| 5 | Амортизация | 3,1 | 7,05 |
| 6 | Заработная плата и отчисления на соцстрахование | 5,3 | 12,05 |
| 7 | Прочие расходы | 1,3 | 2,95 |
| Всего затрат | | 44 | 100 |

Относительные величины структуры затрат, %



3. Величина «на 100 рабочих со сдельной оплатой труда приходится 38 – с повременной» является относительной величиной структуры оплаты труда.

Величина «69% населения РСФСР по данным переписи населения проживало в городах» является относительной величиной структуры населения РСФСР.

Задача 2.16.

1. Грузооборот отдельных видов транспорта общего пользования в РФ (в процентах к грузообороту ж/д транспорта) представлен в табл. 14.

Таблица 14

| Виды транспорта | Грузооборот, % |
|-----------------|----------------|
| ж/д | 100,0 |
| морской | 23,12 |
| речной | 8,75 |
| трубопроводный | 24,11 |
| автомобильный | 10,76 |
| воздушный | 0,08 |

Определите удельный вес видов транспорта в грузообороте и постройте секторную структурную диаграмму.

Какие относительные величины приведены в условии задачи? Какие относительные величины вы вычислили?

2. Промышленное предприятие перевыполнило план по валовой продукции на 4,3%. Увеличение объема выпуска валовой продукции предприятия по сравнению с прошлым годом составило 8,4%. Определите плановую динамику по росту валовой продукции на этом предприятии.

3. Укажите относительные величины динамики:

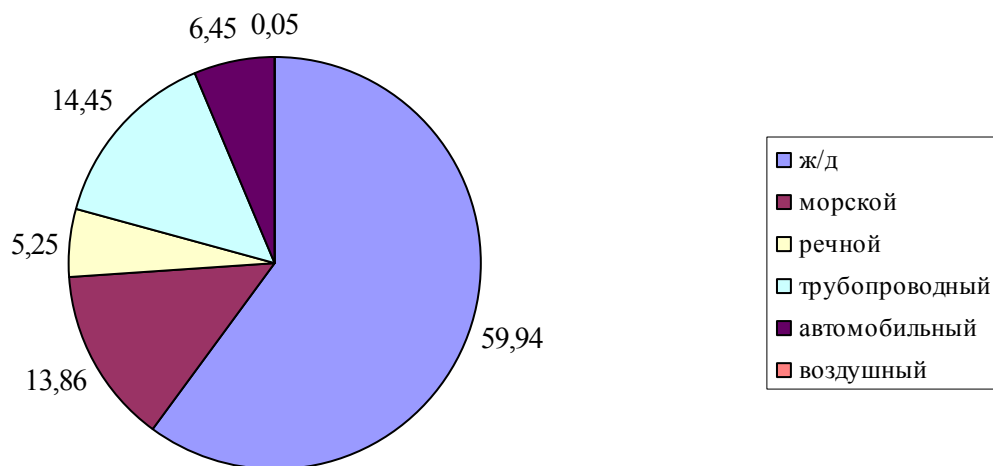
- а) производство чугуна увеличилось по сравнению с прошлым годом на 3 млн. т;
- б) производство синтетических смол и пластмасс увеличилось по сравнению с прошлым годом в 1,1 раза.

Решение.

1. Определим удельный вес видов транспорта в грузообороте и результаты приведем в виде таблицы и секторной структурной диаграммы.

| Виды транспорта | Грузооборот, % | Удельный вес видов транспорта в грузообороте, % |
|---------------------|----------------|---|
| ж/д | 100 | 59,94 |
| морской | 23,12 | 13,86 |
| речной | 8,75 | 5,25 |
| трубопроводный | 24,11 | 14,45 |
| автомобильный | 10,76 | 6,45 |
| воздушный | 0,08 | 0,05 |
| Все виды транспорта | 166,82 | 100 |

Удельный вес видов транспорта в грузообороте, %



2. Плановая динамика по росту валовой продукции на промышленном предприятии составила 104,3%.

3. Относительной величиной динамики является «производство синтетических смол и пластмасс увеличилось по сравнению с прошлым годом в 1,1 раза».

Задача 2.17.

Демографическая ситуация области характеризуется следующими данными:

| Зарегистрировано | 2002 | 2003 |
|-------------------------------|---------|---------|
| Средняя численность населения | 2502706 | 2518072 |
| Родившихся живыми | 21906 | 22169 |
| Умерших | 35271 | 39702 |
| В том числе детей до 1 года | 336 | 428 |
| Браков | 17352 | 17820 |
| Разводов | 11307 | 11465 |

Рассчитайте относительные величины динамики, интенсивности и сделайте выводы о естественном движении населения в области.

Решение.

Рассчитаем относительные величины динамики, интенсивности. Результаты расчета приведены в таблице:

| Зарегистрировано | 2002 | 2003 | Относительные величины, % | |
|-------------------------------|---------|---------|---------------------------|---------------|
| | | | Динамики | Интенсивности |
| Средняя численность населения | 2502706 | 2518072 | 0,61 | 100,61 |
| Родившихся живыми | 21906 | 22169 | 1,20 | 101,20 |
| Умерших | 35271 | 39702 | 12,56 | 112,56 |
| В том числе детей до 1 года | 336 | 428 | 27,38 | 127,38 |
| Браков | 17352 | 17820 | 2,70 | 102,70 |
| Разводов | 11307 | 11465 | 1,40 | 101,40 |

Выводы.

За год наблюдался незначительный рост численности населения на 0,61%.

Смертность выросла на 12,56%, рождаемость – на 1,2%. Поэтому рост смертности выше роста рождаемости на 11,36%. В результате можно сделать вывод о том, что численность выросла за счет миграции населения.

Число браков выросло на 2,7%, число разводов – на 1,4%. Поэтому наблюдается рост числа семей на 1,3%.

Задача 2.18.

«В новый век жители области (Тюменской – ред.), по данным комитета государственной статистики, пришли с потребительской корзиной стоимостью в 953 руб. 09 коп. В Ханты-мансийском автономном округе она «потянула на 1048,82 руб., в Ямало-Ненецком округе на 1203,78 руб., по югу области – на 812,75 руб. По городам ее стоимость составляет: Тюмень – 824,01 руб. Ишим – 691,81 руб., Тобольск – 806,87 руб., Ханты-Мансийск – 1033,32 руб., Сургут – 1054,94 руб., Салехард – 1238,57 руб., Новый Уренгой – 1191,01 руб.».

Определите относительные величины сравнения.

Решение.

Поскольку анализируются значения стоимости потребительской корзины регионов и городов Тюменской области, то в качестве базового показателя сравнения используем стоимость потребительской корзины Тюменской области в целом. Результаты расчета относительных величин сравнения (в %) приведены в таблице.

| Регион | Стоимость потребительской корзины, руб. | Относительный уровень к средней величине по Тюменской области, % |
|-----------------------------------|---|--|
| Ханты-мансийский автономный округ | 1048,82 | 110,04 |
| Ямало-Ненецкий автономный округ | 1203,78 | 126,30 |

| | | |
|---------------------------|---------|--------|
| Юг Тюменской области | 812,75 | 85,28 |
| Тюмень | 824,01 | 86,46 |
| Ишим | 691,81 | 72,59 |
| Тобольск | 806,87 | 84,66 |
| Ханты-Мансийск | 1033,32 | 108,42 |
| Сургут | 1054,94 | 110,69 |
| Салехард | 1238,57 | 129,95 |
| Новый Уренгой | 1191,01 | 124,96 |
| Тюменская область в целом | 953,09 | 100,00 |

Задача 2.19.

Оборот коммерческой фирмы в 2001 году составил 2,0 млн. руб. Исходя из анализа складывающихся на рынке тенденций, руководство фирмы считает реальным в следующем году довести торговый оборот до 2,8 млн. руб. Фактический же оборот фирмы за 2002 г. составил 2,6 млн. руб. Рассчитать относительный показатель плана и относительный показатель реализации плана, сделать выводы.

Решение.

Относительный показатель плана равен отношению запланированного результата на следующий год к достигнутому результату в текущем году. Поэтому относительный показатель плана

$$p = \frac{2,8}{2} = 1,4, \text{ или } 140\%.$$

Относительный показатель реализации плана равен отношению достигнутого результата в следующем году к запланированному. Поэтому относительный показатель реализации плана

$$q = \frac{2,6}{2,8} = 0,9286, \text{ или } 92,86\%.$$

Задача 2.20.

Имеются следующие данные о розничном товарообороте РФ (млрд. р.):

| Показатель | 2002 | 2003 |
|--------------------------------------|-------|-------|
| Общий объем розничного товарооборота | 753,3 | 862,6 |
| В том числе | | |
| Продовольственные товары | 361,9 | 420,7 |
| Непродовольственные товары | 391,4 | 441,9 |

Вычислите относительные показатели структуры, координации и динамики. Сделайте анализ результатов.

Решение.

Относительные показатели структуры представляют собой отношение структурных частей изучаемого объекта и их целого. Они имеют вид:

| | | |
|-------------------------------|-------|-------|
| Показатель | 2002 | 2003 |
| Продовольственные товары, % | 48,04 | 48,77 |
| Непродовольственные товары, % | 51,96 | 51,23 |

Относительные показатели координации характеризуют соотношение отдельных частей целого между собой. Возьмем за базу сравнения продовольственные товары. Относительные показатели координации имеют вид:

| | | |
|-------------------------------|--------|--------|
| Показатель | 2002 | 2003 |
| Продовольственные товары, % | 100 | 100 |
| Непродовольственные товары, % | 108,15 | 105,04 |

Относительные показатели динамики имеют вид

| Показатель | Прирост | Темп роста | Темп прироста |
|--------------------------------------|---------|------------|---------------|
| Общий объем розничного товарооборота | 109,3 | 114,51% | 14,51% |
| В том числе | | | |
| Продовольственные товары | 58,8 | 116,25% | 16,25% |
| Непродовольственные товары | 50,5 | 112,90% | 12,90% |

Выводы. Общий объем розничного товарооборота в 2003 году вырос по сравнению с 2002 годом на 14,51%, в том числе по продовольственным товарам – на 16,25%, по непродовольственным товарам – на 12,90%.

Доля непродовольственных товаров в 2002 году составляла 51,96%, а в 2003 году – 51,23%.

Задача 2.21.

Имеются данные о внешнеторговом обороте России со странами дальнего и ближнего зарубежья, млн. долл.

| | I квартал | II квартал |
|---------|-----------|------------|
| Экспорт | 20972 | 22761 |
| Импорт | 14824 | 18269 |

Вычислите относительные показатели структуры, координации и динамики. Сделайте анализ результатов.

Решение.

Относительные показатели структуры представляют собой отношение структурных частей изучаемого объекта и их целого. Они имеют вид

| Показатель | I квартал | II квартал |
|------------|-----------|------------|
| Экспорт, % | 58,59 | 55,47 |
| Импорт, % | 41,41 | 44,53 |

Относительные показатели координации характеризуют соотношение отдельных частей целого между собой. Возьмем за базу сравнения продовольственные товары. Относительные показатели координации имеют вид

| Показатель | I квартал | II квартал |
|------------|-----------|------------|
| Экспорт, % | 100 | 100 |
| Импорт, % | 70,68 | 80,26 |

Относительные показатели динамики имеют вид

| Показатель | Прирост | Темп роста | Темп прироста |
|---------------------------|---------|------------|---------------|
| Общий объем товарооборота | 5234 | 114,62% | 14,62% |
| Экспорт | 1789 | 108,53% | 8,53% |
| Импорт | 3445 | 123,24% | 23,24% |

Выводы. Общий объем товарооборота во II квартале вырос по сравнению с I кварталом на 14,62%, в том числе по экспорту – на 8,53%, по импорту – на 23,24%.

Задача 2.22.

Сведения о заработной плате промышленных предприятий города N даны в таблице 1.

Таблица 1.

| Предприятие | Месячный фонд зарплаты (тыс. руб.) | Средняя зарплата (руб.) |
|--------------------|------------------------------------|-------------------------|
| Цементный завод | 586 | 1185 |
| Молокозавод | 375 | 760 |
| Мебельный комбинат | 521 | 1018 |

Используя представленные в таблице 1 данные:

- 1) Найдите относительные показатели структуры и координации;
- 2) Изобразите данные таблицы на диаграммах;
- 3) Определите среднюю зарплату;
- 4) Найдите значение моды для зарплаты.

Решение.

Относительный показатель структуры представляет собой отношение структурных частей изучаемого объекта и их целого: $d_i = \frac{R_i}{R}$, где R_i – показатель, характеризующий часть совокупности; R – показатель по всей совокупности в целом.

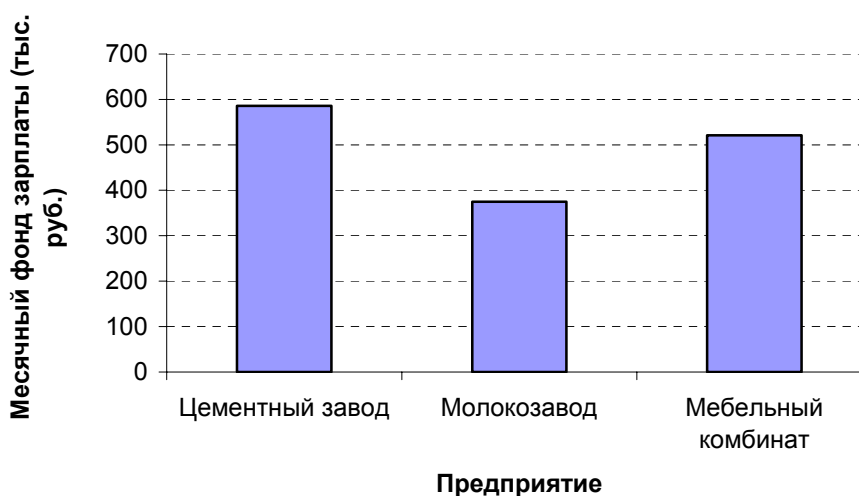
Относительные показатели координации характеризуют отношение отдельных частей целого между собой: $k_i = \frac{R_i}{R_0}$, где R_i – показатель, характеризующий часть совокупности; R_0 – показатель, характеризующий отношение отдельных частей целого между собой, выбранный в качестве базы сравнения (в данном случае, это месячный фонд зарплаты цементного завода).

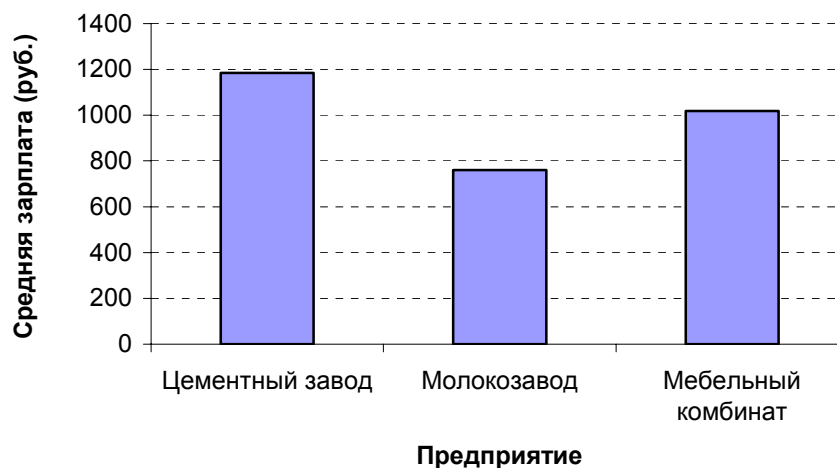
Результаты расчета показателей приведены в таблице 2.

Таблица 2

| Предприятие | Относительный показатель структуры | Показатель координации |
|--------------------|------------------------------------|------------------------|
| Цементный завод | 39,5% | 100,0% |
| Молокозавод | 25,3% | 64,0% |
| Мебельный комбинат | 35,2% | 88,9% |

Диаграммы, построенные по данным таблицы 1, имеют вид:





Среднюю зарплату определим по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\bar{z} = \frac{\sum z_i R_i}{\sum R_i} = \frac{1185 \cdot 586 + 760 \cdot 375 + 1018 \cdot 521}{586 + 375 + 521} = 1018,8 \text{ руб.}$$

Значение моды – это наиболее часто встречающееся значение признака в выборке. В данном случае этим значением будет средняя зарплата на мебельном комбинате: $x_{\text{mod}} = 1018$ руб.

Задача 2.23.

Данные о стоимости жилья приведены в таблице 1.

Таблица 1

| Цена за 1 м ² (в \$) | Общая площадь (в тыс. м ²) |
|---------------------------------|--|
| 100 – 200 | 37,1 |
| 200 – 300 | 27,5 |
| 300 – 400 | 14,4 |
| 400 – 500 | 14 |
| 500 – 600 | 8 |

Используя представленные в таблице 5.3 данные:

- 1) Найдите относительные показатели структуры;
- 2) Определите значение моды и медианы;
- 3) Изобразите данные таблицы графически (постройте гистограмму и кумулянту);
- 4) Определите среднюю цену 1 м²;
- 5) Найдите значение первой квантили.

Сделайте выводы по результатам проведенного анализа.

Решение.

Относительный показатель структуры представляет собой отношение структурных частей изучаемого объекта и их целого:

$$d_i = \frac{R_i}{R},$$

где R_i – показатель, характеризующий часть совокупности; R – показатель по всей совокупности в целом.

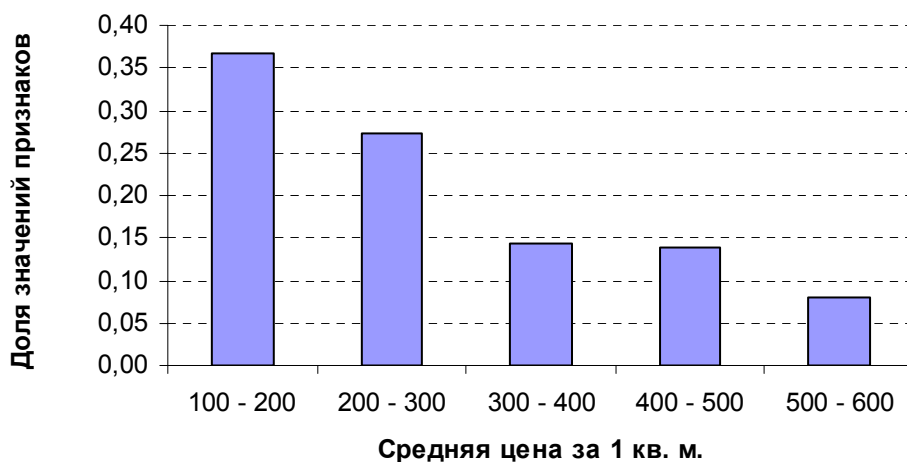
Результаты расчета относительных показателей структуры приведены в таблице.

| Цена за 1 кв. м. | Средняя цена за 1 кв. м. | Относительный показатель структуры |
|------------------|--------------------------|------------------------------------|
| 100 - 200 | 150 | 0,37 |
| 200 - 300 | 250 | 0,27 |
| 300 - 400 | 350 | 0,14 |
| 400 - 500 | 450 | 0,14 |
| 500 - 600 | 550 | 0,08 |

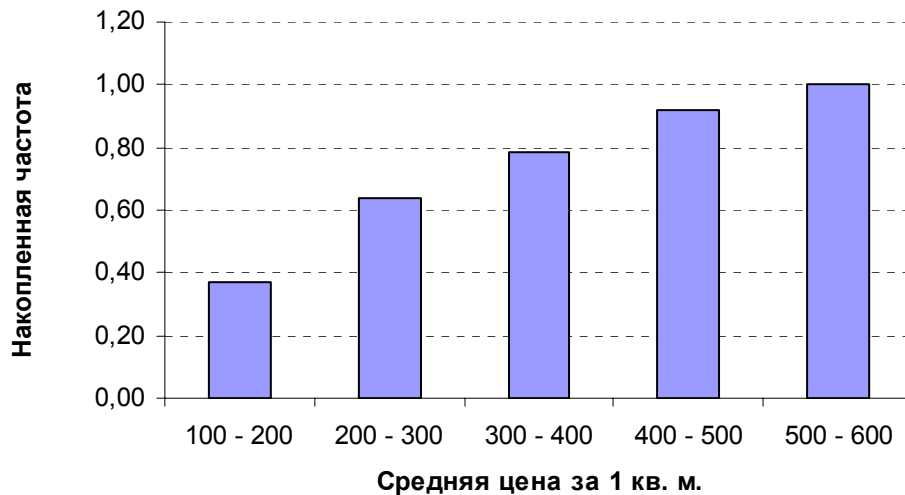
Медиана равна 250 \$ за 1 кв. м.

Мода равна 150 \$ за 1 кв. м.

Гистограмма для данных таблицы 5.3 имеет следующий вид:



Кумулянта для данных таблицы 5.3 имеет следующий вид:



Среднюю цену 1 кв. м. определим по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i R_i}{\sum R_i} = \frac{150 \cdot 37,1 + 250 \cdot 27,5 + 350 \cdot 14,4 + 450 \cdot 14 + 550 \cdot 8}{37,1 + 27,5 + 14,4 + 14 + 8} = 279,01 \text{ \$}.$$

Значение 1-й квантили составляет 150 \$.

Задача 2.24.

На отчетный период планом предусматривалось увеличить объем выпуска продукции на 7% по сравнению с предшествующим периодом. План выпуска продукции был невыполнен на 2,5%. Определить, на сколько процентов увеличился (снизился) объем производства в отчетном периоде по сравнению с предшествующим периодом.

Решение.

Пусть на начало отчетного периода объем выпуска продукции составлял 100%. Тогда фактический выпуск продукции в отчетном году составил

$$100\% \cdot 1,07 \cdot 0,975 = 104,325\% .$$

Таким образом, объем производства в отчетном периоде по сравнению с предшествующим периодом вырос на 4,425%.

Тема 3. Средние величины

Задача 3.1.

Имеется информация о численности студентов ВУЗов города и удельном весе (%) обучающихся студентов на коммерческой основе:

| ВУЗы города | Общее число студентов (тыс. чел.) | Из них удельный вес (%), обучающихся на коммерческой основе. |
|-------------|-----------------------------------|--|
| УГТУ-УПИ | 15 | 15 |
| УрГЭУ | 3 | 10 |
| УрГЮА | 7 | 20 |

Определить: 1) средний удельный вес студентов ВУЗов, обучающихся на коммерческой основе; 2) число этих студентов.

Решение.

Средний удельный вес студентов ВУЗов, обучающихся на коммерческой основе определим по формуле средней арифметической средней

$$\bar{f} = \frac{\sum f_i n_i}{\sum n_i} = \frac{15 \cdot 15 + 10 \cdot 3 + 20 \cdot 7}{15 + 3 + 7} = \frac{395}{25} = 15,8\%.$$

Число студентов ВУЗов, обучающихся на коммерческой основе, равно

$$m = \frac{\sum n_i f_i}{100} = \frac{15 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 20}{100} = \frac{395}{100} = 3,95 \text{ тыс. чел.}$$

Задача 3.2.

Сумма невыплаченной своевременно задолженности по кредитам на 1 июля составляла 92,4 млн. денежных единиц. По отдельным отраслям экономики она распределялась следующим образом:

| Отрасль народного хозяйства | Сумма невыплаченной задолженности, млн. ден. ед. | Удельный вес невыплаченной задолженности в общем объеме кредитов, % |
|-----------------------------|--|---|
| А | 32,0 | 20 |
| В | 14,0 | 28 |
| С | 46,4 | 16 |

Определить средний процент невыплаченной своевременно задолженности. Обоснуйте выбор формы средней.

Решение.

Средний процент невыплаченной своевременно задолженности определяется как отношение

$$\bar{f} = \frac{\sum x_i}{\sum s_i}$$

где $\sum x_i$ – вся невыплаченная своевременно задолженность, $\sum s_i$ – общая сумма кредитов.

$$\bar{f} = \frac{\sum x_i}{\sum s_i} = \frac{\sum x_i}{\sum \frac{x_i}{f_i}},$$

где f_i – удельные веса невыплаченной задолженности в общем объеме кредитов по каждой из отраслей народного хозяйства.

В результате получили формулу средней гармонической. Подставив исходные данные, получим

$$\bar{f} = \frac{\sum x_i}{\sum \frac{x_i}{f_i}} = \frac{32 + 14 + 46,4}{\frac{32}{0,2} + \frac{14}{0,28} + \frac{46,4}{0,16}} = \frac{92,4}{500} = 0,1848, \text{ или } 18,48\%.$$

Задача 3.3.

Имеются следующие данные по двум заводам, вырабатывающим однородную продукцию:

| Номер завода | Январь | | Февраль | |
|--------------|---|---------------------------|------------------------|--------------------|
| | затраты времени на единицу продукции, час | изготовлено продукции, шт | затраты времени на | |
| | | | единицу продукции, час | всю продукцию, час |
| 1 | 2 | 160 | 1,8 | 420 |
| 2 | 2,8 | 180 | 2,4 | 440 |

Вычислите средние затраты времени на изготовление единицы продукции по двум заводам в январе и феврале. Укажите виды средних величин, используемых в решении задач.

Решение.

Средние затраты времени на изготовление единицы продукции по двум заводам в январе определим по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{t} = \frac{\sum t_i n_i}{\sum n_i} = \frac{2 \cdot 160 + 2,8 \cdot 180}{160 + 180} = \frac{824}{340} = 2,42 \text{ час.}$$

Средние затраты времени на изготовление единицы продукции по двум заводам в феврале определим по формуле средней геометрической

$$\bar{t} = \frac{\sum T_i}{\sum \frac{T_i}{t_i}} = \frac{420 + 440}{\frac{420}{1,8} + \frac{440}{2,4}} = \frac{860}{416,67} = 2,06$$

Задача 3.4.

Имеются данные по 2-м заводам, вырабатывающим одноименную продукцию. Определить для каждого года отдельно средние затраты времени на единицу продукции по двум заводам вместе.

| Завод | Предыдущий год. | | Текущий год | |
|-------|---|---------------------------------|---|---------------------------------------|
| | Затраты времени на единицу продукции, час | Изготовлено продукции, тыс. шт. | Затраты времени на единицу продукции, час | Затраты времени на всю продукцию, час |
| 1 | 2 | 2 | 1,8 | 3960 |
| 2 | 2,2 | 3 | 2 | 6400 |

Решение.

Обозначим для каждого завода: t_i – затраты времени на единицу продукции, час; q_i – изготовлено продукции, тыс. шт.; T_i – затраты времени на всю продукцию, час.

Средние затраты времени на единицу продукции по двум заводам вместе в предыдущем году составили

$$\bar{t} = \frac{\sum t_i q_i}{\sum q_i} = \frac{2 \cdot 2 + 2,2 \cdot 3}{2 + 3} = \frac{10,6}{5} = 2,12 \text{ час.}$$

Средние затраты времени на единицу продукции по двум заводам вместе в текущем году составили

$$\bar{t} = \frac{\sum T_i}{\sum \frac{T_i}{t_i}} = \frac{3960 + 6400}{\frac{3960}{1,8} + \frac{6400}{2}} = \frac{10360}{5400} = 1,919 \text{ час.}$$

Задача 3.5.

Имеются следующие данные о стоимости имущества предприятия (млн. руб.):

| | 01.01. | 01.02. | 01.03. | 01.04. | 01.05. | 01.06. | 01.07. |
|--------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Стоимость имущества, млн. руб. | 62 | 68 | 65 | 68 | 70 | 75 | 78 |

Определите среднегодовую стоимость имущества:

- 1) за I квартал;
- 2) за II квартал;
- 3) за полугодие в целом.

Решение.

Определим среднеквартальную стоимость имущества по формуле средней хронологической.

Средняя стоимость имущества за I квартал составляет

$$\bar{x}_I = \frac{\frac{62}{2} + 68 + 65 + \frac{68}{2}}{3} = \frac{198}{3} = 66 \text{ млн. руб.}$$

Средняя стоимость имущества за II квартал составляет

$$\bar{x}_{II} = \frac{\frac{68}{2} + 70 + 75 + \frac{78}{2}}{3} = \frac{218}{3} = 72,67 \text{ млн. руб.}$$

Средняя стоимость имущества за полугодие в целом составляет

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_I + \bar{x}_{II}}{2} = \frac{66 + 72,67}{2} = 69,33 \text{ млн. руб.}$$

Задача 3.6.

Известны данные о движении денежных средств на расчетном счете предприятия за I квартал

| | | |
|------------|-------------------|----------------|
| 1 января | Остаток денег | 62,5 тыс. руб. |
| 15 января | Поступило на р/с | 28,0 тыс. руб. |
| 20 января | Перечислено с р/с | 18,0 тыс. руб. |
| 28 января | Поступило на р/с | 42,0 тыс. руб. |
| 4 февраля | Выдано | 34,0 тыс. руб. |
| 18 февраля | Поступило на р/с | 52,0 тыс. руб. |
| 26 февраля | Перечислено с р/с | 23,0 тыс. руб. |
| 4 марта | Выдано | 30,0 тыс. руб. |
| 15 марта | Поступило на р/с | 46,0 тыс. руб. |
| 24 марта | Перечислено с р/с | 20,0 тыс. руб. |

Рассчитать средние остатки денежных средств на р/с за январь, февраль, март и за 1 квартал.

Решение.

Определим остаток денег на р/с по дням.

С 1 по 14 января (14 дней) остаток денежных средств равен 62,5 тыс. руб.

С 15 по 19 января (5 дней) остаток денежных средств равен $62,5 + 28 = 90,5$ тыс. руб.

С 20 по 27 января (8 дней) остаток денежных средств равен $90,5 - 18 = 72,5$ тыс. руб.

С 28 января по 3 февраля (7 дней) остаток денежных средств равен $72,5 + 42 = 114,5$ тыс. руб.

С 4 по 17 февраля (14 дней) остаток денежных средств равен $114,5 - 34 = 80,5$ тыс. руб.

С 18 по 25 февраля (8 дней) остаток денежных средств равен $80,5 + 52 = 132,5$ тыс. руб.

С 25 февраля по 3 марта (6 дней) остаток денежных средств равен $132,5 - 23 = 109,5$ тыс. руб.

С 4 по 14 марта (11 дней) остаток денежных средств равен $109,5 - 30 = 79,5$ тыс. руб.

С 15 по 23 марта (9 дней) остаток денежных средств равен $79,5 + 46 = 125,5$ тыс. руб.

С 24 по 31 марта (8 дней) остаток денежных средств равен $125,5 - 20 = 105,5$ тыс. руб.

Воспользуемся формулой средней арифметической взвешенной.

Средний остаток денежных средств на р/с за январь равен

$$\bar{x}_1 = \frac{62,5 \cdot 14 + 90,5 \cdot 5 + 72,5 \cdot 8 + 114,5 \cdot 4}{14 + 5 + 8 + 4} = \frac{2365,5}{31} = 76,306 \text{ тыс. руб.}$$

Средний остаток денежных средств на р/с за февраль равен

$$\bar{x}_2 = \frac{114,5 \cdot 3 + 80,5 \cdot 14 + 132,5 \cdot 8 + 109,5 \cdot 3}{3 + 14 + 8 + 3} = \frac{2859}{28} = 102,107 \text{ тыс. руб.}$$

Средний остаток денежных средств на р/с за март равен

$$\bar{x}_3 = \frac{109,5 \cdot 3 + 79,5 \cdot 11 + 125,5 \cdot 9 + 105,5 \cdot 8}{3 + 11 + 9 + 8} = \frac{3176,5}{31} = 102,468 \text{ тыс. руб.}$$

Отсюда средний остаток денежных средств на р/с за 1 квартал равен

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum \bar{x}_i n_i}{\sum n_i} = \frac{76,306 \cdot 31 + 102,107 \cdot 28 + 102,468 \cdot 31}{31 + 28 + 31} = \frac{8401}{90} = 93,344 \text{ тыс. руб.}$$

Задача 3.7.

По филиалам фирмы, выпускающим одноименную продукцию, имеется следующая информация:

| № филиала | Общий расход материала на выпуск продукции, м ² | Произведено изделий, шт. | Расход ткани на одно изделие, м ² | Удельный вес выпускаемой продукции в % к итогу |
|-----------|--|--------------------------|--|--|
| 1 | 1200 | 750 | 1,6 | 25,4 |
| 2 | 1700 | 1000 | 1,7 | 33,9 |
| 3 | 1980 | 1200 | 1,65 | 40,7 |

Определить средний по фирме расход ткани на одно изделие, используя информацию:
1) гр. 1 и 2; 2) гр. 1 и 3; 3) гр. 2 и 3; 4) гр. 3 и 4.

Решение.

Обозначим: x_i – общий расход материала на выпуск продукции; n_i – произведено изделий; y_i – расход ткани на одно изделие; z_i – удельный вес выпускаемой продукции в % к итогу.

1) Средний по фирме расход ткани на одно изделие равен отношению общего расхода материала на выпуск продукции по фирме к общему числу произведенных изделий по фирме

$$\bar{y} = \frac{\sum x_i}{\sum n_i} = \frac{1200 + 1700 + 1980}{750 + 1000 + 1200} = \frac{4880}{2950} = 1,654 \text{ м}^2.$$

2) Средний по фирме расход ткани на одно изделие равен средней гармонической взвешенной

$$\bar{y} = \frac{\sum x_i}{\sum \frac{x_i}{y_i}} = \frac{\sum x_i}{\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3}} = \frac{1200 + 1700 + 1980}{\frac{1200}{1,6} + \frac{1700}{1,7} + \frac{1980}{1,65}} = \frac{4880}{2950} = 1,654 \text{ м}^2.$$

3) Средний по фирме расход ткани на одно изделие равен средней арифметической взвешенной

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i n_i}{\sum n_i} = \frac{1,6 \cdot 750 + 1,7 \cdot 1000 + 1,65 \cdot 1200}{750 + 1000 + 1200} = \frac{4880}{2950} = 1,654 \text{ м}^2.$$

3) Средний по фирме расход ткани на одно изделие равен средней арифметической взвешенной

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i z_i}{\sum z_i} = \frac{1,6 \cdot 25,4 + 1,7 \cdot 33,9 + 1,65 \cdot 40,7}{25,4 + 33,9 + 40,7} = \frac{165,4}{100} = 1,654 \text{ м}^2.$$

Задача 3.8.

Списочная численность работников фирмы составила: на 01.01 – 530 чел., на 01.02 – 540 чел., на 01.03 – 550 чел., на 01.04 – 530 чел.

Вычислить среднемесячную численность сотрудников: 1) за каждый месяц квартала; за квартал (двумя способами).

Решение.

Вычислим среднемесячную численность сотрудников за каждый месяц квартала как среднее между численностью работников на начало и конец данного месяца. Тогда:

- средняя численность сотрудников в январе равна $\bar{y}_1 = \frac{530 + 540}{2} = 535$ чел.;

- средняя численность сотрудников в феврале равна $\bar{y}_2 = \frac{540 + 550}{2} = 545$ чел.;

- средняя численность сотрудников в марте равна $\bar{y}_3 = \frac{550 + 530}{2} = 540$ чел.

Вычислить среднемесячную численность сотрудников за квартал (двумя способами).

По формуле средней хронологической среднемесячная численность сотрудников за квартал равна

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2}}{3} = \frac{\frac{530}{2} + 540 + 550 + \frac{530}{2}}{3} = 540 \text{ чел.}$$

По второму способу среднемесячная численность сотрудников за квартал равна средней арифметической среднемесячных численностей сотрудников за каждый месяц

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3}{3} = \frac{535 + 545 + 540}{3} = 540 \text{ чел.}$$

Задача 3.9.

Известна списочная численность работников организации на некоторые даты 2000 года: на 1.01 – 530 чел., на 1.03 – 570 чел., на 1.04 – 520 чел., на 1.09 – 430 чел., на 1.01.2001 – 550 чел. Вычислите среднегодовую численность работников организации.

Решение.

Определим среднее число работников организации в указанных периодах по формуле средней хронологической:

- с 1.01 по 1.03 оно равно $x_1 = (530 + 570) / 2 = 550$ чел., число дней $n_1 = 59$;

- с 1.03 по 1.04 оно равно $x_2 = (570 + 520) / 2 = 545$ чел., число дней $n_2 = 31$;

- с 1.04 по 1.09 оно равно $x_3 = (520 + 430) / 2 = 475$ чел., число дней $n_3 = 153$;

- с 1.09 по 1.01.2001 оно равно $x_4 = (430 + 550) / 2 = 490$ чел., число дней $n_4 = 122$.

Определим среднегодовую численность работников организации по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{550 \cdot 59 + 545 \cdot 31 + 475 \cdot 153 + 490 \cdot 122}{59 + 31 + 153 + 122} = \frac{181800}{365} = 498,1 \text{ чел.}$$

Задача 3.10.

Имеются следующие данные о стоимости коттеджей, расположенных в Подмоскowie далее 30 км от МКАД (2000 г.), предлагаемых к продаже.

| Цены 1 м ² \$ США | Общая площадь, тыс. м ² |
|------------------------------|------------------------------------|
| 300 – 400 | 29,4 |
| 400 – 500 | 20,5 |
| 500 – 600 | 7,3 |
| 600 – 700 | 7,0 |
| 700 – 800 | 4,0 |

Рассчитайте среднюю цену 1 м², моду и медиану. Постройте график. Сделайте вывод.

Решение.

Составим новую таблицу

| Цены 1 м ² , \$ США | x_i , \$ США | Общая площадь, тыс. м ² | Относительная частота w_i |
|--------------------------------|----------------|------------------------------------|-----------------------------|
| 300 – 400 | 350 | 29,4 | 0,431085044 |
| 400 – 500 | 450 | 20,5 | 0,30058651 |
| 500 – 600 | 550 | 7,3 | 0,107038123 |
| 600 – 700 | 650 | 7 | 0,102639296 |
| 700 – 800 | 750 | 4 | 0,058651026 |

Среднюю цену 1 м² определим по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i} = \frac{350 \cdot 0,4311 + \dots + 750 \cdot 0,0587}{1} = 455,718 \text{ \$ США.}$$

Для интервальных рядов распределения с равными интервалами мода равна

$$M_o = x_{M_o} + i_{M_o} \cdot \frac{f_{M_o} - f_{M_o-1}}{(f_{M_o} - f_{M_o-1}) + (f_{M_o} - f_{M_o+1})}$$

где x_{M_o} – начальное значение интервала, содержащего моду;

i_{M_o} – величина модального интервала;

f_{Mo} – частота модального интервала;

f_{Mo-1} – частота интервала, предшествующего модальному;

f_{Mo+1} – частота интервала, следующего за модальным.

Подставив исходные данные, получим

$$Mo = 300 + 100 \cdot \frac{0,431 - 0}{(0,431 - 0) + (0,431 - 0,301)} = 376,8 \text{ \$ США.}$$

Медиана интервального вариационного ряда распределения определяется по формуле

$$Me = x_{Me} + i_{Me} \frac{0,5f - S_{Me-1}}{f_{Me}},$$

где x_{Me} – начальное значение интервала, содержащего медиану;

i_{Me} – величина медианного интервала;

f – сумма частот ряда;

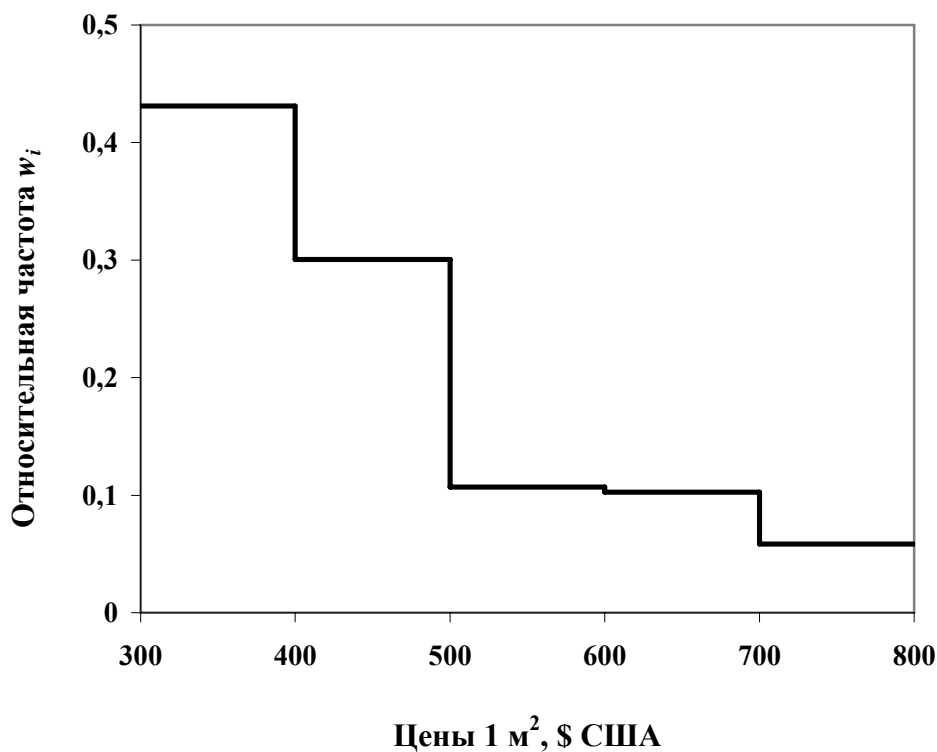
S_{Me-1} – сумма накопленных частот, предшествующих медианному интервалу;

f_{Me} – частота медианного интервала.

Подставив исходные данные, получим

$$Me = 400 + 100 \cdot \frac{0,5 \cdot 1 - 0,431}{0,301} = 422,9 \text{ \$ США.}$$

Построим график гистограммы.



Вывод. Гистограмма имеет асимметричный характер. В Подмосковье далее 30 км от МКАД преобладают коттеджи с ценами от 300 до 500 \$ США.

Задача 3.11.

Распределение населения России по среднему денежному доходу в 1995 году характеризуется следующими данными:

| Среднедушевой денежный доход в месяц, тыс. р. | До 100 | 100 – 250 | 250 – 350 | 350 – 500 | Свыше 500 |
|---|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Численность населения, млн. чел. | 3 | 31,1 | 25,1 | 30 | 59 |

Определите среднему денежному доходу населения России в целом.

Решение.

Сформируем интервалы для всех групп по среднему денежному доходу в месяц:

| Интервалы групп по среднему денежному доходу в месяц, тыс. р. | Средины интервалов групп по среднему денежному доходу в месяц (x_i), тыс. р. | Численность населения (n_i), млн. чел. |
|---|--|--|
| 0 – 100 | 50 | 3 |
| 100 – 250 | 175 | 31,1 |
| 250 – 350 | 300 | 25,1 |
| 350 – 500 | 425 | 30 |
| 500 – 650 | 575 | 59 |

Определите среднему денежному доходу населения России в целом по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{50 \cdot 3 + \dots + 575 \cdot 59}{3 + \dots + 59} = \frac{59797,5}{148,2} = 403,49 \text{ тыс. р.}$$

Задача 3.12.

Имеются следующие данные:

| Даты времени | 01.01 | 01.04 | 01.07 | 01.10 |
|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Стоимость основных фондов, млрд. р. | 75 | 77 | 70 | 78 |

Определите средний уровень (среднегодовую стоимость основных фондов) данного моментного ряда двумя способами.

Решение.

Определим среднегодовую стоимость основных фондов по формуле средней хронологической

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4}{3} = \frac{\frac{75}{2} + 77 + 70 + \frac{78}{2}}{3} = 74,5 \text{ млн. р.}$$

Обозначим $x_{(i)} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ – средняя стоимость основных фондов в i -м квартале.

Определим среднеквартальную стоимость основных фондов:

$$x_{(1)} = \frac{75 + 77}{2} = 76 \text{ млн. р.,}$$

$$x_{(2)} = \frac{77 + 70}{2} = 73,5 \text{ млн. р.,}$$

$$x_{(3)} = \frac{70 + 78}{2} = 74 \text{ млн. р.}$$

Тогда среднегодовая стоимость основных фондов равна

$$\bar{x} = \frac{x_{(1)} + x_{(2)} + x_{(3)}}{3} = \frac{76 + 73,5 + 74}{3} = 74,5 \text{ млн. р.}$$

Задача 3.13.

Имеется информация по филиалам фирмы:

| Филиал фирмы | Общая сумма затрат на выпуск продукции, тыс. р. | Общий выпуск продукции, тыс. шт. | Себестоимость единицы продукции, р. | Удельный вес выпускаемой продукции в общем выпуске, % |
|-----------------|---|--|---|--|
| 1 | 900 | 30 | 30 | 46,1 |
| 2 | 350 | 10 | 35 | 15,4 |
| 3 | 800 | 25 | 32 | 38,5 |

Определите себестоимость единицы изделия по фирме в целом, используя общий выпуск продукции и себестоимость единицы продукции

Решение.

Определим себестоимость единицы изделия по фирме в целом по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{c} = \frac{\sum c_i n_i}{\sum n_i},$$

где c_i – себестоимость единицы продукции для i -го филиала фирмы; n_i – общий выпуск продукции для i -го филиала фирмы.

Подставив исходные данные, получим

$$\bar{c} = \frac{\sum c_i n_i}{\sum n_i} = \frac{30 \cdot 30 + 35 \cdot 10 + 32 \cdot 25}{30 + 10 + 25} = \frac{2050}{65} = 31,538 \text{ р.}$$

Задача 3.14.

Используя данные, определить средние по каждому признаку. Формулы записать, используя буквенные обозначения признаков. Указать, какие виды средних применялись.

| Заводы | Число работников, чел. | % рабочих в численности работающих | Среднее число дней, отработанных 1 рабочим | Фактический выпуск продукции, руб. | Выработано продукции 1 рабочим, руб. |
|--------|------------------------|------------------------------------|--|------------------------------------|--------------------------------------|
| № | x | y | k | z | c |
| 1 | 270 | 70 | 24 | 80000 | 423,0 |
| 2 | 150 | 80 | 25 | 15000 | 125,0 |
| 3 | 200 | 73 | 23 | 20000 | 136,0 |

Решение.

Среднее число работников на всех заводах определим по формуле средней арифметической

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{270 + 150 + 200}{3} = \frac{620}{3} = 206,67 \text{ чел.}$$

Средний процент рабочих на всех заводах определим по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i} = \frac{70 \cdot 270 + 80 \cdot 150 + 73 \cdot 200}{270 + 150 + 200} = \frac{45500}{620} = 73,39\%.$$

Среднее число дней, отработанных 1 рабочим, определим по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{k} = \frac{\sum k_i y_i x_i}{\sum y_i x_i} = \frac{24 \cdot 70 \cdot 270 + 25 \cdot 80 \cdot 150 + 23 \cdot 73 \cdot 200}{70 \cdot 270 + 80 \cdot 150 + 73 \cdot 200} = \frac{1089400}{45500} = 23,94 \text{ дней.}$$

Средний фактический выпуск продукции на всех заводах определим по формуле средней арифметической

$$\bar{z} = \frac{\sum z_i}{n} = \frac{80000 + 15000 + 20000}{3} = \frac{115000}{3} = 38333,33 \text{ руб.}$$

Среднюю выработку 1 рабочим определим по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{c} = \frac{\sum c_i y_i x_i}{\sum y_i x_i} = \frac{423 \cdot 70 \cdot 270 + 125 \cdot 80 \cdot 150 + 136 \cdot 73 \cdot 200}{70 \cdot 270 + 80 \cdot 150 + 73 \cdot 200} = \frac{11480300}{45500} = 252,31 \text{ руб.}$$

Задача 3.15.

По трем автоколоннам известны следующие данные за отчетный месяц

| Автоколонна | Затраты на перевозку всех грузов, млн. руб. | Себестоимость одного тонно-километра, тыс. руб. | Средний суточный грузооборот автомашины, т-км |
|-------------|---|---|---|
| 1 | 210 | 0,7 | 250 |
| 2 | 228 | 0,6 | 300 |
| 3 | 258 | 0,5 | 350 |

Определите за отчетный месяц по АТП в целом:

- среднюю себестоимость тонно-километра;
- среднее суточное число тонно-километров, сделанных автомашиной;
- среднее число работающих автомашин в автоколоннах.

Примечание: число дней работы во всех автоколоннах одинаково – 22 дня.

Решение.

Обозначим для каждой автоколонны: x_i – затраты на перевозку всех грузов; y_i – себестоимость одного тонно-километра; z_i – средний суточный грузооборот автомашины.

Среднюю себестоимость тонно-километра определим по формуле средней гармонической

$$\bar{y} = \frac{\sum x_i}{\sum \frac{x_i}{y_i}} = \frac{696}{1196} = 0,582 \text{ тыс. руб.}$$

Среднее число работающих автомашин в автоколоннах равно:

$$\text{- в первой автоколонне } n_1 = \frac{x_1}{y_1 z_1} \cdot 1000 = \frac{210 \cdot 1000}{0,7 \cdot 250} = 1200 \text{ шт.,}$$

$$\text{- во второй автоколонне } n_2 = \frac{x_2}{y_2 z_2} \cdot 1000 = \frac{228 \cdot 1000}{0,6 \cdot 300} = 1266,67 \text{ шт.,}$$

$$\text{- в третьей автоколонне } n_3 = \frac{x_3}{y_3 z_3} \cdot 1000 = \frac{258 \cdot 1000}{0,5 \cdot 350} = 1474,29 \text{ шт.}$$

Среднее суточное число тонно-километров, сделанных автомашиной, определим по формуле средней арифметической

$$\bar{z} = \frac{\sum z_i n_i}{\sum n_i} = \frac{1196000}{3940,95} = 303,48 \text{ т-км.}$$

Задача 3.16.

По трем районам города имеются следующие данные на конец года.

| Район города | Сумма вкладов в сбер. кассы, млн. руб. | Средний размер вклада, тыс. руб. | Среднее число вкладов на 1 сбер. кассу |
|--------------|--|----------------------------------|--|
| 1 | 5400 | 600 | 1500 |
| 2 | 3900 | 650 | 1000 |
| 3 | 8000 | 800 | 2000 |

Определить:

- средний размер вклада;
- среднее число вкладов в сберкассах;
- среднее число сберкасс на 1 район города;
- среднюю сумму вкладов.

Решение.

Обозначим для каждого района: x_i – сумма вкладов в сбер. кассы; y_i – средний размер вклада; z_i – среднее число вкладов на 1 сбер. кассу.

Средний размер вклада определим по формуле средней гармонической

$$\bar{y} = \frac{\sum x_i}{\sum \frac{x_i}{y_i}} = \frac{17300}{25} = 692 \text{ тыс. руб.}$$

Определим число вкладов в сберкассах:

$$\text{- в первом районе } n_1 = \frac{x_1}{y_1} \cdot 1000 = \frac{5400 \cdot 1000}{600} = 9000 \text{ шт.,}$$

$$\text{- во втором районе } n_2 = \frac{x_2}{y_2} \cdot 1000 = \frac{3900 \cdot 1000}{650} = 6000 \text{ шт.,}$$

- в третьем районе $n_3 = \frac{x_3}{y_3} \cdot 1000 = \frac{8000 \cdot 1000}{800} = 10000$ шт.

Среднее число вкладов в сберкассы определим по формуле средней арифметической

$$n = \frac{\sum n_i}{3} = \frac{25000}{3} = 8333,33 \text{ шт.}$$

Среднее число сберкасс на 1 район города

- в первом районе $m_1 = \frac{n_1}{z_1} = \frac{9000}{1500} = 6$ шт.,

- во втором районе $m_2 = \frac{n_2}{z_2} = \frac{6000}{1000} = 6$ шт.,

- в третьем районе $m_3 = \frac{n_3}{z_3} = \frac{10000}{2000} = 5$ шт.

Задача 3.17.

Вычислите средние величины по нижеследующим признакам трех кинотеатров:

| Кинотеатры | Число посетителей за один день | Среднее число посетителей за один сеанс в день, чел. | Средний процент занятости зрительного зала за один сеанс, % |
|------------------|--------------------------------|--|---|
| «Юбилейный» | 1000 | 200 | 80 |
| «Юность» | 2100 | 300 | 90 |
| «Художественный» | 1000 | 250 | 70 |

Решение.

Среднее число посетителей за один день определим по формуле средней арифметической:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1000 + 2100 + 1000}{3} = 1366,67 \text{ чел.}$$

Среднее число посетителей за один сеанс в день определим по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i} = \frac{200 \cdot 1000 + 300 \cdot 2100 + 250 \cdot 1000}{1000 + 2100 + 1000} = \frac{1080000}{4100} = 263,41 \text{ чел.}$$

Средний процент занятости зрительного зала за один сеанс определим по формуле средней гармонической взвешенной:

$$\bar{z} = \frac{\sum y_i}{\sum \frac{y_i}{z_i}} = \frac{200 + 300 + 250}{\frac{200}{80} + \frac{300}{90} + \frac{250}{70}} = \frac{750}{9,405} = 79,75\%.$$

Задача 3.18.

Имеется информация по филиалам фирмы:

| Филиалы фирмы | Общая сумма затрат на выпуск продукции, тыс. р. | Общий выпуск продукции, тыс. шт. | Себестоимость единицы продукции, р. | Удельный вес выпускаемой продукции, в общем выпуске, % |
|------------------|---|--|---|---|
| А | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 900 | 30 | 30 | 46,1 |
| 2 | 350 | 10 | 35 | 15,4 |
| 3 | 800 | 25 | 32 | 38,5 |

Определить себестоимость единицы изделия по фирме в целом, используя следующую информацию: а) гр. 1 и 2, б) гр. 2 и 3, в) гр. 1 и 3, г) гр. 3 и 4.

Решение.

а) Себестоимость единицы изделия по фирме в целом по гр. 1 и 2 равна

$$c = \frac{\sum v_i}{\sum n_i} = \frac{900 + 350 + 800}{30 + 10 + 25} = \frac{2050}{65} = 31,54 \text{ р.}$$

б) Себестоимость единицы изделия по фирме в целом по гр. 2 и 3 определяется по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{c} = \frac{\sum c_i n_i}{\sum n_i} = \frac{30 \cdot 30 + 35 \cdot 10 + 32 \cdot 25}{30 + 10 + 25} = \frac{2050}{65} = 31,54 \text{ р.}$$

в) Себестоимость единицы изделия по фирме в целом по гр. 1 и 3 равна

$$\bar{c} = \frac{\sum v_i}{\sum \frac{v_i}{c_i}} = \frac{900 + 350 + 800}{\frac{900}{30} + \frac{350}{35} + \frac{800}{32}} = \frac{2050}{65} = 31,54 \text{ р.}$$

г) Себестоимость единицы изделия по фирме в целом по гр. 3 и 4 определяется по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{c} = \frac{\sum c_i f_i}{\sum f_i} = \frac{30 \cdot 46,1 + 35 \cdot 15,4 + 32 \cdot 38,5}{46,1 + 15,4 + 38,5} = \frac{3154}{100} = 31,54 \text{ р.}$$

Задача 3.19.

Имеются данные о посевной площади, урожайности и валовом сборе в 2-х районах области зерновых культур:

| № совхоза | Первый район | | Второй район | |
|-----------|-----------------|-------------------|-------------------|----------------------|
| | Валовый сбор, ц | Урожайность, ц/га | Урожайность, ц/га | Посевная площадь, га |
| 1 | 6300 | 32 | 31 | 300 |
| 2 | 6500 | 27 | 28 | 340 |

Определите среднюю урожайность зерновых в каждом из районов области. Укажите виды рассчитанных средних величин.

Решение

Урожайность на некоторой посевной площади определяется по формуле:

$$P = \frac{V}{S},$$

где V – валовый сбор; S – посевная площадь. Определим среднюю урожайность зерновых в первом районе области. Т.к. заданы урожайности и валовый сбор отдельных совхозов, то:

$$P = \frac{V}{S} = \frac{\sum V_i}{\sum S_i} = \frac{\sum V_i}{\sum \frac{V_i}{P_i}}.$$

Данная формула называется средней гармонической взвешенной.

Подставив в последнюю формулу известные значения, получим среднюю урожайность зерновых в первом районе области:

$$P^1 = \frac{6300 + 6500}{\frac{6300}{32} + \frac{6500}{27}} = \frac{12800}{437,616} = 29,249 \text{ ц/га.}$$

Определим среднюю урожайность зерновых во втором районе области. Поскольку заданы урожайности и посевные площади отдельных совхозов, то имеем:

$$P = \frac{V}{S} = \frac{\sum V_i}{\sum S_i} = \frac{\sum P_i S_i}{\sum S_i}.$$

Данная формула называется средней арифметической взвешенной.

Подставив в последнюю формулу известные значения, получим среднюю урожайность зерновых во втором районе области:

$$P^2 = \frac{31 \cdot 300 + 28 \cdot 340}{300 + 340} = \frac{18820}{640} = 29,406 \text{ ц/га.}$$

Задача 3.20.

По филиалам фирмы, выпускающим одноименную продукцию, имеется следующая информация:

| № филиала | Общий расход материала на выпуск продукции, м ² | Произведено изделий, шт. | Расход ткани на одно изделие, м ² | Удельный вес выпускаемой продукции, в % к итогу |
|-----------|--|--------------------------|--|---|
| A | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1200 | 750 | 1,6 | 25,4 |
| 2 | 1700 | 1000 | 1,7 | 33,9 |
| 3 | 1980 | 1200 | 1,65 | 40,7 |

Определить средний по фирме расход ткани на одно изделие, используя информацию:

- 1) гр. 1 и 2;
- 2) гр. 1 и 3;
- 3) гр. 2 и 3.

Решение.

1. Средний по фирме расход ткани на одно изделие определим как отношение суммарного расхода ткани по фирме к произведенному количеству продукции:

$$\bar{r} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{1200 + 1700 + 1980}{750 + 1000 + 1200} = \frac{4880}{2950} = 1,654 \text{ м}^2/\text{изделие.}$$

2. Средний по фирме расход ткани на одно изделие определим как среднюю гармоническую взвешенную:

$$\bar{r} = \frac{\sum R_i}{\sum \frac{R_i}{r_i}} = \frac{1200 + 1700 + 1980}{\frac{1200}{1,6} + \frac{1700}{1,7} + \frac{1980}{1,65}} = \frac{4880}{2950} = 1,654 \text{ м}^2/\text{изделие.}$$

3. Средний по фирме расход ткани на одно изделие определим как среднюю арифметическую взвешенную:

$$\bar{r} = \frac{\sum r_i n_i}{\sum n_i} = \frac{1,6 \cdot 750 + 1,7 \cdot 1000 + 1,65 \cdot 1200}{750 + 1000 + 1200} = \frac{4880}{2950} = 1,654 \text{ м}^2/\text{изделие.}$$

Задача 3.21.

Списочная численность работников фирмы составила: на 01.01 – 530 чел., на 01.02 – 540 чел., на 01.03 – 550 чел., на 01.04 – 530 чел.

Вычислить среднемесячную численность сотрудников:

- 1) За каждый месяц квартала;

2) За квартал (двумя способами).

Решение.

1. Вычислим среднемесячную численность сотрудников за каждый месяц квартала.

Средняя численность в январе составила

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{530 + 540}{2} = 535 \text{ чел.}$$

Средняя численность в феврале составила

$$\bar{x}_2 = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{540 + 550}{2} = 545 \text{ чел.}$$

Средняя численность в марте составила

$$\bar{x}_3 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{550 + 530}{2} = 540 \text{ чел.}$$

2. Вычислим среднемесячную численность сотрудников за квартал двумя способами.

По формуле средней хронологической:

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4}{3} = \frac{265 + 540 + 550 + 265}{3} = 540 \text{ чел.}$$

По формуле средней арифметической:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3}{3} = \frac{535 + 545 + 540}{3} = 540 \text{ чел.}$$

Задача 3.22.

Имеются данные:

| № предприятия | Фонд заработной платы, руб. | Среднесписочная численность работников, чел. | Среднемесячная зарплата, руб. | Удельный вес работников, % |
|---------------|-----------------------------|--|-------------------------------|----------------------------|
| А | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 54000 | 60 | 900 | 60 |
| 2 | 48000 | 40 | 1200 | 40 |

Определить среднюю зарплату работников предприятий, используя показатели: 1) гр. 1 и 2; 2) гр. 1 и 3; 3) гр. 2 и 3. 4) гр. 3 и 4.

Решение.

1. Среднюю зарплату работников предприятий определим как отношение суммарного фонда заработной платы по предприятиям к суммарной среднесписочной численности работников:

$$\bar{p} = \frac{R_1 + R_2}{n_1 + n_2} = \frac{54000 + 48000}{60 + 40} = \frac{102000}{100} = 1020 \text{ руб.}$$

2. Среднюю зарплату работников предприятий определим как среднюю гармоническую взвешенную:

$$\bar{r} = \frac{\sum R_i}{\sum \frac{R_i}{r_i}} = \frac{54000 + 48000}{\frac{54000}{900} + \frac{48000}{1220}} = \frac{102000}{100} = 1020 \text{ руб.}$$

3. Среднюю зарплату работников предприятий определим как среднюю арифметическую взвешенную:

$$\bar{r} = \frac{\sum r_i n_i}{\sum n_i} = \frac{900 \cdot 60 + 1200 \cdot 40}{60 + 40} = \frac{102000}{100} = 1020 \text{ руб.}$$

4. Среднюю зарплату работников предприятий определим как среднюю арифметическую взвешенную:

$$\bar{r} = \frac{\sum r_i w_i}{\sum w_i} = \frac{900 \cdot 0,6 + 1200 \cdot 0,4}{0,6 + 0,4} = \frac{1020}{1} = 1020 \text{ руб.}$$

Задача 3.23.

В течение I квартала имели место следующие изменения величины остатков вклада (руб.):

| Вклад | Дата изменения размера вклада, р. | | | | | | |
|-------|-----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 05.01 | 17.01 | 02.02 | 21.02 | 13.03 | 20.03 | 28.03 |
| I | +150 | -200 | - | +500 | - | - | +100 |
| II | - | - | +300 | +150 | -500 | -200 | +400 |

Определить, на сколько рублей и на сколько процентов различаются средние остатки по вкладу, если на 1 января остаток по первому вкладу составлял 1200 р., а по второму – 1500 р.

Решение.

Определим текущие размеры вкладов. Таблица имеет вид:

| Вклад | Текущие размеры вкладов, р. | | | | | | | | |
|-------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 31.12 | 05.01 | 17.01 | 02.02 | 21.02 | 13.03 | 20.03 | 28.03 | 01.04 |
| I | 1200 | 1350 | 1150 | 1150 | 1650 | 1650 | 1650 | 1750 | 1750 |
| II | 1500 | 1500 | 1500 | 1800 | 1950 | 1450 | 1250 | 1650 | 1650 |

Используем формулу средней арифметической взвешенной.

Средний остаток I вклада равен:

$$\bar{x}_I = \frac{1200 \cdot 4 + 1350 \cdot 12 + 1150 \cdot 35 + 1650 \cdot 35 + 1750 \cdot 4}{90} = \frac{126000}{90} = 1400 \text{ р.}$$

Средний остаток II вклада равен:

$$\bar{x}_{II} = \frac{1500 \cdot 32 + 1800 \cdot 19 + 1950 \cdot 20 + 1450 \cdot 7 + 1250 \cdot 8 + 1650 \cdot 4}{90} = \frac{147950}{90} = 1643,89 \text{ р.}$$

Средние остатки по вкладам различаются на

$$\Delta = \bar{x}_{II} - \bar{x}_I = 1643,89 - 1400 = 243,89 \text{ р.}$$

Разница в процентах составляет

$$\delta = \frac{\bar{x}_{II} - \bar{x}_I}{\bar{x}_I} \cdot 100\% = \frac{243,89}{1400} \cdot 100\% = 17,4\%.$$

Задача 3.24.

Применяя формулу средней гармонической взвешенной, найдите среднюю урожайность зерновых культур по УФО в 2000 г.

| Область | Валовой сбор, ц. | Урожайность, ц/га |
|--------------|------------------|-------------------|
| Курганская | 10883 | 22,9 |
| Свердловская | 603,5 | 24,1 |
| Тюменская | 1171,5 | 29,5 |
| Челябинская | 1050,7 | 20,8 |

Решение.

Средняя гармоническая урожайности равна

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^L n_i}{\sum_{i=1}^L \frac{n_i}{x_i}} = \frac{10883 + 603,5 + 1171,5 + 1050,7}{\frac{10883}{22,9} + \frac{603,5}{24,1} + \frac{1171,5}{29,5} + \frac{1050,7}{20,8}} = \frac{13708,7}{590,508} = 23,215 \text{ ц/га.}$$

Задача 3.25.

Определить среднюю производительность труда одного рабочего по трем цехам предприятия вместе.

| Цех | Стоимость выпущенной продукции, тыс. руб. | Средняя производительность труда одного рабочего, тыс. руб. |
|-----|---|---|
| 1 | 1995 | 21,0 |

| | | |
|---|------|------|
| 2 | 1840 | 18,4 |
| 3 | 2076 | 17,3 |

Решение.

Определим среднюю производительность труда одного рабочего по трем цехам предприятия вместе по формуле средней гармонической

$$\bar{p} = \frac{\sum s_i}{\sum \frac{s_i}{p_i}} = \frac{1995 + 1840 + 2076}{\frac{1995}{21} + \frac{1840}{18,4} + \frac{2076}{17,3}} = \frac{1995 + 1840 + 2076}{95 + 100 + 120} = \frac{5911}{315} = 18,765 \text{ тыс. руб.}$$

Тема 4. Показатели вариации

Задача 4.1.

При изучении влияния рекламы на размер среднемесячного вклада в банках района обследовано 2 банка. Получены следующие результаты:

| Размер месячного вклада, рубли | Число вкладчиков | |
|--------------------------------|------------------|------------------|
| | Банк с рекламой | Банк без рекламы |
| До 500 | - | 3 |
| 500-520 | - | 4 |
| 520-540 | - | 17 |
| 540-560 | 11 | 15 |
| 560-580 | 13 | 6 |
| 580-600 | 18 | 5 |
| 600-620 | 6 | - |
| 620-640 | 2 | - |
| Итого | 50 | 50 |

Определить:

- 1) для каждого банка: а) средний размер вклада за месяц; б) дисперсию вклада;
- 2) средний размер вклада за месяц для двух банков вместе.
- 3) Дисперсию вклада для 2-х банков, зависящую от рекламы;
- 4) Дисперсию вклада для 2-х банков, зависящую от всех факторов, кроме рекламы;
- 5) Общую дисперсию, используя правило сложения;
- 6) Коэффициент детерминации;
- 7) Корреляционное отношение.

Решение.

По исходным данным составим таблицу 1

Таблица 1

| Размер месячного вклада, рубли, x_i | Число вкладчиков | |
|---------------------------------------|------------------------|-------------------------|
| | Банк с рекламой, n_i | Банк без рекламы, m_i |
| 490 | 0 | 3 |
| 510 | 0 | 4 |
| 530 | 0 | 17 |
| 550 | 11 | 15 |
| 570 | 13 | 6 |
| 590 | 18 | 5 |
| 610 | 6 | 0 |

| | | |
|-------|----|----|
| 630 | 2 | 0 |
| Итого | 50 | 50 |

Обозначим: банк A – банк без рекламы, B – банк с рекламой.

1. Средний размер вклада за месяц в банке A равен

$$\bar{y} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{27140}{50} = 542,8 \text{ руб.}$$

Дисперсия вклада за месяц в банке A равна

$$D_y = \frac{\sum (x_i - \bar{y})^2 m_i}{\sum m_i} = \frac{31808}{50} = 636,16.$$

Средний размер вклада за месяц в банке B равен

$$\bar{z} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{29000}{50} = 580,0 \text{ руб.}$$

Дисперсия вклада за месяц в банке B равна

$$D_z = \frac{\sum (x_i - \bar{z})^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{23400}{50} = 468,0.$$

2. Средний размер вклада за месяц для двух банков вместе равен

$$\bar{u} = \frac{\bar{y} \cdot m + \bar{z} \cdot n}{m + n} = \frac{542,8 \cdot 50 + 580 \cdot 50}{50 + 50} = \frac{542,8 + 580}{2} = 561,4 \text{ руб.}$$

3. Дисперсия вклада для 2-х банков, зависящая от рекламы, равна

$$D_{yz} = [(\bar{y} - \bar{u})^2 + (\bar{z} - \bar{u})^2] / 2 = [(542,8 - 561,4)^2 + (580 - 561,4)^2] / 2 = 345,96.$$

4. Дисперсия вклада для 2-х банков, зависящая от всех факторов, кроме рекламы, равна

$$D_\varepsilon = D_y + D_z = 636,16 + 468 = 1104,16.$$

5. Общая дисперсия равна

$$D = D_{yz} + D_\varepsilon = 345,96 + 1104,16 = 1450,12.$$

6. Коэффициент детерминации равен

$$\eta^2 = \frac{D_{yz}}{D} = \frac{345,96}{1450,12} = 0,239.$$

7. Корреляционное отношение равно

$$\eta = \sqrt{\eta^2} = \sqrt{0,239} = 0,488.$$

Задача 4.2.

Имеются данные о распределении населения России по размеру денежного дохода в условном году

| Группы населения по доходам в мес., тыс. руб. | Численность населения, % к итогу |
|---|----------------------------------|
| До 3 | 21 |
| 3-5 | 41 |
| 5-7 | 22 |
| 7-9 | 10 |
| 9-11 | 5 |
| Более 11 | 1 |
| итого | 100 |

Определить: 1) среднедушевой доход за изучаемый период в целом, используя упрощенный способ; 2) среднедушевой доход в форме моды и медианы для дискретного и интервального рядов; 3) дисперсию способом моментов; 4) среднее квадратическое отклонение; 5) коэффициент вариации.

Решение.

По исходным данным составим таблицу 1

Таблица 1

| Интервалы групп населения по доходам в мес., тыс. руб. | Середины интервалов групп, x_i , тыс. руб. | Численность населения, % к итогу, w_i | Накопленные частоты, % |
|--|--|---|------------------------|
| 1 - 3 | 2 | 21 | 21 |
| 3 - 5 | 4 | 41 | 62 |
| 5 - 7 | 6 | 22 | 84 |
| 7 - 9 | 8 | 10 | 94 |
| 9 - 11 | 10 | 5 | 99 |
| 11 - 13 | 12 | 1 | 100 |
| Итого | | 100 | |

Среднедушевой доход за изучаемый период в целом равен

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{2 \cdot 21 + \dots + 12 \cdot 1}{100} = \frac{480}{100} = 4,8 \text{ тыс. руб.}$$

Среднедушевой доход в форме моды равен:

- для дискретного ряда 4 тыс. руб.,
- для интервального ряда (3 – 5) тыс. руб..

Среднедушевой доход в форме медианы равен:

- для дискретного ряда 4 тыс. руб.,
- для интервального ряда (3 – 5) тыс. руб.

Дисперсия способом моментов равна

$$D_x = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - 4,8^2 = \frac{2^2 \cdot 21 + \dots + 12^2 \cdot 1}{100} - 4,8^2 = 28,16 - 23,04 = 5,12.$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{5,12} = 2,263.$$

Коэффициент вариации равен

$$v = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{2,263}{4,8} = 0,471, \text{ или } 47,1\%.$$

Задача 4.3.

Для статистической совокупности; 5, 4, 4, 2, 0, 2, 5, 2, 2, 4 вычислить коэффициент вариации и построить полигон частот.

Решение.

Коэффициент вариации равен

$$v = \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100\%,$$

где s_x – среднее квадратическое отклонение, \bar{x} – среднее арифметическое значение.

Среднее арифметическое значение равно первому начальному моменту выборки данных

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{5 + 4 + \dots + 2 + 4}{10} = \frac{30}{10} = 3.$$

Среднее квадратическое отклонение равно квадратному корню из дисперсии

$$s_x = \sqrt{D[x]} = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{5^2 + 4^2 + \dots + 4^2}{10} - 3^2} =$$

$$= \sqrt{11,4 - 9} = \sqrt{2,4} = 1,549.$$

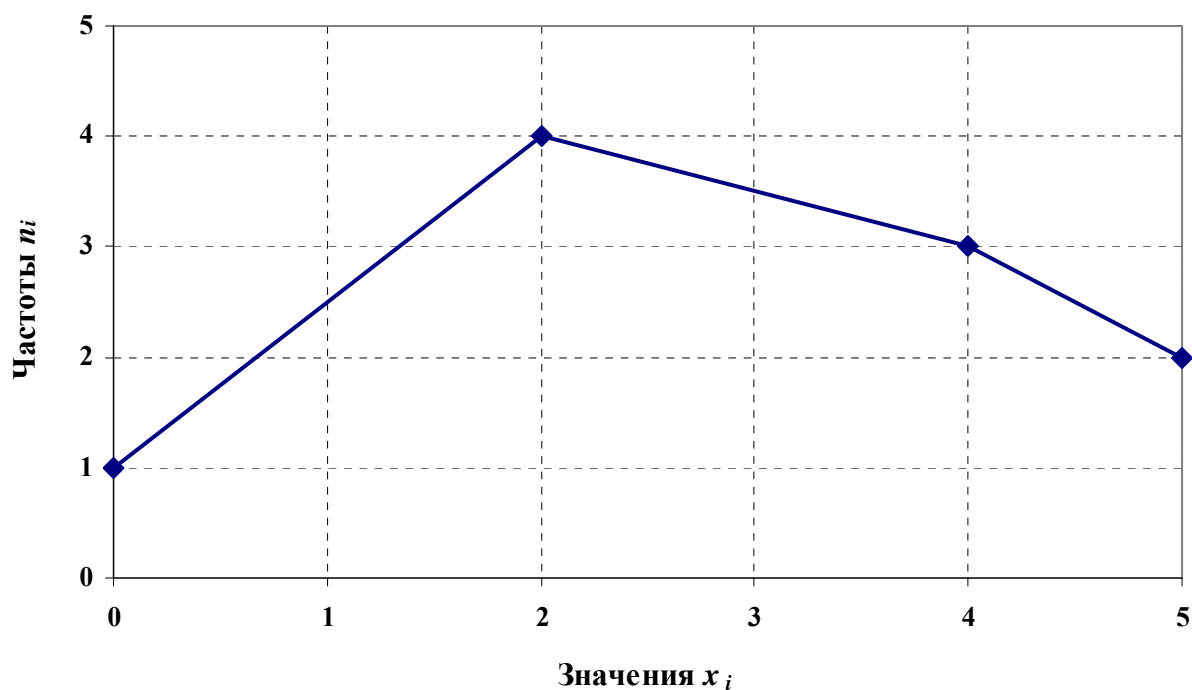
Отсюда коэффициент вариации равен

$$v = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{1,549}{3} \cdot 100\% = 51,6\%.$$

Построим статистический ряд распределения

| | | | | |
|-------|---|---|---|---|
| x_i | 0 | 2 | 4 | 5 |
| n_i | 1 | 4 | 3 | 2 |

По статистическому ряду распределения построим полигон частот



Задача 4.4.

В таблице приведены данные о распределении предприятий района по размеру прибыли за последний отчетный год.

| Прибыль, млн. руб. | Количество предприятий |
|--------------------|------------------------|
| До 60 | 15 |
| 60-80 | 35 |
| 80-100 | 30 |
| 100-120 | 12 |
| 120 и более | 8 |
| Итого | 100 |

Рассчитайте:

- средний размер прибыли в расчете на одно предприятие;
- коэффициент вариации средней;
- долю предприятий, прибыль которых превосходит 100 млн. руб.

Сделайте выводы.

Решение.

Преобразуем исходную таблицу к стандартному виду.

| Интервалы прибыли, млн. руб. | Средняя прибыль x_i , млн. руб. | Количество предприятий n_i |
|---------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------|
| 40 - 60 | 50 | 15 |
| 60 - 80 | 70 | 35 |
| 80 - 100 | 90 | 30 |
| 100 - 120 | 110 | 12 |
| 120 - 140 | 130 | 8 |
| Итого | | 100 |

Средний размер прибыли в расчете на одно предприятие определим по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{50 \cdot 15 + 70 \cdot 35 + 90 \cdot 30 + 110 \cdot 12 + 130 \cdot 8}{15 + 35 + 30 + 12 + 8} = \frac{8260}{100} = 82,6 \text{ млн. руб.}$$

Дисперсия прибыли равна

$$D = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{(50 - 82,6)^2 \cdot 15 + \dots + (130 - 82,6)^2 \cdot 8}{100} = \frac{50124}{100} = 501,24.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение прибыли равно

$$s = \sqrt{D} = \sqrt{501,24} = 22,388 \text{ млн. руб.}$$

Тогда коэффициент вариации средней прибыли равен

$$v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{22,388}{82,6} = 0,271, \text{ или } 27,1\%.$$

Доля предприятий, прибыль которых превосходит 100 млн. руб. равна

$$w = \frac{n_4 + n_5}{\sum n_i} = \frac{12 + 8}{100} = \frac{20}{100} = 0,2, \text{ или } 20\%.$$

Выводы. Поскольку коэффициент вариации средней прибыли меньше 30%, то исходную выборку считаем однородной.

Задача 4.5.

В трех магазинах 16 июля 2000 года были проданы кроссовки следующих размеров:

| Размер | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 |
|-------------|----|----|----|----|----|----|
| Магазин № 1 | 18 | 10 | 2 | 35 | 20 | 15 |
| Магазин № 2 | 2 | 21 | 15 | 17 | 15 | 10 |
| Магазин № 3 | 17 | 6 | 20 | 40 | 12 | 15 |

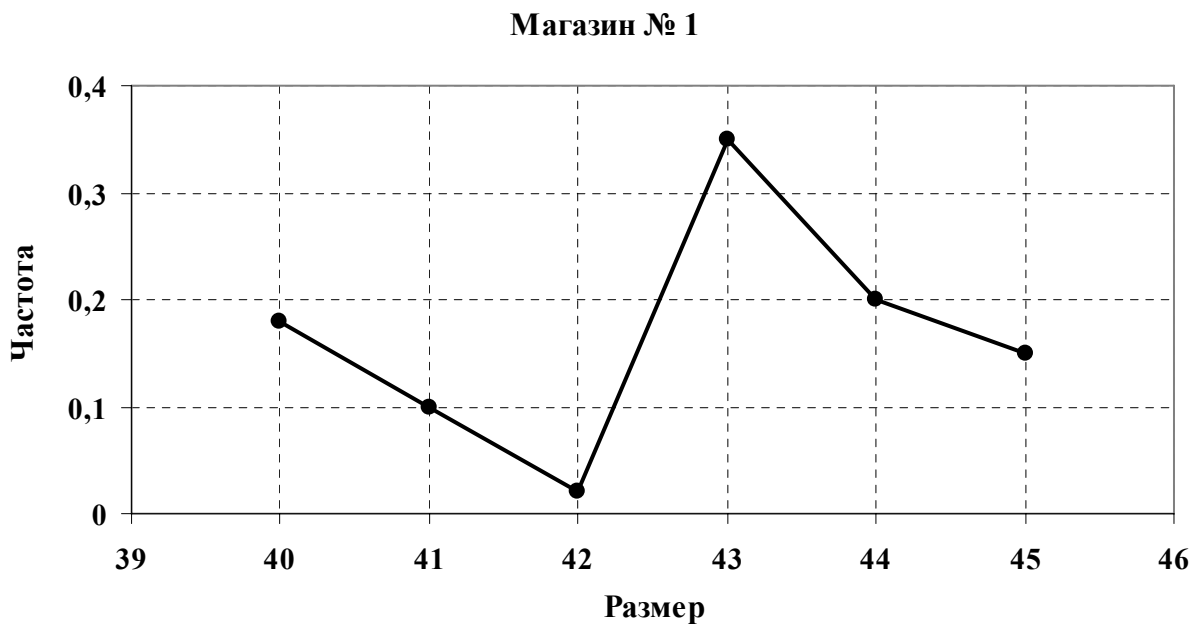
1. Изобразите данные в виде полигонов распределения и суммарный.
2. Вычислите дисперсии (общую, групповые, межгрупповую).
3. Рассчитайте коэффициенты вариации.
4. Найти моду и медиану суммарного распределения.

Решение.

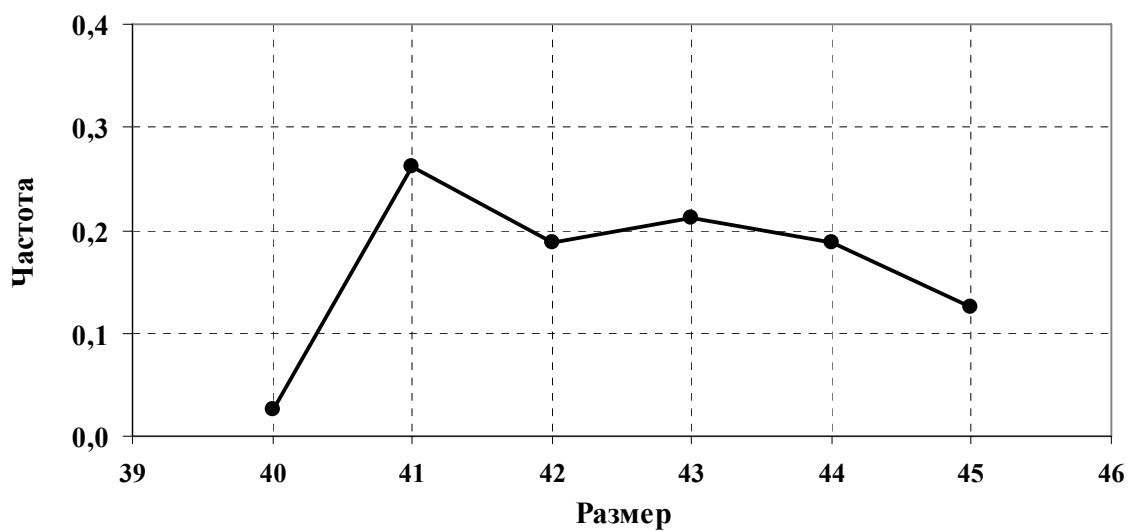
Составим таблицу с частотами разных размеров обуви $w_i = \frac{n_i}{n}$. Имеем:

| Размер | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Магазин № 1 | 0,18 | 0,1 | 0,02 | 0,35 | 0,2 | 0,15 |
| Магазин № 2 | 0,025 | 0,263 | 0,188 | 0,213 | 0,188 | 0,125 |
| Магазин № 3 | 0,155 | 0,055 | 0,182 | 0,364 | 0,109 | 0,136 |
| Все магазины | 0,128 | 0,128 | 0,128 | 0,317 | 0,162 | 0,138 |

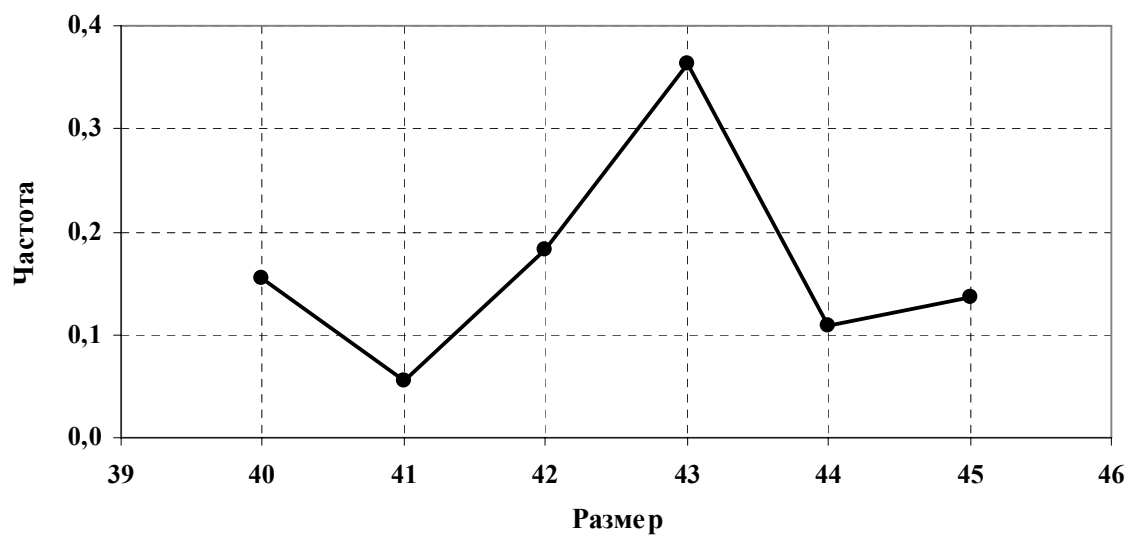
Изобразим ниже данные в виде полигонов распределения и суммарный.



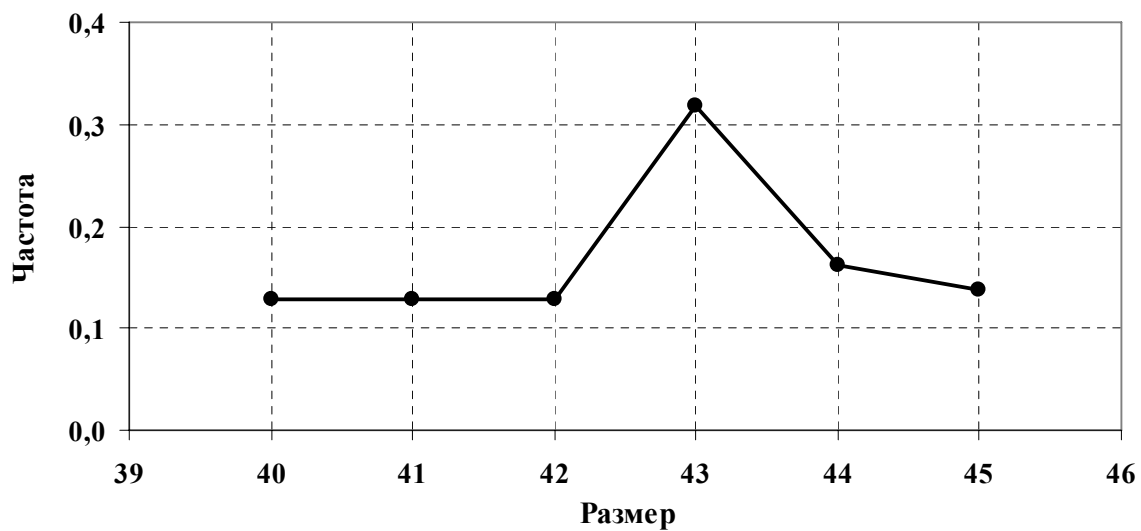
Магазин № 2



Магазин № 3



Все магазины



Общий средний размер обуви по всем магазинам найдем по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{y} = \frac{\sum y_j n_{ij}}{\sum n_{ij}} = \frac{40 \cdot (18 + 2 + 17) + \dots + 45 \cdot (15 + 10 + 15)}{(18 + 2 + 17) + \dots + (15 + 10 + 15)} = \frac{12375}{290} = 42,672.$$

Среднее значение квадратов равно

$$\overline{y^2} = \frac{\sum y_j^2 n_{ij}}{\sum n_{ij}} = \frac{40^2 \cdot (18 + 2 + 17) + \dots + 45^2 \cdot (15 + 10 + 15)}{(18 + 2 + 17) + \dots + (15 + 10 + 15)} = \frac{528765}{290} = 1823,328$$

Общая дисперсия равна

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 1823,328 - 42,672^2 = 2,3927.$$

Средние размеры обуви по каждому из магазинов соответственно равны:

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum y_j n_{1j}}{\sum n_{1j}} = \frac{40 \cdot 18 + \dots + 45 \cdot 15}{18 + \dots + 15} = \frac{4274}{100} = 42,74;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum y_j n_{2j}}{\sum n_{2j}} = \frac{40 \cdot 2 + \dots + 45 \cdot 10}{2 + \dots + 10} = \frac{3412}{80} = 42,65;$$

$$\bar{y}_3 = \frac{\sum y_j n_{3j}}{\sum n_{3j}} = \frac{40 \cdot 17 + \dots + 45 \cdot 15}{17 + \dots + 15} = \frac{4689}{110} = 42,627.$$

Межгрупповая дисперсия равна

$$\delta_y^2 = \frac{\sum (\bar{y}_j - \bar{y})^2 n_j}{\sum n_j} = \frac{(42,74 - 42,672)^2 + (42,65 - 42,672)^2 + (42,627 - 42,672)^2}{100 + 80 + 110} = \frac{0,721}{290} = 0,0025.$$

Внутригрупповая дисперсия равна

$$\delta_\varepsilon^2 = \sigma_y^2 - \delta_y^2 = 2,3927 - 0,0025 = 2,390.$$

Коэффициент вариации равен

$$v = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} \cdot 100 = \frac{\sqrt{2,3927}}{42,672} \cdot 100 = 3,62\%.$$

Из последней строки последней таблицы видим, что мода $Mo = 43$, а медиана равна $Me = 43$.

Задача 4.6.

По данным таблицы вычислите среднее линейное отклонение, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Сделайте выводы.

| Курс продажи акций, руб. | Кол-во проданных акций, шт. |
|--------------------------|-----------------------------|
| 1093 | 487 |
| 1059 | 309 |
| 1154 | 101 |

Решение.

Средний курс акций определим по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i}{\sum_{i=1}^n n_i} = \frac{1093 \cdot 487 + 1059 \cdot 309 + 1154 \cdot 101}{487 + 309 + 101} = \frac{976076}{897} = 1088,16 \text{ руб.}$$

Среднее линейное отклонение равно

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| n_i}{\sum_{i=1}^n n_i} = \frac{|1093 - 1088,16| + |1059 - 1088,16| + |1154 - 1088,16|}{897} = \frac{18018,45}{897} =$$

$$= 20,09 \text{ руб.}$$

По методу моментов дисперсия равна

$$D[x] = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 n_i}{\sum_{i=1}^n n_i} - (\bar{x})^2 = \frac{1093^2 \cdot 487 + 1059^2 \cdot 309 + 1154^2 \cdot 101}{897} - 1088,16^2 =$$

$$793,73 \text{ руб}^2.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение равно

$$s_x = \sqrt{D[x]} = \sqrt{793,73} = 28,17 \text{ руб.}$$

Коэффициент вариации равен

$$v = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{28,17}{1088,16} = 0,0259, \text{ или } 2,59\%.$$

Вывод. Поскольку коэффициент вариации меньше 30%, то выборка является однородной.

Задача 4.7.

По данным о распределении сотрудников двух фирм по тарифному разряду вычислите дисперсию (по взвешенной формуле) и среднее квадратическое отклонение (по простой формуле). Сравните полученные результаты.

| Фирма С | | Фирма Д | |
|---------------|-------------------|---------------|-------------------|
| Тариф, разряд | Число сотрудников | Тариф, разряд | Число сотрудников |
| 12 | 13 | 12 | 17 |
| 13 | 14 | 13 | 29 |
| 14 | 21 | 14 | 19 |
| 15 | 51 | 15 | 37 |
| 16 | 43 | 16 | 19 |
| 17 | 14 | 17 | 29 |
| 18 | 10 | 18 | 17 |

Решение.

Средний тарифный разряд определим по формуле средней арифметической взвешенной. Для фирмы С средний тарифный разряд составит

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i}{\sum_{i=1}^n n_i} = \frac{12 \cdot 13 + \dots + 18 \cdot 10}{13 + \dots + 10} = \frac{2503}{166} = 15,08.$$

Для фирмы Д средний тарифный разряд составит

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{12 \cdot 17 + \dots + 18 \cdot 17}{13 + \dots + 10} = \frac{2505}{167} = 15.$$

Определим вначале среднее квадратическое отклонение по простой формуле.

По методу моментов дисперсия тарифного разряда для фирмы С равна

$$D_1[x] = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{12^2 + \dots + 18^2}{7} - 15,08^2 = 1,644.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение равно

$$s_{1x} = \sqrt{D_1[x]} = \sqrt{1,644} = 1,28.$$

По методу моментов дисперсия тарифного разряда для фирмы Д равна

$$D_1[y] = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = \frac{\sum_{i=1}^m y_i^2}{m} - (\bar{y})^2 = \frac{12^2 + \dots + 18^2}{7} - 15^2 = 4.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение равно

$$s_{1y} = \sqrt{D_1[y]} = \sqrt{4} = 2.$$

Определим теперь среднее квадратическое отклонение по взвешенной формуле.

По методу моментов дисперсия тарифного разряда для фирмы С равна

$$D_2[x] = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 n_i}{\sum_{i=1}^n n_i} - (\overline{x})^2 = \frac{12^2 \cdot 13 + \dots + 18^2 \cdot 10}{166} - 15,08^2 = 2,301.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение равно

$$s_{2x} = \sqrt{D_2[x]} = \sqrt{2,301} = 1,52.$$

По методу моментов дисперсия тарифного разряда для фирмы Д равна

$$D_2[y] = \overline{y^2} - (\overline{y})^2 = \frac{\sum_{i=1}^m y_i^2 m_i}{\sum_{i=1}^m m_i} - (\overline{y})^2 = \frac{12^2 \cdot 17 + \dots + 18^2 \cdot 17}{167} - 15^2 = 3,449.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение равно

$$s_{2y} = \sqrt{D_2[y]} = \sqrt{3,449} = 1,86.$$

Вывод. При оценке показателей вариации сгруппированных данных необходимо использовать взвешенные формулы.

Задача 4.8.

Распределение работников двух бригад по стажу работы характеризуется следующими данными:

| Стаж работы, лет | Число рабочих, чел. | |
|------------------|---------------------|-------------|
| | Бригада № 1 | Бригада № 2 |
| До 5 | 2 | 7 |
| 5 – 10 | 15 | 25 |
| 10 – 15 | 20 | 12 |
| 15 и более | 3 | 8 |

Определите, в какой бригаде состав работников по стажу работы более однороден.

Решение.

Сформируем интервалы для всех групп рабочих по стажу работы:

| Стаж работы, лет | Среднегрупповое значение стаж работы r_i , лет | Число рабочих, чел. | |
|------------------|--|---------------------|--------------------|
| | | Бригада № 1, n_i | Бригада № 2, m_i |
| 0 – 5 | 2,5 | 2 | 7 |
| 5 – 10 | 7,5 | 15 | 25 |
| 10 – 15 | 12,5 | 20 | 12 |
| 15 – 20 | 17,5 | 3 | 8 |

Показателем однородности выборки служит коэффициент вариации.

Определим средние значения стажа работы в каждой бригаде по формуле средней арифметической взвешенной.

Средний стаж работы в 1-й бригаде равен

$$\bar{x} = \frac{\sum r_i n_i}{\sum n_i} = \frac{2,5 \cdot 2 + \dots + 17,5 \cdot 3}{2 + \dots + 3} = \frac{420}{40} = 10,5 \text{ лет.}$$

Средний стаж работы во 2-й бригаде равен

$$\bar{y} = \frac{\sum r_i m_i}{\sum m_i} = \frac{2,5 \cdot 7 + \dots + 17,5 \cdot 8}{7 + \dots + 8} = \frac{495}{52} = 9,519 \text{ лет.}$$

Определим дисперсии стажа работ в каждой бригаде по формуле моментов.

Дисперсия стажа работ в 1-й бригаде равна

$$D[X] = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{\sum r_i^2 n_i}{\sum n_i} - \bar{x}^2 = \frac{2,5^2 \cdot 2 + \dots + 17,5^2 \cdot 3}{2 + \dots + 3} - 10,5^2 = 12,25.$$

Дисперсия стажа работ во 2-й бригаде равна

$$D[Y] = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = \frac{\sum r_i^2 m_i}{\sum m_i} - \bar{y}^2 = \frac{2,5^2 \cdot 7 + \dots + 17,5^2 \cdot 8}{7 + \dots + 8} - 9,519^2 = 20,442.$$

Определим средние квадратические отклонения стажа работ в каждой бригаде.

Среднее квадратическое отклонение стажа работ в 1-й бригаде равно

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]} = \sqrt{12,25} = 3,5.$$

Среднее квадратическое отклонение стажа работ во 2-й бригаде равно

$$\sigma_y = \sqrt{D[Y]} = \sqrt{20,442} = 4,521.$$

Определим коэффициенты вариации стажа работ в каждой бригаде.

Коэффициент вариации стажа работ в 1-й бригаде равен

$$v_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{3,5}{10,5} = 0,333.$$

Коэффициент вариации стажа работ во 2-й бригаде равен

$$v_y = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{4,521}{9,519} = 0,475.$$

Поскольку коэффициент вариации стажа работ в первой бригаде меньше чем во второй, то делаем вывод о том, что состав работников в первой бригаде по стажу работы более однороден.

Задача 4.9.

По нижеследующим данным вычислите показатели степени вариации, сделайте выводы.

| Группы деталей по весу, г. | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 80-90 | 90-100 | 100-110 | 110-120 | Итого |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|---------|---------|-------|
| Число деталей | 2 | 4 | 12 | 18 | 21 | 24 | 11 | 8 | 100 |

Решение. Составим вариационный ряд

| Группы деталей по весу, г. | Средины интервалов, x_i , г. | Число деталей, n_i |
|----------------------------|--------------------------------|----------------------|
| 40-50 | 45 | 2 |
| 50-60 | 55 | 4 |
| 60-70 | 65 | 12 |
| 70-80 | 75 | 18 |
| 80-90 | 85 | 21 |
| 90-100 | 95 | 24 |
| 100-110 | 105 | 11 |
| 110-120 | 115 | 8 |
| Итого | | 100 |

Средний вес детали равен

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{45 \cdot 2 + 55 \cdot 4 + \dots + 115 \cdot 8}{2 + 4 + \dots + 1} = \frac{8580}{100} = 85,8 \text{ г.}$$

Размах вариации равен

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 115 - 45 = 70 \text{ г.}$$

Среднее линейное отклонение равно

$$d = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{|45 - 85,8| + |55 - 85,8| + \dots + |115 - 85,8|}{100} = 13,312 \text{ г.}$$

Дисперсия равна:

$$s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{\sum n_i} - (\bar{x})^2 = \frac{45^2 \cdot 2 + \dots + 115^2 \cdot 8}{100} - 85,8^2 = 273,36.$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{273,36} = 16,434 \text{ г.}$$

Коэффициент вариации равен

$$v = \frac{s_x}{x} = \frac{16,434}{85,8} = 0,1927, \text{ или } 19,27\%.$$

Выводы. Поскольку коэффициент вариации $v < 30\%$, то выборка является однородной.

Задача 4.10.

Имеются данные о чистой прибыли (балансовой за вычетом налогов) предприятий двух районов:

| Район | Число предприятий | Чистая прибыль, млн. р. |
|-------|-------------------|--------------------------------|
| 1 | 6 | 4, 6, 9, 4, 7, 6 |
| 2 | 10 | 8, 12, 8, 9, 6, 5, 7, 7, 8, 10 |

Определите:

1. Дисперсии чистой прибыли: групповые, среднюю из групповых, межгрупповую, общую.
2. Коэффициент детерминации и корреляционное отношение.

Сделайте выводы.

Решение.

Сгруппируем данные:

| Район | n_i | x_{ij} | \bar{x}_j |
|-------|-------|----------|-------------|
| 1 | 6 | 4 | 6 |
| | | 6 | |
| | | 9 | |
| | | 4 | |
| | | 7 | |
| | | 6 | |
| 2 | 10 | 8 | 8 |
| | | 12 | |
| | | 8 | |
| | | 9 | |
| | | 6 | |
| | | 5 | |
| | | 7 | |
| | | 7 | |
| | | 8 | |
| | | 10 | |

Эмпирическое корреляционное отношение определяется по формуле

$$\eta_{xy} = \sqrt{\frac{\delta_x^2}{s_x^2}} = \sqrt{1 - \frac{s_{ocm}^2}{s_x^2}},$$

где

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^L (x_j - \bar{x})^2 n_j - \text{общая дисперсия,}$$

$$s_{ocm}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^L s_{jx}^2 n_j, \text{ где } s_{jx}^2 = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ji} - \bar{x}_j)^2 - \text{групповые дисперсии,}$$

$$\delta_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^L (\bar{x}_j - \bar{x})^2 n_j - \text{межгрупповая дисперсия.}$$

Определим средние величины:

$$\bar{x} = \frac{4 + 6 + \dots + 10}{16} = 7,25;$$

$$\bar{x}_1 = \frac{4 + 6 + \dots + 6}{6} = 6, \quad \bar{x}_2 = \frac{8 + 12 + \dots + 10}{10} = 8.$$

Подставив найденные средние в приведенные формулы, получим общую, групповые и межгрупповую дисперсии:

$$s_x^2 = \frac{(4 - 7,25)^2 + (6 - 7,25)^2 + \dots + (10 - 7,25)^2}{16} = 4,3125,$$

$$s_{1x}^2 = \frac{(4 - 6)^2 + (6 - 6)^2 + \dots + (6 - 6)^2}{6} = 3,$$

$$s_{2x}^2 = \frac{(8 - 8)^2 + (12 - 8)^2 + \dots + (10 - 8)^2}{10} = 3,6,$$

$$\delta_x^2 = \frac{1}{16} [(6 - 7,25)^2 \cdot 6 + (8 - 7,25)^2 \cdot 10] = 0,9375.$$

Отсюда

$$\eta_{xy} = \sqrt{\frac{\delta_x^2}{s_x^2}} = \sqrt{\frac{0,9375}{4,3125}} = \sqrt{0,217} = 0,466.$$

Эмпирическое корреляционное отношение является показателем разброса точек диаграммы рассеяния относительно эмпирической линии регрессии.

Коэффициент детерминации равен

$$R^2 = \eta_{xy}^2 = 0,217.$$

Выводы. Поскольку коэффициент детерминации оказался слишком малым, то можно говорить об отсутствии связи между прибылью и районом расположения предприятий.

Задача 4.11.

По данным таблицы вычислите среднее линейное отклонение, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Сделайте выводы.

| Курс продажи акций, руб. | Кол-во проданных акций, шт. |
|--------------------------|-----------------------------|
| 1092 | 488 |
| 1059 | 309 |
| 1150 | 105 |

Решение.

Определим показатели вариации для курса продажи акций.

Средняя арифметическая равна первому начальному моменту выборки данных:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i = \frac{1092 + 1059 + 1150}{3} = \frac{3301}{3} = 1100,33 \text{ руб.}$$

Среднее линейное отклонение равно

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 |x_i - \bar{x}| = \frac{|1092 - 1100,33| + |1059 - 1100,33| + |1150 - 1100,33|}{3} = \frac{99,333}{3} = 33,11.$$

Дисперсия равна

$$D[x] = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i^2}{3} - (\bar{x})^2 = \frac{1092^2 + 1059^2 + \dots + 1150^2}{3} - 1100,33^2 = 1414,89.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение равно

$$s_x = \sqrt{D[x]} = \sqrt{1414,89} = 37,62.$$

Коэффициент вариации равен

$$v = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{37,62}{1100,33} = 0,0342, \text{ или } 3,42\%.$$

Определим показатели вариации для количества проданных акций.

Средняя арифметическая равна первому начальному моменту выборки данных:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i = \frac{488 + 309 + 105}{3} = \frac{902}{3} = 300,67.$$

Среднее линейное отклонение равно

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y}| = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 |y_i - \bar{y}| = \frac{|488 - 300,67| + |309 - 300,67| + |105 - 300,67|}{3} = \frac{2399}{3} = 799,67.$$

Дисперсия равна

$$D[y] = \overline{y^2} - (\overline{y})^2 = \frac{\sum_{i=1}^3 y_i^2}{3} - (\overline{y})^2 = \frac{488^2 + 309^2 + \dots + 105^2}{3} - 300,67^2 = 24482,89.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение равно

$$s_y = \sqrt{D[y]} = \sqrt{24482,89} = 156,47.$$

Коэффициент вариации равен

$$v = \frac{s_y}{\overline{y}} = \frac{156,47}{300,67} = 0,5204, \text{ или } 52,04\%.$$

Выводы.

1. Поскольку коэффициент вариации меньше 30%, то выборка относительно курса продажи акций является однородной.
2. Поскольку коэффициент вариации больше 30%, то выборка относительно количества проданных акций не является однородной.

Задача 4.12.

Имеются следующие данные по предприятиям отрасли за отчетный год (цифры условные). Основание группировки – среднегодовая стоимость ОПФ.

| №№ | Среднесписочное число рабочих, чел. | Стоимость произведенной продукции, млн. руб. | Среднегодовая стоимость ОПФ, млн. руб. | Себестоимость единицы продукции, руб. | Размер производственной площади, м ² |
|----|-------------------------------------|--|--|---------------------------------------|---|
| 3 | 500 | 26,1 | 23,7 | 870 | 1739 |
| 4 | 460 | 14,8 | 23,1 | 1210 | 1559 |
| 5 | 395 | 16,5 | 18,6 | 1150 | 1704 |
| 6 | 280 | 31,9 | 29,3 | 925 | 1727 |
| 7 | 580 | 14,7 | 13,0 | 1630 | 1804 |
| 8 | 200 | 8,3 | 8,0 | 1390 | 1845 |
| 9 | 470 | 9,4 | 8,9 | 730 | 1717 |
| 10 | 340 | 12,2 | 11,5 | 974 | 1489 |
| 11 | 500 | 19,6 | 17,0 | 890 | 1380 |
| 12 | 250 | 19,0 | 15,6 | 905 | 1540 |
| 13 | 310 | 12,0 | 11,1 | 430 | 1861 |
| 14 | 410 | 12,4 | 12,7 | 830 | 1949 |
| 15 | 635 | 17,0 | 14,3 | 920 | 1918 |
| 16 | 400 | 14,0 | 13,6 | 1100 | 2050 |
| 17 | 310 | 14,4 | 13,2 | 970 | 1743 |
| 18 | 450 | 14,5 | 13,9 | 1000 | 1665 |
| 19 | 380 | 17,1 | 15,2 | 700 | 1804 |
| 20 | 350 | 17,8 | 16,4 | 810 | 1775 |
| 21 | 330 | 21,2 | 18,5 | 780 | 1784 |
| 22 | 460 | 10,6 | 10,3 | 1250 | 1590 |

Результаты расчетов представить в таблице.

1. Построить статистический ряд распределения согласно заданию. Определить количество групп по формуле Старджесса. Группировку осуществлять с равными интервалами. Построить графики ряда распределения: гистограмму, полигон, кумулянту.

2. По каждой группе и совокупности предприятий определить:

- число предприятий и их удельный вес в общем количестве предприятий. Построить структурную секторную диаграмму. К какому виду относительных показателей относится удельный вес предприятий?
- Групповые и общие итоги по следующим показателям: среднесписочное число рабочих, стоимость произведенной продукции, среднегодовая стоимость ОПФ;
- Дополнительно каждую группу охарактеризовать следующими показателями: производительность труда одного рабочего, стоимость произведенной продукции в среднем на одном предприятии, среднегодовая стоимость ОПФ на одном предприятии.

3. По данным группировки определить:

- средний уровень ряда (по формуле средней арифметической и способом моментов);
- размах вариации;
- среднее линейное отклонение;
- дисперсию (по формуле средней арифметической и способом моментов);
- среднее квадратическое отклонение;
- коэффициент вариации;
- моду и медиану расчетным способом и по графикам.

Решение.

Количество интервалов по формуле Старджесса равно

$$L = 1 + [3,322 \cdot \lg n] = 1 + [3,322 \cdot \lg 19] = 4.$$

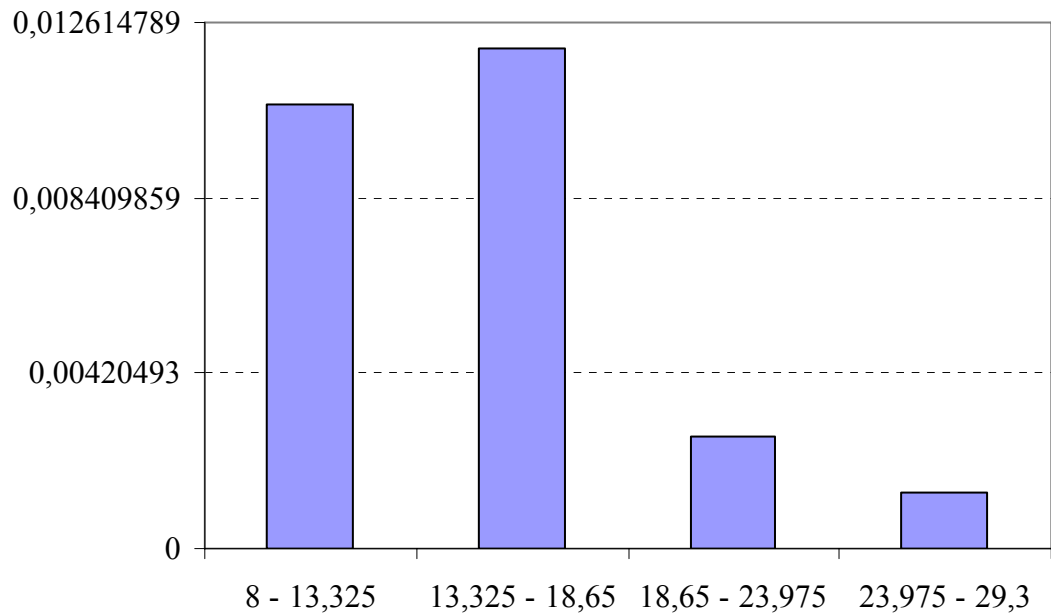
$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{L} = \frac{29,3 - 8}{4} = 5,325 \text{ млн. руб.}$$

Построим статистический ряд распределения согласно заданию.

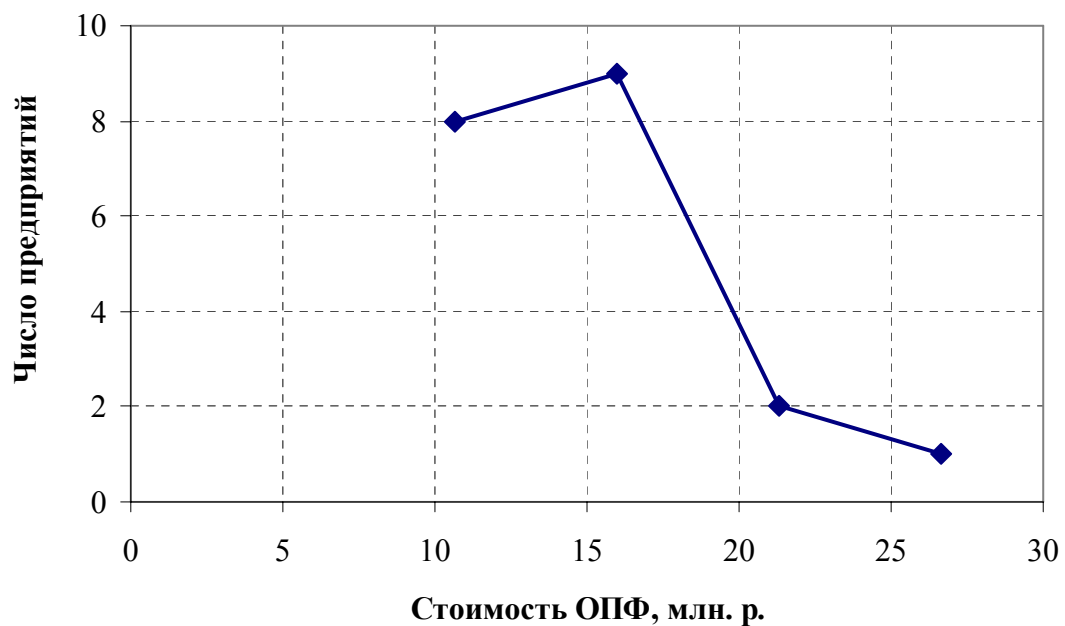
| № группы | Группы по среднегодовой стоимости ОПФ, млн. руб. | Число предприятий | | Среднесписочное число рабочих, чел. | | Стоимость произведенной продукции, млн. руб. | | Себестоимость единицы продукции, руб. | | Размер производственной площади, м ² | | Производительность труда одного рабочего, млн. руб./чел. |
|----------|--|-------------------|-------------------------------|-------------------------------------|--------------------|--|--------------------|---------------------------------------|--------------------|---|--------------------|--|
| | | Общее число | Удельный вес в общем числе, % | Всего в группе | В среднем в группе | Всего в группе | В среднем в группе | Всего в группе | В среднем в группе | Всего в группе | В среднем в группе | |
| | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | |
|-------|----------------|----|-----|------|-----|-------|--------|-------|--------|-------|---------|---------|
| 1 | 8 - 13,325 | 8 | 40 | 3080 | 385 | 94 | 11,75 | 8204 | 1025,5 | 13998 | 1749,75 | 0,03052 |
| 2 | 13,325 - 18,65 | 9 | 45 | 3690 | 410 | 156,7 | 17,411 | 8255 | 917,22 | 15620 | 1735,56 | 0,04247 |
| 3 | 18,65 - 23,975 | 2 | 10 | 960 | 480 | 40,9 | 20,45 | 2080 | 1040 | 3298 | 1649 | 0,04260 |
| 4 | 23,975 - 29,3 | 1 | 5 | 280 | 280 | 31,9 | 31,9 | 925 | 925 | 1727 | 1727 | 0,11393 |
| Всего | | 20 | 100 | 8010 | × | 323,5 | × | 19464 | × | 34643 | × | × |

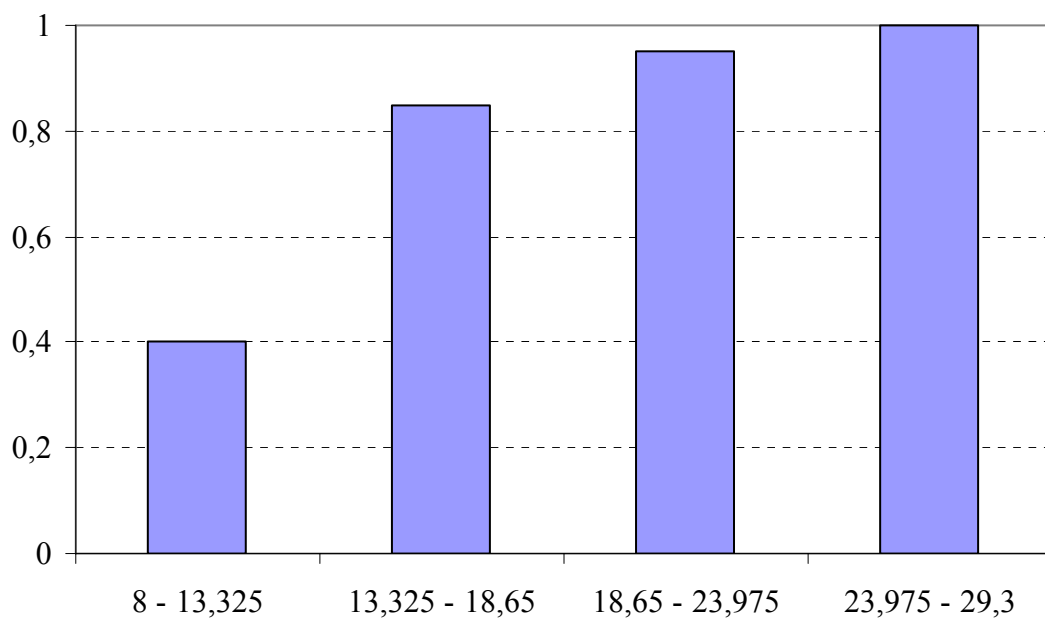
Гистограмма имеет вид:



Полигон имеет вид:

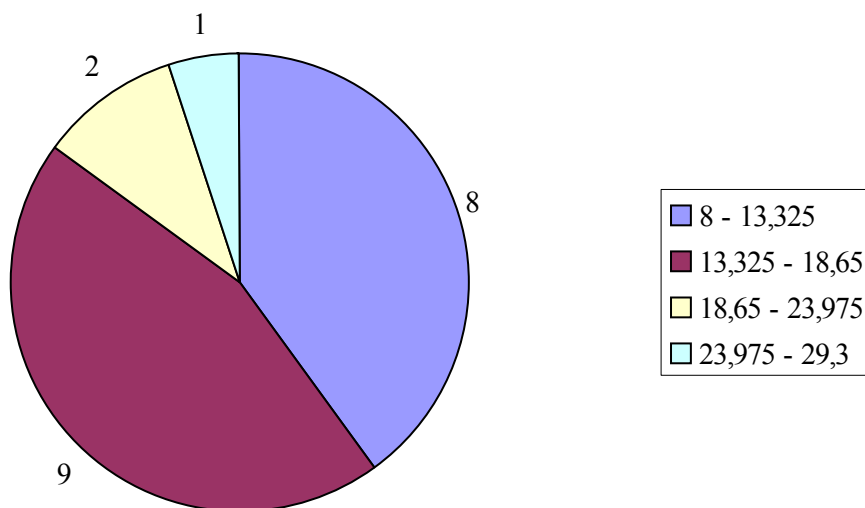


Кумулянта имеет вид:



Построим структурную секторную диаграмму:

Число предприятий в каждой группе (по величине ОПФ, млн. руб.), в ед.



Средний уровень ряда (величины ОПФ) равен

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{10,663 \cdot 8 + 15,988 \cdot 9 + 21,313 \cdot 2 + 26,638 \cdot 1}{8 + 9 + 2 + 1} = \frac{298,45}{20} = 14,923 \text{ млн. руб.}$$

Здесь при расчете использовались среднегрупповые значения ОПФ:

$$10,663 = \frac{8 + 13,225}{2}, \quad 15,988 = \frac{13,225 + 18,65}{2},$$

$$21,313 = \frac{18,65 + 23,975}{2}, \quad 26,638 = \frac{23,975 + 29,3}{2}.$$

Размах вариации равен

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 29,3 - 8 = 21,3 \text{ млн. руб.}$$

Среднее линейное отклонение равно

$$d = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{|10,663 - 14,923| + \dots + |26,638 - 14,923|}{20} = 3,408.$$

Дисперсия равна:

- по формуле средней арифметической

$$s_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{(10,663 - 14,923)^2 + \dots + (26,638 - 14,923)^2}{20} = 18,715;$$

- по формуле моментов

$$s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{\sum n_i} - (\bar{x})^2 = \frac{10,663^2 + \dots + 26,638^2}{20} - 14,923^2 = 18,715.$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{18,715} = 4,326.$$

Коэффициент вариации равен

$$v = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{4,326}{14,923} = 0,290, \text{ или } 29\%.$$

Мода – наиболее часто встречающееся значение ряда распределения. Поскольку во 2-й группе больше всего предприятий, то мода равна среднегрупповому значению во 2-й группе, т.е. 15,988 млн. руб.

Медиана равна центральному элементу вариационного ряда. Центр вариационного ряда находится во 2-й группе, поэтому медиана равна 15,988 млн. руб.

Тема 5. Выборочное наблюдение

Задача 5.1.

Имеется информация о выпуске продукции (работ, услуг), полученной на основе 10% выборочного наблюдения по предприятиям области:

| Группы предприятий по объему продукции, тыс. руб. | Число предприятий (f) |
|---|---------------------------|
| 1 | 2 |
| До 100 | 28 |
| 100-200 | 52 |
| 200-300 | 164 |
| 300-400 | 108 |
| 400-500 | 36 |
| 500 и > | 12 |
| Итого | 400 |

Определить: 1) по предприятиям, включенным в выборку: а) средний размер произведенной продукции на одно предприятие; б) дисперсию объема производства; в) долю предприятий с объемом производства продукции более 400 тыс. руб.; 2) в целом по области с вероятностью 0,954 пределы, в которых можно ожидать: а) средний объем производства продукции на одно предприятие; б) долю предприятий с объемом производства продукции более 400 тыс. руб.; 3) общий объем выпуска продукции по области.

Решение.

По исходным данным составим таблицу 1

Таблица 1

| Группы предприятий по объему продукции, тыс. руб. | Среднее в группе (x_i) | Число предприятий (n_i) |
|---|----------------------------|-----------------------------|
| 0-100 | 50 | 28 |
| 100-200 | 150 | 52 |
| 200-300 | 250 | 164 |
| 300-400 | 350 | 108 |
| 400-500 | 450 | 36 |
| 500-600 | 550 | 12 |
| Итого | | 400 |

1. Средний размер произведенной продукции на одно предприятие равен

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{50 \cdot 28 + \dots + 550 \cdot 12}{28 + \dots + 12} = \frac{110800}{400} = 277,0 \text{ тыс. руб.}$$

Дисперсия объема производства равна

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{(50 - 277)^2 \cdot 28 + \dots + (550 - 277)^2 \cdot 12}{28 + \dots + 12} = \frac{4948400}{400} = 12371,0.$$

Доля предприятий с объемом производства продукции более 400 тыс. руб. составляет

$$w = \frac{\sum_{x_i > 400} n_i}{\sum n_i} = \frac{36 + 12}{400} = \frac{48}{400} = 0,12.$$

2. Предельная ошибка признака равна

$$\Delta x = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 2 \cdot \sqrt{\frac{12371}{400} \cdot (1 - 0,1)} = 2 \sqrt{27,835} = 10,552 \text{ тыс. руб.,}$$

$$t = 2, \text{ при } p = 0,954.$$

$$\bar{x} - \Delta x \leq \mu_x \leq \bar{x} + \Delta x,$$

$$277 - 10,552 \leq \mu_x \leq 277 + 10,552,$$

$$266,448 \leq \mu_x \leq 287,552,$$

т.е. с вероятностью 0,954 можно утверждать, что средний объем производства продукции на одно предприятие генеральной совокупности (по всем предприятиям области) не ниже 266,448 тыс.руб. и не выше 287,552 тыс. руб.

2. Предельная ошибка доли равна

$$\Delta w = t \cdot \sqrt{\frac{w \cdot (1 - w)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 2 \cdot \sqrt{\frac{0,12 \cdot (1 - 0,12)}{400} \cdot (1 - 0,1)} = 2 \sqrt{0,0002376} = 0,0308,$$

$$w - \Delta w \leq p \leq w + \Delta w,$$

$$0,12 - 0,0308 \leq p \leq 0,12 + 0,0308,$$

$$0,0892 \leq p \leq 0,1508, \text{ или } 8,92\% \leq p \leq 15,08\%,$$

т.е. с вероятностью 0,954 можно утверждать, что доля предприятий с объемом производства продукции более 400 тыс. руб. в генеральной совокупности (по всем предприятиям области) будет находиться в границах не ниже 8,92% и не выше 15,08%.

Общий объем выпуска продукции по области равен

$$V = \frac{\bar{x} \cdot n}{\frac{n}{N}} = \frac{277 \cdot 400}{0,1} = 1108000 \text{ тыс. руб.}$$

Задача 5.2.

По результатам контрольной проверки налоговыми службами 400 бизнес-структур, у 140 из них в налоговых декларациях не полностью указаны доходы, подлежащие налогообложению. Определите в генеральной совокупности (по всему району) долю бизнес-структур, скрывших часть доходов от уплаты налогов, с вероятностью 0,954.

Решение.

Доля бизнес-структур, скрывших часть доходов от уплаты налогов, в выборочной совокупности составляет

$$w = \frac{m}{n} = \frac{140}{400} = 0,35.$$

Предельная ошибка доли равна

$$\Delta w = t \cdot \sqrt{\frac{w \cdot (1-w)}{n}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot (1-0,35)}{400}} = 2 \sqrt{0,00056875} = 0,048,$$

$$t = 2, \text{ при } p = 0,954.$$

$$w - \Delta w \leq p \leq w + \Delta w,$$

$$0,35 - 0,048 \leq p \leq 0,35 + 0,048,$$

$$0,302 \leq p \leq 0,398, \text{ или } 30,2\% \leq p \leq 39,8\%,$$

т.е. с вероятностью 0,954 можно утверждать, что доля бизнес-структур, скрывших часть доходов от уплаты налогов в генеральной совокупности (по всему району) будет находиться в границах не ниже 8,92% и не выше 15,08%.

Задача 5.3.

В целях изучения стажа рабочих одного из цехов завода проведена 10%-ная механическая выборка, в результате которой получено следующее распределение рабочих по стажу работы:

| Стаж рабочих, лет | Число рабочих, чел |
|-------------------|--------------------|
| До 5 | 5 |
| От 5 до 10 | 10 |
| От 10 до 15 | 35 |
| От 15 до 20 | 25 |
| От 20 до 25 | 15 |
| Свыше 25 | 10 |
| Итого | 100 |

На основании этих данных вычислите:

1. Средний стаж рабочих цеха.

2. Средний квадрат отклонений (дисперсию) и среднее квадратическое отклонение.
 3. Коэффициент вариации.
 4. С вероятностью 0,997 предельную ошибку выборочной средней и возможные границы, в которых ожидается средний стаж рабочих цеха.
 5. С вероятностью 0,997 предельную ошибку выборочной доли и границы удельного веса числа рабочих со стажем работы от 10 до 20 лет.
- Сделайте выводы.

Решение.

Запишем исходные данные в виде таблицы 1.

Таблица 1

| Стаж рабочих, лет | В среднем в группе x_i , лет | Число рабочих n_i , чел |
|-------------------|--------------------------------|---------------------------|
| 0 - 5 | 2,5 | 5 |
| 5 - 10 | 7,5 | 10 |
| 10 - 15 | 12,5 | 35 |
| 15 - 20 | 17,5 | 25 |
| 20 - 25 | 22,5 | 15 |
| 25 - 30 | 27,5 | 10 |
| Итого | | 100 |

Средний стаж рабочих цеха определим по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{2,5 \cdot 5 + 7,5 \cdot 10 + 12,5 \cdot 35 + 17,5 \cdot 25 + 22,5 \cdot 15 + 27,5 \cdot 10}{5 + 10 + 35 + 25 + 15 + 10} = \frac{1575}{100} = 15,75 \text{ лет.}$$

Дисперсия равна

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{4068,75}{100} = 40,69.$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{40,69} = 6,38 \text{ лет.}$$

Коэффициент вариации равен

$$v = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{6,38}{15,75} = 0,405, \text{ или } 40,5\%.$$

Определим с вероятностью 0,997 предельную ошибку выборочной средней и возможные границы, в которых ожидается средний стаж рабочих цеха.

По условию задачи имеем 10% бесповторную, собственно-случайную, механическую выборку. Т.к. обследовано 10% рабочих, то

$$\frac{n}{N} = 0,1,$$

где $n = 100$ – объем выборочной совокупности, N – объем генеральной совокупности.

При доверительной вероятности $p = 0,997$ коэффициент доверия $t = 3$. Тогда предельная ошибка выборки равна

$$\Delta_{\bar{x}} = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 3 \cdot \sqrt{\frac{40,69}{100} \cdot (1 - 0,1)} = 3 \cdot \sqrt{0,3662} = 1,815.$$

Определим возможные границы, в которых находится средний размер прибыли в генеральной совокупности:

$$\bar{x} - \Delta_{\bar{x}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + \Delta_{\bar{x}}.$$

Подставив имеющиеся данные, получим

$$15,75 - 1,815 \leq \mu_x \leq 15,75 + 1,815, \text{ или } 13,935 \leq \mu_x \leq 17,565.$$

Определим с вероятностью 0,997 предельную ошибку выборочной доли и границы удельного веса числа рабочих со стажем работы от 10 до 20 лет.

Выборочная доля числа рабочих со стажем работы от 10 до 20 лет составляет

$$W = 60/100 = 0,6 \text{ или } 60\%.$$

Отсюда дисперсия доли равна:

$$\sigma_W^2 = W(1 - W) = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24.$$

Тогда предельная ошибка выборки равна:

$$\Delta_{\bar{W}} = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma_W^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 3 \cdot \sqrt{\frac{0,24}{100} \cdot (1 - 0,1)} = 2 \cdot \sqrt{0,004838} = 0,1391.$$

Определим возможные границы удельного веса числа рабочих со стажем работы от 10 до 20 лет:

$$W - \Delta_{\bar{W}} \leq \Omega \leq W + \Delta_{\bar{W}}.$$

Подставив имеющиеся данные, получим

$$0,461 \leq \Omega \leq 0,739, \text{ или } 46,1\% \leq \Omega \leq 73,9\%.$$

Задача 5.4.

Для определения средней величины заработной платы работников малых предприятий необходимо провести выборочное обследование методом случайного повторного отбора. Какое количество работников нужно отобрать, чтобы ошибка выборки с вероятностью 0,954 не превышала 2 тыс. руб. при среднем квадратическом отклонении 10 тыс. руб.

Решение.

Предельная ошибка признака для случайного повторного отбора равна

$$\Delta x = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}},$$

отсюда

$$(\Delta x)^2 = \frac{t^2 \sigma^2}{n}.$$

следовательно,

$$n = \frac{t\sigma}{\Delta x}.$$

Т.к. по условию $\sigma = 10$ и $t = 2$, при $p = 0,954$, то имеем

$$n = \frac{t\sigma}{\Delta x} = \frac{2 \cdot 10}{2} = 10 \text{ чел.}$$

Таким образом, необходимо отобрать не менее 10 работников, чтобы ошибка выборки с вероятностью 0,954 не превышала 2 тыс. руб.

Задача 5.5.

Среди выборочно обследованных 13000 семей по уровню дохода (выборка бесповторная, 2%) малообеспеченных оказалось – 3900 семей. Определите с вероятностью 0,997 долю малообеспеченных семей во всем регионе.

Решение.

Т.к. обследовано 2% семей, то

$$\frac{n}{N} = 0,02,$$

где n – объем выборочной совокупности, N – объем генеральной совокупности.

При доверительной вероятности $p = 0,997$ коэффициент доверия $t = 3$.

Выборочная доля малообеспеченных семей составляет

$$W = 3900/13000 = 0,3 \text{ или } 30\%.$$

Отсюда дисперсия доли равна:

$$\sigma_W^2 = W(1 - W) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21.$$

Тогда предельная ошибка выборки равна:

$$\Delta_{\bar{W}} = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma_W^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 3 \cdot \sqrt{\frac{0,21}{13000} \cdot (1 - 0,02)} = 0,012.$$

Определим возможные пределы доли малообеспеченных семей:

$$W - \Delta_{\bar{W}} \leq \bar{W} \leq W + \Delta_{\bar{W}}.$$

Подставив имеющиеся данные, получим

$$0,298 \leq \bar{W} \leq 0,312, \text{ или } 29,8\% \leq \bar{W} \leq 31,2\% .$$

Задача 5.6.

Для определения среднего возраста студентов вуза с числом студентов 1250 был зафиксирован возраст 87 студентов (см. табл.)

| | | | | | | |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|
| Возраст | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| Число студентов | 23 | 25 | 5 | 8 | 3 | 23 |

Определите:

- 1) средний возраст студентов выборки;
- 2) среднеквадратическое отклонение возраста по выборке;
- 3) 99% доверительный интервал для среднего возраста студентов вуза.

Решение.

Средний возраст студентов выборки равен

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i n_i}{\sum_{i=1}^n n_i} = \frac{17 \cdot 23 + \dots + 22 \cdot 23}{23 + \dots + 23} = \frac{1665}{87} = 19,14 .$$

Среднеквадратическое отклонение возраста по выборке равно

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum_{i=1}^n n_i}} = \sqrt{\frac{(17 - 19,14)^2 \cdot 23 + \dots + (22 - 19,14)^2 \cdot 23}{23 + \dots + 23}} = \sqrt{\frac{342,345}{87}} = 1,984 .$$

По условию задачи

$$\frac{n}{N} = \frac{87}{1250} = 0,0696 ,$$

где n – объем выборочной совокупности, N – объем генеральной совокупности.

При доверительной вероятности $p = 0,99$ коэффициент доверия $t = 2,58$. Тогда предельная ошибка выборки равна:

$$\Delta_x = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 2,58 \cdot \sqrt{\frac{1,984^2}{87} \cdot (1 - 0,0696)} = 0,529 .$$

Определим возможные границы, в которых находится средний возраст в генеральной совокупности:

$$\bar{x} - \Delta_{\bar{x}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + \Delta_{\bar{x}}.$$

Подставив имеющиеся данные, получим

$$19,14 - 0,529 \leq \mu_x \leq 19,14 + 0,529, \text{ или } 18,61 \leq \mu_x \leq 19,67.$$

Задача 5.7.

В городе проводится обследование семей с целью выявления доли расходов семейных бюджетов на оплату жилья. Предыдущее аналогичное обследование дало результат в 21,6%. Сколько нужно обследовать семей, чтобы с вероятностью 0,99 и точностью не менее 0,5% определить эту долю?

Решение.

Искомое число семей равно

$$n = \frac{t^2 \sigma^2}{\Delta_{\bar{x}}^2} = \frac{2,58^2 \cdot 0,216 \cdot (1 - 0,216)}{0,005^2} = 45089.$$

Задача 5.8.

Для оценки стоимости основных средств региона проведен 5%-ный механический отбор, в результате чего установлено:

| Группы предприятий по стоимости основных средств, млн. р. | Число предприятий |
|---|-------------------|
| До 10 | 131 |
| 10 – 20 | 227 |
| 20 – 30 | 294 |
| 30 – 40 | 146 |
| 40 – 50 | 128 |
| 50 и выше | 74 |
| Итого | 1000 |

Определить:

- 1) с вероятностью 0,954 пределы, в которых можно ожидать среднюю стоимость основных средств на одно предприятие и долю предприятий со стоимостью выше 50 млн. р. В целом по региону;
- 2) ожидаемую сумму налога на имущество (2%) со стоимости основных средств по обследованной группе предприятий и по региону в целом.

Сделать выводы.

Решение.

Преобразуем исходную таблицу, сопоставив интервалам стоимости основных средств их средние значения. В результате получим следующую таблицу

| Группы предприятий по стоимости основных средств, млн. р. (x_i) | Число предприятий (n_i) |
|---|-----------------------------|
| 5 | 131 |
| 15 | 227 |
| 25 | 294 |
| 35 | 146 |
| 45 | 128 |
| 55 | 74 |
| Итого | 1000 |

1. Определим вначале среднюю стоимость основных средств на одно предприятие по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^L x_i n_i}{\sum_{i=1}^L n_i} = \frac{5 \cdot 131 + 15 \cdot 227 + \dots + 55 \cdot 74}{131 + 227 + \dots + 74} = \frac{26350}{1000} = 26,35 \text{ млн. р.}$$

По формуле моментов дисперсия стоимость основных средств на одно предприятие равна

$$s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^L x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{5^2 \cdot 131 + 15^2 \cdot 227 + \dots + 55^2 \cdot 74}{1000} - 26,35^2 = .$$
$$= 900 - 694,322 = 205,678.$$

Отсюда среднее квадратическое отклонение равно

$$s_x = \sqrt{D[x]} = \sqrt{205,678} = 14,341.$$

По условию задачи имеем бесповторную, собственно-случайную, механическую выборку.

Т.к. обследовано 5% банков, то $\frac{n}{N} = 0,05$, где n – объем выборочной совокупности, N – объем генеральной совокупности.

При доверительной вероятности $p = 0,954$ коэффициент доверия $t = 2$. Тогда предельная ошибка выборки равна:

$$\Delta_{\bar{x}} = t \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 2 \cdot \sqrt{\frac{205,678}{1000} \cdot (1 - 0,05)} = 2 \cdot \sqrt{0,195} = 0,884.$$

Определим возможные границы, в которых находится средняя стоимость основных средств на одно предприятие:

$$\bar{x} - \Delta_{\bar{x}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + \Delta_{\bar{x}}.$$

Подставив имеющиеся данные, получим

$$26,35 - 0,884 \leq \mu_x \leq 26,35 + 0,884, \text{ или } 25,466 \leq \mu_x \leq 27,234.$$

Выборочная доля предприятий со средней стоимостью основных средств выше 50 млн. р. составляет

$$W = 74/1000 = 0,074 \text{ или } 7,4\%.$$

Отсюда дисперсия доли равна:

$$\sigma_W^2 = W(1 - W) = 0,074 \cdot 0,926 = 0,0685.$$

Тогда предельная ошибка выборки равна:

$$\Delta_{\bar{W}} = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma_W^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 2 \cdot \sqrt{\frac{0,0685}{1000} \cdot (1 - 0,05)} = 0,0051.$$

Возможные пределы среднего значения доли предприятий со средней стоимостью основных средств выше 50 млн. р. составляют

$$W - \Delta_{\bar{W}} \leq \bar{W} \leq W + \Delta_{\bar{W}}.$$

Подставив имеющиеся данные, получим

$$0,0689 \leq \bar{W} \leq 0,0791, \text{ или } 6,89\% \leq \bar{W} \leq 7,91\%.$$

Ожидаемая сумма налога на имущество (2%) со стоимости основных средств по обследованной группе предприятий составит

$$R = 0,02n\bar{x} = 0,02 \cdot 1000 \cdot 26,35 = 500 \cdot 26,35 = 527 \text{ млн. р.}$$

Ожидаемая сумма налога на имущество (2%) со стоимости основных средств по региону в целом составит

$$25,466 \cdot 500 \cdot 20 \leq R_x \leq 27,234 \cdot 500 \cdot 20, \text{ или } 25465,9 \leq R_x \leq 27234,1.$$

Задача 5.9.

На оптовую базу поступила партия товара. После тщательного осмотра каждой единицы товара определялось и фиксировалось его качество. К какому виду наблюдения (и по каким признакам) можно отнести это обследование товара.

Решение.

Статистическое наблюдение – это планомерный научно обоснованный сбор данных или сведений о явлениях и процессах общественной жизни.

По организационной форме статистического наблюдения – это специально организованное наблюдение.

По виду статистического наблюдения – это:

- единовременное наблюдение (по времени регистрации фактов), т.к. проводилось только для данной партии товара;
- сплошное (по охвату единиц совокупности), т.к. проверялся весь товар из партии.

По способу статистического наблюдения – это непосредственное наблюдение, т.к. каждая единица товара подвергалась тщательному исследованию.

Задача 5.10.

Посредством случайной бесповторной выборки было обследовано 100 рабочих по стажу работы из общей численности 950 чел. На основе обследования был составлен ряд распределения:

| | | | | | | | |
|--------------------|------|------|-------|-------|-------|----------|-------|
| Стаж работы, лет | До 5 | 5–10 | 10–15 | 15–20 | 20–25 | Свыше 25 | Итого |
| Количество рабочих | 15 | 30 | 20 | 15 | 12 | 8 | 100 |

Определите с вероятностью 0,997, в каких пределах находится доля рабочих со стажем свыше 20 лет в общей численности рабочих по предприятию.

Решение.

По условию задачи имеем бесповторную, собственно-случайную, механическую выборку.

Из условия известно, что выборочная доля рабочих со стажем свыше 20 лет составляет $W = 20/100 = 0,2$ или 20%.

Отсюда дисперсия доли равна:

$$\sigma_W^2 = W(1 - W) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16.$$

Т.к. обследовано 100 рабочих из 950, то $\frac{n}{N} = \frac{100}{950} = 0,1053$, где n – объем выборочной совокупности, N – объем генеральной совокупности.

При доверительной вероятности $p = 0,997$ коэффициент доверия $t = 3$. Тогда предельная ошибка выборки равна:

$$\Delta_{\bar{W}} = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma_W^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 3 \cdot \sqrt{\frac{0,16}{100} \cdot (1 - 0,1053)} = 3 \cdot \frac{0,4}{10} \cdot \sqrt{0,8947} = 0,1135.$$

Определим возможные пределы среднего значения доли рабочих со стажем свыше 20 лет в общей численности рабочих по предприятию:

$$W - \Delta_{\bar{W}} \leq \bar{W} \leq W + \Delta_{\bar{W}}.$$

Подставив имеющиеся данные, получим

$$0,0947 \leq \bar{W} \leq 0,3135 \text{ или } 9,47\% \leq \bar{W} \leq 31,35\% .$$

Т.е., с вероятностью 0,997 можно утверждать, что доля рабочих со стажем свыше 20 лет в общей численности рабочих по предприятию находится в пределах от 9,47% до 31,35%.

Задача 5.11.

Для установления среднего возраста 50 тыс. читателей библиотеки необходимо провести выборку из читательских карточек методом механического отбора. Предварительно установлено, что среднее квадратичное отклонение возраста читателей равно 10 годам. Определите необходимую численность выборки при условии, что с вероятностью 0,954 ошибка выборки будет не более трех лет. (Данные условные).

Решение.

Имеем собственно-случайную механическую выборку. Минимально необходимая численность выборки для бесповторного отбора определяется по формуле:

$$n = \frac{t^2 \sigma^2 N}{\Delta^2 N + t^2 \sigma^2} ,$$

где $N = 50000$ – общее количество читателей; $t = 2$ – коэффициент доверия для доверительной вероятности 0,954; $\sigma = 10$ – среднее квадратичное отклонение возраста читателей; $\Delta = 3$ – предельная ошибка выборки.

Подставив в расчетную формулу исходные данные, получим:

$$n = \frac{t^2 \sigma^2 N}{\Delta^2 N + t^2 \sigma^2} = \frac{2^2 \cdot 10^2 \cdot 50000}{3^2 \cdot 50000 + 2^2 \cdot 10^2} = 44,4 .$$

Таким образом, необходимо проверить не менее 45 читателей.

Задача 5.12.

Из партии импортируемой продукции на посту Московской региональной таможни было взято в порядке случайной повторной выборки 20 проб продукта A . В результате проверки установлена средняя влажность продукта A в выборке, которая оказалась равной 6% при среднем квадратическом отклонении 1%. С вероятностью 0,683 ($t = 1$) определите пределы средней влажности продукта во всей партии импортируемой продукции.

Решение.

По условию задачи имеем: $\bar{x} = 6\%$, $\sigma = 1\%$, $n = 20$.

По условию задачи имеем повторную выборку, следовательно, средняя ошибка выборки равна

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{20}} = 0,2236.$$

При доверительной вероятности $p = 0,683$ коэффициент доверия $t = 1$. Тогда предельная ошибка выборки равна

$$\Delta_{\bar{x}} = t \cdot \mu = 1 \cdot 0,2236 = 0,2236.$$

Определим возможные пределы генеральной средней влажность продукта A :

$$\bar{x} - \Delta_{\bar{x}} \leq M[x] \leq \bar{x} + \Delta_{\bar{x}}.$$

Подставив имеющиеся данные, получим

$$5,7764 \leq M[x] \leq 6,2236.$$

Задача 5.13.

Каким должен быть объем случайной бесповторной выборки из генеральной совокупности численностью 10000 единиц при среднем квадратическом отклонении не более 20, предельной ошибке, не превышающей 5? И вероятности 0,997 ($t = 3$)?

Решение.

Необходимый объем выборки для случая бесповторного отбора равен

$$n = \frac{t^2 \sigma^2 N}{\Delta^2 N + t^2 \sigma^2} = \frac{3^2 \cdot 20^2 \cdot 10000}{5^2 \cdot 10000 + 3^2 \cdot 20^2} = \frac{36000000}{253600} = 141,96 \geq 142 \text{ чел.}$$

Задача 5.14.

Из 5% опрошенных выпускников университета 30% удовлетворены полученными знаниями за время обучения. Какова должна быть численность выборки, чтобы ошибка доли не превышала 0,05 (с вероятностью 0,954 и количестве выпускников 200 человек).

Решение.

Имеем собственно-случайную бесповторную выборку. Дисперсия доли равна

$$\sigma_W^2 = W(1 - W) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21.$$

Минимально необходимая численность выборки определяется по формуле:

$$n = \frac{t^2 \sigma_W^2 N}{\Delta_W^2 N + t^2 \sigma_W^2} = \frac{2^2 \cdot 0,21 \cdot 200}{0,05^2 \cdot 200 + 2^2 \cdot 0,21} = \frac{168}{0,5 + 0,84} = \frac{168}{1,34} = 125,4 \geq 126 \text{ чел.}$$

Задача 5.15.

В целях изучения затрат времени на изготовление одной детали рабочими завода проведена 10%-ная случайная бесповторная выборка, в результате которой получено следующее распределение деталей по затратам времени:

| Затраты времени на одну деталь, мин. | Число деталей, шт. |
|--------------------------------------|--------------------|
| До 20 | 10 |
| От 20 до 24 | 20 |
| От 24 до 28 | 50 |
| От 28 до 32 | 15 |
| Свыше 32 | 5 |
| Итого | 100 |

На основании данных вычислите:

1. Средние затраты времени на изготовление одной детали.
2. Средний квадрат отклонений (дисперсию) и среднее квадратическое отклонение.
3. Коэффициент вариации.
4. С вероятностью 0,954 предельную ошибку выборочной средней и возможные границы, в которых ожидаются средние затраты времени на изготовление другой детали на заводе.
5. С вероятностью 0,954 предельную ошибку выборочной доли и границы удельного веса числа деталей с затратами времени на их изготовление от 20 до 28 мин.

Сделайте выводы.

Решение.

Приведем группировку к стандартному виду с равными интервалами и найдем середины интервалов для каждой группы. Результаты представлены в таблице:

| Затраты времени на одну деталь, мин. | Затраты времени на одну деталь, мин. | Затраты времени на одну деталь, мин. | Число деталей, шт. |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------|
| До 20 | 16 - 20 | 18 | 10 |
| От 20 до 24 | 20 - 24 | 22 | 20 |
| От 24 до 28 | 24 - 28 | 26 | 50 |
| От 28 до 32 | 28 - 32 | 30 | 15 |
| Свыше 32 | 32 - 36 | 34 | 5 |
| Итого | | | 100 |

1. Средние затраты времени на изготовление одной детали определим по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i n_i}{\sum n_i} = \frac{\sum y_i n_i}{n}.$$

Подставив в последнюю формулу известные значения, получим средние затраты времени на изготовление одной детали

$$\bar{y} = \frac{18 \cdot 10 + 22 \cdot 20 + 26 \cdot 50 + 30 \cdot 15 + 34 \cdot 5}{100} = \frac{2540}{100} = 25,4 \text{ мин.}$$

2. Дисперсия определяется по формуле

$$s^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2 n_i}{n}.$$

Подставив в последнюю формулу известные значения, получим дисперсию

$$s^2 = \frac{(18 - 25,4)^2 \cdot 10 + (22 - 25,4)^2 \cdot 20 + \dots + (34 - 25,4)^2 \cdot 5}{100} = \frac{1484}{100} = 14,84 \text{ мин}^2.$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{14,84} = 3,852 \text{ мин.}$$

3. Коэффициент вариации определяется по формуле

$$v = \frac{s}{\bar{y}} = \frac{3,852}{25,4} = 0,152, \text{ или } 15,2\%.$$

4. Рассчитаем сначала предельную ошибку выборки. Так при вероятности $p = 0,954$ коэффициент доверия $t = 2$. Поскольку дана 10%-ная случайная бесповторная выборка, то $\frac{n}{N} = 0,1$, где n – объем выборочной совокупности, N – объем генеральной совокупности.

Считаем также, что дисперсия $\sigma_y^2 = s^2 = 14,84$. Тогда предельная ошибка выборочной средней равна

$$\Delta_{\bar{y}} = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 2 \cdot \sqrt{\frac{14,84}{100} \cdot (1 - 0,1)} = 2 \cdot \sqrt{0,1484 \cdot 0,9} = 0,731 \text{ мин.}$$

Определим теперь возможные границы, в которых ожидаются средние затраты времени на изготовление одной детали на заводе

$$\bar{y} - \Delta_{\bar{y}} \leq m_y \leq \bar{y} + \Delta_{\bar{y}}, \text{ или } 24,669 \leq m_y \leq 26,131.$$

Т.е., с вероятностью 0,954 можно утверждать, что средние затраты времени на изготовление другой детали на заводе находятся в пределах от 24,669 до 26,131 мин.

5. Выборочная доля w числа деталей с затратами времени на их изготовление от 20 до 28 мин. равна

$$w = \frac{20 + 50}{100} = 0,7 = 70\%.$$

Учитывая, что при вероятности $p = 0,954$ коэффициент доверия $t = 2$, вычислим предельную ошибку выборочной доли

$$\Delta_w = t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 2 \cdot \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{100} \cdot (1 - 0,1)} = 2 \cdot \sqrt{0,00189} = 0,0869, \text{ или } 8,69\%.$$

Пределы доли признака во всей совокупности:

$$70\% - 8,69\% \leq d^* \leq 70\% + 8,69\%, \text{ или } 61,31\% \leq d^* \leq 78,69\%.$$

Таким образом, с вероятностью 0,954 можно утверждать, что границы удельного веса числа деталей с затратами времени на их изготовление от 20 до 28 мин., находятся в пределах от 61,31% до 78,69% от всей партии деталей.

Выводы.

1. Так как коэффициент вариации меньше 33 %, то исходная выборка однородная.
2. Более двух третей деталей имеют время изготовления от 20 до 28 мин. Это свидетельствует о стабильной работе на заводе по выпуску данной детали.

Задача 5.16.

Для определения среднего срока пользования краткосрочным кредитом в банке была произведена 5%-ная механическая выборка, в которую попало 100 счетов. В результате обследования установлено, что средний срок пользования краткосрочным кредитом – 30 дней при среднем квадратическом отклонении – 9 дней. В пяти счетах срок пользования кредитом превышал 60 дней. С вероятностью 0,954 определить пределы, в которых будут находиться средний срок пользования краткосрочным кредитом в генеральной совокупности и доля счетов со сроком пользования краткосрочным кредитом более 60 дней.

Решение.

По условию задачи имеем бесповторную, собственно-случайную, механическую выборку.

1. Определим пределы, в которых будет находиться средний срок пользования краткосрочным кредитом.

Дисперсия и среднее срока пользования краткосрочным кредитом составляют соответственно $\sigma_x^2 = 9^2 = 81$, $\bar{x} = 30$. Т.к. обследовано 5% счетов, то $\frac{n}{N} = 0,05$, где n – объем выборочной совокупности, N – объем генеральной совокупности.

При доверительной вероятности $p = 0,954$ коэффициент доверия $t = 2$. Тогда предельная ошибка выборки равна

$$\Delta_{\bar{x}} = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 2 \cdot \sqrt{\frac{81}{100} \cdot (1 - 0,05)} = 2 \cdot 0,9 \cdot \sqrt{0,95} = 1,754.$$

Определим возможные границы, в которых будет находиться средний срок пользования краткосрочным кредитом:

$$\bar{x} - \Delta_{\bar{x}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + \Delta_{\bar{x}}.$$

Подставив имеющиеся данные, получим

$$30 - 1,754 \leq \mu_x \leq 30 + 1,754, \text{ или } 28,246 \leq \mu_x \leq 31,754.$$

2. Определим пределы, в которых будет находиться доля счетов со сроком пользования краткосрочным кредитом более 60 дней.

Выборочная доля счетов, у которых сроком пользования краткосрочным кредитом более 60 дней равна

$$W = 5/100 = 0,05, \text{ или } 5\%.$$

Отсюда дисперсия доли равна:

$$\sigma_W^2 = W(1 - W) = 0,05 \cdot 0,95 = 0,0475.$$

Тогда предельная ошибка выборки равна:

$$\Delta_{\bar{W}} = t \cdot \sqrt{\frac{\sigma_W^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 2 \cdot \sqrt{\frac{0,0475}{100} \cdot (1 - 0,05)} = 2 \cdot \sqrt{0,000451} = 0,0212.$$

Определим возможные пределы, в которых будет находиться доля счетов со сроком пользования краткосрочным кредитом более 60 дней:

$$W - \Delta_{\bar{W}} \leq \bar{W} \leq W + \Delta_{\bar{W}}.$$

Подставив имеющиеся данные, получим

$$0,0288 \leq \bar{W} \leq 0,0712, \text{ или } 2,88\% \leq \bar{W} \leq 7,12\%.$$

Задача 5.17.

Заработная плата бригады характеризуется следующими данными:

| Профессия | Число рабочих | Месячная заработная плата каждого рабочего, руб. |
|-----------|---------------|--|
| Токари | 4 | 1252; 1548; 1600; 1400 |
| Слесари | 6 | 1450; 1380; 1260; 1700; 1250; 1372 |

Проверить правило сложения дисперсии и указать велико ли влияние профессии на различие в уровне заработной платы.

Решение.

Правило сложения дисперсии имеет вид:

$$s^2 = s_{\text{мод}}^2 + s_{\text{ост}}^2,$$

где используются следующие дисперсии: общая s_y^2 , межгрупповая $s_{\text{мод}}^2$ и внутригрупповая $s_{\text{ост}}^2$.

Средняя зарплата всех рабочих равна:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{1}{10} (1252 + 1548 + \dots + 1372) = \frac{14212}{10} = 1421,2 \text{ руб.}$$

Общая дисперсия равна:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(1252 - 1421,2)^2 + \dots + (1372 - 1421,2)^2}{10} = \frac{215097,6}{10} = 21509,76.$$

Средняя зарплата токарей равна:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum x_{1i} = \frac{1}{4} (1252 + 1548 + 1600 + 1400) = \frac{5800}{4} = 1450 \text{ руб.}$$

Средняя зарплата слесарей равна:

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum x_{2i} = \frac{1}{6} (1450 + 1380 + \dots + 1372) = \frac{8412}{6} = 1402 \text{ руб.}$$

Межгрупповая дисперсия равна:

$$s_{\text{мод}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^L (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = \frac{(1450 - 1421,2)^2 \cdot 4 + (1402 - 1421,2)^2 \cdot 6}{10} = \frac{5529,6}{10} = 552,96.$$

Дисперсия зарплаты токарей равна:

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^L (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 = \frac{(1252 - 1450)^2 + \dots + (1400 - 1450)^2}{4} = \frac{73808}{4} = 18452.$$

Дисперсия зарплаты слесарей равна:

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = \frac{(1450 - 1402)^2 + \dots + (1372 - 1402)^2}{6} = \frac{135760}{6} = 22626,67.$$

Внутригрупповая дисперсия равна:

$$s_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^L s_i^2 \cdot n_i = \frac{18452 \cdot 4 + 22626,67 \cdot 6}{10} = \frac{209568}{10} = 20956,8.$$

Проверим правило сложения дисперсии:

$$s_{\text{мод}}^2 + s_{\text{ост}}^2 = 552,96 + 20956,8 = 21509,76 = s^2, \text{ т.е. данное правило выполняется.}$$

Определим влияние профессии на различие в уровне заработной платы.

Расчетное значение F -отношения равно:

$$\psi = \frac{s_{mod}^2}{s_{ост}^2} = \frac{552,96}{20956,8} = 0,026,$$

это очень малое значение. Поэтому можно сделать вывод о том, что различие в профессии рабочих на их зарплату влияния практически не оказывает.

Задача 5.18.

В городе исследуются затраты времени жителей на ведение домашнего хозяйства. Опрошено 109 мужчин и 191 женщин. При этом выяснилось, что мужчины тратят в среднем 2,5 часа при среднем квадратическом отклонении 20 мин., а женщины – 3,5 часа при среднем квадратическом отклонении 10 мин. Найти 99% доверительный интервал для разности значений среднего времени, затрачиваемого женщинами и мужчинами на домашние работы.

Решение.

Выборка получена при бесповторном отборе. Отсюда предельные ошибки равны

$$\text{- для мужчин } \Delta_x = t_{0,01;107} \sqrt{\frac{s_x^2}{n_1}} = 2,623 \cdot \frac{20}{10,440} = 5,024 \text{ мин.};$$

$$\text{- для женщин } \Delta_y = t_{0,01;189} \sqrt{\frac{s_y^2}{n_2}} = 2,602 \cdot \frac{10}{13,820} = 1,883 \text{ мин.}$$

99% доверительный интервал для среднего времени, затрачиваемого мужчинами на домашние работы равен

$$(\bar{x} - \Delta_x; \bar{x} + \Delta_x) = (150 - 5,024; 150 + 5,024) = (144,98; 155,02).$$

99% доверительный интервал для среднего времени, затрачиваемого женщинами на домашние работы равен

$$(\bar{y} - \Delta_y; \bar{y} + \Delta_y) = (210 - 1,883; 210 + 1,883) = (208,12; 211,88).$$

99% доверительный интервал для разности значений среднего времени, затрачиваемого женщинами и мужчинами на домашние работы найдем как разность между двумя найденными доверительными интервалами для мужчин и женщин (в минутах)

$$(\bar{y} - \bar{x} - \Delta_y - \Delta_x; \bar{y} + \bar{x} + \Delta_y + \Delta_x) = (60 - 1,883 - 5,024; 60 + 1,883 + 5,024) = (53,09; 66,91).$$

Задача 5.19.

Для анализа товарооборота магазинов города выборочным методом было проведено обследование 60% магазинов. Результаты выборки представлены в таблице (цифры условные):

| Группы магазинов по товарообороту, тыс. руб. | Число магазинов |
|--|-----------------|
| До 50 | 4 |
| 50 – 60 | 6 |
| 60 – 70 | 8 |
| 70 – 80 | 7 |
| 80 – 90 | 12 |
| 90 – 100 | 22 |
| 100 – 110 | 18 |
| 110 – 120 | 10 |
| 120 – 130 | 8 |
| Более 130 | 5 |

С вероятностью 0,997 определить для всех магазинов города пределы, в которых находится:

- 1) средний товарооборот;
- 2) доля магазинов с товарооборотом более 100 тыс. руб.

Решение.

1. Присвоим каждой группе значение среднегруппового товарооборота. В результате получим таблицу

| Группы магазинов по товарообороту, тыс. руб. | Число магазинов |
|--|-----------------|
| 45 | 4 |
| 55 | 6 |
| 65 | 8 |
| 75 | 7 |
| 85 | 12 |
| 95 | 22 |
| 105 | 18 |
| 115 | 10 |
| 125 | 8 |
| 135 | 5 |

Определим вначале выборочное среднее по формуле среднего арифметического взвешенного:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{45 \cdot 4 + 55 \cdot 6 + \dots + 135 \cdot 5}{4 + 6 + \dots + 5} = \frac{9380}{100} = 93,8 \text{ тыс. руб.}$$

Отсюда выборочная дисперсия равна:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{(45 - 93,8)^2 \cdot 4 + (55 - 93,8)^2 \cdot 6 + \dots + (135 - 93,8)^2 \cdot 5}{100} = 516,56.$$

По условию задачи имеем бесповторную, собственно-случайную, механическую выборку. Т.к. обследовано 60% магазинов, то

$$\frac{n}{N} = 0,6,$$

где n – объем выборочной совокупности, N – объем генеральной совокупности.

Средняя ошибка выборки равна

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \sqrt{\frac{516,56}{100} \cdot 0,4} = 1,4374.$$

При доверительной вероятности $p = 0,997$ коэффициент доверия $t = 3$. Тогда предельная ошибка выборки равна

$$\Delta_{\bar{x}} = t \cdot \mu = 3 \cdot 1,4374 = 4,3123.$$

Определим возможные пределы генеральной средней товарооборота

$$\bar{x} - \Delta_{\bar{x}} \leq M[x] \leq \bar{x} + \Delta_{\bar{x}}.$$

Подставив имеющиеся данные, получим

$$89,488 \leq M[x] \leq 98,112.$$

2. Выборочная доля w магазинов с товарооборотом более 100 тыс. руб. равна:

$$w = \frac{18 + 10 + 8 + 5}{100} = 0,41, \text{ или } 41\%.$$

Учитывая, что при вероятности $p = 0,997$ коэффициент доверия $t = 3$, вычислим предельную ошибку выборочной доли:

$$\Delta_w = t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = 3 \cdot \sqrt{\frac{0,41 \cdot 0,59}{100} \cdot (1 - 0,6)} = 0,0933, \text{ или } 9,33\%.$$

Пределы доли признака во всей совокупности:

$$41\% - 9,33\% \leq d^* \leq 41\% + 9,33\%, \text{ или } 31,67\% \leq d^* \leq 50,33\%.$$

Задача 5.20.

Для определения среднего возраста планируется обследование населения города методом случайного поиска. Численность населения города составляет 1704000 человек. Каков должна быть необходимый объем выборочной совокупности, чтобы с вероятностью 0,954 ошибка выборки не превышала 5 лет при среднем квадратическом отклонении 25 лет.

Решение.

Необходимый объем выборки для случая бесповторного отбора равен

$$n = \frac{t^2 \sigma^2 N}{\Delta^2 N + t^2 \sigma^2} = \frac{2^2 \cdot 25^2 \cdot 1704000}{5^2 \cdot 1704000 + 2^2 \cdot 25^2} = 100 \text{ чел.}$$

Тема 6. Ряды динамики

Задача 6.1.

Данные о площадях под картофелем до и после изменения границ района, тысяч гектаров:

| площадь под картофелем \ периоды | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|--|----------------------------|-------|-----|-----|-------|-------|-------|
| | До изменения границ района | 110 | 115 | 112 | ----- | ----- | ----- |
| После изменения границ района | ----- | ----- | 208 | 221 | 229 | 234 | 230 |
| Сомкнутый ряд | 204,2 | 213,5 | 320 | 221 | 229 | 234 | 230 |

Сомкнуть ряд, выразив площадь под картофелем в условиях изменения границ района.

Решение.

Разница за счет изменения границ района составила $\Delta = 208 - 112 = 96$ тыс. га. Отсюда сомкнем ряд, выразив площадь под картофелем в условиях изменения границ района (табл. 1).

Таблица 1

| Площадь под картофелем | Периоды | | | | | | |
|-------------------------------|---------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| До изменения границ района | 110 | 115 | 112 | 125 | 133 | 138 | 134 |
| После изменения границ района | 206 | 211 | 208 | 221 | 229 | 234 | 230 |
| Сомкнутый ряд | 204,2 | 213,5 | 320 | 221 | 229 | 234 | 230 |

Задача 6.2.

Имеется информация об экспорте продукции из региона за ряд лет.

| Год | Экспорт, тысяч долларов |
|-------|-------------------------|
| 2004 | 42376 |
| 2005 | 44298 |
| 2006 | 51449 |
| 2007 | 64344 |
| итого | 202467 |

Определить: 1) цепные и базисные: а) абсолютные приросты; б) темпы роста; в) темпы прироста; 2) абсолютное содержание одного процента прироста; 3) средние показатели: а) средний уровень ряда; б) среднегодовой абсолютный прирост; в) среднегодовой темп роста; г) среднегодовой темп прироста.

Решение.

Определим показатели динамики, характеризующие изменение экспорта продукции из региона. Формулы для расчета следующие.

Абсолютный прирост по месяцам и к базисному месяцу (январю), соответственно, равен

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta_i^{\bar{}} = x_i - x_0.$$

Темп роста по месяцам и к базисному году, соответственно, равен

$$T_i^P = \frac{x_i}{x_{i-1}}, \quad T_0^P = \frac{x_i}{x_0}.$$

Темп прироста по месяцам и к базисному месяцу, соответственно, равен:

$$T_i^{PP} = \frac{\Delta_i}{x_{i-1}}, \quad T_0^{PP} = \frac{\Delta_i}{x_0}.$$

Абсолютное значение 1% прироста равно

$$|\%_i| = 0,01 \cdot x_{i-1}.$$

Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1

| Годы | Экспорт, тысяч долларов | Абсолютный прирост, тыс. руб. | | Темпы роста, % | | Темпы прироста, % | | Абс. значение 1% прироста |
|------|-------------------------|-------------------------------|------------------|----------------|------------------|-------------------|------------------|---------------------------|
| | | по годам | к базисному году | по годам | к базисному году | по годам | к базисному году | |
| 2004 | 42376 | - | - | - | - | - | - | - |
| 2005 | 44298 | 1922 | 1922 | 104,54 | 104,54 | 4,54 | 4,54 | 423,76 |
| 2006 | 51449 | 7151 | 9073 | 116,14 | 121,41 | 16,14 | 16,88 | 442,98 |
| 2007 | 64344 | 12895 | 21968 | 125,06 | 151,84 | 25,06 | 30,43 | 514,49 |

Среднегодовой объем экспорта продукции из региона определяется по формуле среднего арифметического

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{42376 + \dots + 64344}{4} = 50616,75 \text{ тыс. долл.}$$

Среднегодовой темп роста ряда динамики определяется по формуле среднего геометрического

$$\bar{T}_P = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}} = \sqrt[3]{\frac{64344}{42376}} = 1,149 = 114,9\%.$$

Среднегодовой темп прироста ряда динамики равен:

$$\bar{T}_{PP} = \bar{T}_P - 100 = 114,9 - 100 = 14,9\%.$$

Среднегодовой абсолютный прирост определяется по формуле:

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta_i}{n-1} = \frac{1922 + 7151 + 12895}{3} = 7322,67 \text{ тыс. долл.}$$

Задача № 6.3.

Численность населения России характеризуется следующими данными:

| Годы | На начало года, тыс. чел |
|------|--------------------------|
| 1997 | 148041 |
| 2002 | 148306 |
| 2003 | 147976 |
| 2004 | 147502 |
| 2005 | 147105 |
| 2006 | 146388 |
| 2007 | 145500 |

Для анализа численности населения России за 2002-2007 гг. определите:

1. Абсолютные приросты, темпы роста и темпы прироста по годам и к 2002 году. Полученные показатели представьте в таблице.
2. Среднегодовую численность населения России.
3. Среднегодовой темп роста и прироста численности населения России за 2002-2007 гг. и за 1997-2002 гг.

Постройте график динамики численности населения России. Сделайте выводы.

Решение.

Определим абсолютные приросты, темпы роста и темпы прироста по годам и к 2002 году. Формулы для расчета показателей ряда динамики следующие.

Абсолютный прирост по годам (цепной) и к базисному году, соответственно, равен

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta_i^{\sigma} = x_i - x_0.$$

Темп роста по годам и к базисному году, соответственно, равен

$$T_i^P = \frac{x_i}{x_{i-1}}, \quad T_0^P = \frac{x_i}{x_0}.$$

Темп прироста по годам и к базисному году, соответственно, равен

$$T_i^{PP} = \frac{\Delta_i}{x_{i-1}}, \quad T_0^{PP} = \frac{\Delta_i}{x_0}.$$

Результаты расчета представим в табл. 1.

Таблица 1

| Годы | Численность населения России, тыс. чел. | Абсолютный прирост, тыс. чел. | | Темпы роста, % | | Темпы прироста, % | |
|------|---|-------------------------------|-------------|----------------|-------------|-------------------|-------------|
| | | цепной | к 2002 году | цепной | к 2002 году | цепной | к 2002 году |
| 2002 | 148306 | - | - | - | - | - | - |
| 2003 | 147976 | -330 | -330 | 99,8% | 99,8% | -0,2% | -0,2% |
| 2004 | 147502 | -474 | -804 | 99,7% | 99,5% | -0,3% | -0,5% |
| 2005 | 147105 | -397 | -1201 | 99,7% | 99,2% | -0,3% | -0,8% |
| 2006 | 146388 | -717 | -1918 | 99,5% | 98,7% | -0,5% | -1,3% |
| 2007 | 145500 | -888 | -2806 | 99,4% | 98,1% | -0,6% | -1,9% |

Среднегодовую численность населения России за 2002-2007 определим по формуле средней хронологической

$$\bar{x} = \frac{\frac{148306}{2} + 147976 + 147502 + 147105 + 146388 + \frac{145500}{2}}{5} = \frac{735874}{5} = 147174,8.$$

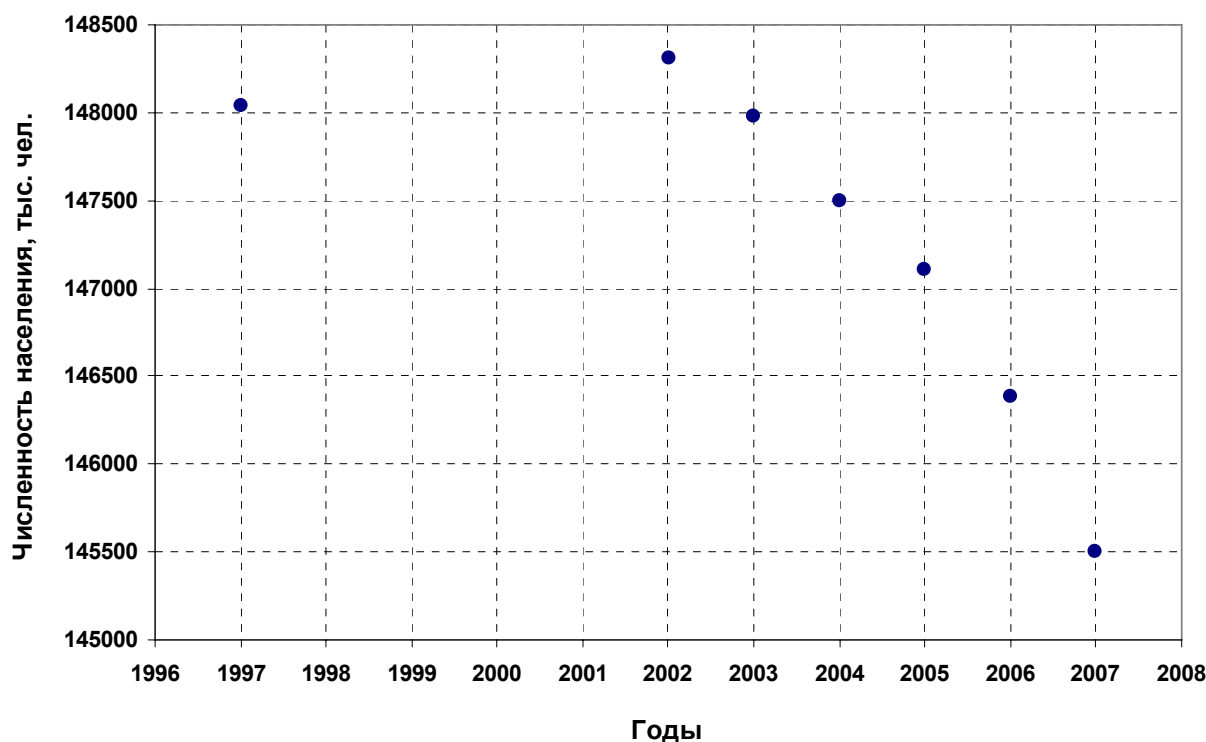
Среднегодовой темп роста и прироста численности населения России за 2002-2007 определяется по формуле среднего геометрического

$$\bar{T}_P^{2002-2007} = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}} = \sqrt[5]{\frac{145500}{148306}} = 0,996, \text{ или } 99,6\%.$$

Среднегодовой темп роста и прироста численности населения России за 1997-2002 равен

$$\bar{T}_P^{1997-2002} = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}} = \sqrt[5]{\frac{148306}{148041}} = 1,0, \text{ или } 100,0\%.$$

Построим график динамики численности населения России.



Выводы.

Численность населения России в 1997-2002 гг. практически не менялась, а с 2002 года стала уменьшаться в среднем на 0,4% в год.

Задача 6.4.

Имеется информация о списочном составе работников малого предприятия за октябрь месяц. На 1 сентября – 40 человек, 5 сентября уволилось 8 человек, 12 сентября принято 5 человек, 20 сентября уволилось 2 человека, 25 сентября принято 10 человек. Определить среднесписочный состав работников за сентябрь месяц.

Решение.

С 1-го по 4-е сентября (4 дня) работало 40 человек. С 5-го по 11-е сентября (7 дней) работало 32 человек. С 12-го по 19-е сентября (8 дней) работало 37 человек. С 20-го по 24-е сентября (5 дней) работало 35 человек. С 25-го по 30-е сентября (6 дней) работало 45 человек.

Отсюда среднесписочный состав работников за сентябрь месяц равен

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{40 \cdot 4 + \dots + 45 \cdot 6}{4 + \dots + 6} = \frac{1125}{30} = 37,5 \text{ чел.}$$

Задача 6.5.

Прирост численности постоянного населения по годам в области характеризуется следующими данными:

| Годы | 2003г | 2004г | 2005г | 2006г |
|---------------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Прирост (убыль), % к предыдущему году | -0,9 | -1,2 | -2,0 | -1,8 |

Определите:

1. Базисные темпы роста и прироста численности постоянного населения;
2. Среднегодовой темп роста и прироста;
3. Спрогнозируйте базисные темпы изменения численности постоянного населения на 2007 г, 2008 г, при условии сохранения среднегодового темпа снижения на уровне предыдущего периода.

Сделайте выводы.

Решение.

Абсолютный прирост по годам (цепной) и к базисному году, соответственно, равен

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}, \Delta_i^{\delta} = x_i - x_0.$$

Темп роста по годам и к базисному году, соответственно, равен

$$T_i^P = \frac{x_i}{x_{i-1}}, T_{\delta}^P = \frac{x_i}{x_0}.$$

Темп прироста по годам и к базисному году, соответственно, равен

$$T_i^{PP} = \frac{\Delta_i}{x_{i-1}}, T_{\delta}^{PP} = \frac{\Delta_i}{x_0}.$$

Результаты приведены в таблице.

| Годы | Численность постоянного населения, в % по отношению к 2002 году | Абсолютный прирост, % | | Темпы роста, % | | Темпы прироста, % | |
|------|---|-----------------------|------------------|----------------|------------------|-------------------|------------------|
| | | цепной | к базисному году | цепной | к базисному году | цепной | к базисному году |
| 2002 | 100,000 | - | - | - | - | - | - |
| 2003 | 99,100 | -0,900 | -0,900 | 99,1% | 99,1% | -0,9% | -0,9% |
| 2004 | 97,911 | -1,189 | -2,089 | 98,8% | 97,9% | -1,2% | -2,1% |
| 2005 | 95,953 | -1,958 | -4,047 | 98,0% | 96,0% | -2,0% | -4,0% |
| 2006 | 94,225 | -1,727 | -5,775 | 98,2% | 94,2% | -1,8% | -5,8% |

Среднегодовой темп роста определяется по формуле среднего геометрического:

$$\overline{T}_P = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}} = \sqrt[4]{\frac{94,225}{100,000}} = 0,985, \text{ или } 98,5\%.$$

Среднегодовой темп прироста равен

$$\overline{T_{PP}} = \overline{T_p} - 1 = 0,985 - 1 = -0,015, \text{ или } -1,5\%.$$

Спрогнозируем базисные темпы изменения численности постоянного населения на 2007 г, 2008 г, при условии сохранения среднегодового темпа снижения на уровне предыдущего периода.

В 2007 г и 2008 г. численность постоянного населения уменьшится по сравнению с предыдущим годом на 1,5%.

Задача 6.6.

По приведенным данным осуществить пересчет ВВП за ряд лет в постоянные цены 1995 года. Использовать любой из существующих методов. Рассчитать показатели динамики. Сделать выводы.

| Наименование показателя | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 |
|-------------------------|------|------|------|------|------|
| Уровень цен (р) | 17,5 | 16,9 | 17,3 | 17,8 | 19,2 |
| Условный объем ВВП (q) | 350 | 400 | 450 | 480 | 500 |

Решение.

Пересчитаем ВВП в постоянные цены 1995 года. Результат приведем в таблице.

| Наименование показателя | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 |
|--------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| ВВП в постоянных ценах 1995 года (q) | 297,87 | 342,17 | 383,63 | 407,47 | 419,46 |

Формулы для расчета показателей ряда динамики следующие.

Абсолютный прирост по годам (цепной) и к базисному году, соответственно, равен:

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}, \Delta_i^{\delta} = x_i - x_0.$$

Темп роста по годам и к базисному году, соответственно, равен:

$$T_i^P = \frac{x_i}{x_{i-1}}, T_0^P = \frac{x_i}{x_0}.$$

Темп прироста по годам и к базисному году, соответственно, равен:

$$T_i^{PP} = \frac{\Delta_i}{x_{i-1}}, T_0^{PP} = \frac{\Delta_i}{x_0}.$$

Результаты расчета приведены в таблице.

| Год | ВВП в постоянных ценах 1995 года (q) | Абсолютный прирост, тыс. руб. | Темпы роста, % | Темпы прироста, % |
|-----|--------------------------------------|-------------------------------|----------------|-------------------|
|-----|--------------------------------------|-------------------------------|----------------|-------------------|

| | | цепной | к 1997 г. | цепной | к 1997 г. | цепной | к 1997 г. |
|------|--------|----------|-----------|--------|-----------|--------|-----------|
| 1997 | 297,87 | - | - | - | - | - | - |
| 1998 | 342,17 | 44,30046 | 44,30 | 114,9% | 114,9% | 14,9% | 14,9% |
| 1999 | 383,63 | 41,45892 | 85,76 | 112,1% | 128,8% | 12,1% | 28,8% |
| 2000 | 407,47 | 23,83858 | 109,60 | 106,2% | 136,8% | 6,2% | 36,8% |
| 2001 | 419,46 | 11,9928 | 121,59 | 102,9% | 140,8% | 2,9% | 40,8% |

Выводы. ВВП в постоянных ценах вырос за 4 года на 121,59 усл. ед., или на 140,8%.

Задача 6.7.

Имеют данные о производстве изделия "А", за период с 1996-2000 г.

| Показатели | Годы | | | | |
|---------------------------------|------|------|------|------|------|
| | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 |
| Выпуск изделия "А", тыс. шт. | 810 | 822 | 800 | 870 | 915 |

Рассчитать:

1. Показатели динамики цепным и базисным способами:

- абсолютный прирост;
- темп роста;
- темп прироста.

2. Среднегодовые показатели:

- среднегодовой выпуск продукции;
- средний абсолютный прирост;
- среднегодовой темп роста;
- среднегодовой темп прироста.

3. Графически изобразить динамику выпуска продукции. Сделать выводы.

Решение.

1. Формулы для расчета показателей ряда динамики следующие.

Абсолютный прирост по годам (цепной) и к базисному году, соответственно, равен:

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta_i^b = x_i - x_0.$$

Темп роста по годам и к базисному году, соответственно, равен:

$$T_i^P = \frac{x_i}{x_{i-1}}, \quad T_i^b = \frac{x_i}{x_0}.$$

Темп прироста по годам и к базисному году, соответственно, равен:

$$T_i^{PP} = \frac{\Delta_i}{x_{i-1}}, \quad T_0^{PP} = \frac{\Delta_i}{x_0}.$$

Между цепными и базисными показателями динамики существует определенная связь:

- сумма абсолютных приростов с переменной базой дает общий прирост за исследуемый период $\sum \Delta_i = \Delta_n^{\sigma}$;
- произведение всех темпов роста по годам равно темпу роста последнего результата к базисному году $T_1^P \cdot T_2^P \cdot \dots \cdot T_n^P = T_0^P$.

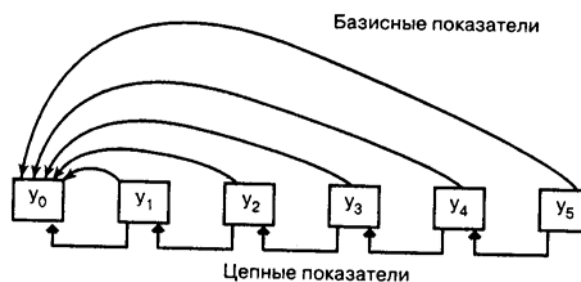


Рис. Принципы построения цепных и базисных показателей динамики.

Результаты расчета приведены в таблице.

| Год | Выпуск изделия "А", тыс. шт. | Абсолютный прирост, тыс. шт. | | Темпы роста, % | | Темпы прироста, % | |
|------|------------------------------|------------------------------|------------------|----------------|------------------|-------------------|------------------|
| | | цепной | к базисному году | цепной | к базисному году | цепной | к базисному году |
| 1996 | 810 | - | - | - | - | - | - |
| 1997 | 822 | 12 | 12 | 101,5% | 101,5% | 1,5% | 1,5% |
| 1998 | 800 | -22 | -10 | 97,3% | 98,8% | -2,7% | -1,2% |
| 1999 | 870 | 70 | 60 | 108,8% | 107,4% | 8,7% | 7,4% |
| 2000 | 915 | 45 | 105 | 105,2% | 113,0% | 5,2% | 13,0% |

2. Среднегодовой выпуск продукции равен

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{810 + 822 + 800 + 870 + 915}{5} = 843,4 \text{ тыс. шт.}$$

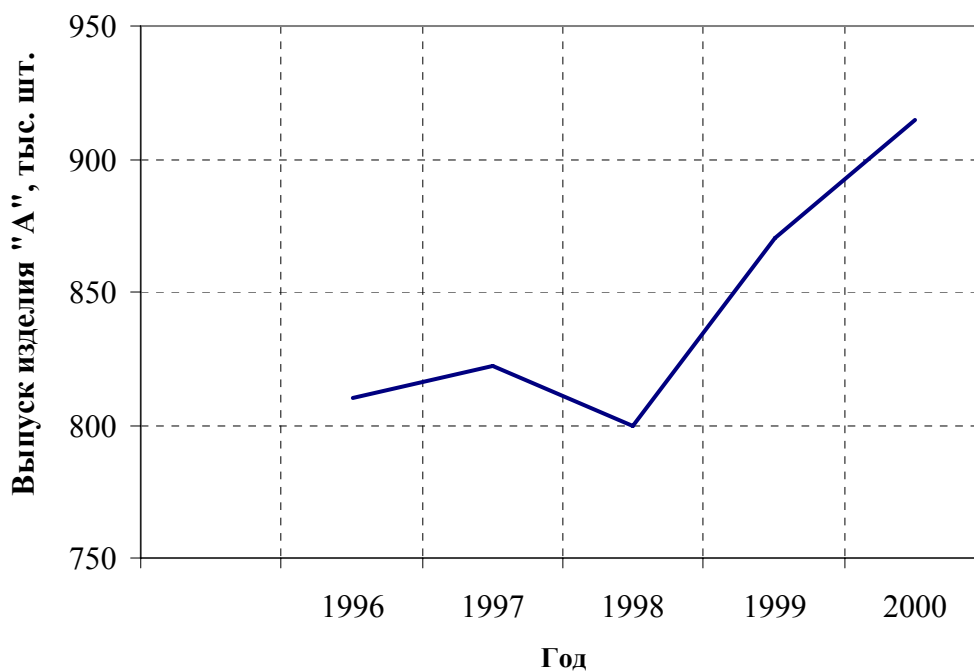
Среднегодовой темп роста определяется по формуле среднего геометрического:

$$\bar{T}_P = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}} = \sqrt[4]{\frac{915}{810}} = 1,031, \text{ или } 103,1\%.$$

Среднегодовой темп прироста равен

$$\bar{T}_{PP} = \bar{T}_P - 1 = 1,031 - 1 = 0,031, \text{ или } 3,1\%.$$

3. График динамики выпуска продукции показан на рисунке.



Выводы.

1. Динамика выпуска продукции в целом положительная (за исключением 1998 года).
2. Выпуск продукции за пять лет вырос на 45%.

Задача 6.8.

Имеются следующие данные об отправлении грузов железнодорожным транспортом в регионе за 2002 год, млн. т.:

| Месяцы | Отправлено груза |
|----------|------------------|
| Январь | 92 |
| Февраль | 85 |
| Март | 93 |
| Апрель | 92 |
| Май | 90 |
| Июнь | 87 |
| Июль | 86 |
| Август | 88 |
| Сентябрь | 85 |
| Октябрь | 90 |
| Ноябрь | 86 |
| Декабрь | 88 |

По приведенным данным рассчитайте показатели изменения уровней ряда динамики (по цепной и базисной схемам) и средние показатели ряда динамики.

Для изучения тенденции изменения показателей произвести сглаживание ряда динамики тремя способами. Изобразить графически фактические и сглаженные уровни ряда. Сделать выводы о характере общей тенденции показателей.

Решение.

Абсолютные приросты равны:

- базисные $\Delta_i^{\delta} = y_i - y_0$,

- цепные $\Delta_i = y_i - y_{i-1}$,

где y_i – уровень i -го месяца, y_0 – уровень января.

Темпы роста равны:

- базисные $T_{pi}^{\delta} = \frac{y_i}{y_0} \cdot 100\%$,

- цепные $T_{pi} = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100\%$.

Темпы прироста равны:

- базисные $T_{npi}^{\delta} = T_{pi}^{\delta} - 100\%$,

- цепные $T_{npi} = T_{pi} - 100\%$.

Данные расчета приведены в следующей таблице (табл. 1).

Таблица 1

| Месяц | Отправлено груза, млн. т. | Абсолютные приросты | | Темпы роста, % | | Темпы прироста, % | | Абс. значение 1% прироста |
|----------|---------------------------|---------------------|--------|----------------|--------|-------------------|--------|---------------------------|
| | | базисные | цепные | базисные | цепные | базисные | цепные | |
| Январь | 92 | - | - | - | - | - | - | - |
| Февраль | 85 | -7 | -7 | 92,39 | 92,39 | 91,39 | 91,39 | 0,92 |
| Март | 93 | 1 | 8 | 101,09 | 109,41 | 100,09 | 108,41 | 0,85 |
| Апрель | 92 | 0 | -1 | 100,00 | 98,92 | 99,00 | 97,92 | 0,93 |
| Май | 90 | -2 | -2 | 97,83 | 97,83 | 96,83 | 96,83 | 0,92 |
| Июнь | 87 | -5 | -3 | 94,57 | 96,67 | 93,57 | 95,67 | 0,9 |
| Июль | 86 | -6 | -1 | 93,48 | 98,85 | 92,48 | 97,85 | 0,87 |
| Август | 88 | -4 | 2 | 95,65 | 102,33 | 94,65 | 101,33 | 0,86 |
| Сентябрь | 85 | -7 | -3 | 92,39 | 96,59 | 91,39 | 95,59 | 0,88 |
| Октябрь | 90 | -2 | 5 | 97,83 | 105,88 | 96,83 | 104,88 | 0,85 |
| Ноябрь | 86 | -6 | -4 | 93,48 | 95,56 | 92,48 | 94,56 | 0,9 |
| Декабрь | 88 | -4 | 2 | 95,65 | 102,33 | 94,65 | 101,33 | 0,86 |

Среднемесячная отправка груза определяется по формуле среднего арифметического:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{1062}{12} = 88,5 \text{ млн. т.}$$

Среднегодовой абсолютный прирост равен

$$\bar{\Delta} = \frac{y_{12} - y_1}{n-1} = \frac{88 - 92}{11} = -0,363 \text{ млн. т.}$$

Среднегодовой темп роста ряда динамики определяется как среднее геометрическое:

$$\bar{T}_p = \sqrt[n-1]{\frac{y_{12}}{y_1}} = \sqrt[11]{\frac{88}{92}} = 0,996, \text{ или } 99,6\%.$$

Среднегодовой темп прироста ряда динамики равен

$$\bar{T}_{np} = \bar{T}_p - 100 = 99,6 - 100 = -0,4\%.$$

Темпы роста товарооборота изображены на рисунке, из которого видно, что рост потребления овощей и бахчевых в год на душу населения Российской Федерации в 1995 – 1999 годах отсутствует.

Сгладим исходные данные методом укрупнения интервалов. В качестве нового интервала возьмем квартал (3 месяца). Показатели сглаженного ряда динамики находим усреднением значений по трем месяцам, входящим в квартал. Имеем следующий ряд динамики, приведенный в табл. 2.

Таблица 2

| Квартал | Отправлено груза в среднем за месяц, млн. т. |
|---------|--|
| 1 | 90,00 |
| 2 | 89,67 |
| 3 | 86,33 |
| 4 | 88,00 |

Сгладим исходные данные методом усреднения по левой и правой половине. Средние значение показателя в первом и во втором полугодиях соответственно равны:

$$\bar{y}_{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^6 y_i}{n/2} = 89,83, \quad \bar{y}_{(2)} = \frac{\sum_{i=7}^{12} y_i}{n/2} = 87,17.$$

Сгладим данные методом скользящей средней. Результаты расчета по трехмесячной скользящей средней приведены в табл. 3.

Таблица 3

| Месяц | Фактические уровни ряда, y_i | Сглаженные уровни ряда, $y_{cp,i}$ |
|-------|--------------------------------|------------------------------------|
| 1 | 92 | - |
| 2 | 85 | 90,00 |
| 3 | 93 | 90,00 |

| | | |
|----|----|-------|
| 4 | 92 | 91,67 |
| 5 | 90 | 89,67 |
| 6 | 87 | 87,67 |
| 7 | 86 | 87,00 |
| 8 | 88 | 86,33 |
| 9 | 85 | 87,67 |
| 10 | 90 | 87,00 |
| 11 | 86 | 88,00 |
| 12 | 88 | - |

Изобразить графически фактические и сглаженные уровни ряда (рис. 2).

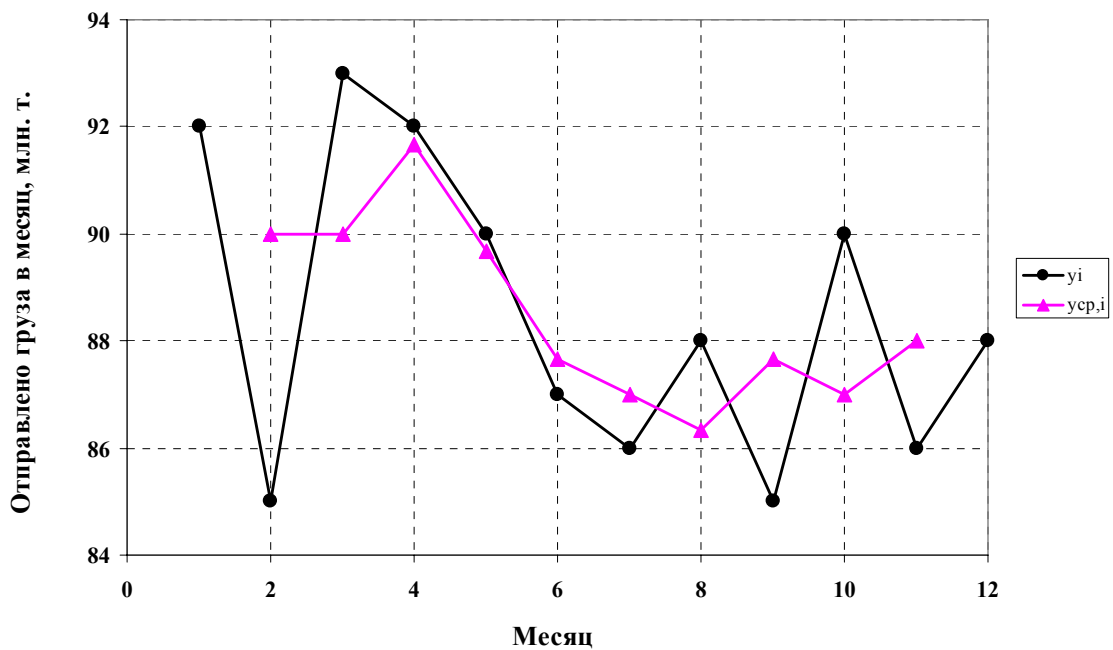


Рис. 2. Фактические и сглаженные уровни ряда.

По всем методам сглаживания видна тенденция незначительного убывания показателей ряда динамики. Однако, это может быть и результат наличия сезонности. Поэтому для более достоверного вывода требуется провести анализ не за один год, а за несколько лет.

Задача 6.9.

Данные о численности безработных в стране на конец года:

| Год | Число безработных, тыс. чел. |
|-----|------------------------------|
| 1-й | 5704,4 |
| 2-й | 6711,9 |
| 3-й | 6732,4 |
| 4-й | 8058,1 |
| 5-й | 8876,2 |

Определите:

- 1) Вид динамического ряда;
- 2) Средний уровень динамического ряда;
- 3) Абсолютные приросты, темпы роста и прироста (цепные и базисные); абсолютное содержание 1% прироста;
- 4) Средний абсолютный прирост, средний темп роста и прироста уровней динамического ряда;

Результаты расчетов представьте в таблице. Изобразите динамический ряд на графике. Сделайте выводы.

Решение.

- 1) Имеем интервальный динамический ряд, т.к. данные приведены за каждый год.
- 2) Средний уровень динамического ряда равен

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i}{5} = \frac{36083}{5} = 7216,6 \text{ тыс. чел.}$$

- 3) Абсолютные приросты равны:

- базисные $\Delta_i^{\dot{a}} = y_i - y_0$,

- цепные $\Delta_i = y_i - y_{i-1}$,

где y_i – уровень i -го года, y_0 – уровень базисного 1-го года.

Темпы роста равны:

- базисные $T_{pi}^{\dot{a}} = \frac{y_i}{y_0} \cdot 100\%$,

- цепные $T_{pi} = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100\%$.

Темпы прироста равны:

- базисные $T_{npi}^{\dot{a}} = T_{pi}^{\dot{a}} - 100\%$,

- цепные $T_{npi} = T_{pi} - 100\%$.

Данные расчета приведены в следующей таблице.

| Годы | Число безработных, тыс. чел. | Абсолютные приросты | | Темпы роста, % | | Темпы прироста, % | | Абс. значение 1% прироста |
|------|------------------------------|---------------------|--------|----------------|--------|-------------------|--------|---------------------------|
| | | базисные | цепные | базисные | цепные | базисные | цепные | |
| 1 | 5704,4 | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | 6711,9 | 1007,5 | 1007,5 | 117,7% | 117,7% | 17,7% | 17,7% | 57,044 |

| | | | | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|
| 3 | 6732,4 | 1028 | 20,5 | 118,0% | 100,3% | 18,0% | 0,3% | 67,119 |
| 4 | 8058,1 | 2353,7 | 1325,7 | 141,3% | 119,7% | 41,3% | 19,7% | 67,324 |
| 5 | 8876,2 | 3171,8 | 818,1 | 155,6% | 110,2% | 55,6% | 10,2% | 80,581 |

4) Средний абсолютный прирост равен

$$\bar{\Delta} = \frac{y_5 - y_1}{4} = \frac{8876,2 - 5704,4}{4} = 792,95 \text{ тыс. чел.}$$

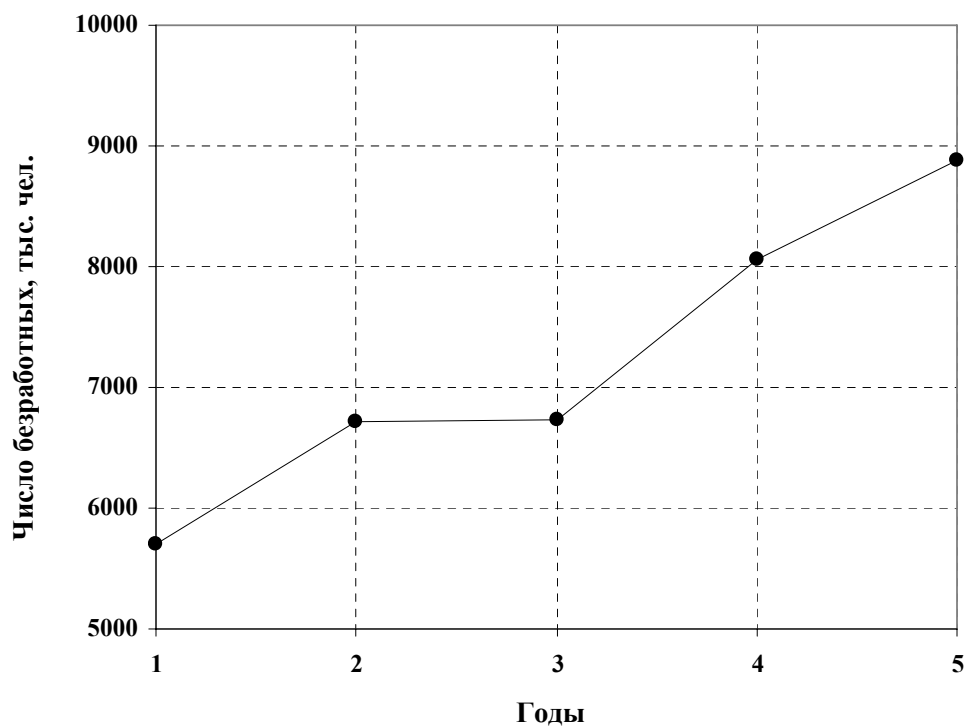
Средний темп роста ряда динамики определяется как среднее геометрическое:

$$\bar{T}_p = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} = \sqrt[4]{\frac{y_5}{y_1}} = \sqrt[4]{\frac{8876,2}{5704,4}} = 1,072, \text{ или } 107,2\%.$$

Средний темп прироста ряда динамики равен

$$\bar{T}_{np} = \bar{T}_p - 100 = 107,2 - 100 = 7,2\%.$$

Динамический ряд приведен на рисунке. На графике отчетливо видна тенденция роста уровня безработицы.



Задача 6.10.

Продажа картофеля на рынке города за три года составила (т):

| Месяц | Первый год | Второй год | Третий год |
|---------|------------|------------|------------|
| Январь | 53 | 48 | 49 |
| Февраль | 50 | 49 | 48 |
| Март | 58 | 57 | 56 |

| | | | |
|----------|-----|-----|-----|
| Апрель | 63 | 64 | 66 |
| Май | 98 | 102 | 116 |
| Июнь | 46 | 56 | 58 |
| Июль | 35 | 32 | 38 |
| Август | 71 | 87 | 91 |
| Сентябрь | 485 | 521 | 564 |
| Октябрь | 210 | 382 | 398 |
| Ноябрь | 163 | 165 | 170 |
| Декабрь | 86 | 76 | 87 |

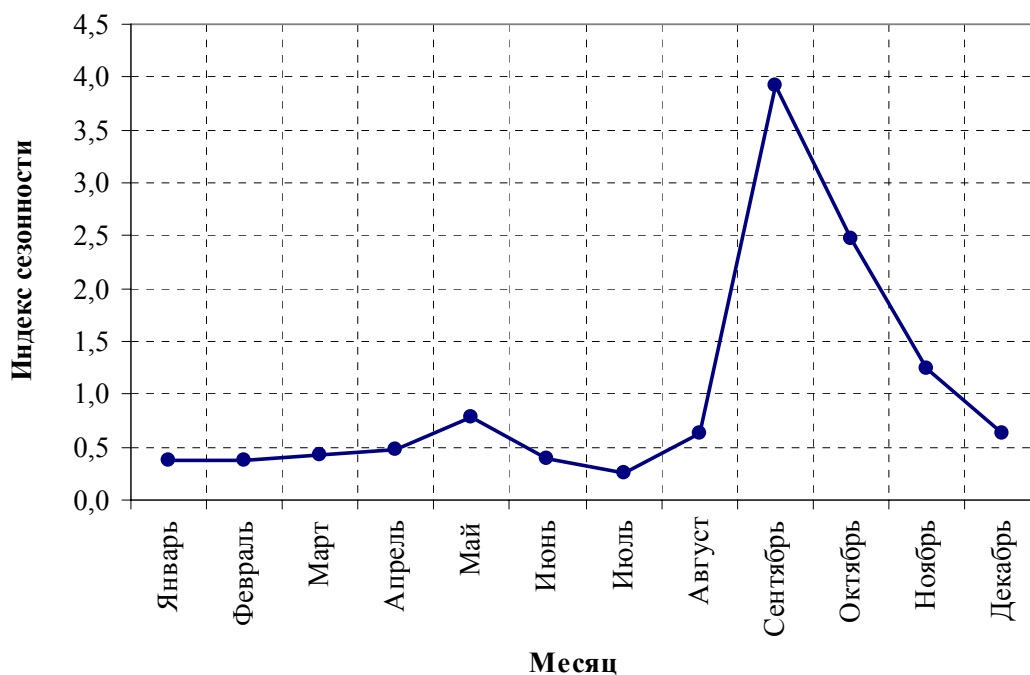
Измерьте сезонные колебания продажи картофеля по месяцам методом простой средней. Изобразите сезонную волну графически. Сделайте выводы.

Решение.

Индекс сезонности определяется как отношение среднемесячного значения показателя к общему среднему значению. Результаты расчетов для продаж картофеля на рынке города за три года приведены в таблице и на рисунке.

| Месяц | 1-й год | 2-й год | 3-й год | Среднее за месяц | Индекс сезонности |
|----------------|---------|---------|---------|------------------|-------------------|
| Январь | 53 | 48 | 49 | 50,00 | 0,38 |
| Февраль | 50 | 49 | 48 | 49,00 | 0,37 |
| Март | 58 | 57 | 56 | 57,00 | 0,43 |
| Апрель | 63 | 64 | 66 | 64,33 | 0,48 |
| Май | 98 | 102 | 116 | 105,33 | 0,79 |
| Июнь | 46 | 56 | 58 | 53,33 | 0,40 |
| Июль | 35 | 32 | 38 | 35,00 | 0,26 |
| Август | 71 | 87 | 91 | 83,00 | 0,62 |
| Сентябрь | 485 | 521 | 564 | 523,33 | 3,93 |
| Октябрь | 210 | 382 | 398 | 330,00 | 2,48 |
| Ноябрь | 163 | 165 | 170 | 166,00 | 1,25 |
| Декабрь | 86 | 76 | 87 | 83,00 | 0,62 |
| Всего за год | 1418 | 1639 | 1741 | | |
| Среднее за год | 118,17 | 136,58 | 145,08 | | |
| Общее среднее | 133,28 | | | | |

Выводы. Продажа картофеля на рынке города за три года носит ярко выраженный сезонный характер. Максимальное производство наблюдается осенью – максимум в сентябре равен 3,93, что вызвано продажей нового урожая. Незначительный всплеск наблюдается в мае из-за продажи картофеля на семена Минимальные продажи – с января по апрель и с июня по июль.



Задача 6.11.

Годы: 1956 – 1985. Категории населения: для модели 1 – «Все население»; для модели 2 – «Сельское население». Данные – в тыс. чел.

Необходимо:

1. Вычислить для категории «Все население» абсолютные цепные приросты численности населения.
2. Вычислить среднегодовую численность населения области.
3. Для каждой указанной в варианте категории населения провести аналитическое выравнивание временного ряда: а) построить линейную модель временного ряда; б) провести ее оценку по критерию Фишера; в) рассчитать коэффициент детерминации; г) построить график динамики исходных и предсказанных значений показателя.
4. Ответить на вопрос, для какого показателя – «все население» или «сельское» – линейная модель подходит в большей степени. Ответ обосновать.

Таблица 1. Численность населения Томской области по годам.

| Год (на 1 января) | Все население | Сельское население | Год (на 1 января) | Все население | Сельское население |
|-------------------|---------------|--------------------|-------------------|---------------|--------------------|
| 1956 | 753,5 | 431,7 | 1971 | 793,9 | 318,3 |
| 1957 | 759,2 | 428,2 | 1972 | 802,8 | 315,9 |
| 1958 | 756,1 | 407,2 | 1973 | 811,5 | 310,6 |
| 1959 | 746,8 | 386,9 | 1974 | 815 | 303,6 |
| 1960 | 743,9 | 382,8 | 1975 | 821,3 | 296,1 |
| 1961 | 739,8 | 365,3 | 1976 | 831,6 | 293,6 |

| | | | | | |
|------|-------|-------|------|-------|-------|
| 1962 | 752,7 | 366,8 | 1977 | 844,7 | 296,5 |
| 1963 | 756,1 | 365,2 | 1978 | 853,1 | 297,4 |
| 1964 | 760,7 | 359,9 | 1979 | 865,9 | 299 |
| 1965 | 767 | 348,5 | 1980 | 876,8 | 296,5 |
| 1966 | 768,1 | 343,8 | 1981 | 887,2 | 294,4 |
| 1967 | 770,3 | 336,8 | 1982 | 903,6 | 296,7 |
| 1968 | 776,9 | 331,8 | 1983 | 920,8 | 294,9 |
| 1969 | 781,1 | 326,8 | 1984 | 938,7 | 301,7 |
| 1970 | 785,7 | 319,9 | 1985 | 956,7 | 308 |

Решение.

Абсолютные цепные приросты ряда динамики определяем по формуле

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k,$$

где k – год, y_k – значение показателя на начало k -го года.

Результаты расчета приведены в табл. 2.

Таблица 2. Абсолютные цепные приросты населения Томской области по годам.

| Год | Все население | Абсолютные цепные приросты | Год | Все население | Абсолютные цепные приросты |
|------|---------------|----------------------------|------|---------------|----------------------------|
| 1956 | 753,5 | 5,7 | 1971 | 793,9 | 8,9 |
| 1957 | 759,2 | -3,1 | 1972 | 802,8 | 8,7 |
| 1958 | 756,1 | -9,3 | 1973 | 811,5 | 3,5 |
| 1959 | 746,8 | -2,9 | 1974 | 815 | 6,3 |
| 1960 | 743,9 | -4,1 | 1975 | 821,3 | 10,3 |
| 1961 | 739,8 | 12,9 | 1976 | 831,6 | 13,1 |
| 1962 | 752,7 | 3,4 | 1977 | 844,7 | 8,4 |
| 1963 | 756,1 | 4,6 | 1978 | 853,1 | 12,8 |
| 1964 | 760,7 | 6,3 | 1979 | 865,9 | 10,9 |
| 1965 | 767 | 1,1 | 1980 | 876,8 | 10,4 |
| 1966 | 768,1 | 2,2 | 1981 | 887,2 | 16,4 |
| 1967 | 770,3 | 6,6 | 1982 | 903,6 | 17,2 |
| 1968 | 776,9 | 4,2 | 1983 | 920,8 | 17,9 |
| 1969 | 781,1 | 4,6 | 1984 | 938,7 | 18 |
| 1970 | 785,7 | 8,2 | 1985 | 956,7 | |

Среднегодовую численность населения найдем по формуле средней хронологической

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_{1956} + y_{1957} + \dots + y_{1984} + \frac{1}{2}y_{1985}}{29} = \frac{\frac{753,5}{2} + 759,2 + \dots + 938,7 + \frac{956,7}{2}}{29} = \frac{23486,4}{29} = 809,88.$$

Построим линейную модель временного ряда в виде парной линейной регрессии.

Рассмотрим вначале все население. Уравнение парной линейной регрессии – зависимость условной средней численности населения от года имеет вид

$$\bar{y}(t) = \hat{y} = b_0 + b_1 t,$$

где t – год.

Коэффициенты уравнения регрессии вычисляются по формулам:

$$b_1 = \frac{\bar{t}y - \bar{t} \cdot \bar{y}}{\bar{t}^2 - (\bar{t})^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t}.$$

Подставив в эти формулы исходные данные $(t_i, y_i), i = \overline{1, 30}$, получим:

$$\bar{t} = \frac{1956 + 1957 + \dots + 1985}{30} = 1970,5;$$

$$\bar{t}^2 = \frac{1956^2 + 1957^2 + \dots + 1985^2}{30} = 3882945,17;$$

$$\bar{y} = \frac{753,5 + 759,2 + \dots + 956,7}{30} = 811,38;$$

$$\bar{t}y = \frac{1956 \cdot 753,5 + 1957 \cdot 759,2 + \dots + 1985 \cdot 956,7}{30} = 1599335,78.$$

Отсюда $b_1 = 6,740$, $b_0 = -12469,44$.

Таким образом, линейная модель временного ряда численности всего населения имеет вид: $\hat{y} = -12469,44 + 6,740t$.

Коэффициент корреляции между двумя переменными T и Y вычисляется по формуле:

$$r_{yt} = \frac{n \sum t_i y_i - (\sum t_i) \cdot (\sum y_i)}{\sqrt{[n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2] \cdot [n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}.$$

Подставив исходные данные в эту формулу, получим: $r_{yt} = 0,943$.

Для парной линейной регрессии он равен квадрату коэффициента корреляции

$$R_{yt}^2 = r_{yt}^2 = 0,943^2 = 0,889.$$

Определим расчетное значение F -статистики через коэффициент детерминации, используя соотношение

$$F = (n - 2) \cdot \frac{R^2}{1 - R^2}.$$

Отсюда расчетное значение F -статистики равно

$$F_{расч} = 28 \cdot \frac{0,889}{1 - 0,889} = 223,27.$$

Уравнение регрессии статистически значимо с надежностью более 99%.

Построим график динамики исходных и предсказанных значений показателя – всего населения. Он приведен на рис. 1.

График динамики всего населения

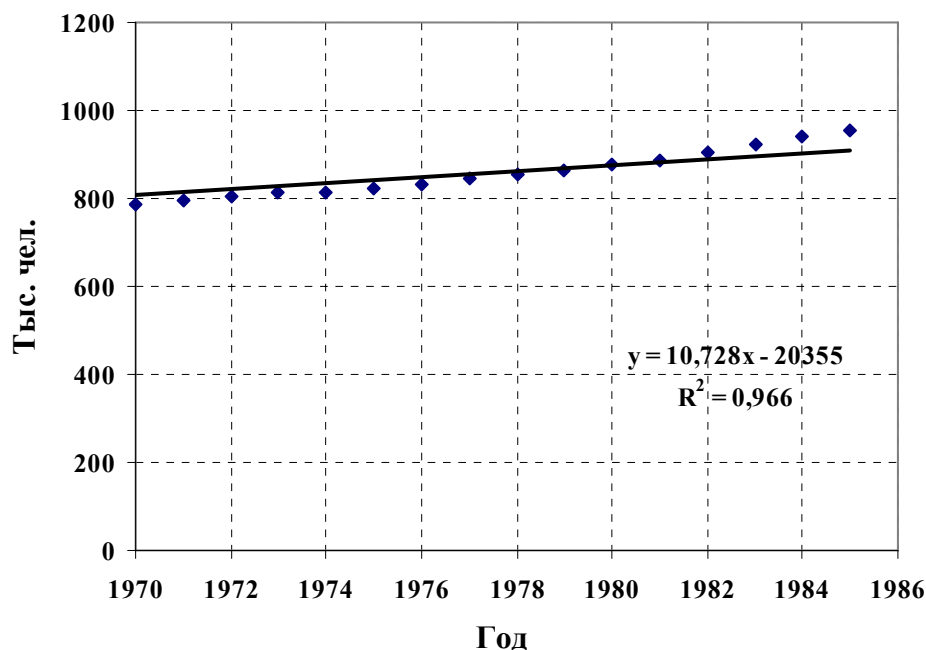


Рис. 1. График динамики всего населения: точки – исходные значения показателя; линия – предсказанные значения показателя.

Рассмотрим теперь сельское население. Уравнение парной линейной регрессии – зависимость условной средней численности сельского населения от года имеет вид

$$\bar{x}(t) = \hat{x} = a_0 + a_1 t,$$

где t – год.

Коэффициенты уравнения регрессии вычисляются по формулам:

$$a_1 = \frac{\overline{tx} - \bar{t} \cdot \bar{x}}{\overline{t^2} - (\bar{t})^2}, \quad a_0 = \bar{x} - a_1 \bar{t}.$$

Подставив в эти формулы исходные данные $(t_i, x_i), i = \overline{1, 30}$, получим:

$$\bar{t} = \frac{1956 + 1957 + \dots + 1985}{30} = 1970,5;$$

$$\overline{t^2} = \frac{1956^2 + 1957^2 + \dots + 1985^2}{30} = 3882945,17;$$

$$\bar{x} = \frac{431,7 + 428,2 + \dots + 308}{30} = 334,16;$$

$$\overline{tx} = \frac{1956 \cdot 431,7 + 1957 \cdot 428,2 + \dots + 1985 \cdot 308}{30} = 658138,14.$$

Отсюда $a_1 = -4,327$, $a_0 = 8859,784$.

Таким образом, линейная модель временного ряда численности сельского населения имеет вид: $\hat{x} = 8859,784 - 4,327t$.

Коэффициент корреляции между двумя переменными T и X вычисляется по формуле:

$$r_{xt} = \frac{n \sum t_i x_i - (\sum t_i) \cdot (\sum x_i)}{\sqrt{[n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2] \cdot [n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2]}}$$

Подставив исходные данные в эту формулу, получим: $r_{xt} = -0,918$.

Для парной линейной регрессии он равен квадрату коэффициента корреляции

$$R_{yt}^2 = r_{yt}^2 = 0,918^2 = 0,843.$$

Определим расчетное значение F -статистики через коэффициент детерминации, используя соотношение $F = (n - 2) \cdot \frac{R^2}{1 - R^2}$.

Отсюда расчетное значение F -статистики равно $F_{расч} = 28 \cdot \frac{0,843}{1 - 0,843} = 150,03$.

Уравнение регрессии статистически значимо с надежностью более 99%.

Построим график динамики исходных и предсказанных значений показателя – сельского населения. Он приведен на рис. 2.

График динамики сельского населения

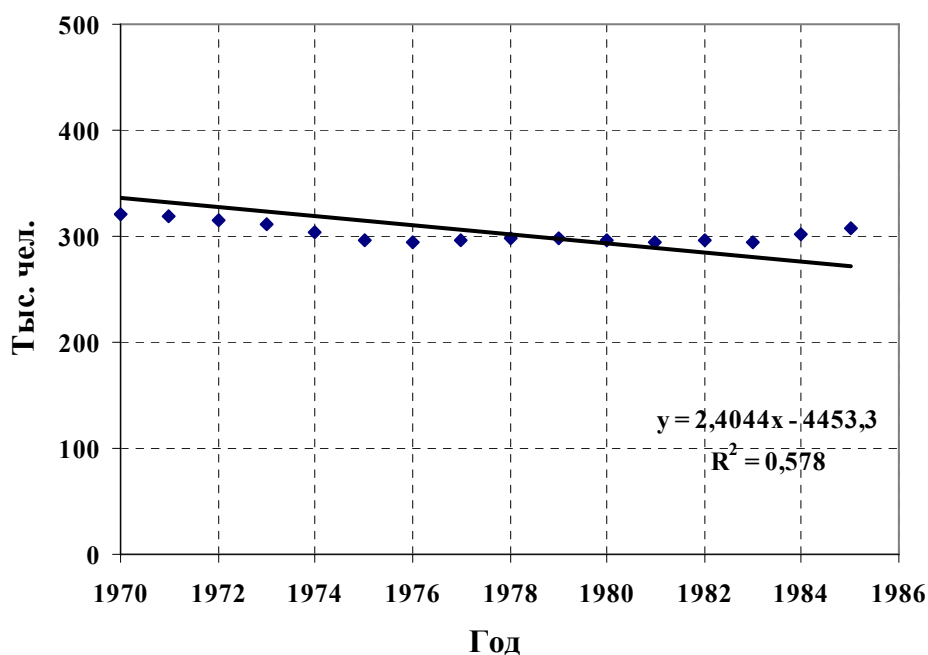


Рис. 2. График динамики сельского населения: точки – исходные значения показателя; линия – предсказанные значения показателя.

Ответим на вопрос, для какого показателя – «все население» или «сельское» – линейная модель подходит в большей степени.

Формально обе модели статистически значимы. Однако, если исходить из содержательного анализа, то видим, что рост всего населения вызван ростом городского населения, а не сельского, которое, наоборот, снизилось. Т.к. городское население входит в общее население, то можно говорить о том, что линейная модель подходит в большей степени для описания тенденции изменения всего населения.

Задача 6.12.

Объем услуг населению по району характеризуется следующими данными:

| Месяц | Объем услуг, тыс. р. |
|---------|----------------------|
| Январь | 210 |
| Февраль | 218 |
| Март | 220 |
| Апрель | 224 |
| Май | 225 |

Определить:

1. Цепные и базисные: а) абсолютные приросты; б) темпы роста и прироста.
2. Абсолютное содержание одного процента прироста.
3. Среднемесячный объем услуг за период.
4. Средние темпы роста и прироста.
5. Среднемесячный абсолютный прирост.
6. Предполагая, что выявленная закономерность сохранится и в дальнейшем, спрогнозировать объем услуг за первое полугодие, используя в качестве закономерности: а) средний абсолютный прирост; б) средний темп роста; в) трендовую модель по уравнению прямой.

Решение.

Абсолютные приросты равны:

- базисные $\Delta_i^0 = y_i - y_0$,

- цепные $\Delta_i = y_i - y_{i-1}$,

где y_i – уровень i -го месяца, y_0 – уровень января.

Темпы роста равны:

- базисные $T_{pi}^0 = \frac{y_i}{y_0} \cdot 100\%$,

- цепные $T_{pi} = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100\%$.

Темпы прироста равны:

- базисные $T_{npi}^0 = T_{pi}^0 - 100\%$,

- цепные $T_{npi} = T_{pi} - 100\%$.

Данные расчета приведены в следующей таблице.

| Месяц | Объем услуг, тыс. р. | Абсолютные приросты | | Темпы роста, % | | Темпы прироста, % | | Абсолютное значение 1% прироста |
|---------|----------------------|---------------------|--------|----------------|--------|-------------------|--------|---------------------------------|
| | | базисные | цепные | базисные | цепные | базисные | цепные | |
| Январь | 210 | - | - | - | - | - | - | |
| Февраль | 218 | 8 | 8 | 103,81 | 103,81 | 3,81 | 3,81 | 2,10 |
| Март | 220 | 10 | 2 | 104,76 | 100,92 | 4,76 | 0,92 | 2,18 |
| Апрель | 224 | 14 | 4 | 106,67 | 101,82 | 6,67 | 1,82 | 2,20 |
| Май | 225 | 15 | 1 | 107,14 | 100,45 | 7,14 | 0,45 | 2,24 |

Среднемесячный объем услуг за период определяется по формуле среднего арифметического:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^5 y_i}{5} = \frac{210 + 218 + 220 + 224 + 225}{5} = \frac{1097}{5} = 219,4 \text{ тыс. р.}$$

Среднемесячный абсолютный прирост равен

$$\bar{\Delta} = \frac{y_5 - y_1}{4} = \frac{225 - 210}{4} = 3,75 \text{ тыс. р.}$$

Среднегодовой темп роста ряда динамики определяется как среднее геометрическое:

$$\bar{T}_p = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} = \sqrt[4]{\frac{225}{210}} = 1,017, \text{ или } 101,7\%.$$

Среднегодовой темп прироста ряда динамики равен

$$\bar{T}_{np} = \bar{T}_p - 1 = 1,017 - 1 = 0,017, \text{ или } 1,7\%.$$

Прогноз за первое полугодие, используя в качестве закономерности средний абсолютный прирост:

$$S_1 = \sum_{i=1}^5 y_i + \hat{y}_6 = 1097 + \hat{y}_6 = 1097 + (y_5 + \bar{\Delta}) = 1097 + (225 + 3,75) = 1325,75 \text{ тыс. р.}$$

Прогноз за первое полугодие, используя в качестве закономерности средний темп роста:

$$S_2 = \sum_{i=1}^5 y_i + \hat{y}_6 = 1097 + \hat{y}_6 = 1097 + y_5 \cdot \bar{T}_p = 1097 + 225 \cdot 1,017 = 1325,91 \text{ тыс. р.}$$

Трендовую модель по уравнению прямой представляет собой линейную регрессию вида: $\hat{y} = b_0 + b_1 t$.

Значения коэффициентов регрессии b_0 и b_1 линейной модели определим по формулам:

$$b_1 = \frac{\overline{ty} - \bar{t} \cdot \bar{y}}{\overline{t^2} - (\bar{t})^2} = 3,6, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{t} = 208,6.$$

Прогнозное значение объема услуг за июнь по линейной трендовой модели составит

$$\hat{y}_6 = b_0 + b_1 t_6 = 208,6 + 3,6 \cdot 6 = 230,2 \text{ тыс. р.}$$

Тогда прогноз за первое полугодие, используя в качестве закономерности трендовую модель по уравнению прямой составит:

$$S_3 = \sum_{i=1}^5 y_i + \hat{y}_6 = 1097 + 230,2 = 1097 + (y_5 + \bar{\Delta}) = 1097 + (225 + 3,75) = 1327,2 \text{ тыс. р.}$$

Задача 6.13.

Изменение розничного товарооборота государственной торговли в сопоставимых ценах в городе характеризуется следующими данными:

| Годы | Объем товарооборота в сопоставимых ценах, млн. руб. |
|------|---|
| 1983 | 458 |
| 1984 | 463 |
| 1985 | 467 |
| 1986 | 503 |
| 1987 | 554 |
| 1988 | 568 |
| 1989 | 520 |
| 1990 | 569 |
| 1991 | 536 |
| 1992 | 645 |
| 1993 | 610 |
| 1994 | 603 |
| 1995 | 605 |
| 1996 | 609 |
| 1997 | 618 |

Проанализируйте динамику изменения объема розничного товарооборота в городе. С этой целью:

- 1) Определите вид динамического ряда.
- 2) Определите аналитические показатели динамики: абсолютный прирост, темп роста и прироста (цепные и базисные), абсолютное содержание 1%-го прироста. Результаты расчетов оформите в таблице. Покажите взаимосвязь цепных и базисных показателей.
- 3) Определите динамические средние за период: средний уровень ряда, среднегодовой темп роста и прироста.
- 4) Для определения общей тенденции изменения объема розничного товарооборота в городе произведите аналитическое выравнивание и выразите общую тенденцию соответствующим математическим уравнением.
- 5) Определите выровненные (теоретические) уровни ряда динамики и нанесите их на график с фактическими данными.
- 6) Предполагая, что выявленная тенденция сохранится в будущем, определите ожидаемый объем розничного товарооборота в городе на последующие 5 лет. Сделайте выводы.

Решение.

Имеем интервальный динамический ряд, в котором каждый интервал равен одному году.

Формулы для расчета показателей ряда динамики следующие.

Абсолютный прирост по годам (цепной) и к базисному году, соответственно, равен:

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta_i^{\sigma} = x_i - x_0.$$

Темп роста по годам и к базисному году, соответственно, равен:

$$T_i^P = \frac{x_i}{x_{i-1}}, \quad T_0^P = \frac{x_i}{x_0}.$$

Темп прироста по годам и к базисному году, соответственно, равен:

$$T_i^{PP} = \frac{\Delta_i}{x_{i-1}}, \quad T_0^{PP} = \frac{\Delta_i}{x_0}.$$

Между цепными и базисными показателями динамики существует определенная связь:

- сумма абсолютных приростов с переменной базой дает общий прирост за исследуемый период

$$\sum \Delta_i = \Delta_n^{\sigma};$$

- произведение всех темпов роста по годам равно темпу роста последнего результата к

базисному году

$$T_1^P \cdot T_2^P \cdot \dots \cdot T_n^P = T_0^P$$

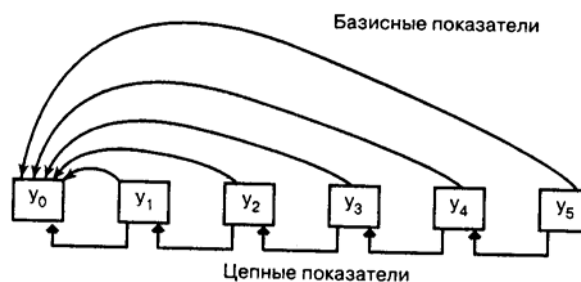


Рис. Принципы построения цепных и базисных показателей динамики.

Результаты расчета приведены в таблице.

| Годы | Объем товарооборота в сопоставимых ценах, млн. руб. | Абсолютный прирост, млн. руб. | | Темпы роста, % | | Темпы прироста, % | | Абс. значение 1% прироста |
|------|---|-------------------------------|------------------|----------------|------------------|-------------------|------------------|---------------------------|
| | | цепной | к базисному году | цепной | к базисному году | цепной | к базисному году | |
| 1983 | 458 | - | - | - | - | - | - | - |
| 1984 | 463 | 5 | 5 | 101,1% | 101,1% | 1,1% | 1,1% | 4,58 |
| 1985 | 467 | 4 | 9 | 100,9% | 102,0% | 0,9% | 2,0% | 4,63 |
| 1986 | 503 | 36 | 45 | 107,7% | 109,8% | 7,7% | 9,8% | 4,67 |
| 1987 | 554 | 51 | 96 | 110,1% | 121,0% | 10,1% | 21,0% | 5,03 |
| 1988 | 568 | 14 | 110 | 102,5% | 124,0% | 2,5% | 24,0% | 5,54 |
| 1989 | 520 | -48 | 62 | 91,5% | 113,5% | -8,5% | 13,5% | 5,68 |
| 1990 | 569 | 49 | 111 | 109,4% | 124,2% | 9,4% | 24,2% | 5,2 |
| 1991 | 536 | -33 | 78 | 94,2% | 117,0% | -5,8% | 17,0% | 5,69 |
| 1992 | 645 | 109 | 187 | 120,3% | 140,8% | 20,3% | 40,8% | 5,36 |
| 1993 | 610 | -35 | 152 | 94,6% | 133,2% | -5,4% | 33,2% | 6,45 |
| 1994 | 603 | -7 | 145 | 98,9% | 131,7% | -1,1% | 31,7% | 6,1 |
| 1995 | 605 | 2 | 147 | 100,3% | 132,1% | 0,3% | 32,1% | 6,03 |
| 1996 | 609 | 4 | 151 | 100,7% | 133,0% | 0,7% | 33,0% | 6,05 |
| 1997 | 618 | 9 | 160 | 101,5% | 134,9% | 1,5% | 34,9% | 6,09 |

Средний уровень ряда равен

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{458 + 463 + \dots + 609 + 618}{15} = 555,2 \text{ млн. руб.}$$

Среднемесячный темп роста розничного товарооборота определяется по формуле среднего геометрического:

$$\bar{T}_P = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}} = \sqrt[14]{\frac{618}{458}} = 1,022, \text{ или } 102,2\%.$$

Среднемесячный темп роста розничного товарооборота равен

$$\bar{T}_{ПР} = \bar{T}_P - 1 = 1,022 - 1 = 0,022, \text{ или } 2,2\%.$$

График изменения розничного товарооборота показан на рисунке.

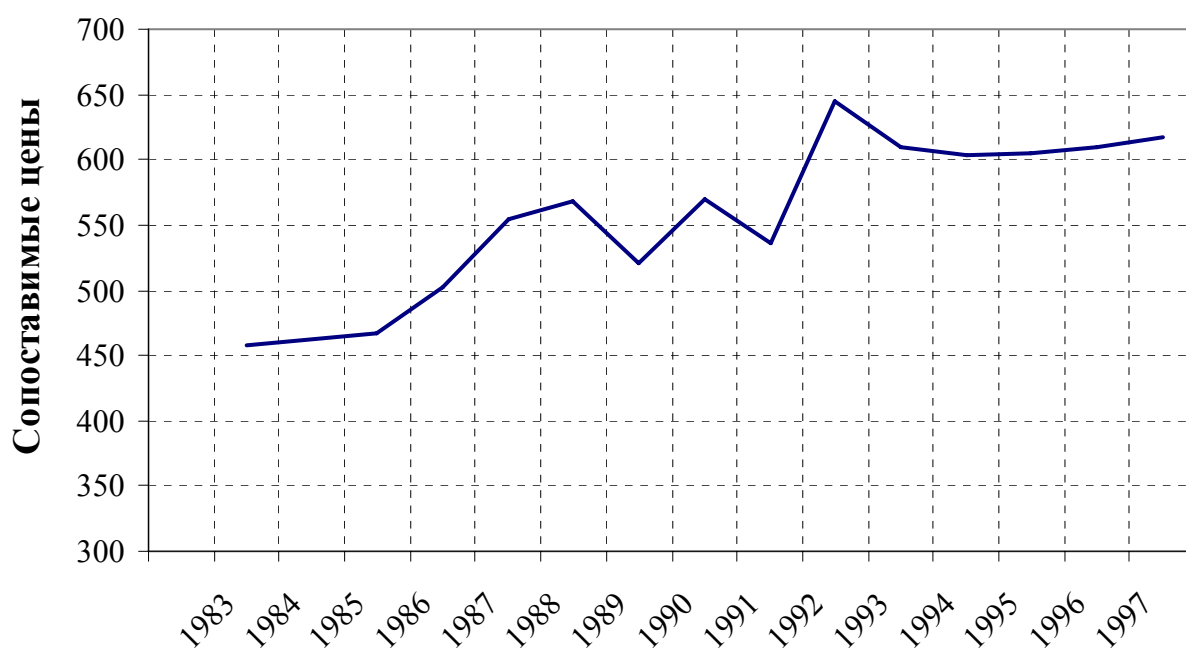


Рис. График изменения розничного товарооборота.

Из рисунка можно увидеть тенденцию роста розничного товарооборота.

Считая тенденцию линейной, получим ее уравнение в виде парной линейной регрессии от времени

$$\hat{x} = b_0 + b_1 t,$$

где коэффициенты регрессии определяются по формулам

$$b_1 = \frac{\overline{tx} - \bar{t} \cdot \bar{x}}{t^2 - (\bar{t})^2} = 12,229, \quad b_0 = \bar{x} - b_1 \bar{t} = -23779,7.$$

Отсюда эмпирическое линейное уравнение регрессии имеет вид

$$\hat{x} = -23779,7 + 12,229t.$$

График найденной линейной тенденции показан на рисунке.

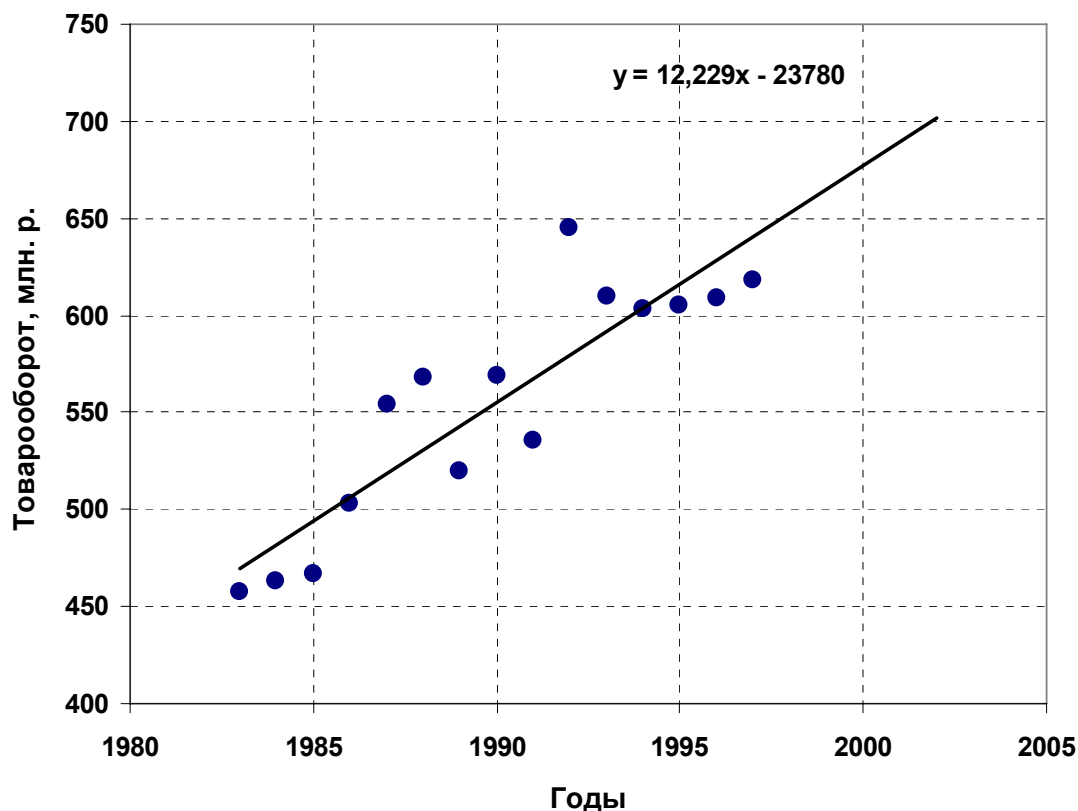


Рис. Тенденция изменения розничного товарооборота.

Предполагая, что выявленная тенденция сохранится в будущем, определим ожидаемый объем розничного товарооборота в городе на последующие 5 лет. Для этого подставим в полученное уравнение тенденции изменения розничного товарооборота вместо времени t значения 1998, 1999, 2000, 2001, 2002. Получим:

$$\hat{x}(1998) = -23779,7 + 12,229 \cdot 1998 = 653,03 \text{ млн. р.},$$

$$\hat{x}(1999) = -23779,7 + 12,229 \cdot 1999 = 665,26 \text{ млн. р.}$$

$$\hat{x}(2000) = -23779,7 + 12,229 \cdot 2000 = 677,49 \text{ млн. р.},$$

$$\hat{x}(2001) = -23779,7 + 12,229 \cdot 2001 = 689,71 \text{ млн. р.},$$

$$\hat{x}(2002) = -23779,7 + 12,229 \cdot 2002 = 701,94 \text{ млн. р.}$$

Вывод. Если тенденция ряда динамики сохранится на ближайшие пять лет, то ожидаемое среднее значение объема розничного товарооборота в городе через пять лет в 2002 году составит 701,9 млн. р.

Задача 6.14.

Изменение розничного товарооборота государственной торговли в сопоставимых ценах в городе характеризуется следующими данными:

| Год | Объем товарооборота в сопоставимых ценах, млн. руб. |
|------|---|
| 1995 | 520 |
| 1996 | 569 |
| 1997 | 536 |
| 1998 | 645 |
| 1999 | 610 |
| 2000 | 603 |
| 2001 | 605 |
| 2002 | 609 |
| 2003 | 618 |

1. Для определения общей тенденции изменения объема розничного товарооборота в городе произведите аналитическое выравнивание и выразите общую тенденцию соответствующим математическим уравнением. Проверьте его на адекватность.

2. Определите выровненные (теоретические) уровни ряда динамики и нанесите их на график с фактическими данными.

3. Предполагая, что выявленная тенденция сохранится в будущем, определите ожидаемый объем розничного товарооборота в городе на следующие пять лет.

Решение.

1. Построим диаграмму рассеяния. Из нее видно, что можно предположить наличие линейной тенденции изменения объема розничного товарооборота в городе.

Линейная регрессия имеет вид:

$$y = b_0 + b_1x + e,$$

где x – годы, y – объем розничного товарооборота, e – случайные остатки.

Коэффициенты уравнения регрессии вычисляются по формулам:

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}.$$

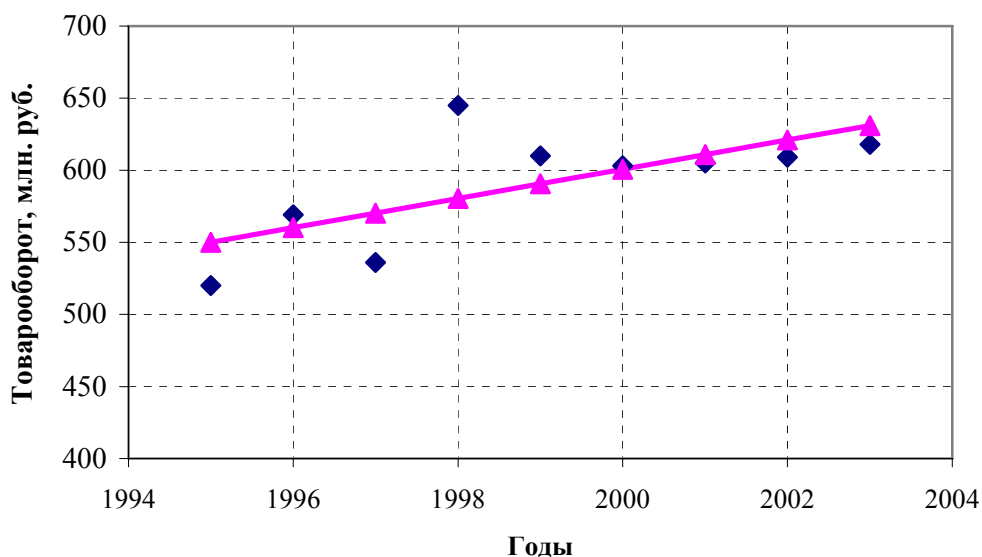


Рисунок. Диаграмма рассеяния и линия регрессии.

Составим вспомогательную таблицу

| №№ | x | y | x^2 | xy | \hat{y} | e | e^2 | $(y - \bar{y})^2$ |
|---------|-------|---------|------------|-------------|-----------|-----------|----------|-------------------|
| 1 | 1995 | 520 | 3980025 | 1037400 | 550,0222 | -30,02222 | 901,3338 | 4978,0864 |
| 2 | 1996 | 569 | 3984016 | 1135724 | 560,1556 | 8,844444 | 78,2242 | 464,64198 |
| 3 | 1997 | 536 | 3988009 | 1070392 | 570,2889 | -34,28889 | 1175,728 | 2976,3086 |
| 4 | 1998 | 645 | 3992004 | 1288710 | 580,4222 | 64,57778 | 4170,289 | 2964,1975 |
| 5 | 1999 | 610 | 3996001 | 1219390 | 590,5556 | 19,44444 | 378,0864 | 378,08642 |
| 6 | 2000 | 603 | 4000000 | 1206000 | 600,6889 | 2,311111 | 5,341235 | 154,8642 |
| 7 | 2001 | 605 | 4004001 | 1210605 | 610,8222 | -5,822222 | 33,89827 | 208,64198 |
| 8 | 2002 | 609 | 4008004 | 1219218 | 620,9556 | -11,95556 | 142,9353 | 340,19753 |
| 9 | 2003 | 618 | 4012009 | 1237854 | 631,0889 | -13,08889 | 171,319 | 753,19753 |
| Всего | 17991 | 5315 | 35964069 | 10625293 | 5315 | - | 7057,156 | 13218,222 |
| Среднее | 1999 | 590,556 | 3996007,67 | 1180588,111 | 590,5556 | - | 784,1284 | 1468,6914 |

Отсюда

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{1180588,111 - 1999 \cdot 590,556}{3996007,67 - 1999^2} = 10,133,$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 590,556 - 10,133 \cdot 1999 = -19666.$$

Отсюда эмпирическое линейное уравнение регрессии имеет вид

$$\hat{y} = -19666 + 10,133x.$$

Проверим его на адекватность. Коэффициент детерминации равен

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{7057,156}{1468,691} = 0,466.$$

Определим расчетное значение F -статистики:

$$F = (n - 2) \cdot \frac{R^2}{1 - R^2} = (9 - 2) \cdot \frac{0,466}{1 - 0,466} = 6,111.$$

Критическое значение F -статистики на уровне значимости $\alpha = 0,05$ равно:

$$F_{\alpha; 1; n-2} = F_{0,05; 1; 7} = 5,591.$$

Расчетное значение F -статистики оказалось больше критического уровня, поэтому модель с надежностью 95% считаем адекватной.

2. Определим выравненные (теоретические) уровни ряда динамики и нанесем их на график с фактическими данными. Уровни приведены в таблице, график – на рисунке.

3. Ожидаемый объем розничного товарооборота в городе на следующие пять лет:

$$\hat{y}(2008) = -19666 + 10,133 \cdot 2008 = 681,756 \text{ млн. руб.}$$

Задача 6.15.

Сравнить скорость роста производства меди на двух участках, если известно, что на 1-м производство росло следующими темпами (цепными): 1999 г. – 104 %; 2000 г. – 97 %; 2001 г. – 102 %; 2002 г. – 101 %; 2003 г. – 89%. На 2-м участке в 1998 г. производство составило 150 т., в 2003 г. – 170 т.

Решение.

Темп роста производства меди на 1-м участке с 1999 по 2003 гг. составил

$$T_1 = 1,04 \cdot 0,97 \cdot 1,02 \cdot 1,01 \cdot 0,89 = 0,9249, \text{ или } 92,49 \%$$

Темп роста производства меди на 2-м участке с 1999 по 2003 гг. составил

$$T_2 = \frac{170}{150} = 1,1333, \text{ или } 113,33 \%$$

Очевидно, что скорость роста производства меди на 2-м участке выше. На 1-м участке вообще производство сокращается.

Задача 6.16.

Потребление овощей и бахчевых в год на душу населения РФ в кг составило:

| Продукт | Годы | | | | | | | | | | |
|------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 |
| Овощи и бахчевые | 93 | 89 | 86 | 77 | 76 | 65 | 83 | | 79 | 78 | 83 |

Определите:

1. Восстановите недостающий уровень ряда.
2. Аналитические показатели ряда динамики (1995 – 2001 гг.).
3. Средние характеристики ряда динамики.
4. Выявите основную тенденцию (аналитическое выравнивание, по среднегодовому абсолютному приросту, темпу роста за 1989 – 2001 гг.). Постройте график.

Решение.

Восстановим недостающий уровень ряда. Прирост с 1989 г. по 1999 г. составил $83 - 93 = -10$. Следовательно, потребление овощей и бахчевых в 1996 году на душу населения Российской Федерации примерно составило $93 - 7 \cdot 1 = 86$ кг.

Абсолютные приросты равны:

$$\text{базисные } \Delta_i^a = y_i - y_0, \text{ цепные } \Delta_i = y_i - y_{i-1},$$

где y_i – уровень i -го года, y_0 – уровень базисного 1995 года.

Темпы роста равны:

$$\text{базисные } T_{pi}^a = \frac{y_i}{y_0} \cdot 100\%, \text{ цепные } T_{pi} = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100\%.$$

Темпы прироста равны:

$$\text{базисные } T_{npi}^a = T_{pi}^a - 100\%, \text{ цепные } T_{npi} = T_{pi} - 100\%.$$

Данные расчета приведены в следующей таблице.

| Годы | Потребление овощей и бахчевых в год, кг. | Абсолютные приросты | | Темпы роста, % | | Темпы прироста, % | | Абс. значение 1% прироста |
|------|--|---------------------|--------|----------------|--------|-------------------|--------|---------------------------|
| | | базисные | цепные | базисные | цепные | базисные | цепные | |
| 1995 | 83 | - | - | - | - | - | - | - |
| 1996 | 86 | 3 | 3 | 103,6% | 103,6% | 3,6% | 3,6% | 0,83 |
| 1997 | 79 | -4 | -7 | 95,2% | 91,9% | -4,8% | -8,1% | 0,86 |
| 1998 | 78 | -5 | -1 | 94,0% | 98,7% | -6,0% | -1,3% | 0,79 |
| 1999 | 83 | 0 | 5 | 100,0% | 106,4% | 0,0% | 6,4% | 0,78 |

Среднегодовое потребление овощей и бахчевых в год на душу населения Российской Федерации определяется по формуле среднего арифметического:

$$\bar{y} = \frac{y_{1995} + y_{1996} + y_{1997} + y_{1998} + y_{1999}}{5} = \frac{409}{5} = 81,8 \text{ кг.}$$

Среднегодовой абсолютный прирост равен

$$\bar{\Delta} = \frac{y_{1999} - y_{1995}}{4} = \frac{83 - 83}{4} = 0 \text{ кг.}$$

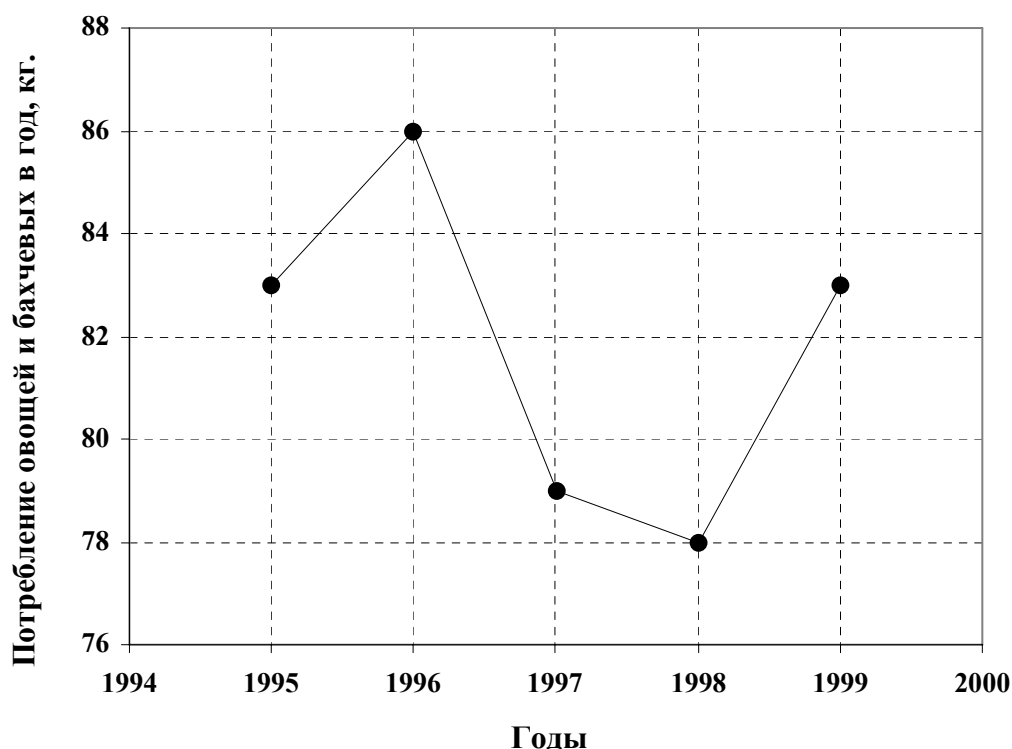
Среднегодовой темп роста ряда динамики определяется как среднее геометрическое:

$$\overline{T_D} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} = \sqrt[4]{\frac{83}{83}} = 1 = 100\%.$$

Среднегодовой темп прироста ряда динамики равен

$$\overline{T_{np}} = \overline{T_p} - 100 = 100 - 100 = 0\%.$$

Темпы роста товарооборота изображены на рисунке, из которого видно, что рост потребления овощей и бахчевых в год на душу населения Российской Федерации в 1995 – 1999 годах отсутствует.



Задача 6.17.

По промышленному предприятию имеются следующие данные:

| Изделие | Общие затраты на производство в базисном году, млн. р. | Изменение себестоимости изделия в отчетном году по сравнению с базисным, % |
|------------------|--|--|
| Электромясорубка | 1234 | +6,0 |
| Кухонный комбайн | 5877 | +8,4 |
| Миксер | 980 | +1,6 |

Определите общие изменения себестоимости продукции в отчетном году по сравнению с базисным и обусловленный этими изменениями размер дополнительных затрат предприятия.

Решение.

Примем себестоимость каждого из изделий в базисном году за единицу. Тогда общие затраты на производство в отчетном году составят

$$C^1 = 1234 \cdot 1,06 + 5877 \cdot 1,084 + 980 \cdot 1,016 = 8674,388 \text{ млн. р.}$$

В базисном году общие затраты на производство составляли

$$C^0 = 1234 + 5877 + 980 = 8091 \text{ млн. р.}$$

Таким образом, в отчетном году себестоимость продукции выросла по сравнению с базисным годом на

$$\Delta C = C^1 - C^0 = 8674,388 - 8091 = 583,388 \text{ млн. р.}$$

Задача 6.18.

Имеются данные, характеризующие динамику производства валового выпуска продукции предприятия по месяцам (см. табл.). Провести сглаживание ряда динамики, применяя трехмесячную скользящую среднюю. Сделать выводы о тенденции.

| | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Месяц | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Валовой выпуск продукции | 75 | 105 | 114 | 129 | 138 | 129 | 152 | 138 | 142 | 155 | 157 | 157 |

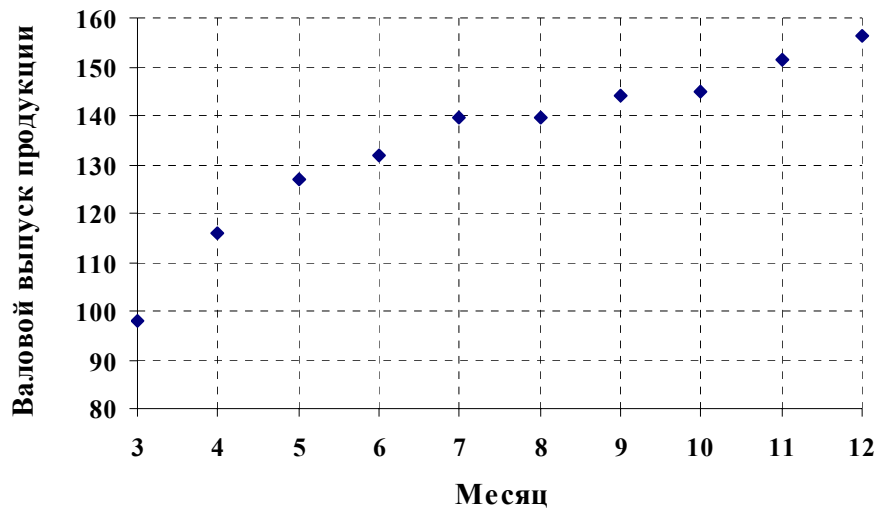
Решение. Сглаживание ряда динамики на основе трехмесячной скользящей средней имеет вид

$$y_k = \frac{\sum_{i=k-2}^k x_k}{3}, \quad k = 3, 4, \dots, 12.$$

Сглаженный ряд приведем в таблице

| | | | | | | | | | | |
|--------------------------|----|-----|-----|-----|--------|--------|-----|-----|--------|--------|
| Месяц | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Валовой выпуск продукции | 98 | 116 | 127 | 132 | 139,67 | 139,67 | 144 | 145 | 151,33 | 156,33 |

Приведем график сглаженного тренда. На графике видна тенденция возрастания валового выпуска продукции предприятия.



Задача 6.19.

За отчетный период численность рабочих на предприятии составила

| Дата | 01.01 | 01.02 | 01.03 | 01.04 | 01.05 | 01.06 | 01.07 |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Численность | 224 | 235 | 208 | 222 | 246 | 250 | 262 |

Определить:

- 1) среднюю списочную численность рабочих за 1, 2 квартал и за I полугодие;
- 2) в соответствии с классификацией – вид ряда динамики.

Решение.

Используем среднюю хронологическую. Средняя списочная численность рабочих за 1 квартал равна

$$\bar{x}_1 = \frac{224 + \frac{1}{2} \cdot 235 + \frac{1}{2} \cdot 208 + 222}{3} = \frac{667,5}{3} = 222,5.$$

Средняя списочная численность рабочих за 2 квартал равна

$$\bar{x}_2 = \frac{222 + \frac{1}{2} \cdot 246 + \frac{1}{2} \cdot 250 + 262}{3} = \frac{732}{3} = 244.$$

Средняя списочная численность рабочих равна

$$\bar{X} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} = \frac{222,5 + 244}{2} = 233,25.$$

Данный ряд динамики – моментный.

Тема 7. Экономические индексы

Задача 7.1.

По нижеприведенным данным ответить на вопросы, поставленные в таблице, т.е. определить недостающие показатели.

| Показатели | Изменение показателей в % к предыдущему кварталу «+» - увеличение, «-» - уменьшение | | |
|-----------------------------------|--|-------------|------------|
| | II квартал | III квартал | IV квартал |
| Цена | ? | +10 | -2 |
| Натуральный объем продаж | Без изменения | ? | +5 |
| Товарооборот в денежном выражении | +8 | +5 | ? |

Решение.

Зададим в 1-м квартале цену, натуральный объем продаж и товарооборот в денежном выражении равными 100%. Тогда, используя исходные данные, получим табл. 1.

Таблица 1

| Показатели | Изменение показателей в % к предыдущему кварталу «+» - увеличение, «-» - уменьшение | | | |
|-----------------------------------|--|------------|-------------|------------|
| | I квартал | II квартал | III квартал | IV квартал |
| Цена | 100,0% | 108,0% | 118,8% | 116,4% |
| Натуральный объем продаж | 100,0% | 100,0% | 95,5% | 100,2% |
| Товарооборот в денежном выражении | 100,0% | 108,0% | 113,4% | 116,7% |

В изменениях относительно предыдущих кварталов получим табл. 2.

Таблица 2

| Показатели | Изменение показателей в % к предыдущему кварталу «+» - увеличение, «-» - уменьшение | | | |
|-----------------------------------|--|------------|-------------|------------|
| | I квартал | II квартал | III квартал | IV квартал |
| Цена | 100,0% | 8,0% | 10,0% | -2,0% |
| Натуральный объем продаж | 100,0% | 0,0% | -4,5% | 5,0% |
| Товарооборот в денежном выражении | 100,0% | 8,0% | 5,0% | 2,9% |

Задача 7.2.

Имеется информация о выпуске продукции на предприятии, ее себестоимости за 2 квартала.

| Виды продукции | Произведено, тыс. единиц | | Себестоимость единицы продукции, руб. | |
|----------------|--------------------------|------------|---------------------------------------|------------|
| | I квартал | II квартал | I квартал | II квартал |
| А | 10 | 12 | 15 | 12 |
| Б | 20 | 20 | 10 | 12 |
| В | 15 | 12 | 8 | 8 |

Определить: 1) индивидуальные индексы количества и себестоимости; 2) общие индексы затрат на производство, натурального выпуска и себестоимости; 3) абсолютное изменение затрат на выпуск продукции в целом и по факторам: а) за счет изменения себестоимости; б) за счет изменения натурального выпуска. Сделать выводы.

Решение.

Обозначим: p – себестоимость, q – натуральный выпуск.

Индивидуальные индексы натурального выпуска равны:

- для продукции А $i_q = \frac{12}{10} = 1,2$,

- для продукции Б $i_q = \frac{20}{20} = 1,0$,

- для продукции В $i_q = \frac{12}{15} = 0,8$.

Индивидуальные индексы себестоимости равны:

- для продукции А $i_p = \frac{12}{15} = 0,8$,

- для продукции Б $i_p = \frac{12}{10} = 1,2$,

- для продукции В $i_p = \frac{8}{8} = 1,0$.

Общий индекс себестоимости равен

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{12 \cdot 12 + 12 \cdot 20 + 8 \cdot 12}{15 \cdot 12 + 10 \cdot 20 + 8 \cdot 12} = \frac{480}{476} = 1,0084, \text{ или } 100,84\%.$$

Общий индекс натурального выпуска равен

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{15 \cdot 12 + 10 \cdot 20 + 8 \cdot 12}{15 \cdot 10 + 10 \cdot 20 + 8 \cdot 15} = \frac{476}{470} = 1,0128, \text{ или } 101,28\%.$$

Общий индекс затрат на производство равен

$$I_{pq} = I_p I_q = 1,0084 \cdot 1,0128 = 1,0213, \text{ или } 102,13\%.$$

Абсолютное изменение затрат на выпуск продукции в целом составило

$$\Delta pq = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = 480 - 470 = 10 \text{ тыс. руб.}$$

Изменение затрат на выпуск продукции за счет изменения себестоимости составило

$$\Delta pq(p) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 480 - 476 = 4 \text{ тыс. руб.}$$

Изменение затрат на выпуск продукции за счет изменения натурального выпуска составило

$$\Delta pq(q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 476 - 470 = 6 \text{ тыс. руб.}$$

Выводы. В отчетном периоде абсолютное изменение затрат на выпуск продукции в целом составило 10 тыс. руб., причем оно произошло за счет обоих факторов.

Задача 7.3.

Денежные затраты на строительно-монтажные работы увеличились в текущем периоде на 38%, а себестоимость работ – на 46,8%. Определить индекс объема строительно-монтажных работ.

Решение.

Индекс объема строительно-монтажных работ равен отношению индекса денежных затрат на строительно-монтажные работы к индексу себестоимости работ и равен

$$I_q = \frac{I_{pq}}{I_p} = \frac{1,38}{1,468} = 0,975, \text{ или } 97,5\%.$$

Следовательно, объем строительно-монтажных работ в текущем периоде снизился на 2,5%.

Задача 7.4.

Динамика средних цен и объема продажи на колхозных рынках города характеризуется следующими данными:

| Наименование товара | Продано товаров за период, тыс. кг | | Средняя цена за 1 кг за период, руб. | |
|----------------------|------------------------------------|----------|--------------------------------------|----------|
| | базисный | отчетный | базисный | отчетный |
| Колхозный рынок № 1: | | | | |
| Картофель | 6,0 | 6,2 | 8,0 | 8,5 |
| Свежая капуста | 2,5 | 2,4 | 15,0 | 19,0 |
| Колхозный рынок №2: | | | | |
| Картофель | 12,0 | 12,8 | 7,5 | 8,0 |

На основании имеющихся данных вычислите:

1. Для колхозного рынка № 1 (по двум видам товаров вместе):
 - а) общий индекс товарооборота в фактических ценах;
 - б) общий индекс цен;
 - в) общий индекс физического объема товарооборота.

Определите в отчетном периоде прирост товарооборота в абсолютной сумме и разложите по факторам (за счет изменения цен и объема продаж товаров).

Покажите взаимосвязь начисленных индексов.

2. Для двух колхозных рынков вместе (по картофелю):
 - а) индекс цен переменного состава;
 - б) индекс цен постоянного состава;
 - в) индекс влияния изменения структуры объема продажи картофеля на динамику средней цены.

Решение.

1. Для колхозного рынка № 1 составим следующую таблицу

| Колхозный рынок № 1 | Цена 1 кг, р. | | Продано товаров за период, тыс. кг | |
|---------------------|-------------------|-------------------|------------------------------------|-------------------|
| | периоды | | периоды | |
| | базисный p_0 | отчетный p_1 | базисный q_0 | отчетный q_1 |
| Картофель | 8 | 8,5 | 6 | 6,2 |
| Свежая капуста | 15 | 19 | 2,5 | 2,4 |

Общий индекс цен равен

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{8,5 \cdot 6,2 + 19 \cdot 2,4}{8 \cdot 6,2 + 15 \cdot 2,4} = \frac{98,3}{85,6} = 1,148, \text{ или } 114,8\%.$$

Общий индекс физического объема товарооборота равен

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{8 \cdot 6,2 + 15 \cdot 2,4}{8 \cdot 6 + 15 \cdot 2,5} = \frac{85,6}{85,5} = 1,001, \text{ или } 100,1\%.$$

Общий индекс товарооборота в фактических ценах равен

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{8,5 \cdot 6,2 + 19 \cdot 2,4}{8 \cdot 6 + 15 \cdot 2,5} = \frac{98,3}{85,5} = 1,150, \text{ или } 115,0\%.$$

Взаимосвязь индексов:

$$I_{pq} = I_p \cdot I_q = 1,148 \cdot 1,001 = 1,150.$$

В отчетном периоде для колхозного рынка № 1 прирост товарооборота в абсолютной сумме составил

$$\Delta PQ = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = 98,3 - 85,5 = 12,8 \text{ тыс. руб.}$$

В отчетном периоде для колхозного рынка № 1 прирост товарооборота за счет изменения цен составил

$$\Delta PQ(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 98,3 - 85,6 = 12,7 \text{ тыс. руб.}$$

В отчетном периоде для колхозного рынка № 1 прирост товарооборота за счет изменения объема продаж товаров составил

$$\Delta PQ(Q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 85,6 - 85,5 = 0,1 \text{ тыс. руб.}$$

2. Для двух колхозных рынков вместе (по картофелю) составим следующую таблицу

| Колхозные рынки | Цена 1 кг картофеля, р. | | Продано картофеля за период, тыс. кг | |
|-----------------|-------------------------|-------------------|--------------------------------------|-------------------|
| | периоды | | периоды | |
| | базисный p_0 | отчетный p_1 | базисный q_0 | отчетный q_1 |
| № 1 | 8 | 8,5 | 6 | 6,2 |
| № 2 | 7,5 | 8 | 12 | 12,8 |

Индекс цен переменного состава равен

$$I_{n.c} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{155,1}{19} : \frac{138}{18} = 1,0648, \text{ или } 106,48\%.$$

Индекс цен постоянного состава равен

$$I_{ф.с} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{155,1}{145,6} = 1,0652 \text{ или } 106,52\%.$$

Индекс влияния изменения структуры объема продажи картофеля на динамику средней цены равен

$$I_{стр} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{145,6}{19} : \frac{138}{18} = 0,9995, \text{ или } 99,95\%.$$

Взаимосвязь индексов:

$$I_{стр} = I_{n.c} / I_{ф.с} = 1,0648 / 1,0652 = 0,9995.$$

Задача 7.5.

По заводу имеются следующие данные о выпуске продукции:

| Вид продукции | Выпуск продукции в I квартале, тыс. руб. | Увеличение (+) или уменьшение (-) выпуска продукции во II квартале по сравнению с I кварталом, % |
|-------------------|--|--|
| Рельсы трамвайные | 22300 | +3,0 |
| Чугун литейный | 15800 | -2,0 |
| Железо листовое | 10500 | +1,5 |

1. Определить общий индекс физического объема продукции.
2. Определить сумму изменения затрат за счет объема произведенной продукции.

Решение.

Общий индекс физического объема продукции равен

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{22300 \cdot 1,03 + 15800 \cdot 0,98 + 10500 \cdot 1,015}{22300 + 15800 + 10500} = \frac{49110,5}{48600} = 1,0105, \text{ или } 101,1\%.$$

Сумма изменения затрат за счет объема произведенной продукции равна

$$\Delta PQ(Q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 49110,5 - 48600 = 510,5 \text{ тыс. руб.}$$

Задача 7.6.

Имеются следующие условные данные за два года, млрд. руб.

| № п/п | Показатели | Период | |
|-------|--|--------------|--------------|
| | | Базисный год | Отчетный год |
| 1 | Валовой внутренний продукт в текущих ценах | 9043,8 | 10865,3 |
| 2 | Денежная масса | 3615,2 | 3770,0 |
| 3 | Наличные деньги | 1370,0 | 1390,0 |

Определите за базисный и отчетный годы:

1. Скорость обращения денежной массы и наличных денег;
2. Продолжительность одного оборота в днях;
3. Долю наличных денег в денежной массе;
4. Абсолютный прирост скорости обращения денежной массы за счет изменения скорости обращения наличных денег и изменения доли наличных денег.

Сделайте выводы.

Решение.

1. Скорость обращения денег – это среднегодовое количество оборотов, сделанных деньгами, которые находятся в обращении и используются на покупку готовых товаров и

услуг. Скорость обращения денег равна отношению номинального валового национального продукта к массе денег в обращении:

$$V = U/M,$$

где V – скорость обращения денег; U – номинальный объем ВВП; M – масса денег в обращении.

Скорость обращения денежной массы равна:

- в базисном году $V_0^{д.м} = \frac{9043,8}{3615,2} = 2,502,$

- в отчетном году $V_1^{д.м} = \frac{10865,3}{3770,0} = 2,882.$

Скорость обращения наличных денег равна:

- в базисном году $V_0^{н.д.} = \frac{9043,8}{1370,0} = 6,601,$

- в отчетном году $V_1^{н.д.} = \frac{10865,3}{1390,0} = 7,817.$

2. Продолжительность одного оборота в днях определяется по формуле

$$T = \frac{D}{V},$$

где D – число календарных дней анализируемого периода (для одного года считают $D = 360$).

Продолжительность одного оборота денежной массы равна:

- в базисном году $T_0^{д.м} = \frac{360}{2,502} = 143,9$ дней,

- в отчетном году $T_1^{д.м} = \frac{360}{2,882} = 124,9$ дней.

Продолжительность одного оборота наличных денег равна:

- в базисном году $V_0^{н.д.} = \frac{360}{6,601} = 54,5$ дней,

- в отчетном году $V_1^{н.д.} = \frac{360}{7,817} = 46,1$ дней.

3. Доля наличных денег в денежной массе равна:

- в базисном году $d_0 = \frac{1370,0}{3615,2} = 0,379$, или 37,9%,

- в отчетном году $d_1 = \frac{1390,0}{3770,0} = 0,369$, или 36,9%.

4. Абсолютный прирост скорости обращения денежной массы за счет изменения скорости обращения наличных денег равен

$$\Delta V(v) = 7,817 \cdot 0,369 - 6,601 \cdot 0,369 = 0,448 .$$

Абсолютный прирост скорости обращения денежной массы за счет изменения доли наличных денег равен

$$\Delta V(d) = 6,601 \cdot 0,369 - 6,601 \cdot 0,379 = -0,068 .$$

Выводы.

1. Средняя скорость обращения денежной массы в отчетном году выросла за счет роста скорости обращения наличных денег на 0,448 оборота в год.

1. Средняя скорость обращения денежной массы в отчетном году уменьшилась за счет уменьшения доли наличных денег на 0,068 оборота в год.

Задача 7.7.

По имеющимся данным рассчитать: сводные цепные и сводные базовые индексы потребительских цен в целом по стране за период с декабря 1999 по июнь 2000 г.

(В таблице приведен условный тариф стоимости проезда в общественном транспорте).

| Наименование региона | Доля численности населения в выбранной группе регионов | Тариф, руб. | | | | | | |
|-------------------------------|--|-------------|------|------|------|------|-----|------|
| | | Дек,99 | Янв. | Фев. | Март | Апр. | Май | Июнь |
| Москва, Московская обл. | 0,54 | 5,0 | 5,1 | 5,2 | 5,3 | 5,4 | 5,5 | 5,5 |
| Свердловская обл. | 0,14 | 3,0 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,5 |
| Челябинская обл. | 0,11 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 |
| Самарская обл. | 0,07 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 |
| Новосибирская обл. | 0,14 | 2,5 | 2,5 | 2,7 | 2,7 | 2,8 | 2,5 | 3,0 |
| Всего по приведенным регионам | 1,0 | | | | | | | |

Решение.

Определим стоимость проезда в общественном транспорте в целом по стране за каждый месяц по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{\sum v_i},$$

где x_i – тариф в i -м регионе, v_i – доля численности населения i -го региона.

Результаты расчета приведем в таблице

| Наименование региона | Доля численности населения в выбранной группе регионов | Тариф, руб. | | | | | | |
|---------------------------|--|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | Дек,99 | Янв. | Фев. | Март | Апр. | Май | Июнь |
| Москва, Московская обл. | 0,54 | 5 | 5,1 | 5,2 | 5,3 | 5,4 | 5,5 | 5,5 |
| Свердловская обл. | 0,14 | 3 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,5 |
| Челябинская обл. | 0,11 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Самарская обл. | 0,07 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 |
| Новосибирская обл. | 0,14 | 2,5 | 2,5 | 2,7 | 2,7 | 2,8 | 2,5 | 3 |
| Тариф в среднем по стране | | 3,795 | 3,863 | 3,959 | 4,027 | 4,109 | 4,135 | 4,205 |

Сводные цепные индексы потребительских цен в целом по стране определим по формуле

$$I_i^c = \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_{i-1}}.$$

Сводные базовые индексы потребительских цен в целом по стране определим по формуле

$$I_i^0 = \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_1}.$$

Результаты расчета приведены в таблице.

| | | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Тариф в среднем по стране | 3,795 | 3,863 | 3,959 | 4,027 | 4,109 | 4,135 | 4,205 |
| Сводные цепные индексы потребительских цен в целом по стране | - | 1,018 | 1,025 | 1,017 | 1,02 | 1,006 | 1,017 |
| Сводные базовые индексы потребительских цен в целом по стране | - | 1,018 | 1,043 | 1,061 | 1,083 | 1,09 | 1,108 |

Задача 7.8.

Дано:

| Отрасли | Базисный год | | Отчетный год | |
|--------------------|---------------------------|------------------------|---------------------------|------------------------|
| | Численность рабочих, чел. | Средняя зарплата, руб. | Численность рабочих, чел. | Средняя зарплата, руб. |
| Промышленность | 520 | 7800 | 600 | 8120 |
| Строительство | 240 | 8300 | 340 | 8450 |
| Сельское хозяйство | 390 | 3500 | 410 | 3670 |

Определить:

1. Индивидуальные индексы заработной платы.
2. Индексы заработной платы переменного состава, постоянного состава, структурных сдвигов.
3. Изменение фонда заработной платы за счет изменения численности работников и средней заработной платы по трем отраслям вместе.

Решение.

Обозначим: p_0, p_1 – средняя зарплата по отраслям в базисном и отчетном году соответственно; q_0, q_1 – численность работников по отраслям в базисном и отчетном году соответственно.

1. Индивидуальные индексы заработной платы равны:

- в промышленности $i_1 = \frac{8120}{7800} = 1,041$, или 104,1%,

- в строительстве $i_2 = \frac{8450}{8300} = 1,018$, или 101,8%,

- в сельском хозяйстве $i_3 = \frac{3670}{3500} = 1,049$, или 104,9%,

2. Индекс заработной платы переменного состава равен

$$I_{n.c} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{9249700}{1350} : \frac{7413000}{1150} = \frac{6851,63}{6446,087} = 1,063, \text{ или } 106,3\%.$$

Индекс постоянного состава равен

$$I_{ф.с} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{9249700}{8937000} = 1,035 \text{ или } 103,5\%.$$

Индекс структурных сдвигов равен

$$I_{смп} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{8937000}{1350} : \frac{7413000}{1150} = \frac{6620}{6446,087} = 1,027, \text{ или } 102,7\%.$$

3. Изменение фонда заработной платы за счет изменения средней заработной платы рабочих составляет

$$\Delta PQ(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 9249700 - 8937000 = 312700 \text{ руб.}$$

Изменение фонда заработной платы за счет изменения численности работников составляет

$$\Delta PQ(Q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 8937000 - 7413000 = 1524000 \text{ руб.}$$

Задача 7.9.

Имеются следующие данные по предприятию:

| Вид продукции | Производство в отчетном периоде (шт.) | | Себестоимость единицы продукции (руб.) | | |
|---------------|---------------------------------------|------------|--|-----------------|------------|
| | По плану | Фактически | В предыдущем периоде | В отчетном году | |
| | | | | По плану | Фактически |
| Шкафы | 3000 | 3100 | - | 45 | 40 |
| Полки | 4200 | 4300 | 12 | 11 | 10 |
| Стулья | 5500 | 6000 | 10 | 9,5 | 8,5 |
| Стол | 3200 | 3400 | 25 | 23 | 21 |

Определить:

1. Общие индексы себестоимости сравнимой продукции: а) плановый, б) фактический;
2. Сумму экономии от снижения себестоимости сравнимой продукции: а) установленную планом, б) фактическую;
3. Индекс выполнения плана по всей продукции;
4. Размер сверхплановой экономии от снижения себестоимости всей продукции.

Решение.

Запишем новую таблицу

| Вид продукции | Производство в отчетном периоде (шт.) | | Себестоимость единицы продукции в отчетном году (руб.) | |
|---------------|---------------------------------------|------------|--|------------|
| | По плану | Фактически | По плану | Фактически |
| Шкафы | 3000 | 3100 | 45 | 40 |
| Полки | 4200 | 4300 | 11 | 10 |
| Стулья | 5500 | 6000 | 9,5 | 8,5 |
| Стол | 3200 | 3400 | 23 | 21 |

Обозначим: p – себестоимость единицы продукции, q – производство.

Общий плановый индекс себестоимости сравнимой продукции равен

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{40 \cdot 3100 + 10 \cdot 4300 + 8,5 \cdot 6000 + 21 \cdot 3400}{45 \cdot 3100 + 11 \cdot 4300 + 9,5 \cdot 6000 + 23 \cdot 3400} = \frac{289400}{322000} = 0,899, \text{ или } 89,9\%.$$

Общий фактический индекс себестоимости сравнимой продукции равен

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{45 \cdot 3100 + 11 \cdot 4300 + 9,5 \cdot 6000 + 23 \cdot 3400}{45 \cdot 3000 + 11 \cdot 4200 + 9,5 \cdot 5500 + 23 \cdot 3200} = \frac{322000}{307050} = 1,049, \text{ или } 104,9\%.$$

Сумма экономии от снижения себестоимости сравнимой продукции, установленная планом, равна

$$\Delta S(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 289400 - 322000 = -32600 \text{ руб.}$$

Сумма экономии от снижения себестоимости сравнимой продукции, установленная планом, равна

$$\Delta S(Q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 322000 - 307050 = 14950 \text{ руб.}$$

Индекс выполнения плана по всей продукции равен

$$I_{pq} = I_p \cdot I_q = 0,899 \cdot 1,049 = 0,943, \text{ или } 94,3\%.$$

Размер сверхплановой экономии от снижения себестоимости всей продукции равен

$$\Delta S = -32600 + 14950 = -17650 \text{ руб.}$$

Задача 7.10.

По имеющимся данным рассчитать: сводные цепные и сводные базовые индексы потребительских цен в целом по стране за период с декабря 2000 по июнь 2001 г.

(В таблице приведен условный тариф стоимости проезда в общественном транспорте).

| Наименование региона | Доля численности населения в выбранной группе регионов | Тариф, руб. | | | | | | |
|-------------------------------|--|-------------|--------|------|------|------|-----|------|
| | | дек,2000 | январ. | фев. | март | апр. | май | июнь |
| Москва, Моск. Обл. | 0,5 | 5,0 | 5,0 | 5,0 | 5,0 | 5,0 | 6,0 | 6,0 |
| Свердловская обл. | 0,15 | 0,15 | 3,0 | 3,0 | 3,5 | 3,5 | 3,5 | 3,5 |
| Челябинская обл. | 0,12 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 |
| Самарская обл. | 0,08 | 1,5 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 |
| Новосибирская обл. | 0,15 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 3,0 | 3,0 | 3,0 | 3,0 |
| Всего по приведенным регионам | 1,0 | | | | | | | |

Решение.

Определим стоимость проезда в общественном транспорте в целом по стране за каждый месяц по формуле средней арифметической взвешенной

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{\sum v_i},$$

где x_i – тариф в i -м регионе, v_i – доля численности населения i -го региона.

Результаты расчета приведем в таблице

| Наименование региона | Доля численности населения в выбранной группе регионов | Тариф, руб. | | | | | | |
|---------------------------|--|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | Дек,2000 | Янв. | Фев. | Март | Апр. | Май | Июнь |
| Москва, Моск. Обл. | 0,5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 |
| Свердловская обл. | 0,15 | 0,15 | 3 | 3 | 3,5 | 3,5 | 3,5 | 3,5 |
| Челябинская обл. | 0,12 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Самарская обл. | 0,08 | 1,5 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Новосибирская обл. | 0,15 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Тариф в среднем по стране | | 3,2575 | 3,725 | 3,725 | 3,875 | 3,875 | 4,375 | 4,375 |

Сводные цепные индексы потребительских цен в целом по стране определим по формуле

$$I_i^c = \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_{i-1}}.$$

Сводные базовые индексы потребительских цен в целом по стране определим по формуле

$$I_i^0 = \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_1}.$$

Результаты расчета приведены в таблице.

| | | | | | | | |
|---|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Тариф в среднем по стране | 3,2575 | 3,725 | 3,725 | 3,875 | 3,875 | 4,375 | 4,375 |
| Сводные цепные индексы потребительских цен в целом по стране | - | 1,144 | 1 | 1,04 | 1 | 1,129 | 1 |
| Сводные базовые индексы потребительских цен в целом по стране | - | 1,144 | 1,144 | 1,19 | 1,19 | 1,343 | 1,343 |

Задача 7.11.

В таблице приведены данные о кредитных операциях банка.

| Вид кредитных операций | Средний остаток, тыс. руб. | | Средняя процентная ставка, % годовых | |
|------------------------|----------------------------|-----------------|--------------------------------------|-----------------|
| | Базисный период | Отчетный период | Базисный период | Отчетный период |
| Краткосрочные | 48306 | 52460 | 18 | 17 |
| Долгосрочные | 4228 | 6032 | 19 | 20 |

Найдите изменение общей суммы дохода по кредитным операциям банка.

Определите, какой из двух факторов (остатки по выданным кредитам или средний уровень процентной ставки) в большей степени повлиял на изменение процентного дохода.

Решение.

Запишем исходную таблицу в виде

| Вид кредитных операций | Средний остаток, тыс. руб. | | Средняя процентная ставка, % годовых | |
|------------------------|----------------------------|------------------------|--------------------------------------|------------------------|
| | Базисный период, p_0 | Отчетный период, p_1 | Базисный период, q_0 | Отчетный период, q_1 |
| Краткосрочные | 48306 | 52460 | 18 | 17 |
| Долгосрочные | 4228 | 6032 | 19 | 20 |

Общий индекс остатков по выданным кредитам равен

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{52460 \cdot 17 + 6032 \cdot 20}{48306 \cdot 17 + 4228 \cdot 20} = \frac{1012460}{905762} = 1,1178, \text{ или } 111,78\%.$$

Общий индекс среднего уровня процентной ставки равен

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{48306 \cdot 17 + 4228 \cdot 20}{48306 \cdot 18 + 4228 \cdot 19} = \frac{905762}{949840} = 0,9536, \text{ или } 95,36\%.$$

Общий индекс дохода по кредитным операциям банка равен

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{52460 \cdot 17 + 6032 \cdot 20}{48306 \cdot 18 + 4228 \cdot 19} = \frac{1012460}{949840} = 1,0659, \text{ или } 106,59\%,$$

т.е. общая сумма дохода по кредитным операциям банка за отчетный период выросла по сравнению с базисным периодом на 6,59%.

Абсолютное изменение общей суммы дохода по кредитным операциям банка равно

$$\Delta PQ = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = 1012460 - 949840 = 62620 \text{ тыс. руб.}$$

Абсолютное изменение общей суммы дохода по кредитным операциям банка за счет изменения остатков по выданным кредитам равно

$$\Delta P(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 1012460 - 905762 = 106698 \text{ тыс. руб.}$$

Абсолютное изменение общей суммы дохода по кредитным операциям банка за счет изменения среднего уровня процентной ставки равно

$$\Delta P(Q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 905762 - 949840 = -44078 \text{ тыс. руб.}$$

Выводы. На изменение процентного дохода повлиял рост остатков по выданным кредитам. Второй фактор, изменение среднего уровня процентной ставки, наоборот, привел к частичному снижению процентного дохода банка.

Задача 7.12.

Три предприятия отрасли выпускают изделие «А» и характеризуются следующими показателями:

| Предприятие отрасли | Объем производства, тыс. шт. | | Себестоимость изделия, руб. | |
|---------------------|------------------------------|-----------------|-----------------------------|-----------------|
| | Базисный период | Отчетный период | Базисный период | Отчетный период |
| 1 | 700 | 730 | 10 | 9,2 |
| 2 | 1000 | 1200 | 9,8 | 9,2 |
| 3 | 800 | 600 | 11,5 | 11,4 |

Рассчитать:

1. Индекс переменного состава.
2. Индекс постоянного состава.
3. Индекс структуры.
4. Исследуйте взаимосвязь между рассчитанными индексами. Укажите причины изменения средней себестоимости изделия «А» и оцените влияние факторов на изменение средней себестоимости изделия «А». Сделайте выводы.

Решение.

Запишем исходную таблицу в виде:

| Предприятие отрасли | Себестоимость изделия, руб. | | Объем производства, тыс. шт. | |
|---------------------|-----------------------------|-----------------------|------------------------------|-----------------------|
| | Базисный период p_0 | Отчетный период p_1 | Базисный период q_0 | Отчетный период q_1 |
| 1 | 10 | 9,2 | 700 | 730 |
| 2 | 9,8 | 9,2 | 1000 | 1200 |
| 3 | 11,5 | 11,4 | 800 | 600 |

1. Индекс переменного состава равен

$$I_{n.c} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{24596}{2530} : \frac{26000}{2500} = 0,9348, \text{ или } 93,48\%.$$

2. Индекс постоянного (фиксированного) состава равен

$$I_{\phi.c} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{24596}{25960} = 0,9475 \text{ или } 94,75\%.$$

3. Индекс структуры равен

$$I_{стр} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{25960}{2530} : \frac{26000}{2500} = 0,9866, \text{ или } 98,66\%.$$

4. Взаимосвязь индексов:

$$I_{стр} = I_{n.c} / I_{\phi.c} = 0,9348 / 0,9475 = 0,9866.$$

Средняя себестоимость изделия «А» уменьшилась на 6,52% за счет уменьшения его себестоимости на каждом из предприятий.

Средняя себестоимость изделия «А» уменьшилась на 1,34% за счет изменения структуры производства.

Вывод. Средняя себестоимость изделия «А» в основном уменьшилась за счет уменьшения себестоимости продукции каждого из предприятий.

Задача 7.13.

Имеются данные по торговому предприятию о продаже стиральных машин:

| Марка стиральной машины | Цена в январе, руб. | Цена в феврале, руб. | Товарооборот февраля, тыс. руб. |
|-------------------------|---------------------|----------------------|---------------------------------|
| Индезит | 3000 | 3100 | 49,6 |
| Бош | 3500 | 3600 | 54 |
| Эврика | 700 | 720 | 39,6 |

Определите: а) средний рост цен на данную группу товаров по торговому предприятию; б) перерасход покупателей от роста цен.

Решение.

Определим средний рост цен на данную группу товаров по торговому предприятию по формуле средней арифметической взвешенной

$$\Delta \bar{p} = \frac{\sum (p_1 - p_0) q_1}{\sum q_1} = \frac{(3100 - 3000) \cdot 49,6 + (3600 - 3500) \cdot 54 + (720 - 700) \cdot 39,6}{49,6 + 54 + 39,6} =$$

$$= \frac{11152}{143,2} = 77,88 \text{ руб.}$$

Перерасход покупателей от роста цен равен

$$\Delta V(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = \sum (p_1 - p_0) q_1 = 11152 \text{ руб.}$$

Задача 7.14.

Имеются следующие данные о посевных площадях зерновых культур:

| Наименование культур | Базисный период | | Отчетный период | |
|----------------------|----------------------|-------------------|----------------------|-------------------|
| | Посевные площади, га | Урожайность, ц/га | Посевные площади, га | Урожайность, ц/га |
| Гречиха | 235 | 11 | 350 | 14 |
| Овес | 100 | 6,5 | 125 | 7,5 |
| Ячмень | 500 | 9,5 | 500 | 9,5 |
| Рожь | 200 | 10 | 150 | 9 |

Определите:

- 1) Индивидуальные индексы урожайности, физического объема посевных площадей и валового сбора;
- 2) Общие индексы урожайности – агрегатный по Ласпейресу и средний гармонический;
- 3) Общие индексы физического объема посевных площадей – агрегатный по Пааше и средний арифметический;
- 4) Общий индекс валового сбора;
- 5) Абсолютное изменение урожайности;
- 6) Абсолютное изменение валового сбора за счет изменения физического объема посевных площадей.

Решение.

1) Обозначим посевную площадь как q , а урожайность – p . В результате таблица примет следующий вид:

| Наименование культур | Базисный период | | Отчетный период | |
|----------------------|-------------------------------|----------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| | Посевные площади, га q_0 | Урожайность, ц/га p_0 | Посевные площади, га q_1 | Урожайность, ц/га p_1 |
| Гречиха | 235 | 11 | 350 | 14 |
| Овес | 100 | 6,5 | 125 | 7,5 |
| Ячмень | 500 | 9,5 | 500 | 9,5 |
| Рожь | 200 | 10 | 150 | 9 |

Валовой сбор равен произведению урожайности на посевную площадь. Индивидуальные индексы урожайности, физического объема посевных площадей и валового сбора по каждой культуре равны отношению показателя за отчетный период к показателю за базисный период. Результаты расчетов приведем в виде таблицы:

| Наименование культур | Базисный период | | | Отчетный период | | | Индивидуальные индексы | | |
|----------------------|----------------------|-------------------|-----------------|----------------------|-------------------|-----------------|------------------------|-------------|----------------|
| | Посевные площади, га | Урожайность, ц/га | Валовой сбор, ц | Посевные площади, га | Урожайность, ц/га | Валовой сбор, ц | посевных площадей | урожайности | валового сбора |
| Гречиха | 235 | 11 | 2585 | 350 | 14 | 4900 | 1,49 | 1,27 | 1,90 |
| Овес | 100 | 6,5 | 650 | 125 | 7,5 | 937,5 | 1,25 | 1,15 | 1,44 |
| Ячмень | 500 | 9,5 | 4750 | 500 | 9,5 | 4750 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |
| Рожь | 200 | 10 | 2000 | 150 | 9 | 1350 | 0,75 | 0,90 | 0,68 |

2) Агрегатный индекс урожайности по Ласпейресу равен

$$I_{p(L)} = \frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_0} = \frac{235 \cdot 14 + \dots + 200 \cdot 9}{235 \cdot 11 + \dots + 200 \cdot 10} = \frac{10590}{9985} = 1,061, \text{ или } 106,1\%.$$

Средний гармонический индекс урожайности равен средней гармонической индивидуальных индексов урожайности

$$I_{p(c.z)} = \frac{n}{\sum \frac{1}{i_k}} = \frac{4}{\frac{1}{1,27} + \dots + \frac{1}{0,9}} = \frac{4}{3,7635} = 1,063, \text{ или } 106,3\%.$$

3) Агрегатный индекс физического объема посевных площадей по Пааше равен

$$I_{q(P)} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} = \frac{350 \cdot 14 + \dots + 150 \cdot 9}{235 \cdot 14 + \dots + 200 \cdot 9} = \frac{11937,5}{10590} = 1,127, \text{ или } 112,7\%.$$

Средний арифметический индекс физического объема посевных площадей равен средней арифметической индивидуальных индексов физического объема посевных площадей

$$I_{q(c.a)} = \frac{\sum i_k}{n} = \frac{1,49 + \dots + 0,75}{4} = \frac{4,49}{4} = 1,122, \text{ или } 112,2\%.$$

4) Общий индекс валового сбора равен

$$I_{pq} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0} = \frac{350 \cdot 14 + \dots + 150 \cdot 9}{235 \cdot 11 + \dots + 200 \cdot 10} = \frac{11937,5}{9985} = 1,196, \text{ или } 119,6\%.$$

5) Абсолютное изменение урожайности найдем как разность средних урожайностей в отчетном и базисном периодах. Среднюю урожайность определим по формуле средней арифметической взвешенной урожайностей культур.

Средняя урожайность в базисном периоде равна

$$\bar{p}_0 = \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_k} = \frac{11 \cdot 235 + \dots + 10 \cdot 200}{235 + \dots + 200} = \frac{9985}{1035} = 9,647 \text{ ц/га.}$$

Средняя урожайность в отчетном периоде равна

$$\bar{p}_1 = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} = \frac{14 \cdot 350 + \dots + 9 \cdot 150}{350 + \dots + 150} = \frac{11937,5}{1125} = 10,611 \text{ ц/га.}$$

Отсюда абсолютное изменение урожайности равно

$$\Delta p = \bar{p}_1 - \bar{p}_0 = 10,611 - 9,647 = 0,964 \text{ ц/га.}$$

б) Абсолютное изменение валового сбора за счет изменения физического объема посевных площадей равно

$$\Delta p q(q) = \sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0 = 10912,5 - 9985 = 927,5 \text{ ц.}$$

Задача 7.15.

Имеются данные об изменении цен реализации товара А в двух регионах:

| Регион | Июнь | | Июль | |
|--------|------------|--------------|------------|--------------|
| | Цена, руб. | Продано, шт. | Цена, руб. | Продано, шт. |
| 1 | 12 | 10000 | 13 | 18000 |
| 2 | 17 | 20000 | 19 | 9000 |

Выполнить:

- 1) Рассчитать индексы цен переменного и фиксированного составов, а также индекс влияния структурных сдвигов в объеме реализации товара А на динамику цен;
- 2) Определить абсолютное изменение реализации товара А всего и в том числе за счет изменения цены и структуры объема реализации товара А.

Объясните результаты.

Решение.

Запишем исходную таблицу в виде:

| Регион | Цена, руб. | | Продано, шт. | |
|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | Июнь | | Июль | |
| | базисный p_0 | отчетный p_1 | базисный q_0 | отчетный q_1 |
| 1 | 12 | 13 | 10000 | 18000 |
| 2 | 17 | 19 | 20000 | 9000 |

- 1) Индекс цен переменного состава равен

$$I_{n.c.} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} \cdot \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{13 \cdot 18000 + 19 \cdot 9000}{18000 + 9000} \cdot \frac{12 \cdot 10000 + 17 \cdot 20000}{10000 + 20000} =$$

$$= \frac{405000}{27000} \cdot \frac{460000}{30000} = 0,9783,$$

или 97,83%.

Индекс цен постоянного (фиксированного) состава равен

$$I_{ф.с.} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{405000}{369000} = 1,0976, \text{ или } 109,76\%.$$

Индекс влияния структурных сдвигов в объеме реализации товара А на динамику цен равен

$$I_{cmp} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} \cdot \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{369000}{27000} \cdot \frac{460000}{30000} = 0,8913, \text{ или } 89,13\%.$$

2) Абсолютное изменение реализации товара А равно

$$\Delta V = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = 405000 - 460000 = -55000 \text{ руб.}$$

Изменение реализации товара А за счет изменения цены равно

$$\Delta V(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 405000 - 369000 = 36000 \text{ руб.}$$

Изменение реализации товара А за счет изменения структуры объема реализации равно

$$\Delta P(Q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 369000 - 460000 = -91000 \text{ руб.}$$

Выводы. Реализация товара А в июле по сравнению с июнем сократилась на 55000 руб. Это вызвано снижением фактических продаж. Рост цен в июле увеличил реализацию товара на 36000 руб.

Задача 7.16.

Имеются данные выборочного обследования весенней торговли фруктами на продовольственных рынках:

| Фрукты | Цена за кг, руб. | | Продано, кг. | |
|-----------|------------------|--------|--------------|--------|
| | Март | Апрель | Март | Апрель |
| Яблоки | 25 | 30 | 860 | 810 |
| Мандарины | 30 | 35 | 750 | 650 |
| Лимоны | 30 | 40 | 350 | 300 |
| Груши | 25 | 35 | 1450 | 1000 |

Определите:

1) Индивидуальные индексы цен, физического объема товарооборота и стоимости реализованных фруктов;

- 2) Общие индексы цен – агрегатный по Пааше и средний гармонический;
- 3) Общие индексы физического объема товарооборота – агрегатный по Ласпейресу и средний арифметический;
- 4) Общий индекс стоимости реализованных фруктов;
- 5) Абсолютное изменение стоимости реализованных фруктов;
- 6) Абсолютное изменение стоимости реализованных фруктов за счет изменения физического объема товарооборота.

Решение.

1) Обозначим физический объем товарооборота как q , а цену за кг – p . В результате таблица примет следующий вид:

| Фрукты | Базисный период (март) | | Отчетный период (апрель) | |
|-----------|------------------------|---------------------------|--------------------------|---------------------------|
| | Продано, кг. q_0 | Цена за кг, руб. p_0 | Продано, кг. q_1 | Цена за кг, руб. p_1 |
| Яблоки | 860 | 25 | 810 | 30 |
| Мандарины | 750 | 30 | 650 | 35 |
| Лимоны | 350 | 30 | 300 | 40 |
| Груши | 1450 | 25 | 1000 | 35 |

Стоимость реализованных фруктов равна произведению цены на физический объем товарооборота. Индивидуальные индексы цен, физического объема товарооборота и стоимости реализованных фруктов по каждому наименованию равны отношению показателя за отчетный период к показателю за базисный период. Результаты расчетов приведем в виде таблицы:

| Фрукты | Базисный период | | | Отчетный период | | | Индивидуальные индексы | | |
|-----------|-----------------|------------|---------------------------------------|-----------------|------------|---------------------------------------|----------------------------------|------|---------------------------------|
| | Продано, кг. | Цена за кг | Стоимость реализованных фруктов, руб. | Продано, кг. | Цена за кг | Стоимость реализованных фруктов, руб. | физического объема товарооборота | цен | стоимости реализованных фруктов |
| Яблоки | 860 | 25 | 21500 | 810 | 30 | 24300 | 0,94 | 1,20 | 1,13 |
| Мандарины | 750 | 30 | 22500 | 650 | 35 | 22750 | 0,87 | 1,17 | 1,01 |
| Лимоны | 350 | 30 | 10500 | 300 | 40 | 12000 | 0,86 | 1,33 | 1,14 |
| Груши | 1450 | 25 | 36250 | 1000 | 35 | 35000 | 0,69 | 1,40 | 0,97 |

2) Агрегатный индекс цен по Пааше равен

$$I_{p(P)} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0} = \frac{810 \cdot 30 + \dots + 1000 \cdot 35}{810 \cdot 25 + \dots + 1000 \cdot 25} = \frac{94050}{73750} = 1,275, \text{ или } 127,5\%.$$

Средний гармонический индекс цен равен средней гармонической индивидуальных индексов цен

$$I_{p(c.z)} = \frac{n}{\sum \frac{1}{i_k}} = \frac{4}{\frac{1}{1,20} + \dots + \frac{1}{1,40}} = \frac{4}{3,1548} = 1,268, \text{ или } 126,8\%.$$

3) Агрегатный индекс физического объема товарооборота по Ласпейресу равен

$$I_{q(L)} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{810 \cdot 25 + \dots + 1000 \cdot 25}{860 \cdot 25 + \dots + 1450 \cdot 25} = \frac{73750}{90750} = 0,813, \text{ или } 81,3\%.$$

Средний арифметический индекс физического объема товарооборота равен средней арифметической индивидуальных индексов физического объема товарооборота

$$I_{q(c.a)} = \frac{\sum i_k}{n} = \frac{0,94 + \dots + 0,69}{4} = \frac{3,36}{4} = 0,839, \text{ или } 83,9\%.$$

4) Общий индекс стоимости реализованных фруктов равен

$$I_{pq} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0} = \frac{810 \cdot 30 + \dots + 1000 \cdot 35}{860 \cdot 25 + \dots + 1450 \cdot 25} = \frac{94050}{90750} = 1,036, \text{ или } 103,6\%.$$

5) Абсолютное изменение стоимости реализованных фруктов найдем как разность средних стоимостей в отчетном и базисном периодах. Среднюю стоимость определим по формуле средней арифметической стоимостей.

Средняя стоимость реализованных фруктов в базисном периоде равна

$$\bar{p}_0 = \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{25 \cdot 860 + \dots + 25 \cdot 1450}{860 + \dots + 1450} = \frac{90750}{3410} = 26,61 \text{ руб.}$$

Средняя стоимость реализованных фруктов в отчетном периоде равна

$$\bar{p}_1 = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} = \frac{30 \cdot 810 + \dots + 35 \cdot 1000}{810 + \dots + 1000} = \frac{94050}{2760} = 34,08 \text{ руб.}$$

Отсюда абсолютное изменение урожайности равно

$$\Delta p = \bar{p}_1 - \bar{p}_0 = 34,08 - 26,61 = 7,46 \text{ руб.}$$

6) Абсолютное изменение стоимости реализованных фруктов за счет изменения физического объема товарооборота равно

$$\Delta pq(q) = \sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0 = 73750 - 90750 = -17000 \text{ руб.}$$

Задача 7.17.

Имеются следующие данные по РФ об урожайности и валовом сборе пшеницы в 2000 и 2001 гг.:

| Зерновая культура | Урожайность, ц/га | | Валовой сбор, млн. ц. | |
|-------------------|-------------------|------|-----------------------|------|
| | 2000 | 2001 | 2000 | 2001 |
| Пшеница озимая | 22,3 | 29,1 | 172 | 244 |
| Пшеница яровая | 12,7 | 15,7 | 173 | 226 |

Рассчитать:

- 1) Индексы урожайности пшеницы: а) переменного состава; б) фиксированного состава; в) индекс структурных сдвигов (влияние изменения структуры посевных площадей на динамику средней урожайности);
- 2) Изменение (в абсолютном выражении) валового сбора пшеницы в 2001 году по сравнению с 2000 годом – всего и в том числе за счет изменения: а) урожайности озимой и яровой пшеницы; б) структуры посевных площадей.

Объясните результаты.

Решение.

Посевная площадь равна отношению валового сбора к урожайности. Запишем исходную таблицу в виде:

| Зерновая культура | Урожайность, ц/га | | Посевная площадь, га | |
|-------------------|-------------------|----------------|----------------------|----------------|
| | 2000 г | | 2001 г | |
| | базисный p_0 | отчетный p_1 | базисный q_0 | отчетный q_1 |
| Пшеница озимая | 22,3 | 29,1 | 7,71 | 8,38 |
| Пшеница яровая | 12,7 | 15,7 | 13,62 | 14,39 |

- 1) Индекс урожайности пшеницы переменного состава равен

$$I_{n.c.} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} \cdot \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{29,1 \cdot 8,38 + 15,7 \cdot 14,39}{8,38 + 14,39} \cdot \frac{22,3 \cdot 7,71 + 12,7 \cdot 13,62}{7,71 + 13,62} =$$

$$= \frac{470}{22,78} \cdot \frac{345}{21,34} = 1,2759,$$

или 127,59%.

- Индекс урожайности пшеницы постоянного (фиксированного) состава равен

$$I_{ф.с.} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{470}{369,80} = 1,2710, \text{ или } 127,10\%.$$

Индекс структурных сдвигов (влияние изменения структуры посевных площадей на динамику средней урожайности) равен

$$I_{стр} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} \cdot \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{369,80}{22,78} \cdot \frac{345}{21,34} = 1,0039, \text{ или } 100,39\%.$$

2) Изменение (в абсолютном выражении) валового сбора пшеницы в 2001 году по сравнению с 2000 годом

$$\Delta V = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = 470 - 345 = 125 \text{ млн. ц.}$$

Изменение валового сбора пшеницы в 2001 году по сравнению с 2000 годом за счет изменения урожайности озимой и яровой пшеницы равно

$$\Delta V(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 470 - 369,80 = 100,20 \text{ млн. ц.}$$

Изменение валового сбора пшеницы в 2001 году по сравнению с 2000 годом за счет изменения структуры посевных площадей равно

$$\Delta P(Q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 369,80 - 345 = 24,80 \text{ млн. ц.}$$

Выводы. Валовой сбора пшеницы в 2001 году по сравнению с 2000 годом увеличился на 125 млн. ц.. Это вызвано, в первую очередь, ростом урожайности озимой и яровой пшеницы, а именно, рост за счет данного фактора составил 100,2 млн. ц. Рост сбора пшеницы в 2001 году за счет изменения структуры посевных площадей составил 24,8 млн. ц.

Задача 7.18.

Оборот предприятия увеличился за отчетный период на 8%, а численность работников сократилась на 4%. Определите, как изменилась производительность труда работников торговли. Приведите формулы используемых индексов. Покажите их взаимосвязь.

Решение.

Пусть в базисном периоде оборот предприятия и численность работников составляли по 100%. Тогда составим таблицу

| Оборот предприятия, % | | Численность работников, % | |
|-----------------------|--------------------|---------------------------|----------------|
| Период | | Период | |
| базисный $q_0 p_0$ | отчетный $q_1 p_1$ | базисный q_0 | отчетный q_1 |
| 100 | 108 | 100 | 96 |

Производительность труда равна отношению оборота предприятия к численности работников. В результате получаем, что индекс производительности труда равен

$$I_p = \frac{p_1}{p_0} = \frac{\frac{q_1 p_1}{q_0 p_0}}{\frac{q_0 p_0}{q_0}} = \frac{108}{100} = \frac{108}{96} = 1,125, \text{ или } 112,5\%.$$

Таким образом, производительность труда работников торговли в текущем периоде выросла по сравнению с базисным периодом на 12,5%.

Задача 7.19.

Имеются следующие данные об обороте розничной торговли и численности населения района, обслуживаемого потребительской кооперацией, за два периода:

| Показатели | Базисный период | Отчетный период |
|---|-----------------|-----------------|
| Оборот, млн. руб. | 226,8 | 266,4 |
| Среднегодовая численность обслуживаемого населения, тыс. чел. | 36 | 37 |

Определите:

- 1) Оборот на душу населения;
- 2) Общую сумму прироста оборота в отчетном году по сравнению с базисным – всего, в том числе за счет изменения продажи на душу населения и численности населения;
- 3) Долю прироста оборота за счет каждого фактора.

Сделайте выводы.

Решение.

1) Оборот на душу населения равен отношению оборота к среднегодовой численности обслуживаемого населения.

В базисном периоде оборот на душу населения составил $226,8/36 = 6,3$ тыс. руб.

В отчетном периоде оборот на душу населения составил $266,4/37 = 7,2$ тыс. руб.

Тогда составим таблицу

| Оборот на душу населения, тыс. руб. | | Численность населения, тыс. чел. | |
|-------------------------------------|----------------|----------------------------------|----------------|
| Период | | Период | |
| базисный p_0 | отчетный p_1 | базисный q_0 | отчетный q_1 |
| 6,3 | 7,2 | 36 | 37 |

2) Общую сумму прироста оборота в отчетном году по сравнению с базисным:

$$\Delta V = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = 7,2 \cdot 37 - 6,3 \cdot 36 = 266,4 - 226,8 = 39,6 \text{ млн. руб.}$$

Прирост оборота в отчетном году по сравнению с базисным за счет изменения оборота на душу населения составил

$$\Delta V(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 7,2 \cdot 37 - 6,3 \cdot 37 = 33,3 \text{ млн. руб.}$$

Прирост оборота в отчетном году по сравнению с базисным за счет изменения численности населения составил

$$\Delta P(Q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 6,3 \cdot 37 - 6,3 \cdot 36 = 6,3 \text{ млн. руб.}$$

3) Доля прироста оборота в отчетном году по сравнению с базисным за счет изменения оборота на душу населения составила

$$\delta V(P) = \frac{\Delta V(P)}{\Delta V} = \frac{33,6}{39,6} = 0,841, \text{ или } 84,1\%.$$

Доля прироста оборота в отчетном году по сравнению с базисным за счет изменения численности населения составила

$$\delta V(Q) = \frac{\Delta V(Q)}{\Delta V} = \frac{6,3}{39,6} = 0,159, \text{ или } 15,9\%.$$

Выводы.

Рост оборота в отчетном году произошел за счет изменения как оборота на душу населения, так и численности населения.

В отчетном году рост оборота, в большей степени, произошел за счет изменения оборота на душу населения.

Задача 7.20.

Данные о финансовых результатах и обороте общественного питания райпо за два периода, тыс. руб.:

| Показатели | Базисный период | Отчетный период |
|------------------------------|-----------------|-----------------|
| Валовая прибыль | 757 | 1487 |
| Коммерческие расходы | 508 | 1031 |
| Оборот общественного питания | 1249 | 2184 |

Вычислите:

- 1) Прибыль от продаж за каждый период;
- 2) Уровень издержек и рентабельность продаж за каждый период;
- 3) Абсолютное изменение прибыли, в том числе за счет динамики рентабельности и объема оборота.

Решение.

- 1) Прибыль от продаж равна разности между валовой прибылью и коммерческими расходами.

В базисном периоде прибыль от продаж равна

$$D_0 = 757 - 508 = 249 \text{ тыс. руб.}$$

В отчетном периоде прибыль от продаж равна

$$D_1 = 1487 - 1031 = 456 \text{ тыс. руб.}$$

2) Издержки равны разности между оборотом и валовой прибылью.

В базисном периоде уровень издержек равен

$$Z_0 = 1249 - 757 = 492 \text{ тыс. руб.}$$

В отчетном периоде уровень издержек равен

$$Z_1 = 2184 - 1487 = 697 \text{ тыс. руб.}$$

Рентабельность продаж равна отношению валовой прибыли к обороту.

В базисном периоде рентабельность равна

$$R_0 = \frac{757}{1249} = 0,606, \text{ или } 60,6\%.$$

В отчетном периоде рентабельность равна

$$R_1 = \frac{1487}{2184} = 0,681, \text{ или } 68,1\%.$$

3) Составим таблицу

| Рентабельность продаж | | Оборот, тыс. руб. | |
|-----------------------|----------------|-------------------|----------------|
| Период | | Период | |
| базисный p_0 | отчетный p_1 | базисный q_0 | отчетный q_1 |
| 0,606 | 0,681 | 1249 | 2184 |

Абсолютное изменение прибыли в отчетном году по сравнению с базисным равно

$$\Delta D = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = 0,681 \cdot 2184 - 0,606 \cdot 1249 = 1487 - 757 = 730 \text{ тыс. руб.}$$

Изменение прибыли в отчетном году по сравнению с базисным за счет динамики рентабельности составило

$$\Delta D(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 0,681 \cdot 2184 - 0,606 \cdot 2184 = 1487 - 1329,69 = 163,31 \text{ тыс. руб.}$$

Изменение прибыли в отчетном году по сравнению с базисным за счет изменения объема оборота составило

$$\Delta D(Q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 0,606 \cdot 2184 - 0,606 \cdot 1249 = 1329,69 - 757 = 566,69 \text{ тыс. руб.}$$

Задача 7.21.

Имеются данные о себестоимости и произведенной продукции на двух предприятиях:

| Вид продукции | Предприятие А | | Предприятие В | |
|---------------|---------------------|-----------------|---------------------|-----------------|
| | Себестоимость, руб. | Произведено, шт | Себестоимость, руб. | Произведено, шт |
| Платок | 35 | 1000 | 30 | 100 |
| Шкаф | 20 | 500 | 20 | 1000 |
| Варежки | 45 | 400 | 40 | 1500 |

Рассчитать индекс себестоимости продукции предприятия *A*, по сравнению с предприятием *B*.

Решение.

Индекс себестоимости продукции предприятия *A*, по сравнению с предприятием *B* равен отношению средней себестоимости продукции предприятия *A* к средней себестоимости продукции предприятия *B*, т.е.

$$I_{AB} = \frac{\sum p_i^A n_i^A}{\sum n_i^B} = \frac{35 \cdot 1000 + 20 \cdot 500 + 45 \cdot 400}{1000 + 500 + 400} = \frac{33,158}{31,923} = 1,039, \text{ или } 103,9\%.$$

Задача 7.22.

Имеются следующие данные о реализации фруктов в городе:

| Наименование товара | Август | | Сентябрь | |
|---------------------|--------------|-------------|--------------|-------------|
| | Цена за 1 кг | Продано, т. | Цена за 1 кг | Продано, т. |
| Яблоки | 16 | 36 | 14 | 40 |
| Виноград | 28 | 44 | 20 | 52 |
| Персики | 30 | 18 | 35 | 9 |

Определить:

1. Индивидуальные индексы цены и физического объема продаж.
2. Общие индексы цены и физического объема реализации.
3. Общий индекс товарооборота и его взаимосвязь с индексами цены и физического объема.
4. Изменение товарооборота в абсолютном выражении всего и за счет: а) изменения цен; б) изменения физического объема продаж.

Сделать выводы.

Решение.

Имеем таблицу

| Наименование товара | Август | | Сентябрь | |
|---------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| | Цена за 1 кг p_0 | Продано, т. q_0 | Цена за 1 кг p_1 | Продано, т. q_1 |
| Яблоки | 16 | 36 | 14 | 40 |
| Виноград | 28 | 44 | 20 | 52 |
| Персики | 30 | 18 | 35 | 9 |

1. Индивидуальный индекс цен равен

$$i_p = \frac{p_1}{p_0},$$

где p_0, p_1 – цена продукции в базисном и отчетном периодах соответственно.

Индивидуальный индекс физического объема продаж равен

$$i_q = \frac{q_1}{q_0},$$

где q_0, q_1 – физического объема продаж продукции в базисном и отчетном периодах соответственно.

Подставив соответствующие значения, получим следующую таблицу рассчитанных значений индивидуальных индексов:

| Наименование товара | Индивидуальные индексы, % | |
|---------------------|---------------------------|---------------------------|
| | цен | физического объема продаж |
| Яблоки | 87,50 | 111,11 |
| Виноград | 71,43 | 118,18 |
| Персики | 116,67 | 50,00 |

2. Общий индекс цен равен:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{14 \cdot 40 + 20 \cdot 52 + 35 \cdot 9}{16 \cdot 40 + 28 \cdot 52 + 30 \cdot 9} = \frac{1915}{2366} = 0,8094, \text{ или } 80,94\%.$$

Общий индекс физического объема продаж равен:

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{16 \cdot 40 + 28 \cdot 52 + 30 \cdot 9}{16 \cdot 36 + 28 \cdot 44 + 30 \cdot 18} = \frac{2366}{2344} = 1,0077 \text{ или } 100,77\%.$$

3. Общий индекс товарооборота равен:

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{14 \cdot 40 + 20 \cdot 52 + 35 \cdot 9}{16 \cdot 36 + 28 \cdot 44 + 30 \cdot 18} = \frac{1915}{2344} = 0,8156 \text{ или } 81,56\%.$$

Взаимосвязь индексов имеет вид:

$$I_{pq} = I_p \cdot I_q = 0,8094 \cdot 1,0077 = 0,8156.$$

4. Суммарное изменение товарооборота в абсолютном выражении равно

$$\Delta PQ = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = 1915 - 2348 = -433 \text{ тыс. руб.}$$

Изменение товарооборота за счет изменения цен равно

$$\Delta PQ(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 1915 - 2366 = -451 \text{ тыс. руб.}$$

Изменение товарооборота за счет изменения физического объема продаж равно

$$\Delta PQ(Q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 2366 - 2348 = 18 \text{ тыс. руб.}$$

Выводы. Общий товарооборот в фактических ценах уменьшился на 18,44%. Это произошло за счет снижения цен. При этом физический объем продаж в сентябре остался практически тем же, что и в августе.

Задача 7.23.

На производство продукции в совхозе, в базисном и отчетном периодах, было затрачено следующее количество рабочего времени:

| Продукция | Объем продукции, ц. | | Общие затраты рабочего времени, человеко-дни | |
|-----------|---------------------|-----------------|--|-----------------|
| | Базисный период | Отчетный период | Базисный период | Отчетный период |
| Зерно | 16000 | 18000 | 5000 | 5000 |
| Овощи | 20000 | 25000 | 2500 | 3000 |

Определите индивидуальные и общий индексы динамики производительности труда.

Решение.

Производительность труда p равна отношению объема продукции v к общим затратам рабочего времени q , т.е. $p = \frac{v}{q}$. Введем в таблицу рассчитанную по этому соотношению производительность труда.

| Продукция | Производительность труда, ц./человеко-день | | Общие затраты рабочего времени, человеко-дни | |
|-----------|--|------------------------|--|------------------------|
| | Базисный период, p_0 | Отчетный период, p_1 | Базисный период, q_0 | Отчетный период, q_1 |
| Зерно | 3,2 | 3,6 | 5000 | 5000 |
| Овощи | 8 | 8,333 | 2500 | 3000 |

Индивидуальный индекс динамики производительности труда при производстве зерна равен

$$i_1 = \frac{p_1^1}{p_1^0} = \frac{3,6}{3,2} = 1,125, \text{ или } 112,5\%.$$

Индивидуальный индекс динамики производительности труда при производстве овощей равен

$$i_2 = \frac{p_2^1}{p_2^0} = \frac{8,333}{8} = 1,0417, \text{ или } 104,17\%.$$

Общий индекс динамики производительности труда равен

$$I_p = \frac{\sum p_i^1 q_i^1}{\sum p_i^0 q_i^1} = \frac{3,6 \cdot 5000 + 8,333 \cdot 3000}{3,2 \cdot 5000 + 8 \cdot 3000} = \frac{43000}{40000} = 1,075, \text{ или } 107,5\%,$$

т.е. производительность труда в совхозе в отчетном периоде выросла на 7,5% по сравнению с базисным периодом.

Задача 7.24.

Имеются данные по производственной фирме:

| Изделие | Общие затраты на производство в отчетном периоде, тыс. р. | Изменение себестоимости в отчетном периоде по сравнению с базисным, % |
|---------|---|---|
| А | 2468 | +6,5 |
| Б | 11740 | +8,9 |
| В | 1960 | Без изменения |

Определить:

- 1) Индивидуальные и общий индексы себестоимости;
- 2) Абсолютное изменение затрат фирмы вследствие изменения себестоимости изделий.

Решение.

1) Индивидуальный индекс себестоимости определяется как темп роста анализируемого показателя и равен отношению значения показателя в текущий период к значению в базисном периоде

$$i_i = \frac{p_i^1}{p_i^0}.$$

Из исходной таблицы имеем:

- индивидуальный индекс себестоимости изделия А составляет 106,5%;
- индивидуальный индекс себестоимости изделия В составляет 108,9%;
- индивидуальный индекс себестоимости изделия А составляет 100%.

Приняв себестоимость каждого изделия p_i^0 в базисном периоде условно за 1, определим количество произведенных изделий q_i^0 :

- изделие А – $q_1^0 = 2468$ усл. ед.,
- изделие Б – $q_2^0 = 11740$ усл. ед.,
- изделие В – $q_3^0 = 1960$ усл. ед.

Себестоимость каждого изделия p_i^1 в отчетном периоде в условных единицах равна:

- $p_1^1 = 1,065$;
- $p_2^1 = 1,089$;
- $p_3^1 = 1$.

Общий индекс себестоимости определяется по формуле Ласпейреса

$$I_p = \frac{\sum q_i^0 p_i^1}{\sum q_i^0 p_i^0} = \frac{2468 \cdot 1,065 + 11740 \cdot 1,089 + 1960 \cdot 1}{2468 \cdot 1 + 11740 \cdot 1 + 1960 \cdot 1} = \frac{17373,28}{16168} = 1,0745, \text{ или } 107,45\%.$$

2) Абсолютное изменение затрат фирмы вследствие изменения себестоимости изделий равно

$$\Delta v(p) = \sum v_i^1 (i_i - 1),$$

где v_i^1 – общие затраты на производство в отчетном периоде.

Подставив в формулу исходные данные, получим

$$\Delta v(p) = \sum v_i^1 (i_i - 1) = 2468 \cdot (1,065 - 1) + 11740 \cdot (1,089 - 1) + 1960 \cdot (1 - 1) = 1205,28 \text{ тыс. р.}$$

Задача 7.25.

По комбинату пищевых концентратов имеются следующие сведения о выпуске продукции и затратах труда на ее производство:

| Виды продукции | Выпуск продукции в тоннах | | Трудоемкость 1 тонны в чел.-час. | |
|----------------|---------------------------|----------|----------------------------------|----------|
| | базисный | отчетный | базисный | отчетный |
| А | 15 | 21 | 30 | 27 |
| Б | 10 | 12 | 50 | 45 |

Требуется:

1) Определить изменения количества продукции каждого вида и ее трудоемкости (в %). Пояснить полученные результаты. Указать вид использованных индексов.

2) Определить изменение общих затрат труда на производство всей продукции (в % и чел.-часах) в целом, а также за счет: а) изменения трудоемкости единицы продукции; б) изменения количества произведенной продукции. Увязать полученные результаты в систему. Сделать выводы. Указать вид используемых индексов.

3) Рассчитать общие индексы трудоемкости единицы продукции и количества произведенной продукции по форме, отличной от агрегатной. Указать вид использованных индексов.

Решение.

Перепишем исходную таблицу в следующем виде:

| Виды продукции | Трудоемкость 1 тонны, чел.-час. | | Выпуск продукции в тоннах | |
|----------------|---------------------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------|
| | базисный период p_0 | отчетный период p_1 | базисный период q_0 | отчетный период q_1 |
| А | 30 | 27 | 15 | 21 |
| Б | 50 | 45 | 10 | 12 |

1. Индивидуальный индекс трудоемкости 1 тонны равен

$$i_p = \frac{p_1}{p_0},$$

где p_0, p_1 – трудоемкость 1 тонны в базисном и отчетном периодах соответственно.

Индивидуальный индекс выпуска продукции равен

$$i_q = \frac{q_1}{q_0},$$

где q_0, q_1 – выпуск продукции в базисном и отчетном периодах соответственно.

Подставив соответствующие значения, получим следующую таблицу рассчитанных значений индивидуальных индексов:

| Виды продукции | Индивидуальные индексы, % | |
|----------------|---------------------------|-------------------|
| | трудоемкости 1 тонны | выпуска продукции |
| А | 90,0 | 140,0 |
| Б | 90,0 | 120,0 |

Из таблицы видим, что:

- относительное изменение выпуска продукции А и Б составило соответственно -10% и -10% ;
- относительное изменение трудоемкости 1 тонны продукции А и Б составило соответственно 40% и 20% .

2. Используем агрегатные индексы.

Изменение общих затрат труда на производство всей продукции составило

$$\Delta PQ = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = 1107 - 950 = 157 \text{ т.-чел.-час.}$$

Относительное изменение общих затрат труда на производство всей продукции составило

$$\delta PQ = \frac{\sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{1107 - 950}{950} = 0,1653, \text{ или } 16,53\%.$$

Изменение общих затрат труда на производство всей продукции за счет изменения трудоемкости единицы продукции равно

$$\Delta PQ(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 1107 - 1230 = -123 \text{ т.-чел.-час.}$$

Изменение общих затрат труда на производство всей продукции за счет изменения количества произведенной продукции составило

$$\Delta PQ(Q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 1107 - 950 = 280 \text{ т.-чел.-час.}$$

Увяжем полученные результаты в систему:

$$\Delta PQ = \Delta PQ(P) + \Delta PQ(Q).$$

Выводы. Рост общих затрат на производство всей продукции произошел только за счет количества произведенной продукции. При этом общие затраты труда на производство всей продукции за счет изменения трудоемкости единицы продукции за отчетный период уменьшились.

3. Общий индекс трудоемкости единицы продукции можно найти по формуле

$$I_p = \frac{\sum i_p^i p_0^i}{\sum p_0^i} = \frac{0,9 \cdot 30 + 0,9 \cdot 50}{30 + 50} = 0,9, \text{ или } 90\%.$$

Общий индекс количества произведенной продукции можно найти по формуле

$$I_q = \frac{\sum i_q^i q_1^i}{\sum q_1^i} = \frac{1,4 \cdot 21 + 1,2 \cdot 12}{21 + 12} = 1,3273, \text{ или } 132,73\%.$$

Данные формулы представляют собой средние арифметические взвешенные индивидуальных индексов трудоемкости единицы продукции и количества произведенной продукции.

Задача 7.26.

Имеются следующие данные о выпуске одноименной продукции и ее себестоимости по двум заводам отрасли:

| Завод | Производство продукции, тыс. м ² | | Себестоимость 1 м ² , тыс. руб. | |
|-------|---|----------|--|----------|
| | базисный | отчетный | базисный | отчетный |
| 1 | 200 | 250 | 6,0 | 6,5 |
| 2 | 400 | 500 | 5,0 | 4,0 |

Определить:

1) Как изменилась себестоимость 1 м² продукции на каждом заводе в отдельности и по двум предприятиям в целом;

2) Какое влияние на изменение средней себестоимости 1 м² продукции по совокупности заводов оказало изменение:

а) себестоимости 1 м² продукции по каждому заводу; б) удельного веса продукции, производимой на заводах с разным уровнем себестоимости.

3) Изменение общей суммы затрат на производство продукции по двум заводам в целом и в том числе за счет изменения: а) объема производства одноименной продукции; б) средней себестоимости 1 м² продукции; в) себестоимости 1 м² продукции по отдельным заводам; г) удельного веса продукции, производимой на заводах с разным уровнем себестоимости.

Проверьте увязку полученных результатов в систему. Сделайте выводы.

Решение.

Перепишем исходную таблицу в следующем виде:

| Завод | Себестоимость 1 м ² , тыс. руб. | | Производство продукции, тыс. м ² | |
|-------|--|--------------------------------|---|--------------------------------|
| | базисный период p ₀ | отчетный период p ₁ | базисный период q ₀ | отчетный период q ₁ |
| 1 | 6 | 6,5 | 200 | 250 |
| 2 | 5 | 4 | 400 | 500 |

Индивидуальный индекс себестоимости 1 м² продукции равен

$$i_p = \frac{p_1}{p_0},$$

где p₀, p₁ – трудоемкость 1 тонны в базисном и отчетном периодах соответственно.

Индивидуальный индекс себестоимости 1 м² продукции завода 1 равен

$$i_p^1 = \frac{p_1^1}{p_0^1} = \frac{6,5}{6} = 1,083, \text{ т.е. себестоимость 1 м}^2 \text{ продукции завода 1 за отчетный период}$$

выросла на 8,3%.

Индивидуальный индекс себестоимости 1 м² продукции завода 2 равен

$$i_p^2 = \frac{p_1^2}{p_0^2} = \frac{4}{5} = 0,8, \text{ т.е. себестоимость 1 м}^2 \text{ продукции завода 1 за отчетный период}$$

уменьшилась на 20%.

Индекс себестоимости 1 м² продукции по двум предприятиям в целом равен

$$I_p = \frac{\sum_i p_1 q_1}{\sum_i p_0 q_1} = \frac{3625}{4000} = 0,9063, \text{ или } 90,63\%,$$

т.е. общая сумма затрат на производство продукции по двум заводам в целом за счет изменения средней себестоимости 1 м² продукции уменьшилась на 9,37%.

Индекс производства продукции по двум предприятиям в целом равен

$$I_q = \frac{\sum_i p_0 q_1}{\sum_i p_0 q_0} = \frac{4000}{3200} = 1,25, \text{ или } 125,00\%,$$

т.е. общая сумма затрат на производство продукции по двум заводам в целом за счет изменения объема производства одноименной продукции возросла на 25,0%.

Индекс общей суммы затрат на производство продукции по двум заводам равен

$$I_{pq} = \frac{\sum_i p_1 q_1}{\sum_i p_0 q_0} = \frac{3625}{3200} = 1,1328, \text{ или } 113,28\%,$$

т.е. общая сумма затрат на производство продукции по двум заводам в целом выросла на 13,28%.

Индекс средней себестоимости 1 м² продукции переменного состава равен

$$I_{n.c} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{3625}{750} : \frac{3200}{600} = 0,9063, \text{ или } 90,63\%,$$

т.е. изменение себестоимости 1 м² продукции по каждому заводу уменьшило среднюю себестоимость 1 м² продукции по совокупности заводов на 9,37%.

Индекс средней себестоимости 1 м² продукции постоянного состава равен

$$I_{\phi.c} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{4000}{3625} = 1,1035 \text{ или } 110,35\%.$$

т.е. изменение удельного веса продукции, производимой на заводах с разным уровнем себестоимости увеличило среднюю себестоимость 1 м² продукции по совокупности заводов на 10,35%.

Проверим увязку полученных результатов в систему. Имеем:

$$I_{pq} = I_p \cdot I_q = 0,9063 \cdot 1,25 = 1,1328 \text{ - верно,}$$

Выводы. Увеличение общей суммы затрат на производство продукции по двум заводам в отчетном периоде вызвано ростом производства продукции по двум предприятиям, в то время как средняя себестоимость 1 м² продукции, наоборот, уменьшилась.

Задача 7.27.

| Товарооборот в ценах соответствующего периода, млн. руб. | | | |
|--|-----------------|-----------------|------------------|
| Товары | Базисный период | Отчетный период | Изменение цен, % |
| Телевизоры | 1500 | 1580 | 12 |
| Ткани | 300 | 270 | 15 |
| Часы | 200 | 250 | -11 |
| Канцтовары | 100 | 85 | 0 |

Определить:

1. Общие индексы цен, стоимости и физического объема товарооборота.
2. Общую сумму экономии или дополнительных затрат покупателей за счет изменения цен.

Решение.

Используя исходные данные, и приняв цены в базисном периоде за 100%, получим следующую таблицу.

| Товары | Товарооборот в фактических ценах за базисный период, млн. руб. <i>p₀q₀</i> | Товарооборот в фактических ценах за отчетный период, млн. руб. <i>p₁q₁</i> | Цены в базисном периоде, % <i>p₀</i> | Цены в отчетном периоде, % <i>p₁</i> |
|------------|---|---|---|---|
| Телевизоры | 1500 | 1580 | 100 | 112 |
| Ткани | 300 | 270 | 100 | 115 |
| Часы | 200 | 250 | 100 | 89 |
| Канцтовары | 100 | 85 | 100 | 100 |

Общий индекс стоимости равен

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{2185}{2100} = 1,0405, \text{ или } 104,05\%.$$

Общий индекс цен равен

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{2185}{2011,40} = 1,0863, \text{ или } 108,63\%.$$

Общий индекс физического объема товарооборота равен

$$I_q = \frac{I_{pq}}{I_p} = \frac{1,0405}{1,0863} = 0,9578, \text{ или } 95,78\%.$$

Общую сумму дополнительных затрат покупателей за счет изменения цен составила

$$\Delta PQ(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 2185 - 2011,40 = 173,60 \text{ млн. руб.}$$

Задача 7.28.

По информации о работе предприятия определите:

- 1) Индивидуальный и общий индекс физического объема;
- 2) Общий индекс цен, если общий индекс стоимости продукции равен 1,21.

| Виды продукции | Стоимость продукции в базисном периоде, млн. руб. | Изменение физического объема производства, % |
|----------------|---|--|
| А | 240 | Без изменения |
| Б | 180 | +11 |
| В | 1000 | -20 |

Решение.

1. Индивидуальный индекс определяется как отношение значения признака в текущем периоде к значению в базисном периоде. Он равен:

- для продукции А $i_A = 1$, или 100%,
- для продукции Б $i_B = 1,11$, или 111%,
- для продукции В $i_V = 0,8$, или 80%.

Общий индекс физического объема производства определяется по формуле:

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0},$$

где p_0, p_1 – стоимость продукции в базисном и текущем периоде, соответственно, q_0, q_1 – физический объем производства в базисном и текущем периоде, соответственно.

Т.к. индекс характеризует относительное изменение, то в качестве значений p и q можно использовать, как фактические, так и условные значения. Поэтому общий индекс физического объема производства равен

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{240 \cdot 1 + 180 \cdot 1,11 + 1000 \cdot 0,8}{240 \cdot 1 + 180 \cdot 1 + 1000 \cdot 1} = \frac{1239,8}{1420} = 0,8731, \text{ или } 87,31\%.$$

2. Общий индекс цен определяется по формуле

$$I_p = \frac{I_{pq}}{I_q},$$

где I_{pq} – общий индекс стоимости продукции.

Отсюда имеем

$$I_p = \frac{I_{pq}}{I_q} = \frac{1,21}{0,8731} = 1,3859, \text{ или } 138,59\%.$$

Задача 7.29.

Имеются данные о продаже товаров в розничной торговле области:

| Группа товаров | Товарооборот, млн. руб. | | Групповые индексы цен, % |
|---------------------|-------------------------|-----------------|--------------------------|
| | Базисный период | Отчетный период | |
| Мясо и мясопродукты | 170 | 232 | 106 |
| Рыба | 90 | 126 | 108 |
| Овощи | 60 | 80 | 100 |

Определите общие индексы: товарооборота, цен, физического объема реализации.

Сделайте выводы.

Решение.

Используя исходные данные, и приняв цены в базисном периоде за 1, получим следующую таблицу:

| Группа товаров | Товарооборот, млн. руб. | | Цены, усл. ед. | |
|---------------------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| | Базисный период, $q_i^0 p_i^0$ | Отчетный период, $q_i^1 p_i^1$ | Базисный период, \tilde{p}_i^0 | Отчетный период, \tilde{p}_i^1 |
| Мясо и мясопродукты | 170 | 232 | 1 | 1,06 |
| Рыба | 90 | 126 | 1 | 1,08 |
| Овощи | 60 | 80 | 1 | 1 |

1. Общий индекс товарооборота в фактических ценах равен:

$$I_{pq} = \frac{\sum_i q_i^1 p_i^1}{\sum_i q_i^0 p_i^0} = \frac{232 + 126 + 80}{170 + 90 + 60} = \frac{438}{320} = 1,3688, \text{ или } 136,88\%.$$

2. Общий индекс цен равен:

$$I_p = \frac{\sum_i q_i^1 p_i^1}{\sum_i q_i^1 p_i^0} = \frac{\sum_i q_i^1 p_i^1}{\sum_i \tilde{q}_i^1 \tilde{p}_i^0} = \frac{\sum_i q_i^1 p_i^1}{\sum_i \frac{q_i^1 p_i^1}{\tilde{p}_i^1} \tilde{p}_i^0} = \frac{438}{\frac{232}{1,06} \cdot 1 + \frac{126}{1,08} \cdot 1 + \frac{80}{1} \cdot 1} = 1,0541, \text{ или } 105,41\%.$$

3. Общий индекс физического объема товарооборота, используя взаимосвязь индексов, определим как:

$$I_q = \frac{I_{pq}}{I_p} = \frac{1,3688}{1,0541} = 1,2985, \text{ или } 129,85\%.$$

Выводы. В отчетном периоде произошло увеличение товарооборота в фактических ценах на 36,88%. Данный рост главным образом произошел за счет увеличения физического объема товарооборота.

Задача 7.30.

Имеются данные о продаже товаров на одном из рынков города:

| Вид товара | Единица измерения | Продано товаров, тыс. ед. | | Цена единицы, р. | |
|------------|-------------------|---------------------------|-----|------------------|-----|
| | | апрель | май | апрель | май |
| А | кг | 68 | 62 | 32 | 33 |
| Б | л | 24 | 24 | 48 | 50 |
| В | кг | 20 | 16 | 240 | 254 |

Определите:

1. Индивидуальные индексы по каждому товару;
 2. Общий индекс цен:
 - а) по формуле Ласпейреса,
 - б) по формуле Пааше;
 3. Перерасход денежных средств населения в результате повышения цен на товары.
- Сделайте выводы

Решение.

1. Индивидуальный индекс цен равен

$$i_p = \frac{p_1}{p_0},$$

где p_0, p_1 – цена продукции в базисном и отчетном периодах соответственно.

Индивидуальный индекс физического объема продаж равен

$$i_q = \frac{q_1}{q_0},$$

где q_0, q_1 – физического объема продаж продукции в базисном и отчетном периодах соответственно.

Подставив соответствующие значения, получим следующую таблицу рассчитанных значений индивидуальных индексов:

| Товар | Единица измерения | Индивидуальные индексы, % | |
|-------|-------------------|---------------------------|---------------------------|
| | | цен | физического объема продаж |
| А | кг | 1,031 | 0,912 |
| Б | л | 1,042 | 1 |
| В | кг | 1,058 | 0,8 |

2. Агрегатный индекс цен по формуле Пааше равен:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{33 \cdot 62 + 50 \cdot 24 + 254 \cdot 16}{32 \cdot 62 + 48 \cdot 24 + 240 \cdot 16} = \frac{7310}{6976} = 1,0479, \text{ или } 104,79\%.$$

Агрегатный индекс цен по формуле Ласпейреса равен:

$$I'_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{33 \cdot 68 + 50 \cdot 24 + 254 \cdot 20}{32 \cdot 68 + 48 \cdot 24 + 240 \cdot 20} = \frac{8524}{8128} = 1,0487, \text{ или } 104,87\%.$$

Изменение общего товарооборота за счет изменения цен равно:

$$\Delta PQ(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 7310 - 6976 = 334 \text{ тыс. руб.}$$

Изменение общего товарооборота в целом составило

$$\Delta PQ(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_0 = 7310 - 8128 = -818 \text{ тыс. руб.}$$

Общий товарооборот в фактических ценах уменьшился на 818 тыс. руб. Это произошло за счет уменьшения физического объема продаж. При этом уровень цен в мае вырос по сравнению с апрелем почти на 5%.

Задача 7.31.

Имеются следующие данные о реализации товаров:

| Товарная группа | Товарооборот отчетного периода, тыс. р. | Изменение цен в отчетном периоде по сравнению с базисным, % |
|-----------------|---|---|
| Шерстяные ткани | 585 | +10 |
| Одежда | 2160 | +20 |
| Обувь | 370 | +15 |

Исчислите в отчетном периоде по сравнению с базисным:

1. Общий индекс цен.
2. Общий индекс физического объема товарооборота, если известно, что товарооборот в фактических ценах снизился на 14%.

Решение.

Используя исходные данные, и приняв цены в базисном периоде за 1, получим следующую таблицу:

| Товарная группа | Товарооборот отчетного периода, тыс. р. $q_1 p_1$ | Физический товарооборот в отчетном периоде, усл. ед. q_1 | Цены базисном периоде, % p_0 | Цены отчетном периоде, % p_1 |
|-----------------|--|---|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Шерстяные ткани | 585 | 5,318 | 100 | 110 |
| Одежда | 2160 | 18 | 100 | 120 |
| Обувь | 370 | 3,217 | 100 | 115 |

Общий индекс цен равен

$$I_p = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0} = \frac{585 + 2160 + 370}{5,318 \cdot 100 + 18 \cdot 100 + 3,217 \cdot 105} = \frac{3115}{2653,557} = 1,1739, \text{ или } 117,39\%.$$

Общий индекс физического объема товарооборота равен

$$I_q = \frac{I_{pq}}{I_p} = \frac{1 - 0,14}{1,1739} = 0,7326, \text{ или } 73,26\%.$$

Выводы.

Цены по рассматриваемым товарным группам выросли в отчетном периоде в среднем на 17,39%.

Физический объем товарооборота по рассматриваемым товарным группам в отчетном периоде уменьшился на 26,74%.

Задача 7.32.

Имеются данные о продаже моркови на рынках города:

| Форма торговли | Объем продажи, тыс. кг. | | Цена за 1 кг, р. | |
|-------------------|-------------------------|-------|------------------|-------|
| | III кв | IV кв | III кв | IV кв |
| Государственная | 4 | 5 | 4 | 7 |
| Негосударственная | 5 | 6 | 3 | 5 |

Определить:

1. Индивидуальные индексы физического объема продажи и цен.
2. Общие индексы цены, физического объема продаж и товарооборота. Покажите взаимосвязь между ними.
3. Индекс средней цены моркови (переменного состава).
4. Индекс влияния структурных сдвигов в объеме продаж. Покажите взаимосвязь индексов переменного, постоянного состава и структурных сдвигов.
5. Изменение средней цены моркови в абсолютном выражении и влияние на это изменение факторов: а) изменение цен, б) изменение структурных сдвигов в объеме продажи.

Сделайте выводы.

Решение.

1. Индивидуальный индекс цен равен

$$i_p = \frac{p_1}{p_0},$$

где p_0, p_1 – цена продукции в базисном и отчетном периодах соответственно.

Индивидуальный индекс физического объема продаж равен

$$i_q = \frac{q_1}{q_0},$$

где q_0, q_1 – физического объема продаж продукции в базисном и отчетном периодах соответственно.

Подставив соответствующие значения, получим следующую таблицу рассчитанных значений индивидуальных индексов:

| Форма торговли | Индивидуальные индексы, % | |
|-------------------|---------------------------|---------------------------|
| | цен | физического объема продаж |
| Государственная | 1,75 | 1,25 |
| Негосударственная | 1,667 | 1,2 |

2. Запишем исходную таблицу в виде:

| Форма торговли | Цена 1 кг, р. | | Продано моркови, тыс. кг. | |
|-------------------|----------------|----------------|---------------------------|----------------|
| | периоды | | периоды | |
| | базисный p_0 | отчетный p_1 | базисный q_0 | отчетный q_1 |
| Государственная | 4 | 7 | 4 | 5 |
| Негосударственная | 3 | 5 | 5 | 6 |

Общий индекс цен равен:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{7 \cdot 5 + 5 \cdot 6}{4 \cdot 5 + 3 \cdot 6} = \frac{65}{38} = 1,7105, \text{ или } 171,05\%.$$

Общий индекс физического объема продаж равен:

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{4 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{4 \cdot 4 + 3 \cdot 5} = \frac{38}{31} = 1,2258, \text{ или } 122,58\%.$$

Общий индекс товарооборота равен:

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{7 \cdot 5 + 5 \cdot 6}{4 \cdot 4 + 3 \cdot 5} = \frac{65}{31} = 2,0968, \text{ или } 209,68\%.$$

Взаимосвязь индексов:

$$I_{pq} = I_p \cdot I_q = 1,7105 \cdot 1,2258 = 2,0968.$$

3. Индекс средней цены моркови (переменного состава) равен:

$$I_{i.\bar{n}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{65}{11} : \frac{31}{9} = 1,7155, \text{ или } 171,55\%.$$

Индекс цен постоянного (фиксированного) состава равен:

$$I_{o.\bar{n}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{65}{38} = 1,7105 \text{ или } 171,05\%.$$

4. Индекс структурных сдвигов равен:

$$I_{\bar{n}\delta} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{38}{11} : \frac{31}{9} = 1,0029, \text{ или } 100,29\%.$$

Взаимосвязь индексов:

$$I_{стр} = I_{n.c} / I_{o.c} = 1,7155 \cdot 1,7105 = 1,0029.$$

5. Абсолютное изменение средней цены за счет изменения цен:

$$\Delta P(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 65 - 38 = 27 \text{ тыс. руб.}$$

Абсолютное изменение средней цены за счет изменения структуры проданной моркови

$$\text{равно: } \Delta P(Q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 38 - 31 = 7 \text{ тыс. руб.}$$

Выводы. Средняя цена картофеля в основном изменялась за счет изменения цены проданного картофеля

Задача 7.33.

По имеющейся информации на фирме определите недостающие в таблице показатели.

| Показатель | Изменение в % к предыдущему кварталу | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|-----|----|
| | II | III | IV |
| Себестоимость единицы продукции | +2 | +8 | ? |
| Объем производства продукции | +6 | ? | -4 |
| Затраты на производство продукции | ? | +5 | +6 |

Решение.

Обозначим: C_i – себестоимость в i -м квартале, Q_i – объем производства продукции в i -м квартале, Z_i – затраты на производство продукции в i -м квартале.

Имеем также равенство

$$Z = CQ.$$

Отсюда индекс затрат на производство продукции во II квартале будет равен

$$I_{Z_{II}} = I_{C_{II}} \cdot I_{Q_{II}} = 1,02 \cdot 1,06 = 1,081, \text{ или } +8,1\%.$$

Индекс объема производства продукции в III квартале будет равен

$$I_{Q_{III}} = \frac{I_{Z_{III}}}{I_{C_{III}}} = \frac{1,05}{1,08} = 0,972, \text{ или } -2,8\%.$$

Индекс себестоимости единицы продукции в IV квартале будет равен

$$I_{C_{IV}} = \frac{I_{Z_{IV}}}{I_{Q_{IV}}} = \frac{1,06}{0,96} = 1,104, \text{ или } +10,4\%.$$

Таким образом, таблица примет вид:

| Показатель | Изменение в % к предыдущему кварталу | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|------|-------|
| | II | III | IV |
| Себестоимость единицы продукции | +2 | +8 | +10,4 |
| Объем производства продукции | +6 | -2,8 | -4 |
| Затраты на производство продукции | +8,1 | +5 | +6 |

Задача 7.34.

Имеются данные о внутригодовой динамике заготовок с/х продукции области по кварталам за 2 года (см. табл.). Рассчитайте поквартальные индексы сезонности.

| Годы | Квартал | Заготовка продукции (млн. руб.) |
|------|---------|------------------------------------|
| 2002 | I | 27 |
| | II | 26 |
| | III | 29 |
| | IV | 28 |
| 2003 | I | 7 |
| | II | 28 |
| | III | 34 |
| | IV | 27 |

Решение.

Индекс сезонности равен

$$i_k = \frac{X_{2003}^k}{X_{2002}^k},$$

где k – номер квартала.

Индексы сезонности равны:

- в I квартале $i_I = \frac{X_{2003}^I}{X_{2002}^I} = \frac{7}{27} = 0,259$, или 25,9%;

- во II квартале $i_{II} = \frac{X_{2003}^{II}}{X_{2002}^{II}} = \frac{28}{26} = 1,077$, или 107,7%;

- в III квартале $i_{III} = \frac{X_{2003}^{III}}{X_{2002}^{III}} = \frac{34}{29} = 1,172$, или 117,2%;

- в IV квартале $i_{IV} = \frac{X_{2003}^{IV}}{X_{2002}^{IV}} = \frac{27}{28} = 0,964$, или 96,4%.

Тема 8. Основы корреляционного и регрессионного анализа

Задача 8.1.

По пяти рабочим цеха имеются данные о квалификации и месячной выработке. Для изучения связи между квалификацией рабочих и их выработкой определить линейное уравнение связи и коэффициент корреляции. Дать интерпретацию коэффициентам регрессии и корреляции.

| Табельный номер рабочего | Разряд | Выработка продукции за смену, шт. |
|--------------------------|--------|-----------------------------------|
| 1 | 6 | 130 |
| 2 | 2 | 60 |
| 3 | 3 | 70 |
| 4 | 5 | 110 |
| 5 | 4 | 90 |

Решение.

Парная линейная корреляционная связь характеризуется линейной регрессией

$$\bar{y}_x = a + bx,$$

Коэффициенты a , b регрессионной модели находим методом наименьших квадратов, решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} an + b \sum x = \sum y, \\ a \sum x + b \sum x^2 = \sum yx, \end{cases}$$

где n – число рабочих (для данной задачи $n = 5$).

Для решения данной системы уравнений составим расчетную таблицу 1.

Таблица 1

| №№ | x | y | x^2 | y^2 | yx |
|-------|-----|-----|-------|-------|------|
| 1 | 6 | 130 | 36 | 16900 | 780 |
| 2 | 2 | 60 | 4 | 3600 | 120 |
| 4 | 3 | 70 | 9 | 4900 | 210 |
| 9 | 5 | 110 | 25 | 12100 | 550 |
| 5 | 4 | 90 | 16 | 8100 | 360 |
| Всего | 20 | 460 | 90 | 45600 | 2020 |

Подставим в систему уравнений найденные значения сумм:

$$\begin{cases} 5a + 20b = 460, \\ 20a + 90b = 2020. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим

$$a = 20; \quad b = 18.$$

Отсюда выборочное уравнение регрессионной зависимости месячной выработки Y от квалификации X имеет вид

$$\bar{y}_x = 20 + 18x.$$

Коэффициент линейной корреляции между двумя признаками X и Y вычисляется по формуле

$$r_{yx} = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i) \cdot (\sum y_i)}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] \cdot [n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}.$$

Подставив исходные данные в эту формулу, получим: $r_{yx} = 0,994$.

Полученное значение коэффициента линейной корреляции свидетельствует о наличии сильной положительной линейной корреляционной связи между признаками X и Y .

Задача 8.2.

По группе предприятий отрасли имеются следующие данные:

| № предприятия | Продукция, тыс. шт. | Потребление сырья, тыс. т |
|---------------|---------------------|---------------------------|
| 1 | 24,6 | 3,2 |
| 2 | 37,4 | 4,1 |
| 3 | 45,4 | 2,2 |
| 4 | 46,7 | 1,6 |
| 5 | 50,1 | 4,4 |
| 6 | 51,3 | 10,5 |
| 7 | 55,0 | 2,6 |

- 1) постройте уравнение прямой и определите коэффициент регрессии;
- 2) определите тесноту связи;
- 3) сделайте экономические выводы.

Решение.

Парная линейная корреляционная связь характеризуется линейной регрессией

$$\bar{y}_x = a + bx,$$

Коэффициенты a , b регрессионной модели находим методом наименьших квадратов, решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} an + b \sum x = \sum y, \\ a \sum x + b \sum x^2 = \sum yx, \end{cases}$$

где n – число предприятий (для данной задачи $n = 7$).

Для решения данной системы уравнений составим расчетную таблицу 1.

Таблица 1

| №№ | x | y | x^2 | y^2 | yx |
|-------|------|-------|--------|---------|---------|
| 1 | 3,2 | 24,6 | 10,24 | 605,16 | 78,72 |
| 2 | 4,1 | 37,4 | 16,81 | 1398,76 | 153,34 |
| 3 | 2,2 | 45,4 | 4,84 | 2061,16 | 99,88 |
| 4 | 1,6 | 46,7 | 2,56 | 2180,89 | 74,72 |
| 5 | 4,4 | 50,1 | 19,36 | 2510,01 | 220,44 |
| 6 | 10,5 | 51,3 | 110,25 | 2631,69 | 538,65 |
| 7 | 2,6 | 55 | 6,76 | 3025 | 143 |
| Всего | 28,6 | 310,5 | 170,82 | 14412,7 | 1308,75 |

Подставим в систему уравнений найденные значения сумм:

$$\begin{cases} 7a + 28,6b = 310,5, \\ 28,6a + 170,82b = 1308,75. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим

$$a = 41,319; \quad b = 0,744.$$

Отсюда выборочное уравнение регрессионной зависимости выпуска продукции Y от потребления сырья X имеет вид

$$\bar{y}_x = 41319 + 0,744x.$$

Коэффициент линейной корреляции между двумя признаками X и Y вычисляется по формуле

$$r_{yx} = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i) \cdot (\sum y_i)}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] \cdot [n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}.$$

Подставив исходные данные в эту формулу, получим: $r_{yx} = 0,216$.

Полученное значение коэффициента линейной корреляции свидетельствует об отсутствии линейной корреляционной связи между признаками X и Y .

Задача 8.3.

По 8 однородным магазинам имеются следующие данные:

| | | | | | | | | |
|--|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Товарооборот, тыс. руб. | 7 | 10 | 15 | 20 | 30 | 45 | 60 | 120 |
| Уровень издержек обращения по отношению к товарообороту, % | 10,0 | 9,0 | 7,5 | 6,0 | 6,3 | 5,8 | 5,4 | 5,0 |

Найдите уравнение корреляционной связи товарооборота и уровня издержек обращения.

Вычислите коэффициенты эластичности, показатели тесноты корреляционной связи. Сделайте выводы.

Решение.

Парная линейная корреляционная связь характеризуется линейной регрессией

$$\bar{y}_x = a + bx,$$

Коэффициенты a , b регрессионной модели находим методом наименьших квадратов, решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} an + b \sum x = \sum y, \\ a \sum x + b \sum x^2 = \sum yx, \end{cases}$$

где n – число магазинов (для данной задачи $n = 8$).

Для решения данной системы уравнений составим расчетную таблицу 1.

Таблица 1

| №№ | x | y | x^2 | y^2 | yx |
|-------|-----|-----|-------|--------|--------|
| 1 | 7 | 10 | 49 | 100 | 70 |
| 2 | 10 | 9 | 100 | 81 | 90 |
| 3 | 15 | 7,5 | 225 | 56,25 | 112,5 |
| 4 | 20 | 6 | 400 | 36 | 120 |
| 5 | 30 | 6,3 | 900 | 39,69 | 189 |
| 6 | 45 | 5,8 | 2025 | 33,64 | 261 |
| 7 | 60 | 5,4 | 3600 | 29,16 | 324 |
| 8 | 120 | 5 | 14400 | 25 | 600 |
| Всего | 307 | 55 | 21699 | 400,74 | 1766,5 |

Подставим в систему уравнений найденные значения сумм:

$$\begin{cases} 8a + 307b = 55, \\ 307a + 21699b = 1766,5. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим

$$a = 8,207; \quad b = -0,0347.$$

Отсюда выборочное уравнение регрессионной зависимости уровня издержек обращения Y от товарооборота X имеет вид

$$\bar{y}_x = 8,207 - 0,0347x.$$

Коэффициент линейной корреляции между двумя признаками X и Y вычисляется по формуле

$$r_{yx} = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i) \cdot (\sum y_i)}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] \cdot [n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}.$$

Подставив исходные данные в эту формулу, получим: $r_{yx} = -0,727$.

Полученное значение коэффициента линейной корреляции свидетельствует о наличии тесной отрицательной линейной корреляционной связи между признаками X и Y .

Средний коэффициент эластичности равен

$$\bar{L} = f'(\bar{x}) \frac{\bar{x}}{\bar{y}}.$$

Т.к. $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{307}{8} = 38,375$, $\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{55}{8} = 6,875$, то для линейной модели имеем

$$\bar{L} = f'(\bar{x}) \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = b \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = -0,0347 \cdot \frac{38,375}{6,875} = -0,194,$$

т.е. связь фактора с результатом можно оценить как неэластичную.

Задача 8.4.

Имеются следующие данные о расходах граждан в январе условного года:

| Вид поселения | Количество обследованных хозяйств | Среднедушевой расход, денежных единиц, за месяц | Дисперсия расходов |
|---------------|-----------------------------------|---|--------------------|
| Город | 36 | 120 | 324 |
| Село | 64 | 50 | 196 |

Определить: 1) среднедушевой расход городских и сельских жителей; 2) дисперсии душевого расхода: среднюю из групповых, межгрупповую, общую; 3) зависимость расходов от места жительства, исчислив коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

Решение.

Введем обозначения:

Таблица 1

| Вид поселения | Количество обследованных хозяйств, n_i | Среднедушевой расход, денежных единиц, за месяц, x_i | Дисперсия расходов, σ_i^2 |
|---------------|--|--|----------------------------------|
| Город | 36 | 120 | 324 |
| Село | 64 | 50 | 196 |

Среднедушевой расход городских и сельских жителей равен

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i n_i}{\sum n_i} = \frac{120 \cdot 36 + 50 \cdot 64}{36 + 64} = \frac{7520}{100} = 75,2.$$

Межгрупповая дисперсия равна

$$\sigma_{\text{факт}}^2 = \frac{\sum (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{(120 - 75,2)^2 \cdot 36 + (50 - 75,2)^2 \cdot 64}{36 + 64} = \frac{112896}{100} = 1128,96.$$

Средняя из групповых дисперсий равна

$$\sigma_{\text{ост}}^2 = \frac{\sum \sigma_i^2 \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{324 \cdot 36 + 196 \cdot 64}{36 + 64} = \frac{24208}{100} = 242,08.$$

Общая дисперсия равна

$$\sigma^2 = \sigma_{\text{факт}}^2 + \sigma_{\text{ост}}^2 = 1128,96 + 242,08 = 1371,04.$$

Коэффициент детерминации равен

$$\eta^2 = \frac{\sigma_{\text{факт}}^2}{\sigma^2} = \frac{1128,96}{1371,04} = 0,823.$$

Эмпирическое корреляционное отношение равно

$$\eta = \sqrt{\eta^2} = \sqrt{0,823} = 0,907.$$

Задача 8.5.

Для изучения тесноты связи между объемом произведенной продукции (факторный признак – X) и балансовой прибылью (результативный признак – Y) по данным задачи № 1 вычислите эмпирическое корреляционное отношение.

Сделайте выводы.

Решение.

Сгруппируем данные относительно факторного признака X :

Таблица 1

| Номер группы j | Интервалы групп по X | Значения y_j , попавшие в j -ю группу | \bar{y}_j |
|------------------|------------------------|---|-------------|
| 1 | 305– 404 | 11, 12, 14, 23 | 15 |
| 2 | 404 – 503 | 26, 28, 27, 29, 30 | 28 |
| 3 | 503 – 602 | 33, 37, 35, 36, 38, 41 | 36,67 |
| 4 | 602 – 701 | 41, 43, 45, 49, 50 | 45,6 |
| 5 | 701 – 800 | 54, 55, 59, 58, 64 | 58 |

При решении задачи 1 были найдены \bar{y}_j , внесем их в таблицу 1. Кроме того, $\bar{y} = 37,52$.

Вычислим дисперсию

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2 = \frac{5168,24}{25} = 206,73.$$

Вычислим межгрупповую дисперсию

$$\delta_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^L (\bar{y}_j - \bar{y})^2 n_j =$$

$$= \frac{1}{25} [(15 - 37,52) \cdot 4 + (28 - 37,52) \cdot 5 + (36,67 - 37,52) \cdot 6 + (45,6 - 37,52) \cdot 5 + (58 - 37,52) \cdot 5] =$$

$$= \frac{4909,707}{25} = 196,39.$$

Следовательно, эмпирическое корреляционное отношение равно

$$\eta_{yx} = \sqrt{\frac{\delta_y^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{\frac{196,39}{206,73}} = \sqrt{0,950} = 0,975.$$

Выводы.

Между объемом произведенной продукции и валовой прибылью существует тесная корреляционная связь.

Задача 8.6.

По исходным данным:

1. Установите наличие и характер связи между признаками – среднегодовая стоимость основных производственных фондов и выпуск продукции методами: а) аналитической группировки; б) корреляционной таблицы.
2. Измерьте тесноту корреляционной связи между названными признаками с использованием коэффициентов детерминации и эмпирического корреляционного отношения.

Сделайте выводы по результатам выполнения задания.

Таблица 1

Исходные данные

| № предприятия п/п | Среднегодовая стоимость основных производственных фондов, млн. руб. | Выпуск продукции, млн. руб. |
|----------------------|---|-----------------------------------|
| 1 | 31,6 | 31 |
| 2 | 25 | 27,5 |
| 3 | 15 | 25 |
| 4 | 32,5 | 34 |
| 5 | 42 | 41 |
| 6 | 38 | 36 |
| 7 | 29 | 28,6 |
| 8 | 19 | 24 |
| 9 | 40 | 40 |
| 10 | 49 | 46 |
| 11 | 31,4 | 35 |
| 12 | 28 | 29 |

| | | |
|----|------|------|
| 13 | 20 | 20 |
| 14 | 31,5 | 33,6 |
| 15 | 26 | 28,9 |
| 16 | 35 | 37 |
| 17 | 30 | 30 |
| 18 | 37 | 37 |
| 19 | 31 | 33,8 |
| 20 | 24 | 24 |
| 21 | 31 | 33 |
| 22 | 32 | 32,6 |
| 23 | 43 | 42 |
| 24 | 32 | 30 |
| 25 | 41 | 39 |
| 26 | 45 | 48 |
| 27 | 33 | 35 |
| 28 | 40 | 41 |
| 29 | 55 | 50 |
| 30 | 43 | 43 |

Решение.

Группировка предприятий по среднегодовой стоимости основных производственных фондов и выпуску продукции представлена в таблице 2.

Таблица 2

Группировка по стоимости основных производственных фондов и выпуску продукции

| № п/п | Группы предприятий по стоимости ОПФ, млн. руб. | Число предприятий | Среднегодовая стоимость ОПФ, млн. руб. | | Выпуск продукции, млн. руб. | |
|--------|--|-------------------|--|-----------|-----------------------------|-----------|
| | | | Всего | В среднем | Всего | В среднем |
| I | 15 - 23 | 3 | 54 | 18 | 69 | 23 |
| II | 23 - 31 | 6 | 162 | 27 | 168 | 28 |
| III | 31 - 39 | 12 | 396 | 33 | 408 | 34 |
| IV | 39 - 47 | 7 | 294 | 42 | 294 | 42 |
| V | 47 - 55 | 2 | 104 | 52 | 96 | 48 |
| Всего: | | 30 | 1010 | 33,667 | 1035 | 34,5 |

Из расчетных данных таблицы 5 прослеживается прямая зависимость между среднегодовой стоимостью основных производственных фондов (факторный признак x) и выпуском продукции (результативный признак y). Так с увеличением величины среднегодовой стоимости основных производственных фондов по каждой группе увеличивается соответственно выпуск продукции.

В I группе 18 – 23

Во II группе 27 – 28

В III группе 33 – 34

В IV группе 42 – 42

В V группе 52 – 48

Для измерения тесноты корреляционной связи строим аналитическую таблицу.

Таблица 3

Расчет межгрупповой дисперсии

| № п/п | Группы предприятий по ОПФ, млн. руб. x | Число предприя- тий f | Выпуск продукции, млн. руб. y | | $(\bar{y}_i - \bar{y}_0)$ | $(\bar{y}_i - \bar{y}_0)^2$ | $(\bar{y}_i - \bar{y}_0)^2 \cdot f$ |
|----------|--|-------------------------------|------------------------------------|--------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|
| | | | Всего | В среднем | | | |
| I | 15 - 23 | 3 | 69 | 23 | -11,5 | 132,25 | 396,75 |
| II | 23 - 31 | 6 | 168 | 28 | -6,5 | 42,25 | 253,5 |
| III | 31 - 39 | 12 | 408 | 34 | -0,5 | 0,25 | 3 |
| IV | 39 - 47 | 7 | 294 | 42 | 7,5 | 56,25 | 393,75 |
| V | 47 - 55 | 2 | 96 | 48 | 13,5 | 182,25 | 364,5 |
| Итого: | | 30 | 1035 | 34,5 | — | — | 1411,5 |

В I группе $\bar{y}_1 = 23$

Во II группе $\bar{y}_2 = 28$

В III группе $\bar{y}_3 = 34$

В IV группе $\bar{y}_4 = 42$

В V группе $\bar{y}_5 = 48$

$\bar{y}_0 = 34,5$.

Исчисляем межгрупповую дисперсию:

$$\delta^2 = \frac{\sum (\bar{y}_i - \bar{y}_0)^2 \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{1411,5}{30} = 47,05.$$

Определяем общую дисперсию:

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum y^2}{n} - \left(\frac{\sum y}{n} \right)^2 = \frac{37267,58}{30} - \left(\frac{1035,54}{30} \right)^2 = 1242,253 - 1190,25 = 52,003,$$

где $\sum y^2$ и $\sum y$ данные из таблицы №1

Вычисляем коэффициент детерминации:

$$\eta^2 = \frac{\delta^2}{\sigma_0^2} = \frac{47,05}{52,003} = 0,905, \text{ или } 90,5\%.$$

Вывод: Коэффициент детерминации означает, что вариация выпуска продукции на 90,5% обусловлена влиянием величины факторного признака, т.е. стоимостью основных производственных фондов. А остальные 9,5% – это неучтенные факторы.

Определяем тесноту корреляционной связи. Рассчитываем эмпирическое корреляционное отношение.

$$\eta = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma_0^2}} = \sqrt{0,905} = 0,951$$

Связь между рассмотренными признаками очень высокая, т.к. $0,951 > 0,9$.

Задача 8.7.

Капитал коммерческих банков характеризуется следующими данными:

| Собственный капитал, млн. р. | Число банков | Средний размер привлеченных средств, млн. р. | Дисперсия привлеченных средств |
|------------------------------|--------------|--|--------------------------------|
| 30 – 40 | 8 | 100 | 400 |
| 40 – 50 | 10 | 180 | 2500 |
| 50 – 60 | 2 | 200 | 3600 |

Определить показатели тесноты связи между размером собственного капитала банков и привлеченными средствами, исчислив коэффициент детерминации и эмпирическое корреляционное отношение.

Решение.

Каждой группе значений собственного капитала поставим в соответствие середину интервала возможных значений. Тогда таблица примет вид

| Собственный капитал, млн. р. | Число банков, n_i | Средний размер привлеченных средств, млн. р., \bar{y}_i | Дисперсия привлеченных средств, $s_{\varepsilon i}^2$ |
|------------------------------|---------------------|---|---|
| 35 | 8 | 100 | 400 |
| 45 | 10 | 180 | 2500 |
| 55 | 2 | 200 | 3600 |

Эмпирическое корреляционное отношение определяется по формуле

$$\eta = \sqrt{\frac{\delta_y^2}{s_y^2}},$$

где δ_y^2 – межгрупповая дисперсия; s_y^2 – общая дисперсия.

Остаточная дисперсия представляет собой среднее групповых дисперсий и находится по формуле средней арифметической взвешенной

$$s_{\varepsilon}^2 = \frac{\sum s_{\varepsilon i}^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{400 \cdot 8 + 2500 \cdot 10 + 3600 \cdot 2}{8 + 10 + 2} = \frac{35400}{20} = 1770 \text{ млн. р.}^2.$$

Средний размер привлеченных средств по всем группам банков найдем по формуле средней арифметической средней

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i n_i}{\sum n_i} = \frac{100 \cdot 8 + 180 \cdot 10 + 200 \cdot 2}{8 + 10 + 2} = \frac{3000}{20} = 150 \text{ млн. р.}$$

Межгрупповая дисперсия равна

$$\begin{aligned} \delta_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^L (\bar{y}_j - \bar{y})^2 n_j = \frac{1}{20} [(100 - 150)^2 \cdot 8 + (180 - 150)^2 \cdot 10 + (200 - 150)^2 \cdot 2] = \\ &= \frac{34000}{20} = 1700 \text{ млн. р.}^2. \end{aligned}$$

Тогда эмпирическое корреляционное отношение равно

$$\eta = \sqrt{\frac{\delta_y^2}{s_y^2}} = \sqrt{\frac{\delta_y^2}{\delta_y^2 + s_{\varepsilon}^2}} = \sqrt{\frac{1700}{1700 + 1770}} = \sqrt{\frac{1700}{3470}} = 0,70.$$

Коэффициент детерминации равен

$$R^2 = \eta^2 = 0,49.$$

Задача 8.8.

Распределение предприятий по источникам средств для их покупки характеризуется следующими данными:

| Источники средств | Зарождающийся бизнес | Зрелый бизнес | Итого |
|----------------------|----------------------|---------------|-------|
| Банковский кредит | 31 | 32 | 63 |
| Собственные средства | 38 | 15 | 53 |
| Итого | 69 | 47 | 116 |

Необходимо:

1. Вычислить коэффициенты ассоциации и контингенции.
2. Какие выводы можно сделать на основании значений этих коэффициентов?

Решение.

Таблица для вычисления коэффициентов ассоциации и контингенции имеет вид:

| | | |
|-------|-------|-----------|
| a | b | $a+b$ |
| c | d | $c+d$ |
| $a+c$ | $b+d$ | $a+b+c+d$ |

Коэффициент ассоциации равен

$$K_a = \frac{ad - bc}{ad + bc} = \frac{31 \cdot 15 - 32 \cdot 38}{31 \cdot 15 + 32 \cdot 38} = -0,447.$$

Коэффициент контингенции равен

$$K_k = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(c+d)(b+d)}} = \frac{31 \cdot 15 - 32 \cdot 38}{63 \cdot 69 \cdot 53 \cdot 47} = \frac{-751}{3290,65} = -0,228.$$

Выводы. Вычисленные значения коэффициентов ассоциации и контингенции говорят о недостаточной силе связи между рассматриваемыми признаками.

Задача 8.9.

По десяти однородным предприятиям имеются следующие данные:

| Предприятие | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Количество рабочих с профессиональной подготовкой, % | 10 | 12 | 14 | 17 | 24 | 28 | 30 | 35 | 40 | 50 |
| Количество бракованной продукции, % | 18 | 17 | 14 | 12 | 10 | 10 | 8 | 9 | 6 | 6 |

1. По исходным данным постройте однофакторную регрессионную модель зависимости выпуска бракованной продукции и профессиональной подготовкой рабочих.
2. Проверьте найденную модель на адекватность.
3. Вычислите коэффициенты эластичности между четвертым и пятым предприятиями. Сделайте выводы.

Решение.

1. Линейное уравнение регрессии между выпуском бракованной продукции и профессиональной подготовкой рабочих имеет вид:

$$y = b_0 + b_1 x + e,$$

где x – профессиональная подготовка рабочих, y – выпуск бракованной продукции, e – случайные остатки.

Коэффициенты уравнения регрессии вычисляются по формулам:

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}.$$

Составим вспомогательную таблицу

| №№ | x | y | x^2 | xy | \hat{y} | e | e^2 | $(y - \bar{y})^2$ |
|---------|-----|-----|-------|-------|-----------|----------|----------|-------------------|
| 1 | 10 | 18 | 100 | 180 | 15,74646 | 2,25354 | 5,078439 | 49 |
| 2 | 12 | 17 | 144 | 204 | 15,15315 | 1,84685 | 3,410843 | 36 |
| 3 | 14 | 14 | 196 | 196 | 14,55985 | -0,55985 | 0,313427 | 9 |
| 4 | 17 | 12 | 289 | 204 | 13,66988 | -1,66988 | 2,788513 | 1 |
| 5 | 24 | 10 | 576 | 240 | 11,59331 | -1,59331 | 2,538629 | 1 |
| 6 | 28 | 10 | 784 | 280 | 10,40669 | -0,40669 | 0,165399 | 1 |
| 7 | 30 | 8 | 900 | 240 | 9,813385 | -1,81338 | 3,288364 | 9 |
| 8 | 35 | 9 | 1225 | 315 | 8,330116 | 0,66988 | 0,448745 | 4 |
| 9 | 40 | 6 | 1600 | 240 | 6,846847 | -0,84685 | 0,71715 | 25 |
| 10 | 50 | 6 | 2500 | 300 | 3,880309 | 2,11969 | 4,49309 | 25 |
| Всего | 260 | 110 | 8314 | 2399 | 110 | - | 23,2426 | 160 |
| Среднее | 26 | 11 | 831,4 | 239,9 | 11 | - | 2,32426 | 16 |

Отсюда

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{239,9 - 26 \cdot 11}{831,4 - 26^2} = -0,2967, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 11 + 0,2067 \cdot 26 = 18,713,$$

т.е. эмпирическое линейное уравнение регрессии имеет вид

$$\hat{y} = 18,713 - 0,2967x.$$

2. Проверим уравнение регрессии на адекватность.

Коэффициент детерминации равен:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{23,243}{160} = 0,855.$$

Определим расчетное значение F -статистики: $F = (n - 2) \cdot \frac{R^2}{1 - R^2} = (10 - 2) \cdot \frac{0,855}{1 - 0,855} = 47,071.$

Критическое значение F -статистики на уровне значимости $\alpha = 0,05$ равно

$$F_{\alpha; 1; n-2} = F_{0,05; 1; 8} = 5,318.$$

Расчетное значение F -статистики оказалось больше критического уровня, поэтому уравнение регрессии с надежностью 95% считаем адекватным.

3. Определим коэффициент эластичности между четвертым и пятым предприятиями

$$L = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{10 - 12}{24 - 17} \cdot \frac{24}{10} = -0,69.$$

Выводы. Построенная однофакторная модель регрессии является адекватной.

Задача 8.10.

Имеются следующие данные:

| №№ | Регионы | Товарооборот, д.е. (x) | Средние товарные запасы, д.е. (y) |
|----|---------|-------------------------------|--|
| 1 | 6-й | 870 | 360 |
| 2 | 7-й | 740 | 300 |
| 3 | 8-й | 800 | 304 |
| 4 | 9-й | 800 | 300 |
| 5 | 10-й | 630 | 304 |
| 6 | 11-й | 710 | 290 |
| 7 | 12-й | 520 | 210 |
| 8 | 13-й | 600 | 310 |
| 9 | 14-й | 200 | 93 |
| 10 | 15-й | 750 | 320 |
| 11 | 16-й | 950 | 360 |
| 12 | 17-й | 845 | 310 |
| 13 | 18-й | 950 | 360 |
| 14 | 19-й | 770 | 290 |
| 15 | 20-й | 410 | 170 |
| 16 | 21-й | 150 | 60 |
| 17 | 22-й | 740 | 310 |
| 18 | 23-й | 407 | 189 |
| 19 | 24-й | 880 | 310 |
| 20 | 25-й | 510 | 340 |
| 21 | 26-й | 970 | 340 |
| 22 | 27-й | 860 | 340 |
| 23 | 28-й | 780 | 315 |
| 24 | 29-й | 790 | 310 |
| 25 | 30-й | 440 | 280 |
| 26 | 31-й | 504 | 290 |
| 27 | 32-й | 310 | 120 |
| 28 | 33-й | 380 | 160 |
| 29 | 34-й | 740 | 290 |
| 30 | 35-й | 980 | 350 |
| 31 | 36-й | 840 | 310 |
| 32 | 37-й | 780 | 308 |
| 33 | 38-й | 540 | 260 |
| 34 | 39-й | 760 | 290 |
| 35 | 40-й | 141 | 60 |

Задание:

1. Постройте ряд распределения по регионам.
2. Определите средние групповые и общие.
3. Определите моду и медиану, третий квартиль, восьмой дециль.
4. Определите показатели вариации.

5. Постройте график зависимости между x и y по регионам для первых 10 регионов, уравнение регрессии, определите тесноту связи, коэффициент эластичности.

Решение.

Построим ряды распределения признаков x и y . Рассмотрим вначале признак x – товарооборот. Составим ряд распределения, складывая накопленные частоты при увеличении значений x . Результаты приведены в таблице.

Таблица. Ряд распределения товарооборота.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x | ≤ 141 | 150 | 200 | 310 | 380 | 407 | 410 | 440 | 504 | 510 | 520 | 540 | 600 | 630 | 710 |
| $F(x)$ | 0 | 0,029 | 0,057 | 0,086 | 0,114 | 0,143 | 0,171 | 0,2 | 0,229 | 0,257 | 0,286 | 0,314 | 0,343 | 0,371 | 0,4 |
| x | 740 | 750 | 760 | 770 | 780 | 790 | 800 | 840 | 845 | 860 | 870 | 880 | 950 | 970 | 980 |
| $F(x)$ | 0,486 | 0,514 | 0,543 | 0,571 | 0,629 | 0,657 | 0,714 | 0,743 | 0,771 | 0,8 | 0,829 | 0,857 | 0,914 | 0,943 | 0,971 |

При $x > 980$ $F(x) = 1$.

Из полученного ряда распределения видно, что медиана – это квантиль $x_{(0,5)}$ (такое x , при котором $F(x) = 0,5$) равна $x_{(0,5)} = \frac{740 + 750}{2} = 745$.

Аналогично, третий квартиль равен $x_{(0,75)} = \frac{840 + 845}{2} = 842,5$,

и восьмой дециль равен $x_{(0,8)} = 860$.

Мода – наиболее часто встречающееся значение. Поскольку в выборке явно можно указать такую величину, то моду можно найти без группировки данных. Мода признака x равна 740, т.к. это значение присутствует в выборке трижды.

Аналогичным образом построим ряд распределения средних товарных запасов. Ряд распределения показан в таблице.

Таблица. Ряд распределения средних товарных запасов

| | | | | | | | | | | |
|--------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| y | ≤ 60 | 93 | 120 | 160 | 170 | 189 | 210 | 260 | 280 | 290 |
| $F(y)$ | 0 | 0,057 | 0,086 | 0,114 | 0,143 | 0,171 | 0,2 | 0,229 | 0,257 | 0,4 |
| y | 300 | 304 | 308 | 310 | 310 | 315 | 320 | 340 | 350 | 360 |
| $F(y)$ | 0,457 | 0,514 | 0,543 | 0,571 | 0,714 | 0,743 | 0,771 | 0,857 | 0,886 | 0,971 |

При $y > 360$ $F(y) = 1$.

Медиана равна $y_{(0,5)} = \frac{300 + 304}{2} = 302$.

Третий квартиль равен $y_{(0,75)} = \frac{315 + 320}{2} = 317,5$.

$$\text{Восьмой дециль равен } y_{(0,8)} = \frac{320 + 340}{2} = 330.$$

Мода распределения средних товарных запасов равна 310, т.к. это значение встречается наиболее часто (шесть раз).

Для определения средних групповых и общей средней сгруппируем данные.

Количество интервалов в ряде распределения определим по формуле Старджесса

$$L = 1 + [3,322 \lg n] = 1 + [3,322 \cdot \lg 35] = 6.$$

Рассмотрим вначале признак x – товарооборот. Сгруппируем данные товарооборота, поделив все возможные значения на 6 равных интервалов величиной

$$\Delta_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{L} = \frac{980 - 141}{6} = 139,833 \text{ д.е.}$$

Результаты группирования приведены в таблице.

Таблица. Группировка товарооборота.

| № группы | Диапазон | Кол-во значений, n_i | Сумма | Среднее групповое, X_i |
|----------|-----------------|------------------------|-------|--------------------------|
| 1 | 140 - 280,33 | 3 | 491 | 163,67 |
| 2 | 280,33 - 420,67 | 4 | 1507 | 376,75 |
| 3 | 420,67 - 560,5 | 5 | 2514 | 502,8 |
| 4 | 560,5 - 700,33 | 2 | 1230 | 615 |
| 5 | 700,33 - 840,17 | 13 | 10000 | 769,23 |
| 6 | 840,17 - 980 | 8 | 7305 | 913,13 |

Среднее значение товарооборота определим по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i n_i}{\sum n_i} = \frac{23047}{35} = 658,486 \text{ д.е.}$$

Для расчета показателей вариации составим промежуточную таблицу.

Таблица. Расчет показателей вариации.

| Группировка данных по товарообороту, X_i | Кол-во значений, n_i | графа 3 | графа 4 | графа 5 | графа 6 | графа 7 | графа 8 |
|--|------------------------|----------|-----------|-------------------|-----------------------|---------------------|-------------------------|
| | | X_i | $X_i n_i$ | $ X_i - \bar{X} $ | $ X_i - \bar{X} n_i$ | $(X_i - \bar{X})^2$ | $(X_i - \bar{X})^2 n_i$ |
| 140 - 280,33 | 3 | 163,6667 | 491 | 494,819 | 1484,457 | 244845,9 | 734537,7 |
| 280,33 - 420,67 | 4 | 376,75 | 1507 | 281,7357 | 1126,943 | 79375,01 | 317500,1 |
| 420,67 - 560,5 | 5 | 502,8 | 2514 | 155,6857 | 778,4286 | 24238,04 | 121190,2 |
| 560,5 - 700,33 | 2 | 615 | 1230 | 43,48571 | 86,97143 | 1891,007 | 3782,015 |
| 700,33 - 840,17 | 13 | 769,2308 | 10000 | 110,7451 | 1439,686 | 12264,47 | 159438,1 |
| 840,17 - 980 | 8 | 913,125 | 7305 | 254,6393 | 2037,114 | 64841,17 | 518729,3 |
| Итого | 35 | | 23047 | | 6953,6 | | 1855177 |

Определим показатели вариации.

Размах вариации равен

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 980 - 141 = 839 .$$

Среднее линейное отклонение равно

$$\bar{d} = \frac{\sum |X_i - \bar{X}| n_i}{\sum n_i} = \frac{6953,6}{35} = 198,67 .$$

Дисперсия:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{1855177}{35} = 53005,067 .$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{53005,067} = 230,23 .$$

Коэффициент осцилляции:

$$K_o = \frac{R}{X} \cdot 100\% = \frac{839}{658,486} \cdot 100\% = 127,41\% .$$

Относительное линейное отклонение:

$$K_{\bar{d}} = \frac{\bar{d}}{X} \cdot 100\% = \frac{198,67}{658,486} \cdot 100\% = 30,17\% .$$

Коэффициент вариации:

$$K_o = \frac{\sigma}{X} \cdot 100\% = \frac{230,23}{658,486} \cdot 100\% = 34,96\% .$$

Рассмотрим теперь признак y – средние товарные запасы. Сгруппируем данные, поделив все возможные значения на 6 равных интервалов величиной

$$\Delta_x = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{L} = \frac{360 - 60}{6} = 50 \text{ д.е.}$$

Результаты группирования приведены в таблице.

Таблица. Группировка товарооборота.

| № группы | Диапазон | Кол-во значений, n_i | Сумма | Среднее групповое, Y_i |
|----------|-----------|------------------------|-------|--------------------------|
| 1 | 60 - 110 | 3 | 60 | 20 |
| 2 | 110 - 160 | 2 | 55 | 27,5 |
| 3 | 160 - 210 | 3 | 40 | 13,3333 |
| 4 | 210 - 260 | 1 | 33 | 33 |
| 5 | 260 - 310 | 17 | 291 | 17,1176 |
| 6 | 310 - 360 | 9 | 151 | 16,7778 |

Среднее значение товарных запасов определим по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i n_i}{\sum n_i} = \frac{9513}{35} = 271,8 \text{ д.е.}$$

Для расчета показателей вариации составим промежуточную таблицу.

Таблица. Расчет показателей

вариации.

| Группировка данных по товарным запасам, Y_i | Кол-во значений, n_i | графа 3 | графа 4 | графа 5 | графа 6 | графа 7 | графа 8 |
|---|------------------------|----------|-----------|-------------------|-----------------------|---------------------|-------------------------|
| | | Y_i | $Y_i n_i$ | $ Y_i - \bar{Y} $ | $ Y_i - \bar{Y} n_i$ | $(Y_i - \bar{Y})^2$ | $(Y_i - \bar{Y})^2 n_i$ |
| 60 - 110 | 3 | 71 | 213 | 200,8 | 602,4 | 40320,64 | 120961,9 |
| 110 - 160 | 2 | 140 | 280 | 131,8 | 263,6 | 17371,24 | 34742,48 |
| 160 - 210 | 3 | 189,6667 | 569 | 82,13333 | 246,4 | 6745,884 | 20237,65 |
| 210 - 260 | 1 | 260 | 260 | 11,8 | 11,8 | 139,24 | 139,24 |
| 260 - 310 | 17 | 300,3529 | 5106 | 28,55294 | 485,4 | 815,2704 | 13859,6 |
| 310 - 360 | 9 | 342,7778 | 3085 | 70,97778 | 638,8 | 5037,845 | 45340,6 |
| Итого | 35 | 0 | 9513 | 0 | 2248,4 | 0 | 235281,5 |

Размах вариации равен

$$R = y_{\max} - y_{\min} = 360 - 60 = 300 .$$

Среднее линейное отклонение равно

$$\bar{d} = \frac{\sum |Y_i - \bar{Y}| n_i}{\sum n_i} = \frac{2248,4}{35} = 64,24 .$$

Дисперсия:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{235281,5}{35} = 6722,328 .$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{6722,328} = 81,99 .$$

Коэффициент осцилляции:

$$K_o = \frac{R}{\bar{Y}} \cdot 100\% = \frac{300}{271,8} \cdot 100\% = 110,38\% .$$

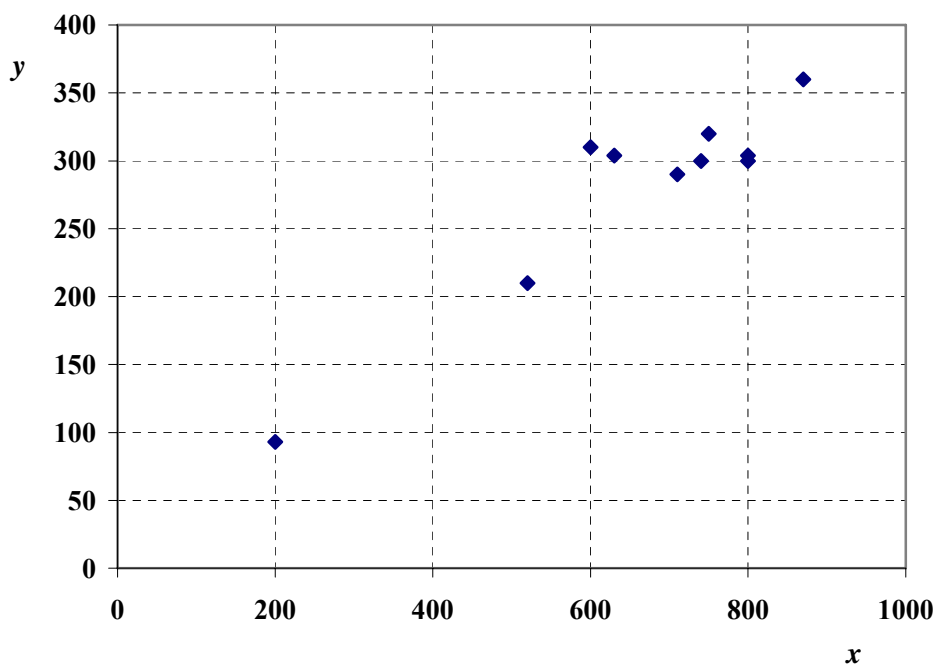
Относительное линейное отклонение:

$$K_{\bar{d}} = \frac{\bar{d}}{\bar{Y}} \cdot 100\% = \frac{64,24}{271,8} \cdot 100\% = 23,64\% .$$

Коэффициент вариации:

$$K_o = \frac{\sigma}{\bar{Y}} \cdot 100\% = \frac{81,99}{271,8} \cdot 100\% = 30,17\% .$$

Построим корреляционное поле между x и y по регионам для первых 10 регионов.



Из рисунка видно, что зависимость имеет линейный характер

$$\hat{y} = b_0 + b_1x ,$$

где b_0, b_1 – коэффициенты уравнения парной линейной регрессии.

2. Коэффициенты регрессии b_0, b_1 находим методом наименьших квадратов, решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} b_0n + b_1 \sum x_i = \sum y_i, \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 = \sum y_i x_i, \end{cases}$$

где $n = 10$. Предварительные вычисления приведены в таблице:

| i | x_i | y_i | x_i^2 | $x_i y_i$ | y_i^2 |
|-----|-------|-------|---------|-----------|---------|
| 1 | 870 | 360 | 756900 | 313200 | 129600 |
| 2 | 740 | 300 | 547600 | 222000 | 90000 |
| 3 | 800 | 304 | 640000 | 243200 | 92416 |
| 4 | 800 | 300 | 640000 | 240000 | 90000 |
| 5 | 630 | 304 | 396900 | 191520 | 92416 |
| 6 | 710 | 290 | 504100 | 205900 | 84100 |
| 7 | 520 | 210 | 270400 | 109200 | 44100 |
| 8 | 600 | 310 | 360000 | 186000 | 96100 |
| 9 | 200 | 93 | 40000 | 18600 | 8649 |

| | | | | | |
|---------|------|-------|---------|---------|---------|
| 10 | 750 | 320 | 562500 | 240000 | 102400 |
| Всего | 6620 | 2791 | 4718400 | 1969620 | 829781 |
| Среднее | 662 | 279,1 | 471840 | 196962 | 82978,1 |

Решение данной системы имеет вид:

$$b_1 = \frac{n \sum_i x_i y_i - \left(\sum_i x_i \right) \cdot \left(\sum_i y_i \right)}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2} = \frac{10 \cdot 1969620 - 6620 \cdot 2791}{10 \cdot 471840 - 6620^2} = 0,363,$$

$$b_0 = \frac{\sum_i y_i - b_1 \sum_i x_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_i y_i - \frac{b_1}{n} \sum_i x_i = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 279,1 - 0,363 \cdot 662 = 38,746.$$

Таким образом, модель регрессии показателя y от x имеет вид:

$$\hat{y} = 38,746 + 0,363x.$$

Тесноту линейной связи между двумя переменными характеризует коэффициент корреляции, который вычисляется по формуле

$$r_{yx} = \frac{n \sum_i x_i y_i - \left(\sum_i x_i \right) \cdot \left(\sum_i y_i \right)}{\sqrt{\left[n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2 \right] \cdot \left[n \sum_i y_i^2 - \left(\sum_i y_i \right)^2 \right]}}.$$

Подставив исходные данные в эту формулу, получим: $r_{xy} = 0,934$, т.е. имеем тесную положительную линейную связь.

Средний коэффициент эластичности равен

$$\bar{L} = f'(\bar{x}) \frac{\bar{x}}{y}$$

Т.к. $\bar{x} = 662$, $\bar{y} = 279,1$, то имеем

$$\bar{L} = f'(\bar{x}) \frac{\bar{x}}{y} = b_1 \frac{\bar{x}}{y} = 0,363 \cdot \frac{662}{279,1} = 0,861.$$

Задача 8.11.

По данным Госкомстата РФ на конец первого квартала года численность населения с доходами ниже прожиточного минимума и численность безработных составляла (млн. чел.):

| Год | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 |
|---|------|------|------|------|------|
| Численность населения с доходами ниже прожиточного минимума | 35,9 | 32,4 | 33,0 | 55,2 | 59,9 |
| Численность безработных | 6,7 | 7,5 | 8,4 | 10,2 | 8,6 |

Для выявления зависимости между численностью населения с доходами ниже прожиточного минимума и численностью безработных определите:

1. Линейный коэффициент корреляции.
2. Абсолютную и относительную эластичность для второй и третьей пары признаков.

Сделайте выводы.

Решение.

Определим средние значения переменных x (численность населения с доходами ниже прожиточного минимума) и y (численность безработных):

$$\bar{x} = \frac{35,9 + \dots + 59,9}{5} = 43,28 \text{ млн. чел.};$$

$$\bar{y} = \frac{6,7 + \dots + 8,6}{5} = 8,28 \text{ млн. чел.}$$

Линейный коэффициент корреляции равен

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\right)}} =$$

$$= \frac{(35,9 - 43,28)(6,7 - 8,28) + \dots + (59,9 - 43,28)(8,6 - 8,28)}{\sqrt{[(35,9 - 43,28)^2 + \dots + (59,9 - 43,28)^2] \cdot [(6,7 - 8,28)^2 + \dots + (8,6 - 8,28)^2]}} = 0,679.$$

Определим коэффициент эластичности для второй и третьей пары признаков:

$$L = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{8,4 - 7,5}{33 - 32,4} \cdot \frac{33}{8,4} = 4,42.$$

Выводы.

Связь между численностью населения с доходами ниже прожиточного минимума и численностью безработных является достаточно тесной и положительной.

Эластичность для второй и третьей пары признаков является очень высокой.

Задача 8.12.

По 8 однородным магазинам имеются следующие данные:

| Товарооборот, тыс. р. | Уровень издержек обращения по отношению к товарообороту, % |
|-----------------------|--|
| 7 | 10,0 |
| 10 | 9,0 |
| 15 | 7,5 |
| 20 | 6,0 |

| | |
|-----|-----|
| 30 | 6,3 |
| 45 | 5,8 |
| 60 | 5,4 |
| 120 | 5,0 |

По уравнению прямой определить коэффициент регрессии, определив количественное изменение уровня издержек обращения при изменении товарооборота на 1 тыс. р.

Вычислить коэффициент корреляции. Сделать выводы.

Решение.

Линейное уравнение регрессии между уровнем издержек обращения по отношению к товарообороту (Y) и товарооборотом (X) имеет вид:

$$y = b_0 + b_1x + e,$$

где e – случайные остатки.

Коэффициенты уравнения регрессии вычисляются по формулам:

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}.$$

Результаты расчета необходимых коэффициентов:

$$\bar{x} = \frac{7+10+\dots+120}{8} = 38,375 \text{ тыс. р.};$$

$$\bar{y} = \frac{10+9+\dots+5}{8} = 6,875 \text{ тыс. р.};$$

$$\overline{xy} = \frac{7 \cdot 10 + 10 \cdot 9 + \dots + 120 \cdot 5}{8} = 220,813;$$

$$\overline{x^2} = \frac{7^2 + 10^2 + \dots + 120^2}{8} = 2712,375.$$

Отсюда имеем:

$$b_1 = \frac{220,813 - 38,375 \cdot 6,875}{2712,375 - 38,375^2} = -0,0347;$$

$$b_0 = 6,875 + 0,0347 \cdot 38,375 = 8,207.$$

т.е. эмпирическое линейное уравнение регрессии имеет вид:

$$\hat{y} = 8,207 - 0,0347x.$$

Коэффициент регрессии равен $b_1 = -0,0347$. Отсюда следует, что при изменении товарооборота на 1 тыс. р. уровень издержек обращения в среднем уменьшается на 34,7 р.

Коэффициент корреляции через коэффициент регрессии выражается в виде

$$r = b_1 \frac{s_x}{s_y}$$

где s_y и s_x – оценки стандартных отклонений наблюдений y_i и x_i вокруг своих средних \bar{y} и \bar{x} .

Определим s_y и s_x :

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(7-38,375)^2 + \dots + (120-38,375)^2}{7}} = 37,641;$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(10-6,875)^2 + \dots + (5-6,875)^2}{7}} = 1,797.$$

Отсюда коэффициент корреляции равен

$$r = -0,0347 \cdot \frac{37,641}{1,797} = -0,727.$$

Данное значение коэффициента корреляции говорит о наличии сильной отрицательной линейной корреляционной связи между товарооборотом и уровнем издержек обращения по отношению к товарообороту.

Тема 9. Статистика населения

Задача 9.1.

Имеются следующие данные за 2006 год:

- численность населения, тыс. чел.:

на 1 января - 430,0;

на 1 апреля - 430,2;

на 1 июля 430,3;

на 1 октября - 430,7;

на 1 января 2007 г. 430,8

- число умерших, чел. - 8 170

- число выбывших на постоянно жительство в другие населенные пункты, чел. - 570

- коэффициент жизненности - 1,075

- доля женщин в общей численности населения, % - 58

- доля женщин в возрасте 15-49 лет в общей численности женщин, % - 39

Определите: коэффициенты рождаемости, смертности, естественного, механического и общего прироста населения; число родившихся; число прибывших на постоянно жительство из других населенных пунктов; специальный коэффициент рождаемости.

Решение.

Определим по формуле средней хронологической среднюю численность населения за 2006 год

$$\bar{S} = \frac{\frac{430}{2} + 430,2 + 430,3 + 430,7 + \frac{430,8}{2}}{4} = \frac{1721,6}{4} = 430,4 \text{ тыс. чел.}$$

Число родившихся в 2006 году определим через коэффициент жизненности как

$$N = K_{\text{жизн}} \cdot M = 1,075 \cdot 8170 = 8783 \text{ чел.}$$

Коэффициент рождаемости равен

$$K_{\text{рожд}} = \frac{N}{\bar{S}} \cdot 1000 = \frac{8,783}{430,4} \cdot 1000 = 20,407 \text{ ‰.}$$

Коэффициент смертности равен

$$K_{\text{см}} = \frac{M}{\bar{S}} \cdot 1000 = \frac{8,17}{430,4} \cdot 1000 = 18,982 \text{ ‰.}$$

Коэффициент естественного прироста равен

$$K_{\text{ест}} = K_{\text{рожд}} - K_{\text{см}} = 20,407 - 18,982 = 1,424 \text{ ‰.}$$

Известно, что

$$НКГ = ННГ + N - M + П - В.$$

Отсюда получим число прибывших на постоянно жительство из других населенных пунктов

$$\begin{aligned} П &= НКГ - ННГ - N + M + В = \\ &= 430,8 - 430 - 8,783 + 8,17 + 0,57 = 0,757 \text{ тыс. чел.} \end{aligned}$$

Коэффициент механического прироста населения равен

$$K_{\text{мех.пр}} = \frac{П - В}{\bar{S}} \cdot 1000 = \frac{0,757 - 0,570}{430,4} \cdot 1000 = 0,434\%.$$

Коэффициент общего прироста населения равен

$$K_{\text{общ.пр}} = K_{\text{ест.пр}} + K_{\text{мех.пр}} = 1,424 + 0,434 = 1,859\%.$$

Специальный коэффициент рождаемости равен

$$n' = \frac{N}{S_{(\text{жен.15-49 лет})}} \cdot 1000 = \frac{8,783}{0,39 \cdot 430,4} \cdot 1000 = 52,325\%.$$

Задача 9.2.

По региону известны следующие данные за 2006 г.:

- коэффициент общего прироста населения - 6 ‰;
- коэффициент естественного прироста населения - 4 ‰;
- коэффициент жизненности - 1,5;
- среднегодовая численность населения - 580 тыс чел.;
- среднегодовой абсолютный прирост численности населения за предыдущие годы - 3,2 тыс чел.

Определите: 1) численность населения на начало и конец 2006 г.; 2) абсолютный естественный и миграционный прирост численности населения, 3) коэффициент миграционного прироста; 4) число родившихся, 5) число умерших; 6) ожидаемую численность населения региона на 01.01.2007 г.

Решение.

Прирост населения за год определим через коэффициент общего прироста населения

$$ПН = K_{\text{общ.пр}} \cdot \bar{S} = 6 \cdot 580 = 3480 \text{ чел.}$$

Отсюда получим численность населения на начало 2006 г.

$$ННГ = \bar{S} - \frac{ПН}{2} = 580 - \frac{3,48}{2} = 578,26 \text{ тыс. чел.}$$

Отсюда получим численность населения на конец 2006 г.

$$НКГ = \bar{S} + \frac{ПН}{2} = 580 + \frac{3,48}{2} = 581,74 \text{ тыс. чел.}$$

Абсолютный естественный прирост численности населения определим через коэффициент общего прироста населения как

$$N - M = K_{ест.пр} \cdot \bar{S} = 4 \cdot 580 = 2320 \text{ чел.}$$

Миграционный прирост численности населения определим через коэффициент общего прироста населения как

$$П - В = K_{мех.пр} \cdot \bar{S} = (K_{общ.пр} - K_{ест.пр}) \cdot \bar{S} = (6 - 4) \cdot 580 = 1160 \text{ чел.}$$

Коэффициент миграционного прироста равен

$$K_{мех.пр} = K_{общ.пр} - K_{ест.пр} = 6 - 4 = 2 \text{ ‰.}$$

Выше получили, что

$$N = M + 2320.$$

Кроме того, из исходных данных имеем

$$N = K_{жизн} \cdot M = 1,5M.$$

Отсюда, вычтя из второго уравнения первое, получим $0,5M = 2320$, следовательно, число умерших в 2006 году составило

$$M = 2 \cdot 2320 = 4640 \text{ чел.}$$

Тогда число родившихся в 2006 году составило

$$N = 1,5M = 1,5 \cdot 4640 = 6960 \text{ чел.}$$

Ожидаемую численность населения региона на 01.01.2007 г. составит

$$НКГ = ННГ + 3,2 = 578,26 + 3,2 = 581,46 \text{ тыс. чел.}$$

Задача 9.3.

Имеются следующие условные данные о численности населения страны:

На начало 2006 года численность составляла 52755 тыс. чел., на начало 2007 года – 53115 тыс. чел. Коэффициенты рождаемости и смертности в 2006 году составили соответственно 15,3 ‰ и 12,1 ‰.

Определить коэффициент механического прироста населения. Сделать выводы.

Решение.

Средняя численность населения за 2006 год равна

$$\bar{S} = \frac{ННГ + НКГ}{2} = \frac{52755 + 53115}{2} = 52935 \text{ тыс. чел.}$$

Определим коэффициент общего прироста населения как

$$K_{\text{общ.пр}} = \frac{НКГ - ННГ}{\bar{S}} \cdot 1000 = \frac{53115 - 52755}{52935} \cdot 1000 = 6,8\%.$$

Коэффициент естественного прироста равен

$$K_{\text{ест}} = K_{\text{рожд}} - K_{\text{см}} = 15,3 - 12,1 = 3,2\%.$$

Отсюда определим коэффициент механического прироста населения

$$K_{\text{мех.пр}} = K_{\text{общ.пр}} - K_{\text{ест.пр}} = 6,8 - 3,2 = 3,6\%.$$

Выводы. Прирост численности населения за 2006 год распределился примерно поровну между двумя факторами – естественным приростом и механическим приростом.

Задача 9.4.

Имеются следующие данные по региону: на начало года численность населения всего 1400 тысяч человек, за предшествующие годы среднегодовые коэффициенты рождаемости составили 13,5‰, смертности – 1,12‰, механического прироста – 1,7‰.

Определить:

1. Коэффициент общего прироста населения;
2. Перспективную численность населения на предстоящие три года при условии, что коэффициент общего прироста сохранится на прежнем уровне.

Решение.

1. Коэффициент общего прироста населения равен

$$K^{OP} = 13,5 - 1,12 + 1,7 = 14,08\%.$$

2. Перспективная численность населения на предстоящие три года при условии, что коэффициент общего прироста сохранится на прежнем уровне, равна

$$N_3 = N \cdot \left(1 + \frac{K^{OP}}{1000}\right)^3 = 1400 \cdot \left(1 + \frac{14,08}{1000}\right)^3 = 1400 \cdot 1,0141^3 = 1400 \cdot 1,0428 = 1459,97 \text{ тыс. чел.}$$

Задача 9.5.

Численность населения на начало 2001 года составила 268800 человек, на начало 2000 года – 266600 человек. Коэффициент смертности за этот период равен 10,3‰. За год прибыло в район из других населенных пунктов 1110 человек, уехало на постоянное место жительства в другие населенные пункты 903 человека.

Определить:

1. Абсолютный прирост, темп роста, темп прироста численности населения;
2. Примерное число родившихся за 2002 год;

3. Коэффициент рождаемости и коэффициент естественного прироста;
4. Коэффициент Покровского;
5. Сальдо миграции и коэффициент миграции.

Решение.

Абсолютный прирост равен

$$\Delta = 268800 - 266600 = 2200 \text{ чел.}$$

Темп роста равен

$$T_p = \frac{268800}{266600} = 1,0083, \text{ или } 100,83\%.$$

Темп прироста равен

$$T_{np} = T_p - 1 = 1,0083 - 1 = 0,0083, \text{ или } 0,83\%.$$

Среднегодовая численность населения в 2000 году равно

$$\bar{S} = \frac{266600 + 268800}{2} = 267700 \text{ чел.}$$

Коэффициент смертности определяется по формуле

$$K_{см} = \frac{M}{\bar{S}} \cdot 1000,$$

где M – число умерших в 2000 году. Отсюда

$$M = \frac{K_{см} \cdot \bar{S}}{1000} = \frac{10,3 \cdot 267700}{1000} = 2757 \text{ чел.}$$

Число родившихся в 2000 году равно

$$N = 2200 + 2757 - 1110 + 903 = 4750 \text{ чел.}$$

Отсюда определим коэффициент рождаемости

$$K_p = \frac{N}{\bar{S}} \cdot 1000 = \frac{4750}{26700} \cdot 1000 = 17,74\%_0.$$

Примерное число родившихся за 2002 год составит

$$N_{2002} \approx N \cdot T_{np}^2 = 4750 \cdot 1,0083^2 = 4829 \text{ чел.}$$

Коэффициент естественного прироста равен

$$K_{e.нр} = K_p - K_{см} = 17,74 - 10,3 = 7,44\%_0.$$

Коэффициент Покровского равен

$$K_{Покр} = \frac{N}{M} = \frac{4750}{2757} = 1,72.$$

Задача 9.6.

Имеются следующие данные о численности населения, числе родившихся и умерших в России в 2000-2001 годы.

| Год | Население на начало года (чел.) | Число родившихся (чел.) | Число умерших (чел.) |
|------|---------------------------------|-------------------------|----------------------|
| 2000 | 148041000 | 1988856 | 1655993 |
| 2001 | 148543000 | 1794626 | 1690657 |

Определить:

1. Среднюю численность населения за 2000 год;
2. Коэффициенты рождаемости, смертности, естественного прироста в 2000 году;
3. Коэффициент миграции в 2000 году;
4. Коэффициент жизненности в 2000 и 2001 годы;
5. Коэффициент эффективности воспроизводства в 2000 и 2001 годы.

Решение.

Средняя численность населения за 2000 год равна

$$\bar{S} = \frac{148041000 + 148543000}{2} = 148292000 \text{ чел.}$$

Коэффициент рождаемости в 2000 году равен

$$K_{\text{рожд}} = \frac{N}{\bar{S}} = \frac{198856}{148292000} \cdot 1000 = 13,41 \text{ ‰.}$$

Коэффициент смертности в 2000 году равен

$$K_{\text{см}} = \frac{M}{\bar{S}} = \frac{1655993}{148292000} \cdot 1000 = 11,17 \text{ ‰.}$$

Коэффициент естественного прироста в 2000 году равен

$$K_{\text{ест}} = K_{\text{рожд}} - K_{\text{см}} = 13,41 - 11,17 = 2,24 \text{ ‰.}$$

Коэффициент миграции в 2000 году равен

$$K_{\text{мигр}} = \frac{S_2 - S_1 - N + M}{\bar{S}} =$$

$$= \frac{148543000 - 148041000 - 198856 + 1655993}{148292000} \cdot 1000 = 1,14 \text{ ‰.}$$

Коэффициент жизненности в 2000 году равен

$$K_{\text{жизн}} = \frac{N}{M} = \frac{198856}{1655993} = 1,20.$$

Коэффициент жизненности в 2001 году равен

$$K_{\text{жизн}} = \frac{N}{M} = \frac{1794626}{1690657} = 1,06.$$

Коэффициент эффективности воспроизводства в 2000 году равен

$$K_{эф} = \frac{N - M}{M} = \frac{198856 - 1655993}{1655993} = 0,20.$$

Коэффициент эффективности воспроизводства в 2001 году равен

$$K_{эф} = \frac{N - M}{M} = \frac{1794626 - 1690657}{1690657} = 0,06.$$

Задача 9.7.

Численность населения региона характеризуется следующими данными (тыс. чел.):

1. На начало года фактически проживало 3845, в том числе временно – 150, кроме того, временно отсутствовало 135;
2. На протяжении года у постоянного населения родилось 53,7, умерло – 43, в том числе детей в возрасте до года – 1,1. Прибыло на постоянное жительство – 48, выбыло на постоянное жительство в другие населенные пункты – 32.

Рассчитать:

1. Численность постоянного населения (на начало и конец года);
2. Коэффициенты рождаемости, смертности, естественного прироста;
3. Коэффициенты, характеризующие механическое движение;
4. Коэффициент жизненности;
5. Коэффициент детской смертности.

Решение.

1. Численность постоянного населения на начало года составляла

$$ПН = НН + ВО - ВП = 3845 + 135 - 150 = 3830 \text{ тыс. чел.}$$

2. Определим вначале численность населения региона на конец года

$$НН_1 = 3845 + 53,7 - 43 + 48 - 32 = 3871,7 \text{ тыс. чел.}$$

Отсюда среднегодовая численность населения региона равна

$$\bar{S} = \frac{НН + НН_1}{2} = \frac{3845 + 3871,7}{2} = 3858,35 \text{ тыс. чел.}$$

Коэффициент рождаемости равен

$$K_{рожд} = \frac{N}{\bar{S}} \cdot 1000 = \frac{53,7}{3858,35} \cdot 1000 = 13,92 \text{ ‰.}$$

Коэффициент смертности равен

$$K_{см} = \frac{M}{\bar{S}} \cdot 1000 = \frac{43}{3858,35} \cdot 1000 = 11,14 \text{ ‰.}$$

Коэффициент естественного прироста равен

$$K_{ест} = K_{рожд} - K_{см} = 13,92 - 11,14 = 2,77 ‰.$$

3. Коэффициент миграции равен

$$K_{мигр} = \frac{П - В}{S} \cdot 1000 = \frac{48 - 32}{3858,35} \cdot 1000 = 4,15 ‰.$$

4. Коэффициент жизненности равен

$$K_{жизн} = \frac{N}{M} = \frac{57,7}{43} = 1,249.$$

5. Коэффициент детской смертности равен

$$K_{см} = \frac{1,1}{53,7} \cdot 1000 = 20,48 ‰.$$

Задача 9.8.

Исходные данные о численности женщин в населенном пункте:

| Возрастные группы, лет | 15-19 | 20-24 | 24-29 | 30-34 | 35-39 | 40-44 | 45-49 |
|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Число женщин, тыс. чел. | 340,0 | 226,0 | 150,0 | 122,8 | 208,0 | 164,0 | 144,1 |
| Коэффициент фертильности, ‰ | 24,0 | 218,0 | 230,5 | 174,0 | 128,0 | 44,5 | 7,0 |

Доля мальчиков среди новорожденных 0,512, вероятность умереть в течение первого года жизни для них составляет 0,0523. Определить, сколько мальчиков переживет первый год жизни.

Решение.

Коэффициент рождаемости (коэффициент фертильности) равен

$$K_{р,х} = \frac{N_x}{S_x} \cdot 1000,$$

где N_x , S_x – число родившихся и средняя численность женщин в фертильном возрасте группы x , соответственно.

Отсюда число новорожденных у женщин в фертильном возрасте группы x равно

$$N_x = \frac{K_{р,х} \cdot S_x}{1000}.$$

Тогда общее число новорожденных равно

$$N = \sum N_x = \sum \frac{K_{p,x} \cdot S_x}{1000} = 24 \cdot 340 + 218 \cdot 226 + \dots + 7 \cdot 144,1 = 148300,9.$$

Среднее число мальчиков среди новорожденных составит

$$N_m = 148300,9 \cdot 0,512 = 75930,1.$$

В результате получаем, что среднее число новорожденных мальчиков, которые переживут первый год жизни равно

$$N_{m,1} = 75930,1 \cdot (1 - 0,0523) = 71958,9 \approx 71959.$$

Задача 9.9.

На начало года фактически проживало в городе населения 525 тыс. чел., из них временно проживающих – 20 тыс. чел. На протяжении года родилось 12 тыс. чел., в том числе у постоянного населения – 11 тыс. чел. В течение года умерло 10 тыс. чел., в том числе у постоянного населения – 8,5 тыс. чел. В течение года прибыло на постоянное жительство в город 5 тыс. чел. Выбыло в течение года постоянного населения на постоянное жительство в другие населенные пункты – 3 тыс. чел.

Определить:

1. Численность наличного населения города на начало и конец года.
2. Численность постоянного населения города на начало и конец года.
3. Коэффициенты рождаемости, смертности и естественного прироста для постоянного населения.

Решение.

1. Численность наличного населения города на начало года равна числу фактически (включая и временно проживающего) в городе населения на начало года и составляет согласно исходных данных 525 тыс. чел.

Численность наличного населения города на конец года равна численности наличного населения города на начало года, плюс число родившихся за год, минус число умерших за год, плюс число прибывших на постоянное жительство за год, минус число выбывших на постоянное жительство в другие населенные пункты за год. Она составляет:

$$525 + 12 - 10 + 5 - 3 = 529 \text{ тыс. чел.}$$

2. Численность постоянного населения города на начало года равна разности между фактически проживающим в городе населением и временно проживающим на начало года. Она составляет

$$525 - 20 = 505 \text{ тыс. чел.}$$

Численность постоянного населения города на конец года равна численности

постоянного населения города на начало года, плюс число родившихся за год, минус число умерших у постоянного населения за год, плюс число прибывших на постоянное жительство за год, минус число выбывших на постоянное жительство в другие населенные пункты за год. Она составляет:

$$505 + 12 - 8,5 + 5 - 3 = 510,5 \text{ тыс. чел.}$$

3. Коэффициент рождаемости для постоянного населения показывает число родившихся за год в расчете на 1000 человек постоянного населения. Он равен отношению родившихся за год у постоянного населения к средней за год численности постоянного населения. Средняя за год численность постоянного населения равна

$$\bar{N}_n = \frac{505 + 510,5}{2} = 507,75 \text{ тыс. чел.}$$

Отсюда коэффициент рождаемости для постоянного населения равен

$$K_{\text{рожд}} = \frac{11}{507,75} \cdot 1000 = 21,664 \text{ промиле.}$$

Коэффициент смертности для постоянного населения показывает число умерших за год в расчете на 1000 человек постоянного населения. Он равен отношению умерших за год у постоянного населения к средней за год численности постоянного населения и составляет

$$K_{\text{см}} = \frac{8,5}{507,75} \cdot 1000 = 16,741 \text{ промиле.}$$

Коэффициент естественного прироста равен разности между коэффициентом рождаемости и коэффициентом смертности. Коэффициент естественного прироста для постоянного населения составляет

$$K_{\text{ест}} = K_{\text{рожд}} - K_{\text{см}} = 21,664 - 16,741 = 4,923 \text{ промиле.}$$

Задача 9.10.

Имеются данные о численности и естественном движении населения двух регионов.

| Годы | Айский край | | | Энская область | | |
|------|--|------------------------|---------------------|--|------------------------|---------------------|
| | Численность населения на начало года, тыс.чел. | Число родившихся, чел. | Число умерших, чел. | Численность населения на начало года, тыс.чел. | Число родившихся, чел. | Число умерших, чел. |
| 1990 | 2412 | 67536 | 19296 | 2382 | 61932 | 19056 |
| 1991 | 2645 | 71415 | 21160 | 2380 | 59500 | 19040 |
| 1992 | 2665 | 66625 | 22386 | 2394 | 55062 | 21546 |
| 1993 | 2713 | 65112 | 23603 | 2396 | 43128 | 23960 |
| 1994 | 2694 | 43104 | 24246 | 2415 | 28980 | 26565 |
| 1995 | 2716 | - | - | 2420 | - | - |

1. Определить, в каком году естественный прирост населения Айского края был минимальным.

2. Определить, в каком регионе в 1994 году общий коэффициент смертности был меньше.

Решение.

1. Естественный прирост населения за год равен разности между числом родившихся и умерших за этот год. Рассчитаем естественный прирост населения Айского края. Результат запишем в виде таблицы.

| Годы | Число родившихся, чел. | Число умерших, чел. | Естественный прирост населения, чел. |
|------|------------------------|---------------------|--------------------------------------|
| 1990 | 67536 | 19296 | 48240 |
| 1991 | 71415 | 21160 | 50255 |
| 1992 | 66625 | 22386 | 44239 |
| 1993 | 65112 | 23603 | 41509 |
| 1994 | 43104 | 24246 | 18858 |

Из таблицы видим, что естественный прирост населения Айского края был минимальным в 1994 году.

2. Общий коэффициент смертности равен отношению числа умерших за год к среднегодовой численности населения. Общий коэффициент смертности в 1994 году составил:

$$\text{- в Айском крае } k_1 = \frac{24246}{\frac{2694000 + 2716000}{2}} = 2,241,$$

$$\text{- в Энской области } k_2 = \frac{26565}{\frac{2415000 + 2420000}{2}} = 2,747.$$

Следовательно, в 1994 году общий коэффициент смертности был меньше в Айском крае.

Задача 9.11.

Имеются данные о численности и естественном движении населения двух регионов

| Годы | Айский край | | | Энская область | | |
|------|--|------------------------|---------------------|--|------------------------|---------------------|
| | Численность населения на начало года, тыс.чел. | Число родившихся, чел. | Число умерших, чел. | Численность населения на начало года, тыс.чел. | Число родившихся, чел. | Число умерших, чел. |
| 1990 | 2412 | 67536 | 19296 | 2382 | 61932 | 19056 |
| 1991 | 2645 | 71415 | 21160 | 2380 | 59500 | 19040 |
| 1992 | 2665 | 66625 | 22386 | 2394 | 55062 | 21546 |
| 1993 | 2713 | 65112 | 23603 | 2396 | 43128 | 23960 |
| 1994 | 2694 | 43104 | 24246 | 2415 | 28980 | 26565 |
| 1995 | 2716 | - | - | 2420 | - | - |

1. Определить, в каком регионе в 1991 году наблюдался наибольший абсолютный прирост населения.

2. Определить, в каком году коэффициент экономичности воспроизводства населения в Энской области был минимальным.

Решение.

1. Абсолютный прирост населения в 1991 году составил:

- в Айском крае $71415 - 21160 = 50255$ чел.,

- в Энской области $59500 - 19040 = 40460$ чел.

Следовательно, в 1991 году наибольший абсолютный прирост населения наблюдался в Айском крае.

2. Рассчитаем коэффициент экономичности воспроизводства населения в Энской области. Результат запишем в виде таблицы.

| Годы | Численность населения на начало года, тыс.чел. | Число родившихся, чел. | Число умерших, чел. | Коэффициент экономичности воспроизводства населения |
|------|--|------------------------|---------------------|---|
| 1990 | 2382 | 61932 | 19056 | 18 |
| 1991 | 2380 | 59500 | 19040 | 17 |
| 1992 | 2394 | 55062 | 21546 | 14 |
| 1993 | 2396 | 43128 | 23960 | 8 |
| 1994 | 2415 | 28980 | 26565 | 1 |
| 1995 | 2420 | - | - | |

Таким образом, в Энской области коэффициент экономичности воспроизводства населения был минимальным в 1994 году.

Задача 9.12.

По одному из населенных пунктов имеются данные движения населения за год, чел.:

| | |
|--------------------------------------|-------|
| Численность населения на начало года | 16760 |
| в т.ч. женщины в возрасте 15-49 лет | 5480 |
| Численность населения на конец года | 17200 |
| в т.ч. женщины в возрасте 15-49 лет | 5700 |
| В течении года: | |
| родилось | 340 |
| умерло | 149 |
| из них детей до 1 года | 9 |

Определить:

1. Общие коэффициенты естественного движения;
2. Специальный коэффициент рождаемости (фертильности);
3. Коэффициент младенческой смерти.

Решение.

1. Определим общие коэффициенты естественного движения.

Коэффициент рождаемости определяется по формуле

$$n = \frac{N}{\bar{S}} \times 1000,$$

где N – число родившихся; \bar{S} – средняя численность населения.

Средняя численность населения равна

$$\bar{S} = \frac{16760 + 17200}{2} = 16960.$$

Отсюда коэффициент рождаемости равен

$$n = \frac{N}{\bar{S}} \times 1000 = \frac{340}{16960} \times 1000 = 20,02.$$

Коэффициент смертности равен

$$m = \frac{M}{\bar{S}} \times 1000 = \frac{149}{16960} \times 1000 = 8,78.$$

Коэффициент естественного прироста равен

$$k_{e.пр.} = n - m = 20,02 - 8,78 = 11,29$$

2. Специальный коэффициент рождаемости (фертильности) равен

$$n_{15-49} = \frac{N}{\bar{S}_{15-49}} \times 1000 = \frac{340}{\frac{5480 + 5700}{2}} \times 1000 = \frac{340}{5590} \times 1000 = 60,82.$$

Коэффициент младенческой смерти равен

$$m_0 = \frac{M_0}{N} \times 1000 = \frac{9}{340} \times 1000 = 26,47.$$

Задача 9.13.

Имеются данные по населению области за год, тыс. чел.:

а) численность

на 01.01 – 1253,2,

на 01.08 – 1256,6,

на 01.10 – 1261,4,

на 01.01 следующего года – 1262,3,

б) в течение года родилось 12,3; умерло – 8,7.

Определить: среднегодовую численность населения; коэффициенты рождаемости, смертности и естественного прироста; коэффициент механического прироста; коэффициент жизненного населения.

Решение.

Определим среднегодовую численность населения как среднюю хронологическую:

$$\bar{S} = \frac{\frac{1253,2 + 1256,6}{2} \cdot 7 + \frac{1256,6 + 1261,4}{2} \cdot 2 + \frac{1261,4 + 1262,3}{2} \cdot 3}{12} = \frac{15087,85}{12} = 1257,3 \text{ т. чел.}$$

Коэффициент рождаемости $K_{рожд}$ равен:

$$K_{рожд} = \frac{N}{\bar{S}} \cdot 1000 = \frac{12,3}{1257,3} \cdot 1000 = 9,783 \text{ ‰.}$$

Коэффициент смертности $K_{смерт}$ равен:

$$K_{смерт} = \frac{M}{\bar{S}} \cdot 1000 = \frac{8,7}{1257,3} \cdot 1000 = 6,920 \text{ ‰.}$$

Коэффициент естественного прироста населения равен:

$$K_{ест.п.} = K_{рожд} - K_{смерт} = 9,783 - 6,920 = 2,863 \text{ ‰.}$$

Коэффициент жизненного населения равен

$$K_{жизн} = \frac{N}{M} = \frac{12,3}{8,7} = 1,414.$$

Задача 9.14.

По данным, приведенным в приложении, определите естественный прирост населения и коэффициент детской смертности в Тюменской области за 1970, 1980 и 1990 гг.

| Годы | Родившихся (без мертворожденных) | Умерших | В том числе детей в возрасте до 1 года |
|------|----------------------------------|---------|--|
| 1940 | 39,5 | 24,7 | 10,7 |
| 1950 | 32,2 | 12,5 | 3,9 |
| 1960 | 31,3 | 8,8 | 1,2 |
| 1970 | 25,0 | 12,1 | 0,7 |
| 1980 | 38,8 | 18,2 | 1,0 |
| 1981 | 43,2 | 17,8 | 1,1 |
| 1982 | 50,6 | 17,5 | 1,2 |
| 1983 | 54,8 | 19,4 | 1,5 |
| 1984 | 54,6 | 20,7 | 1,5 |
| 1985 | 58,9 | 19,5 | 1,4 |
| 1986 | 63,1 | 17,7 | 1,3 |
| 1987 | 65,2 | 18,2 | 1,4 |
| 1988 | 59,9 | 18,1 | 1,2 |
| 1989 | 53,9 | 18,7 | 1,0 |
| 1990 | 50,1 | 19,9 | 0,9 |

Решение.

Естественный прирост населения P за год определяется по формуле

$$P = N - M,$$

где N – число родившихся (без мертворожденных) за год; M – число умерших за год.

Естественный прирост населения составил:

- в 1970 году $P_{1970} = 25 - 12,1 = 12,9$;
- в 1980 году $P_{1980} = 38,8 - 18,2 = 20,6$;
- в 1990 году $P_{1990} = 50,1 - 19,9 = 30,2$.

Коэффициент детской смертности S за год определяется по формуле

$$S = \frac{D}{N},$$

где D – число умерших детей в возрасте до 1 года за год.

Коэффициент детской смертности составил:

- в 1970 году $S_{1970} = \frac{0,7}{25,0} = 0,0280$;
- в 1980 году $S_{1980} = \frac{1,0}{38,8} = 0,0258$;
- в 1990 году $S_{1990} = \frac{0,9}{50,1} = 0,0180$.

Задача 9.15.

Численность населения на начало 2001 года составила 268800 человек, на начало 2000 года – 266600 человек. Коэффициент смертности за этот период равен 10,3 ‰. За год прибыло в район из других населенных пунктов 1110 человек, уехало на постоянное место жительства в другие населенные пункты 903 человека.

Определить:

1. Абсолютный прирост, темп роста, темп прироста численности населения.
2. Примерное число родившихся за 2002 год.
3. Коэффициент рождаемости и коэффициент естественного прироста.
4. Коэффициент Покровского.
5. Сальдо миграции и коэффициент миграции.

Решение.

1. Абсолютный прирост численности населения в 2000 году составил:

$$\Delta S = S_1 - S_0 = 268800 - 266600 = 2200 \text{ чел.}$$

Темп роста численности населения в 2000 году составил:

$$Tp = \frac{S_1}{S_0} = \frac{268800}{266600} = 1,0083, \text{ или } 100,83 \%$$

Темп прироста численности населения в 2000 году составил:

$$Tnp = \frac{S_1}{S_0} - 1 = \frac{268800}{266600} - 1 = 0,0083, \text{ или } 0,83 \%$$

2. Средняя численность населения \bar{S} в 2000 году составила:

$$\bar{S} = \frac{S_0 + S_1}{2} = \frac{266600 + 268800}{2} = 267700 \text{ чел.}$$

Количество умерших за 2000 год составило:

$$M = \frac{K_{\text{м}} \cdot \bar{S}}{1000} = \frac{10,3 \cdot 267700}{1000} = 2757 \text{ чел.}$$

Число родившихся в 2000 году равно:

$$N = S_1 - S_0 - S_{\text{в}} + S_{\text{о}} + M = 268800 - 266600 - 1110 + 903 + 2757 = 4750 \text{ чел.}$$

Отсюда примерное число родившихся за 2002 год составит:

$$N_2 = N \cdot Tp^2 = 4750 \cdot 1,0083^2 = 4829 \text{ чел.}$$

3. Коэффициент рождаемости $K_{\text{р}} \text{ рожд}$ равен:

$$K_{\text{р}} \text{ рожд} = \frac{N}{\bar{S}} \cdot 1000 = \frac{4750}{267700} \cdot 1000 = 17,744 \text{ ‰.}$$

Коэффициент смертности $K_{\text{с}} \text{ смерт}$ равен:

$$K_{\text{смерт}} = \frac{M}{\bar{S}} \cdot 1000 = \frac{2757}{267700} \cdot 1000 = 10,299 \text{ ‰}.$$

Коэффициент естественного прироста населения равен:

$$K_{\text{ест.ов}} = K_{\text{рожд}} - K_{\text{смерт}} = 17,744 - 10,299 = 7,445 \text{ ‰}.$$

4. Коэффициент Покровского равен:

$$K_{\text{Покр}} = \frac{N}{M} = \frac{4750}{2757} = 1,723.$$

5. Сальдо миграции равно:

$$\Delta_{\text{мигр}} = S_{\text{пр}} - S_{\text{уб}} = 1100 - 903 = 203 \text{ чел.}$$

Коэффициент миграции населения равен:

$$K_{\text{мигр}} = \frac{(S_1 - S_0) - (N - M)}{\bar{S}} \cdot 1000 = \frac{(268800 - 266600) - (4750 - 2757)}{267700} \cdot 1000 = 0,773 \text{ ‰}.$$

Задача 9.16.

Численность постоянного населения района на начало года составила 222 тыс. чел., на конец года – 228 тыс. чел.

За год в районе родилось 5,2 тыс. чел., умерло 2 тыс. чел.

Вычислить:

- 1) коэффициенты естественного движения населения, оборота и экономического воспроизводства;
- 2) коэффициент жизненности населения;
- 3) коэффициент миграции.

Покажите роль естественного прироста и миграции в формировании населения района.

Решение.

По условию задачи известны:

- численность постоянного населения района на начало года $S_n = 222$ тыс. чел.;
- численность постоянного населения района на конец года $S_k = 228$ тыс. чел.;
- количество родившихся за год $N = 5,2$ тыс. чел.;
- количество умерших за год $M = 2$ тыс. чел.

Определим предварительно среднюю численность населения \bar{S} , коэффициент рождаемости $K_{\text{рожд}}$ и коэффициент смертности $K_{\text{смерт}}$.

Средняя численность населения \bar{S} равна:

$$\bar{S} = \frac{S_n + S_k}{2} = \frac{222 + 228}{2} = 225 \text{ тыс. чел.}$$

Коэффициент рождаемости $K_{рожд}$ равен:

$$K_{рожд} = \frac{N}{S} \cdot 1000 = \frac{5,2}{225} \cdot 1000 = 23,111 \text{ ‰}.$$

Коэффициент смертности $K_{смерт}$ равен:

$$K_{смерт} = \frac{M}{S} \cdot 1000 = \frac{2}{225} \cdot 1000 = 8,889 \text{ ‰}.$$

1) Коэффициент естественного движения населения определяется по формуле:

$$K_{ест.дв} = K_{рожд} - K_{смерт} = 23,111 - 8,889 = 14,222 \text{ ‰}.$$

Коэффициент оборота населения равен:

$$K_{обор} = \frac{N + M}{S} \cdot 1000 = \frac{5,2 + 2}{225} \cdot 1000 = 32 \text{ ‰}.$$

Коэффициент экономического воспроизводства населения равен:

$$K_{эк.воспр} = \frac{N - M}{N + M} \cdot 100 = \frac{5,2 - 2}{5,2 + 2} \cdot 100 = 44,44 \text{ ‰}.$$

2) Коэффициент жизненности населения равен:

$$K_{жизн.нас} = \frac{N}{M} \cdot 100 = \frac{5,2}{2} \cdot 100\% = 260 \text{ ‰}.$$

3) Коэффициент миграции населения равен:

$$K_{мигр} = \frac{(S_k - S_n) - (N - M)}{S} \cdot 1000 = \frac{(228 - 222) - (5,2 - 2)}{225} \cdot 1000 = 12,613 \text{ ‰}.$$

4) За счет естественного прироста (превышения рождаемости над смертностью) в отчетном году наблюдался рост населения из расчета 14,2 чел. на каждую тысячу жителей района.

За счет миграции в отчетном году наблюдался рост населения из расчета 12,6 чел. на каждую тысячу жителей района.

Тема 10. Статистика рынка труда и занятости населения

Задача 10.1.

Имеются данные на конец года по РФ, млн. чел.:

- численность населения – 146,7
- экономически активное население – 66,7
- безработных, всего – 8,9, в том числе
зарегистрированных в службе занятости – 1,93.

Определить: 1) уровень экономически активного населения; 2) уровень занятости; 3) уровень безработицы; 4) уровень зарегистрированных безработных; 5) коэффициент нагрузки на 1 занятого в экономике.

Решение.

Уровень экономически активного населения равен доля численности экономически активного населения в общей численности населения

$$k_{\text{эк.ак}} = \frac{S_{\text{эк.акт}}}{S} = \frac{66,7}{146,7} = 0,4547, \text{ или } 45,47\%.$$

Уровень занятости равен

$$k_{\text{зан}} = \frac{S_{\text{зан}}}{S_{\text{эк.акт}}} = \frac{S_{\text{эк.акт}} - S_{\text{безр}}}{66,7} = \frac{66,7 - 8,9}{66,7} = 0,8666, \text{ или } 86,66\%.$$

Уровень безработицы равен

$$k_{\text{безр}} = \frac{S_{\text{безр}}}{S_{\text{ак}}} = \frac{8,9}{146,7} = 0,0607, \text{ или } 6,07\%.$$

Уровень зарегистрированных безработных равен

$$k_{\text{зар.безр}} = \frac{S_{\text{зар.безр}}}{S_{\text{безр}}} = \frac{1,93}{8,9} = 0,2169, \text{ или } 21,69\%.$$

Коэффициент нагрузки на 1 занятого в экономике равен

$$k_{\text{нагр}} = \frac{S}{S_{\text{зан}}} = \frac{S}{S_{\text{эк.акт}} - S_{\text{безр}}} = \frac{146,7}{66,7 - 8,9} = 2,538.$$

Задача 10.2.

Имеются следующие данные по РФ, млн. чел.:

| Показатель | Базисный год | Отчетный год |
|-------------------------------------|--------------|--------------|
| Среднегодовая численность населения | 148,5 | 148,1 |

| | | |
|---|-------------|--------------|
| Занято в экономике: на государственных и муниципальных предприятиях и в организациях; в частном секторе; | 62,2 9,4 | 25,2 24,4 |
| в общественных организациях, на совместных предприятиях и в организациях; | 0,1 | 0,3 |
| на предприятиях и в организациях смешанной формы собственности | 3,0 | 16,7 |
| Численность безработных, тыс. чел. | 2,8 | 6,0 |

Определить за каждый период:

- 1) численность занятого и экономически активного населения;
- 2) уровень экономической активности населения;
- 3) уровень занятости населения;
- 4) уровень безработицы;
- 5) коэффициент нагрузки на одного занятого в экономике;
- 6) показатели структуры численности занятого населения по секторам экономики;
- 7) абсолютные и относительные изменения показателей, приведенных в условии задачи и рассчитанных; представить в таблице.

Дайте экономический анализ показателей и сделайте выводы.

Решение.

1. Численность занятого населения определяется как сумма всех занятых в экономике.

Численность занятого населения равна:

- в базисном году $N_z^0 = 62,2 + 9,4 + 0,1 + 3,0 = 74,7$ млн. чел.;
- в отчетном году $N_z^1 = 25,2 + 24,4 + 0,3 + 16,7 = 66,6$ млн. чел.

Численность экономически активного населения определяется как сумма занятого населения и безработных. Численность экономически активного населения равна:

- в базисном году $N_a^0 = 74,7 + 148,5 = 77,5$ млн. чел.;
- в отчетном году $N_a^1 = 66,6 + 6,0 = 72,6$ млн. чел.

Экономический анализ показателей. Численность занятого и экономически активного населения в РФ снижается.

2. Уровень экономической активности населения равен отношению численности экономически активного населения к среднегодовой численности населения. Уровень экономической активности населения равен:

- в базисном году $K_a^0 = 77,5 / 148,5 \cdot 1000 = 521,9$ промиле;
- в отчетном году $K_a^1 = 72,6 / 148,1 \cdot 1000 = 490,2$ промиле.

Экономический анализ показателя. Уровень экономической активности населения снижается.

3. Уровень занятости населения равен отношению численности занятого населения к среднегодовой численности населения. Уровень занятости населения равен:

- в базисном году $K_z^0 = 74,7 / 148,5 \cdot 1000 = 503,0$ промиле;
- в отчетном году $K_z^1 = 66,6 / 148,1 \cdot 1000 = 449,7$ помиле.

Экономический анализ показателя. Уровень занятости населения снижается.

4. Уровень безработицы равен отношению численности безработных к среднегодовой численности населения. Уровень безработицы равен:

- в базисном году $K_b^0 = 2,8 / 148,5 \cdot 1000 = 18,9$ промиле;
- в отчетном году $K_b^1 = 6,0 / 148,1 \cdot 1000 = 40,5$ промиле.

Экономический анализ показателя. Уровень безработицы возрастает. В текущем году он удвоился по сравнению с базисным годом.

5. Коэффициент нагрузки на одного занятого в экономике равен отношению численности не занятого населения к численности занятого населения. Коэффициент нагрузки на одного занятого в экономике равен:

- в базисном году $K_n^0 = (148,5 - 74,7) / 74,7 \cdot 1000 = 988,0$ промиле;
- в отчетном году $K_n^1 = (148,1 - 66,6) / 66,6 \cdot 1000 = 1223,7$ помиле.

Экономический анализ показателя. Коэффициент нагрузки на одного занятого в экономике возрастает. Это обусловлено увеличением уровня безработицы и сокращением численности населения.

6. Показатели структуры представляют собой отношение структурных частей изучаемого объекта и их целого. Показатели структуры численности занятого населения по секторам экономики имеют вид:

| Показатель | Базисный год | Отчетный год |
|--|--------------|--------------|
| Занято на государственных и муниципальных предприятиях и в организациях, % | 83,27 | 37,84 |
| Занято в частном секторе, % | 12,58 | 36,64 |
| Занято в общественных организациях, на совместных предприятиях и в организациях, % | 0,13 | 0,45 |
| Занято на предприятиях и в организациях смешанной формы собственности, % | 4,02 | 25,08 |
| Всего, % | 100 | 100 |

Рассчитаем абсолютные и относительные изменения показателей, приведенных в условии задачи и рассчитанных. Результаты представим в виде таблицы:

| Показатель, млн. р. | Базисный год | Отчетный год | Абсолютное изменение, млн. р. | Относительное изменение, % |
|---|--------------|--------------|-------------------------------|----------------------------|
| Среднегодовая численность населения | 148,5 | 148,1 | -0,4 | -0,27 |
| Занято в экономике, в том числе: | 74,7 | 66,6 | -8,1 | -10,84 |
| Занято на государственных и муниципальных предприятиях и в организациях | 62,2 | 25,2 | -37 | -59,49 |
| Занято в частном секторе | 9,4 | 24,4 | 15 | 159,57 |
| Занято в общественных организациях, на совместных предприятиях и в организациях | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 200,00 |
| Занято на предприятиях и в организациях смешанной формы собственности | 3 | 16,7 | 13,7 | 456,67 |
| Численность экономически активного населения | 74,7 | 66,6 | -8,1 | -10,84 |

Выводы. Наблюдается тенденция роста нагрузки на одного занятого в экономике. Основные причины – снижение численности населения и увеличение безработного населения.

Задача 10.3.

Имеются следующие данные за ноябрь:

| Числа месяца | Состояло по списку каждый день | Являлось на работу каждый день | Число целодневных простоев за период |
|--------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| 1 | 90 | 90 | |
| 4-6 | 92 | 92 | |
| 10 - 13 | 95 | 94 | 12 |
| 14 -15 | 94 | 92 | |
| 18 - 22 | 98 | 95 | |
| 25 - 29 | 100 | 99 | 4 |

Выходные и праздничные дни: 2,3, 7, 8, 9, 16, 17,23, 24, 30.

Определите: среднюю списочную численность, среднюю явочную численность и среднее число фактически работавших лиц в ноябре.

Решение.

Среднесписочная численность работников определяется по формуле

$$\bar{x} = \frac{\text{явки} + \text{неявки}}{\text{календарное число дней в периоде}}.$$

Подставив исходные данные, получим

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{90 \cdot 3 + 92 \cdot 6 + 95 \cdot 4 + 94 \cdot 4 + 98 \cdot 7 + 100 \cdot 6}{3 + 6 + 4 + 4 + 7 + 6} = \frac{2863}{30} = 95,47.$$

Средняя явочная численность работников равна

$$\bar{x}_{\text{яв.числ}} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{90 \cdot 1 + 92 \cdot 3 + 94 \cdot 4 + 92 \cdot 2 + 95 \cdot 5 + 99 \cdot 5}{1 + 3 + 4 + 2 + 5 + 5} = \frac{1896}{20} = 94,8.$$

Среднее число фактически работавших лиц в ноябре равно

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\text{факт.раб}} &= \frac{\sum (x_i - x_{\text{прост.}i}) m_i}{\sum m_i} = \frac{90 \cdot 1 + 92 \cdot 3 + (94 - 12) \cdot 4 + 92 \cdot 2 + 95 \cdot 5 + (99 - 4) \cdot 5}{1 + 3 + 4 + 2 + 5 + 5} = \\ &= \frac{1828}{20} = 91,4 \text{ чел.} \end{aligned}$$

Задача 10.4.

По предприятию за апрель имеются следующие данные (чел.-дни): отработано - 2520, целодневные простои - 10; всего неявок 1070, в том числе в связи с праздничными и выходными днями - 960, очередными отпусками - 60. В феврале - 22 рабочих дня.

Определите: 1) календарный, табельный и максимально возможный фонды рабочего времени; 2) среднесписочную численность и среднее явочное число работающих; 3) среднее число дней неявок в составе максимально возможного фонда рабочего времени в расчете на одного среднесписочного работника предприятия.

Решение.

Календарный фонд рабочего времени равен

$$K\Phi = 2520 + 10 + 1070 + 960 = 4560 \text{ чел.-дн.}$$

Табельный фонд рабочего времени равен

$$T\Phi = 4560 - 960 = 3600 \text{ чел.-дн.}$$

Максимально возможный фонд рабочего времени равен

$$MВ\Phi = 3600 - 60 = 3540 \text{ чел.-дн.}$$

В феврале 28 дней. Тогда среднесписочная численность работников равна

$$ССЧ = \frac{4560}{28} = 162,86 \text{ чел.}$$

Среднее явочное число работников равно

$$СЯЧ = \frac{2520 + 10}{22} = 115,0 \text{ чел.}$$

Задача 10.5.

Численность населения региона в трудоспособном возрасте на 1 декабря 2006 года составляла 680 тыс.чел. Из него 6,5 тыс.чел. являются неработающими инвалидами I группы, 15,5 тыс.чел. инвалидами II группы. В возрасте до 16 лет работали 5,6 тыс. подростков; 18,9 тыс. пенсионеров имели оплачиваемую работу.

Численность занятых по найму в общей численности работающих составляла 440,7 тыс.чел. Не по найму работали 35,9 тыс.чел.; 4,3 тыс.женщин находились в оплачиваемом отпуске по уходу за ребенком до 1,5 лет.

Численность официально зарегистрированных безработных на 1 декабря 2006 года составляла 19,2 тыс.чел., что составляет 46% от численности безработных по методологии МОТ.

Определите:

1. Численность трудовых ресурсов;
2. Численность экономически активного населения;
3. Уровень экономической активности;
4. Уровень безработицы по методологии МОТ;
5. Уровень официально зарегистрированной безработицы.

Решение.

1. Трудовые ресурсы – это трудоспособная часть населения, которая по возрасту и состоянию здоровья способна производить материальные и духовные блага, а также оказывать услуги. Трудовые ресурсы включают экономически активное население (фактически занятые и безработные), а также незанятое по тем или иным причинам (экономически неактивное население).

Для того чтобы рассчитать численность трудовых ресурсов, берется общая численность трудоспособного населения по возрасту, к которой прибавляется число работающих пенсионеров и работающих подростков (моложе 16 лет) и исключается количество неработающих инвалидов I и II групп (рабочего возраста), а также численность пенсионеров трудоспособного возраста, получающих пенсию на льготных условиях.

Численность трудовых ресурсов равна

$$680 + 18,9 + 5,6 - 6,5 - 15,5 = 682,5 \text{ тыс. чел.}$$

2. Численность экономически активного населения включает в себя фактически занятых и безработных, она равна

$$440,7 + 19,2 \cdot 100 / 46 = 482,44 \text{ тыс. чел.}$$

3. Уровень экономической активности населения – отношение численности экономически активного населения определенной возрастной группы к общей численности населения соответствующей возрастной группы, в процентах, он равен

$$482,44 / 682,5 \cdot 100\% = 70,7\%.$$

4. Уровень безработицы по методологии МОТ – отношение численности безработных определенной возрастной группы по методологии МОТ к численности экономически активного населения соответствующей возрастной группы, в процентах, он равен

$$(19,2 \cdot 100 / 46) / 482,44 \cdot 100\% = 41,74 / 482,44 \cdot 100\% = 8,7\%.$$

5. Уровень официально зарегистрированной безработицы – отношение численности официально зарегистрированных безработных к численности экономически активного населения соответствующей возрастной группы, в процентах, он равен

$$19,2 / 482,44 \cdot 100\% = 4,0\%.$$

Задача 10.6.

За июнь число явок на работу составило 38000 человеко-дней, в том числе целодневные простои – 800 человеко-дней. Неявки по различным причинам – 3200 человеко-дней, в том числе очередные отпуска – 240 человеко-дней. Праздничные и выходные дни составили 9000 человеко-дней. Фактически отработано за период 297600 человеко-часов. Средняя установленная продолжительность рабочего дня – 7,9 часа.

Рассчитайте:

1. Календарный, табельный, максимально возможный, явочный, фактически отработанный фонды времени и коэффициенты их использования.
2. Среднесписочную численность рабочих.
3. Коэффициенты использования рабочего периода и рабочего дня.
4. Интегральный коэффициент использования рабочего времени.

Решение.

1. Календарный фонд рабочего времени равен

$$K\Phi = 38000 + 3200 + 9000 = 50200 \text{ чел.-дн.}$$

Табельный фонд рабочего времени равен

$$T\Phi = 50200 - 9000 = 41200 \text{ чел.-дн.}$$

Максимально возможный фонд рабочего времени равен

$$МВФ = 41200 - 240 = 40960 \text{ чел.-дн.}$$

Явочный фонд рабочего времени равен

$$ЯФ = 38000 \text{ чел.-дн.}$$

Фактически отработанный фонд рабочего времени равен

$$ФОФ = 38000 - 800 = 37200 \text{ чел.-дн.}$$

Коэффициент использования календарного фонда рабочего времени равен

$$K_{КФ} = \frac{37200}{50200} = 0,741, \text{ или } 73,1\%.$$

Коэффициент использования табельного фонда рабочего времени равен

$$K_{ТФ} = \frac{37200}{41200} = 0,903, \text{ или } 90,3\%.$$

Коэффициент использования максимально возможного фонда рабочего времени равен

$$K_{МВФ} = \frac{37200}{40960} = 0,908, \text{ или } 90,8\%.$$

Коэффициент использования явочного фонда рабочего времени равен

$$K_{ЯФ} = \frac{37200}{38000} = 0,979, \text{ или } 97,9\%.$$

2. В июне 30 дней. Тогда среднесписочная численность рабочих равна

$$\bar{N} = \frac{50200}{30} = 1673,3 \text{ чел.}$$

3. Коэффициент использования рабочего периода равен

$$K_{р.п} = \frac{38000}{1673,3 \cdot 30} = 0,757, \text{ или } 75,7\%.$$

Коэффициент использования рабочего дня равен

$$K_{р.д} = \frac{297600}{3800 \cdot 7,9} = 0,991, \text{ или } 99,1\%.$$

Интегральный коэффициент использования рабочего времени равен

$$K_{итт} = K_{р.п} \cdot K_{р.д} = 0,757 \cdot 0,991 = 0,750, \text{ или } 75,0\%.$$

Задача 10.7.

Имеются следующие данные по региону (тыс.чел.)

| | |
|---|-------|
| Среднегодовая численность населения | 286,0 |
| Численность населения, занятого в экономике | 134,5 |
| Численность безработных | 5,2 |

Определить:

1. Численность и уровень экономически активного населения.

2. Уровень безработицы.

Решение.

Численность экономически активного населения включает численность занятых и безработных и составляет

$$S_{ак} = S_{зн} + S_{бр} = 134,5 + 5,2 = 139,7 \text{ тыс. чел.}$$

Уровень экономически активного населения равен доля численности экономически активного населения в общей численности населения

$$k_{ак} = \frac{S_{ак}}{S} = \frac{139,7}{286} = 0,488, \text{ или } 48,8\%.$$

Уровень безработицы равен

$$k_{бр} = \frac{S_{бр}}{S_{ак}} = \frac{5,2}{139,7} = 0,037, \text{ или } 3,7\%.$$

Задача 10.8.

Имеются следующие данные о численности рабочих на предприятии, вступившем в эксплуатацию 29 марта (число рабочих по списку): 29 марта – 981 человек; 30 марта – 1010; 31 марта – 1109; среднее число рабочих: в апреле – 1197 человек, в мае – 1202, в июне – 1401.

Определить среднее число рабочих за март, за 1-й квартал, за 2-й квартал, за 1-е полугодие.

Решение.

Среднее число рабочих за март равно

$$N_3 = \frac{981 + 1010 + 1109}{31} = 100 \text{ чел.}$$

Среднее число рабочих за 1-й квартал равно

$$N_I = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3} = \frac{0 + 0 + 100}{3} = 33,3 \text{ чел.}$$

Среднее число рабочих за 2-й квартал равно

$$N_{II} = \frac{N_4 + N_5 + N_6}{3} = \frac{1197 + 1202 + 1401}{3} = 1266,7 \text{ чел.}$$

Среднее число рабочих за 1-е полугодие равно

$$N = \frac{N_I + N_{II}}{2} = \frac{33,3 + 1266,7}{2} = 650 \text{ чел.}$$

Задача 10.9.

Имеются данные по предприятию.

| Показатель | Данные, чел. |
|---|--------------|
| Состояло рабочих по списку на начало года | 690 |
| Принято рабочих за год | 195 |
| Выбыло рабочих за год | 171 |
| из них: | |
| по собственному желанию | 129 |
| уволено за прогулы и другие нарушения трудовой дисциплины | 8 |
| Состояло рабочих по списку на конец года | 714 |
| Число рабочих, состоящих в списочном составе предприятия весь год (с 1 января по 31 декабря включительно) | 419 |

Определите и проанализируйте по заводу:

- 1) среднесписочное число рабочих;
- 2) коэффициент оборота рабочих по приему, увольнению;
- 3) коэффициент общего оборота рабочей силы;
- 4) коэффициент текучести;
- 5) коэффициент постоянства;
- 6) коэффициент замещения.

Решение.

- 1) Среднесписочное число рабочих определяется по формуле:

$$\bar{N} = \frac{N_n + N_k}{2},$$

где N_n , N_k – количество рабочих на начало и конец года, соответственно.

Отсюда среднесписочное число рабочих равно

$$\bar{N} = \frac{N_n + N_k}{2} = \frac{690 + 714}{2} = 702.$$

- 2) Коэффициент оборота рабочих по приему определяется по формуле:

$$K_{\text{прием}}^{\text{обор}} = \frac{M}{\bar{N}},$$

где M – всего принято.

Отсюда коэффициент оборота рабочих по приему равен:

$$K_{\text{прием}}^{\text{обор}} = \frac{M}{\bar{N}} = \frac{195}{702} = 0,278.$$

Коэффициент оборота рабочих по увольнению определяется по формуле:

$$K_{\text{уволн}}^{\text{оборот}} = \frac{L}{N},$$

где L – всего уволено.

Отсюда коэффициент оборота рабочих по увольнению равен:

$$K_{\text{уволн}}^{\text{оборот}} = \frac{L}{N} = \frac{171}{702} = 0,244.$$

3) Коэффициент общего оборота рабочей силы равен:

$$K_{\text{общ.оборот}} = K_{\text{прием}}^{\text{оборот}} + K_{\text{уволн}}^{\text{оборот}} = 0,278 + 0,244 = 0,522.$$

4) Коэффициент текучести кадров определяется по формуле:

$$K_{\text{кадров}}^{\text{текуч}} = \frac{L_1 + L_2}{N},$$

где L_1 , L_2 – количество уволенных рабочих по собственному желанию и за прогулы, соответственно.

Отсюда коэффициент текучести кадров равен:

$$K_{\text{кадров}}^{\text{текуч}} = \frac{L_1 + L_2}{N} = \frac{129 + 8}{702} = 0,195.$$

5) Коэффициент постоянства кадров определяется по формуле:

$$K_{\text{кадров}}^{\text{пост}} = \frac{M_0}{N},$$

где M_0 – число рабочих, состоящих в списочном составе предприятия весь год.

Отсюда коэффициент постоянства кадров равен:

$$K_{\text{кадров}}^{\text{пост}} = \frac{M_0}{N} = \frac{419}{702} = 0,597.$$

6) Коэффициент замещения равен:

$$K_{\text{кадров}}^{\text{замещ}} = \frac{M}{L} = \frac{195}{171} = 1,14.$$

Тема 11. Макроэкономическая статистика

Задача 11.1.

По приведенным ниже данным рассчитать индекс условий торговли; установить, являются ли условия торговли, приведенные в задаче, благоприятными для данной страны.

Данные экспорта, \$.

| | 2000 | | 2001 | |
|------------|------------|------|------------|------|
| | количество | цена | количество | цена |
| Сталь, т | 10 | 70 | 25 | 71 |
| Нефть, бар | 1000 | 29 | 1800 | 33 |
| Золото, ун | 30 | 270 | 20 | 271 |

Данные импорта, \$.

| | 2000 | | 2001 | |
|-----------------|------------|------|------------|------|
| | количество | цена | количество | цена |
| Пшеница, т | 800 | 210 | 830 | 210 |
| Компьютеры, шт. | 410 | 630 | 420 | 650 |
| Автошины, шт. | 750 | 120 | 700 | 220 |

Для расчета средних цен экспорта применить индекс Пааше

Для расчета средних цен импорта применить индекс Ласпейреса

Решение.

Индекс условий торговли – численная оценка условий торговли. Индекс условий торговли равен отношению индекса экспортных цен к индексу импортных цен.

Обозначим: p – цена, q – количество.

Индекс экспортных цен определим по формуле Пааше

$$I_p^p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{71 \cdot 25 + 33 \cdot 1800 + 271 \cdot 20}{70 \cdot 25 + 29 \cdot 1800 + 270 \cdot 20} = \frac{66595}{59350} = 1,122.$$

Индекс импортных цен определим по формуле Ласпейреса

$$I_p^u = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{210 \cdot 800 + 650 \cdot 410 + 220 \cdot 750}{210 \cdot 800 + 630 \cdot 410 + 120 \cdot 750} = \frac{599500}{516300} = 1,161.$$

Отсюда индекс условий торговли равен

$$I_t = \frac{I_p^p}{I_p^u} = \frac{1,122}{1,161} = 0,966, \text{ или } 96,6\%.$$

Т.к. индекс условий торговли менее 100%, то темп роста экспорта ниже темпа роста импорта. Поэтому условия торговли для данной страны являются не благоприятными.

Задача 11.2.

Имеются следующие условные данные за два года, млрд. руб.

| № п/п | Показатели | Период | |
|-------|--|--------------|--------------|
| | | Базисный год | Отчетный год |
| 1 | Валовой внутренний продукт в текущих ценах | 9043,8 | 10865,3 |
| 2 | Денежная масса | 3615,2 | 3770,0 |
| 3 | Наличные деньги | 1370,0 | 1390,0 |

Определите за базисный и отчетный годы:

1. Скорость обращения денежной массы и наличных денег;
2. Продолжительность одного оборота в днях;
3. Долю наличных денег в денежной массе;
4. Абсолютный прирост скорости обращения денежной массы за счет изменения скорости обращения наличных денег и изменения доли наличных денег.

Сделайте выводы.

Решение.

1. Скорость обращения денег – это среднегодовое количество оборотов, сделанных деньгами, которые находятся в обращении и используются на покупку готовых товаров и услуг. Скорость обращения денег равна отношению номинального валового национального продукта к массе денег в обращении:

$$V = U/M,$$

где V – скорость обращения денег; U – номинальный объем ВВП; M – масса денег в обращении.

Скорость обращения денежной массы равна:

$$\text{- в базисном году } V_0^{d.m} = \frac{9043,8}{3615,2} = 2,502,$$

$$\text{- в отчетном году } V_1^{d.m} = \frac{10865,3}{3770,0} = 2,882.$$

Скорость обращения наличных денег равна:

$$\text{- в базисном году } V_0^{n.d.} = \frac{9043,8}{1370,0} = 6,601,$$

- в отчетном году $V_1^{н.д.} = \frac{10865,3}{1390,0} = 7,817$.

2. Продолжительность одного оборота в днях определяется по формуле

$$T = \frac{D}{V},$$

где D – число календарных дней анализируемого периода (для одного года считают $D = 360$).

Продолжительность одного оборота денежной массы равна:

- в базисном году $T_0^{д.м.} = \frac{360}{2,502} = 143,9$ дней,

- в отчетном году $T_1^{д.м.} = \frac{360}{2,882} = 124,9$ дней.

Продолжительность одного оборота наличных денег равна:

- в базисном году $V_0^{н.д.} = \frac{360}{6,601} = 54,5$ дней,

- в отчетном году $V_1^{н.д.} = \frac{360}{7,817} = 46,1$ дней.

3. Доля наличных денег в денежной массе равна:

- в базисном году $d_0 = \frac{1370,0}{3615,2} = 0,379$, или 37,9%,

- в отчетном году $d_1 = \frac{1390,0}{3770,0} = 0,369$, или 36,9%.

4. Абсолютный прирост скорости обращения денежной массы за счет изменения скорости обращения наличных денег равен

$$\Delta V(v) = 7,817 \cdot 0,369 - 6,601 \cdot 0,369 = 0,448.$$

Абсолютный прирост скорости обращения денежной массы за счет изменения доли наличных денег равен

$$\Delta V(d) = 6,601 \cdot 0,369 - 6,601 \cdot 0,379 = -0,068.$$

Выводы.

1. Средняя скорость обращения денежной массы в отчетном году выросла за счет роста скорости обращения наличных денег на 0,448 оборота в год.

1. Средняя скорость обращения денежной массы в отчетном году уменьшилась за счет уменьшения доли наличных денег на 0,068 оборота в год.

Задача 11.3.

По приведенным ниже данным определить размер валового внутреннего продукта страны N, используя 3 метода расчета:

1. Экспорт товаров за год – 8000 у.е.
2. Импорт товаров за год – 16000 у.е.
3. Общая сумма зарплаты в экономике за год – 3000 у.е.
4. Общая сумма начисленных дивидендов в экономике за год – 0,2 тыс. у.е.
5. Прибыль предприятий, учреждений, организаций – 5,6 у.е.
6. Выручка предприятий, учреждений, организаций – 15000 у.е.
7. Расходы государства – 7000 у.е.
8. Общие затраты на производство – 4000 у.е.
9. Налоги – 2,5 тыс. у.е.
10. Расходы домохозяйств – 6000 у.е.
11. Расходы фирм на строительство, покупку основных фондов – 6000 у.е.

Решение.

ВВП может быть исчислен на каждой стадии воспроизводственного цикла соответствующим методом:

- производственным методом на стадии производства товаров и услуг;
- распределительным методом на стадии распределения;
- методом конечного использования на стадии конечного использования.

1. ВВП, рассчитанный производственным методом, равен

$$\text{ВВП} = \text{В} + \text{ЧНП} - \text{С} - \text{ПП},$$

где В – выпуск товаров и услуг, ЧНП – чистые налоги на продукты, С – субсидии на экспорт и импорт, ПП – промежуточное потребление.

Из условия имеем: В = 15000, ЧНП = 2500, С = 0, ПП = 4000. Отсюда

$$\text{ВВП} = 15000 + 2500 - 4000 = 13500 \text{ у.е.}$$

2. ВВП, рассчитанный методом конечного использования, равен

$$\text{ВВП} = \text{КП} + \text{ВН} + \text{Э} - \text{И},$$

где КП – конечное потребление, ВН – валовое накопление, Э – экспорт, И – импорт.

Из условия имеем: КП = 6000, ВН = 5600 + 6000 = 11600, Э = 8000, И = 16000. Отсюда

$$\text{ВВП} = 6000 + 11600 + 8000 - 16000 = 9600 \text{ у.е.}$$

3. ВВП, рассчитанный распределительным методом, равен

$$\text{ВВП} = \text{ОТ} + \text{ЧНП} + \text{ВП},$$

где ОТ – оплата труда наемных работников, ЧНП – чистые налоги на продукты, ВП – валовая прибыль и смешанные доходы.

Из условия имеем: $OT = 3000$, $ЧНП = 2500$, $ВП = 5600 + 200 = 5800$. Отсюда
 $ВВП = 3000 + 2500 + 5800 = 11300$ у.е.

Задача 11.4.

По приведенным ниже данным определит размер ВВП страны N, используя 3 метода расчета.

1. Экспорт товаров за год – 2000 у.е.
2. Импорт товаров за год – 5000 у.е.
3. Общая сумма зарплаты в экономике за год – 1000 у.е.
4. Общая сумма начисленных дивидендов в экономике за год – 200 у.е.
5. Прибыль предприятий, учреждений, организаций – 5000 у.е.
6. Выручка предприятий, учреждений, организаций – 12000 у.е.
7. Расходы государства – 5000 у.е.
8. Общие затраты на производство – 4000 у.е.
9. Налоги – 1800 у.е.
10. Расходы домохозяйств – 3000 у.е.
11. Расходы фирм на строительство, покупку основных фондов – 3000 у.е.

Решение.

ВВП может быть исчислен на каждой стадии воспроизводственного цикла соответствующим методом:

- производственным методом на стадии производства товаров и услуг;
- распределительным методом на стадии распределения;
- методом конечного использования на стадии конечного использования.

1. ВВП, рассчитанный производственным методом, равен

$$ВВП = В + ЧНП - С - ПП,$$

где В – выпуск товаров и услуг, ЧНП – чистые налоги на продукты, С – субсидии на экспорт и импорт, ПП – промежуточное потребление.

Из условия имеем: $В = 12000$, $ЧНП = 1800$, $С = 0$, $ПП = 4000$. Отсюда

$$ВВП = 12000 + 1800 - 4000 = 9800 \text{ у.е.}$$

2. ВВП, рассчитанный методом конечного использования, равен

$$ВВП = КП + ВН + Э - И,$$

где КП – конечное потребление, ВН – валовое накопление, Э – экспорт, И – импорт.

Из условия имеем: $КП = 3000$, $ВН = 5000 + 3000 = 8000$, $Э = 2000$, $И = 5000$. Отсюда

$$ВВП = 3000 + 8000 + 2000 - 5000 = 8000 \text{ у.е.}$$

3. ВВП, рассчитанный распределительным методом, равен

$$\text{ВВП} = \text{ОТ} + \text{ЧНП} + \text{ВП},$$

где ОТ – оплата труда наемных работников, ЧНП – чистые налоги на продукты, ВП – валовая прибыль и смешанные доходы.

Из условия имеем: ОТ = 1000, ЧНП = 1800, ВП = 5000 + 200 = 5200. Отсюда

$$\text{ВВП} = 1000 + 1800 + 5200 = 8000 \text{ у.е.}$$

Задача 11.5.

По приведенным ниже данным рассчитать индекс условий торговли; установить, являются ли условия торговли, приведенные в задаче, благоприятными для данной страны.

Данные экспорта, \$.

| | 2000 | | 2001 | |
|--------------|------------|------|------------|------|
| | количество | цена | количество | Цена |
| Сталь, | 20 | 70 | 25 | 72 |
| Нефть, бар | 200 | 25 | 250 | 35 |
| Золото, ун т | 107 | 350 | 150 | 350 |

Данные импорта

| | 2000 | | 2001 | |
|-----------------|------------|------|------------|------|
| | количество | цена | количество | Цена |
| Пшеница, т | 1000 | 240 | 1000 | 245 |
| Компьютеры, шт. | 500 | 850 | 320 | 810 |
| Автошины, шт. | 200 | 150 | 150 | 140 |

Для расчета средних цен экспорта применить индекс Пааше

Для расчета средних цен импорта применить индекс Ласпейреса

Решение.

Индекс условий торговли – численная оценка условий торговли. Индекс условий торговли равен отношению индекса экспортных цен к индексу импортных цен.

Обозначим: p – цена, q – количество.

Индекс экспортных цен определим по формуле Пааше

$$I_p^e = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{72 \cdot 25 + 35 \cdot 250 + 350 \cdot 150}{70 \cdot 25 + 25 \cdot 250 + 350 \cdot 150} = \frac{63050}{60500} = 1,042.$$

Индекс импортных цен определим по формуле Ласпейреса

$$I_p^u = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{245 \cdot 1000 + 810 \cdot 500 + 140 \cdot 200}{240 \cdot 1000 + 850 \cdot 500 + 150 \cdot 200} = \frac{678000}{695000} = 0,976.$$

Отсюда индекс условий торговли равен

$$I_t = \frac{I_p^2}{I_p^1} = \frac{1,042}{0,976} = 1,068, \text{ или } 106,8\%.$$

Т.к. индекс условий торговли больше 100%, то темп роста экспорта выше темпа роста импорта. Поэтому условия торговли для данной страны являются благоприятными.

Задача 11.6.

| Показатели | Базисный период | Отчетный период |
|---|-----------------|-----------------|
| Средняя численность города, тыс. чел | 280 | 300 |
| Число семей, тыс. | 80 | 100 |
| Денежные доходы населения, млн. руб. | 252 | 420 |
| Потребление за год, тыс. руб. (в сопоставимых ценах): | | |
| а) обуви | 2760 | 4560 |
| б) мебели | 2480 | 6090 |
| в) радиотоваров | 1848 | 4980 |

Определить:

1. Потребление в отчетном и базисном периодах обуви на душу населения, мебели и радиотоваров на одну семью.
2. Индексы потребления.
3. Коэффициент эластичности потребления от дохода.

Решение.

1. Потребление обуви на душу населения составило:

$$\text{в базисном периоде } \frac{2760}{280} = 9,86 \text{ руб./чел.},$$

$$\text{в отчетном периоде } \frac{4560}{300} = 15,2 \text{ руб./чел.}$$

Потребление мебели на одну семью составило:

$$\text{в базисном периоде } \frac{2480}{80} = 31,0 \text{ руб./семья},$$

$$\text{в отчетном периоде } \frac{6090}{100} = 60,9 \text{ руб./семья.}$$

Потребление радиотоваров на одну семью составило:

в базисном периоде $\frac{1848}{80} = 23,1$ руб./семья,

в отчетном периоде $\frac{4980}{100} = 49,8$ руб./семья.

2. Общий индекс потребления составляет

$$I_q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{4560 + 6090 + 4980}{2760 + 2480 + 1848} = \frac{15630}{7088} = 2,205, \text{ или } 220,5\%.$$

Общий индекс потребления на душу населения составляет

$$I_{\text{потр. на душу нас}} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{S_0}{S_1} = 2,205 \cdot \frac{280}{300} = 2,058, \text{ или } 205,8\%.$$

3. Коэффициент эластичности потребления от дохода равен

$$K_{\varepsilon} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \frac{y}{x},$$

где y, x – начальные потребление и доход соответственно; $\Delta y, \Delta x$ – их изменение за период.

Подставив исходные данные, получим

$$K_{\varepsilon} = \frac{15630 - 7088}{420 - 252} \cdot \frac{252}{7088} = 1,81.$$

Задача 11.7.

| Показатели | 1980-81 | 1985-86 | 1990-91 |
|--|---------|---------|---------|
| Число общеобразовательных школ, тыс. | 74,8 | 71,7 | 69,7 |
| в т.ч.: | | | |
| в городах и поселках городского типа | 22,2 | 21,5 | 21,1 |
| в сельской местности | 52,6 | 50,2 | 48,6 |
| Численность учащихся общеобразовательных школ, тыс. чел. | 20216 | 20152 | 20851 |
| в т.ч.: | | | |
| в городах и поселках городского типа | 13525 | 14260 | 14948 |
| в сельской местности | 6691 | 5892 | 5903 |
| Численность учителей, тыс. чел. | 1135 | 1218 | 1460 |
| в т.ч. | | | |
| в городах и поселках городского типа | 779 | 862 | 1047 |
| в сельской местности | 356 | 356 | 413 |

На основе приведенных данных построить и проанализировать социально-экономические нормалы за 1980/81 – 1985/86 гг. и за 1985/86 – 1990/91 гг. для:

- а) всех школ;
- б) городских школ;
- в) сельских школ.

Решение.

Построим социально-экономические нормалы за 1980/81 – 1985/86 гг. и за 1985/86 – 1990/91 гг. Результаты оформим в виде таблицы

| Показатели | 1980-81 | 1985-86 | 1990-91 | Индексы | |
|--|---------|---------|---------|--------------------------|--------------------------|
| | | | | за 1980/81 – 1985/86 гг. | за 1985/86 – 1990/91 гг. |
| Число общеобразовательных школ, тыс. | 74,8 | 71,7 | 69,7 | 0,959 | 0,972 |
| в т.ч.: | | | | | |
| в городах и поселках городского типа | 22,2 | 21,5 | 21,1 | 0,968 | 0,981 |
| в сельской местности | 52,6 | 50,2 | 48,6 | 0,954 | 0,968 |
| Численность учащихся общеобразовательных школ, тыс. чел. в т.ч.: | 20216 | 20152 | 20851 | 0,997 | 1,035 |
| в т.ч.: | | | | | |
| городах и поселках городского типа | 13525 | 14260 | 14948 | 1,054 | 1,048 |
| в сельской местности | 6691 | 5892 | 5903 | 0,881 | 1,002 |
| Численность учителей, тыс. чел. в т.ч. в | 1135 | 1218 | 1460 | 1,073 | 1,199 |
| в т.ч.: | | | | | |
| городах и поселках городского типа | 779 | 862 | 1047 | 1,107 | 1,215 |
| в сельской местности | 356 | 356 | 413 | 1,000 | 1,160 |

Обозначим:

J_a – индекс числа общеобразовательных школ;

J_b – индекс численности учителей;

J_y – индекс численности учащихся.

Для школьного образования в целом социально-экономическая нормаль имеет вид:

$$J_a \geq J_b \geq J_y.$$

Из таблицы видно, что для всех случаев $J_g \geq J_y$ и $J_a < J_g$. Это означает, что темп роста числа школ, как в целом, так и в городе и сельской местности ниже темпа роста численности учителей и учащихся. Т.е. для социально-экономическая нормаль для школьного образования не выполнена.

Задача 11.8.

Имеются данные о краткосрочном кредитовании отраслей экономики, млн. р.:

| Отрасли экономики | Погашено кредитов | | Средние остатки кредитов | |
|-------------------|-------------------|--------------|--------------------------|--------------|
| | Базисный год | Отчетный год | Базисный год | Отчетный год |
| 1 | 7200 | 9000 | 900 | 1000 |
| 2 | 10800 | 12600 | 4200 | 4300 |

Определить:

- 1) индексы средней длительности пользования кредитом по каждой отрасли;
- 2) для двух отраслей экономики – общие индексы средней длительности пользования кредитом:
 - а) переменного состава,
 - б) постоянного состава,
 - в) структурных сдвигов;
- 3) абсолютное изменение средней длительности кредита вследствие изменения времени пользования кредитом и структуры погашения кредита;
- 4) провести анализ показателей и сделать выводы.

Решение.

1. Средняя длительность пользования кредитом равна отношению суммы погашенных кредитов за год к среднему остатку кредитов.

В 1-й отрасли средняя длительность пользования кредитом равна:

- в базисном году $t_0^I = \frac{7200}{900} = 8$ дней;

- в отчетном году $t_1^I = \frac{9000}{1000} = 9$ дней.

Во 2-й отрасли средняя длительность пользования кредитом равна:

- в базисном году $t_0^{II} = \frac{10800}{4200} = 2,571$ дней;

- в отчетном году $t_1^{II} = \frac{12600}{4300} = 2,930$ дней.

Индекс средней длительности пользования кредитом в 1-й отрасли равен

$$i_I = \frac{t_1^I}{t_0^I} = \frac{9}{8} = 1,125.$$

Индекс средней длительности пользования кредитом во 2-й отрасли равен

$$i_{II} = \frac{t_1^{II}}{t_0^{II}} = \frac{2,930}{2,571} = 1,140.$$

2. Запишем исходную таблицу в виде:

| Отрасли экономики | Средняя длительность пользования кредитом, дней | | Средний остаток кредитов, млн. р. | |
|-------------------|---|----------------|-----------------------------------|----------------|
| | периоды | | периоды | |
| | базисный p_0 | отчетный p_1 | базисный q_0 | отчетный q_1 |
| 1 | 8 | 9 | 900 | 1000 |
| 2 | 2,571 | 2,930 | 4200 | 4300 |

а) Индекс средней длительности пользования кредитом переменного состава равен:

$$I_{n.c} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{21600}{5300} : \frac{18000}{5100} = 1,1547, \text{ или } 115,47\%.$$

б) Индекс средней длительности пользования кредитом постоянного (фиксированного) состава равен:

$$I_{ф.с} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{21600}{19057,143} = 1,1334 \text{ или } 113,34\%.$$

в) Индекс структурных сдвигов равен:

$$I_{cmp} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{19057,143}{5300} : \frac{18000}{5100} = 1,0188, \text{ или } 101,88\%.$$

3. Абсолютное изменение средней длительности кредита вследствие изменения времени пользования кредитом равно

$$\Delta p(p) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 21600 - 19057,143 = 2542,857 \text{ млн. р.}$$

Абсолютное изменение средней длительности кредита вследствие изменения структуры погашения кредита равно

$$\Delta p(q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 19057,143 - 18000 = 1057,143 \text{ млн. р.}$$

4. Выводы.

а) В 1-й отрасли средняя длительность пользования кредитом оказалась значительно выше чем во 2-й (примерно в три раза).

б) Абсолютное изменение средней длительности кредита в основном изменялась за счет изменения времени пользования кредитом.

Задача 11.9.

Имеются условные данные по региону, млн. руб.

| Показатель | Базисный год | Отчетный год |
|--|--------------|--------------|
| Валовой региональный продукт | 274 | 400 |
| Денежная масса M | 55 | 50 |
| Наличные деньги вне банковской системы | 19 | 18,5 |

Определить:

- 1) удельный вес наличных денег в обращении в общем объеме денежной массы;
- 2) скорость обращения денежной массы M ;
- 3) скорость обращения наличных денег;
- 4) абсолютный прирост скорости обращения денежной массы M за счет изменения скорости обращения наличности и удельного веса наличных денег в общем объеме денежной массы M .

Решение.

1) Удельный вес наличных денег в обращении в общем объеме денежной массы определяется по формуле:

$$d = \frac{S}{M},$$

где M – денежная масса; S – наличные деньги вне банковской системы.

Удельный вес наличных денег в обращении в общем объеме денежной массы в базисном году составил:

$$d_0 = \frac{S_0}{M_0} = \frac{19}{55} = 0,3455, \text{ или } 34,55\%.$$

Удельный вес наличных денег в обращении в общем объеме денежной массы в отчетном году составил:

$$d_1 = \frac{S_1}{M_1} = \frac{18,5}{50} = 0,37, \text{ или } 37,0\%.$$

2) Скорость обращения денежной массы определяется по формуле:

$$K^{\text{обор.д.м}} = \frac{ГП}{M},$$

где ГП – объем готовой продукции (валовой региональный продукт).

Скорость обращения денежной массы в базисном году составила:

$$K_0^{\text{обор.д.м}} = \frac{ГП_0}{M_0} = \frac{274}{55} = 4,982 \text{ оборота.}$$

Скорость обращения денежной массы в отчетном году составила:

$$K_1^{\text{обор.д.м}} = \frac{ГП_1}{M_1} = \frac{400}{50} = 8,0 \text{ оборота.}$$

3) Скорость обращения наличных денег определяется по формуле:

$$K^{\text{обор.н.д}} = \frac{ГП}{S}.$$

Скорость обращения денежной массы в базисном году составила:

$$K_0^{\text{обор.н.д}} = \frac{ГП_0}{S_0} = \frac{274}{19} = 14,421 \text{ оборота.}$$

Скорость обращения денежной массы в отчетном году составила:

$$K_1^{\text{обор.н.д}} = \frac{ГП_1}{S_1} = \frac{400}{18,5} = 21,622 \text{ оборота.}$$

4) Абсолютный прирост скорости обращения денежной массы определяется по формуле:

$$\Delta M = K_1^{\text{обор.н.д}} \cdot d_1 - K_0^{\text{обор.н.д}} \cdot d_0 = 21,622 \cdot 0,37 - 14,421 \cdot 0,3455 = 3,018 \text{ оборота.}$$

Абсолютный прирост скорости обращения денежной массы за счет изменения скорости обращения наличности составил:

$$\Delta M(K^{\text{обор.н.д}}) = (K_1^{\text{обор.н.д}} - K_0^{\text{обор.н.д}}) \cdot d_0 = (21,622 - 14,421) \cdot 0,3455 = 2,488 \text{ оборота.}$$

Абсолютный прирост скорости обращения денежной массы за счет изменения удельного веса наличных денег в общем объеме денежной массы составил:

$$\Delta M(d) = (d_1 - d_0) \cdot K_1^{\text{обор.н.д}} = (0,37 - 0,3455) \cdot 21,622 = 0,530 \text{ оборота.}$$

Тема 12. Микроэкономическая статистика

Задача 12.1.

На заводе 8 февраля вышло на работу следующее количество рабочих:

| Цех | Смена | | | Итого |
|--------------|-------|-----|-----|-------|
| | I | II | III | |
| Литейный | 210 | 100 | 90 | 400 |
| Механический | 400 | 200 | 80 | 680 |
| Сборочный | 580 | 450 | 320 | 1350 |

Определить коэффициент сменности по цехам и по заводу в целом.

Решение.

Коэффициент сменности равен отношению числа человеко-дней, отработанных во всех сменах, к числу человеко-дней, отработанных в I смене. Коэффициент сменности по цехам равен:

- в литейном цехе $k_1 = \frac{400}{210} = 1,905$,

- в механическом цехе $k_2 = \frac{680}{400} = 1,70$,

- в сборочном цехе $k_3 = \frac{1350}{580} = 2,328$.

Коэффициент сменности по заводу в целом равен

$$K = \frac{400 + 680 + 1350}{210 + 400 + 580} = \frac{2430}{1190} = 2,042.$$

Задача 12.2.

Имеются следующие данные по объединению (тыс. руб.)

| Завод | Базисный период | | Отчетный период | |
|-------|-----------------------------------|---------------|-----------------------------------|---------------|
| | Стоимость произведенной продукции | Стоимость ОПФ | Стоимость произведенной продукции | Стоимость ОПФ |
| А | 420 | 210 | 560 | 300 |
| Б | 380 | 200 | 450 | 210 |
| В | 550 | 390 | 600 | 420 |
| Всего | 1350 | 800 | 1610 | 930 |

Подсчитать:

1. Фондоотдачу по каждому предприятию в обоих периодах.
2. Постройте индивидуальные и агрегатные индексы фондоотдачи.
3. Определите, как изменилась в абсолютном выражении средняя фондоотдача по объединению за счет: а) изменения фондоотдачи по каждому предприятию; б) изменения структуры основных производственных фондов.

Решение.

Фондоотдача равна отношению стоимости произведенной продукции к стоимости ОПФ. Тогда фондоотдача по каждому предприятию в обоих периодах составит (см. табл. 1)

Таблица 1

| Завод | Фондоотдача | |
|-----------|-----------------|-----------------|
| | Базисный период | Отчетный период |
| А | 2,000 | 1,867 |
| Б | 1,900 | 2,143 |
| В | 1,410 | 1,429 |
| В среднем | 1,688 | 1,731 |

Индивидуальные индексы фондоотдачи равны отношению фондоотдачи в отчетном периоде к базисному периоду. Результаты расчета индивидуальных индексов фондоотдачи приведены в табл. 2.

Таблица 2

| Завод | Индекс фондоотдачи |
|-------|--------------------|
| А | 0,933 |
| Б | 1,128 |
| В | 1,013 |

Определим агрегатные индексы фондоотдачи:

– индекс фондоотдачи переменного состава (индекс средней фондоотдачи):

$$I_{\overline{\phi o}} = \frac{\sum \phi o_1 \times \overline{\Phi}_1}{\sum \overline{\Phi}_1} : \frac{\sum \phi o_0 \times \overline{\Phi}_0}{\sum \overline{\Phi}_0} = \overline{\phi o}_1 : \overline{\phi o}_0,$$

где $\overline{\phi o}_0$ и $\overline{\phi o}_1$ – средняя фондоотдача в базисном и отчетном периодах соответственно,

$$I_{\overline{\phi o}} = \frac{1,731}{1,688} = 1,026 \text{ или } 102,6\%;$$

– индекс фондоотдачи постоянного (фиксированного) состава:

$$I_{\phi o} = \frac{\sum \phi o_1 \times \bar{\Phi}_1}{\sum \bar{\Phi}_1} : \frac{\sum \phi o_0 \times \bar{\Phi}_1}{\sum \bar{\Phi}_1} = \bar{\phi o}_1 : \bar{\phi o}_{\text{усл.}} = \frac{\sum \phi o_1 \times \bar{\Phi}_1}{\sum \phi o_0 \times \bar{\Phi}_1},$$

где $\bar{\phi o}_{\text{усл.}} = \frac{\sum \phi o_0 \cdot \bar{\Phi}_1}{\sum \bar{\Phi}_1} = \frac{2,0 \cdot 300 + 1,9 \cdot 210 + 1,41 \cdot 420}{300 + 210 + 420} = \frac{1591,308}{930} = 1,711$ – средняя условная

фондоотдача, т.е. фондоотдача базисного периода, взвешенная по структуре весов отчетного периода,

$$I_{\phi o} = \frac{1,731}{1,711} = 1,012 \text{ или } 101,2\%;$$

– индекс структурных сдвигов:

$$I_{\text{стр.}} = \frac{I_{\bar{\phi o}}}{I_{\phi o}} = \frac{1,026}{1,012} = 1,014 \text{ или } 101,4\%.$$

Каждый из исчисленных индексов отражает влияние различных факторов:

– индекс переменного состава – совместное влияние фондоотдачи по видам фондов и их структуры;

– индекс постоянного состава – влияние изменения фондоотдачи по отдельным видам основных фондов;

– индекс структурных сдвигов – структуры основных фондов.

Вычислим абсолютные приросты средней фондоотдачи:

$$– \text{в целом: } \Delta \bar{\phi o} = \bar{\phi o}_1 - \bar{\phi o}_0 = 1,731 - 1,688 = 0,044;$$

в том числе за счет:

– изменения индивидуальных уровней фондоотдачи:

$$\Delta \bar{\phi o}_{\phi o} = \bar{\phi o}_1 - \bar{\phi o}_{\text{усл.}} = 1,731 - 1,711 = 0,02;$$

– изменения структуры основных производственных фондов:

$$\Delta \bar{\phi o}_{\text{стр.}} = \bar{\phi o}_{\text{усл.}} - \bar{\phi o}_0 = 1,711 - 1,688 = 0,024.$$

Задача 12.3.

По данным таблицы определите материалоемкость продукции по двум периодам, а также экономию материальных ресурсов, обусловленную снижением материалоемкости и абсолютное изменение материальных затрат за счет увеличения товарной продукции.

| Показатели | Базисный период | Отчетный период |
|---|-----------------|-----------------|
| Товарная продукция в сопоставимых ценах (тыс. руб.) | 9360 | 9800 |

| | | |
|--|------|------|
| Материальные затраты на производство продукции (тыс. руб.) | 5616 | 5684 |
|--|------|------|

Решение.

Материалоемкость продукции равна отношению суммы материальных затрат к стоимости произведенной продукции. Результаты расчета приведем в табл. 1.

Таблица 1

| Показатели | Базисный период | Отчетный период |
|--|-----------------|-----------------|
| Товарная продукция в сопоставимых ценах (тыс. руб.) | 9360 | 9800 |
| Материальные затраты на производство продукции (тыс. руб.) | 5616 | 5684 |
| Материалоемкость продукции | 0,60 | 0,58 |

Материальные ресурсы равны произведению материалоемкости (p) на стоимость произведенной продукции (q).

Экономия материальных ресурсов, обусловленная снижением материалоемкости, равна

$$\Delta C(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 0,58 \cdot 9800 - 0,6 \cdot 9800 = 5684 - 5880 = -196 \text{ тыс. руб.}$$

Абсолютное изменение материальных затрат за счет увеличения товарной продукции равно

$$\Delta C(Q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 0,6 \cdot 9800 - 0,6 \cdot 9360 = 5880 - 5616 = 264 \text{ тыс. руб.}$$

Задача 12.4.

Предприятие работает в трехсменном режиме. За июнь рабочими в первую смену отработано 10200 человеко-дней, во вторую – 8200 человеко-дней, в третью – 4200 человеко-дней. Число рабочих дней по режиму работы предприятия – 22 дня, число рабочих мест – 620.

Рассчитайте:

1. Показатели, характеризующие использование сменного режима.
2. Показатели, характеризующие использование рабочих мест.

Решение.

Коэффициент сменности равен

$$K_{cv} = \frac{10200 + 8200 + 4200}{10200} = 2,22 .$$

Коэффициент непрерывности равен

$$K_{непр} = \frac{10200}{22 \cdot 620} = 0,748.$$

Интегральный коэффициент использования рабочих мест равен

$$K_{интегр} = \frac{10200 + 8200 + 4200}{3 \cdot 22 \cdot 620} = 0,552.$$

Задача 12.5.

Имеются данные по предприятию:

| Показатель | 2002 год | 2003 год |
|---|----------|----------|
| Стоимость основных производственных фондов (тыс. руб.): | 12000 | 11040 |
| - на начало года | | |
| - на конец года | 11040 | 10800 |
| Стоимость произведенной продукции (тыс. руб.) | 22450 | 20500 |
| Среднегодовая численность работников (чел.) | 105 | 100 |

Рассчитайте:

1. Фондоотдачу, фондовооруженность, производительность труда за каждый период.
2. Прирост (снижение) объема произведенной продукции в результате изменения объема основных производственных фондов и фондоотдачи.
3. Покажите взаимосвязь индексов фондовооруженности, фондоотдачи и производительности.

Решение.

Фондоотдача равна отношению стоимости произведенной продукции (СПП) к среднегодовой стоимости основных производственных фондов (ОПФ)

$$ФОТ = \frac{СПП}{ОПФ}.$$

Фондовооруженность определяется путем деления ОПФ на среднесписочную численность работников (ЧР) за год

$$ФВ = \frac{ОПФ}{ЧР}.$$

Производительность труда равна отношению стоимости произведенной продукции к среднегодовой численности работников

$$ПТ = \frac{СПП}{ЧР}.$$

Среднегодовая стоимость ОПФ определяется как среднее от суммы ОПФ на начало и конец года. Результаты расчета по указанным формулам приведем в таблице

| Показатель | 2002 год | 2003 год |
|---|----------|----------|
| Среднегодовая стоимость ОПФ (тыс. руб.) | 11520 | 10920 |
| Фондоотдача | 1,949 | 1,877 |
| Фондовооруженность (тыс. руб./чел.) | 109,714 | 109,200 |
| Производительность труда (тыс. руб./чел.) | 213,810 | 205,000 |

Стоимость произведенной продукции связана со среднегодовой стоимостью основных производственных фондов и фондоотдачей соотношением

$$СПП = ФОТ \cdot ОПФ.$$

Отсюда с помощью индексного метода найдем изменение объема произведенной продукции в результате изменения объема основных производственных фондов и фондоотдачи.

Изменение объема произведенной продукции в результате изменения фондоотдачи составляет

$$\begin{aligned} \Delta СПП(ФОТ) &= \sum ФОТ_1 ОПФ_1 - \sum ФОТ_0 ОПФ_1 = \\ &= 1,877 \cdot 10920 - 1,949 \cdot 10920 = -780,73 \text{ тыс. руб.} \end{aligned}$$

Изменение объема произведенной продукции в результате изменения объема основных производственных фондов составляет

$$\begin{aligned} \Delta СПП(ФОТ) &= \sum ФОТ_0 ОПФ_1 - \sum ФОТ_0 ОПФ_0 = \\ &= 1,949 \cdot 10920 - 1,949 \cdot 11520 = -1169,27 \text{ тыс. руб.} \end{aligned}$$

Покажем взаимосвязь индексов фондовооруженности, фондоотдачи и производительности.

$$\text{Индекс фондовооруженности равен } I_{ФВ} = \frac{109,2}{109,714} = 0,963.$$

$$\text{Индекс фондоотдачи равен } I_{ФОТ} = \frac{1,877}{1,949} = 0,995.$$

$$\text{Индекс производительности равен } I_{ПТ} = \frac{205,0}{213,81} = 0,959.$$

$$I_{ПТ} = I_{ФВ} \cdot I_{ФОТ} = 0,963 \cdot 0,995 = 0,959.$$

Задача 12.6.

| Показатели | Сумма (тыс. руб.) |
|---|----------------------|
| Плановая себестоимость всей товарной продукции по плану | 57900 |

| | |
|---|-------|
| Себестоимость всей фактически выпущенной продукции | |
| А) по плановой себестоимости отчетного года | 58200 |
| Б) по фактической себестоимости в ценах, действующих в отчетном периоде | 58000 |
| Товарная продукция в оптовых ценах предприятия | |
| А) по плану | 77700 |
| Б) фактически в ценах, принятых в плане | 77900 |
| В) фактически в ценах, действующих в отчетном году | 78000 |

Определить:

1. Затраты на рубль товарной продукции по плану: а) для запланированного объема и ассортимента продукции; б) для фактически выпущенного объема и ассортимента продукции;
2. Затраты на рубль фактически вылущенной продукции: а) в действующих оптовых ценах; б) в сотовых ценах, принятых в плане;
3. Индекс соотношения фактических и плановых затрат;
4. Оценить (через индексы) влияние трех факторов на изменение затрат на рубль товарной продукции: а) за счет изменения объема и состава продукции; б) за счет изменения себестоимости единицы продукции; в) за счет изменения цен.

Решение.

Затраты на рубль товарной продукции по плану для фактически выпущенного объема и ассортимента продукции составляют

$$\frac{57900}{77700} = 0,745 .$$

Затраты на рубль товарной продукции по плану для запланированного объема и ассортимента продукции составляют

$$\frac{58200}{77900} = 0,747 .$$

Затраты на рубль фактически вылущенной продукции в действующих оптовых ценах составляют

$$\frac{58000}{78000} = 0,744 .$$

Индекс соотношения фактических и плановых затрат равен

$$I_z = \frac{0,744}{0,747} = 0,995 , \text{ или } 99,4\% .$$

Задача 12.7.

Имеются следующие данные по предприятию:

| Предыдущий год | | По плану за отчетный год | | Фактически за отчетный год | |
|---------------------------------|--------------------------|---------------------------------|--------------------------|---------------------------------|--------------------------|
| Произведено продукции, тыс. шт. | Общая сумма затрат, руб. | Произведено продукции, тыс. шт. | Общая сумма затрат, руб. | Произведено продукции, тыс. шт. | Общая сумма затрат, руб. |
| 10 | 750000 | 12 | 840000 | 14 | 1008000 |

Рассчитайте:

1. Индексы себестоимости единицы изделия: а) динамики; б) выполнения плана; в) планового задания;
2. Фактическую, сверхплановую, плановую экономию, полученную от снижения себестоимости продукции на весь объем выпуска.

Решение.

По исходной таблице составим новую таблицу.

| Предыдущий год | | По плану за отчетный год | | Фактически за отчетный год | |
|----------------------------|-------------------------------|----------------------------|-------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| Произведено продукции, шт. | Себестоимость продукции, руб. | Произведено продукции, шт. | Себестоимость продукции, руб. | Произведено продукции, шт. | Себестоимость продукции, руб. |
| 10000 | 75 | 12000 | 70 | 14000 | 72 |

Индекс себестоимости единицы изделия за счет динамики равен

$$I_1 = \frac{72 \cdot 14000}{75 \cdot 10000} = \frac{1008000}{750000} = 1,344, \text{ или } 134,4\%.$$

Индекс себестоимости единицы изделия за счет выполнения плана равен

$$I_2 = \frac{70 \cdot 12000}{70 \cdot 10000} = \frac{12000}{10000} = 1,2, \text{ или } 120,0\%.$$

Индекс себестоимости единицы изделия за счет выполнения планового задания равен

$$I_3 = \frac{72 \cdot 14000}{72 \cdot 10000} = \frac{14000}{10000} = 1,4, \text{ или } 140,0\%.$$

Фактическая экономия, полученная от снижения себестоимости продукции на весь объем выпуска, составляет

$$\Delta_1 = 72 \cdot 14000 - 75 \cdot 14000 = -42000 \text{ руб.}$$

Сверхплановая экономия, полученная от снижения себестоимости продукции на весь объем выпуска, составляет

$$\Delta_2 = 72 \cdot 14000 - 70 \cdot 14000 = 28000 \text{ руб.}$$

Плановая экономия, полученная от снижения себестоимости продукции на весь объем выпуска, составляет

$$\Delta_1 = 7 \cdot 14000 - 75 \cdot 14000 = -70000 \text{ руб.}$$

Задача 12.8.

Имеются данные об основных фондах предприятия:

| | |
|---|------|
| Сумма износа основных фондов на начало года, тыс. руб. | 3020 |
| Коэффициент износа на начало года, % | 28 |
| Выбыло основных фондов за год по полной первоначальной стоимости, тыс. руб. | 630 |
| Процент износа выбывших основных фондов, % | 92 |
| Среднегодовая норма износа, % | 11 |
| Введено в эксплуатацию новых основных фондов, тыс. руб. | 5050 |

Определить:

1. Стоимость основных фондов на начало года: а) полную первоначальную; б) остаточную;
2. Полную первоначальную стоимость основных фондов на конец года;
3. Среднегодовую стоимость основных фондов;
4. Сумму износа за год;
5. Остаточную стоимость основных фондов на конец года;
6. Сумму износа на конец года.

Решение.

Полная первоначальная стоимость основных фондов на начало года равна

$$3020 \cdot \frac{100}{28} = 10785,71 \text{ тыс. руб.}$$

Остаточная первоначальная стоимость основных фондов на начало года равна

$$10785,71 - 3020 = 7765,71 \text{ тыс. руб.}$$

Полная первоначальная стоимость основных фондов на конец года равна

$$10785,71 - 630 + 5050 = 15205,71 \text{ тыс. руб.}$$

Среднегодовая стоимость основных фондов равна

$$\frac{10785,71 + 15205,71}{2} = 12995,71 \text{ тыс. руб.}$$

Сумма износа за год равна

$$3020 \cdot \frac{11}{28} = 1186,43 \text{ тыс. руб.}$$

Остаточная стоимость основных фондов на конец года равна

$$(7765,71 - 630 \cdot 0,08) \cdot 0,89 + 5050 = 11916,63 \text{ тыс. руб.}$$

Сумма износа на конец года равна

$$15205,71 - 11916,63 = 3289,08 \text{ тыс. руб.}$$

Задача 12.9.

Имеются данные по предприятию за два периода:

| Показатель | апрель | май |
|--|--------|-----|
| Среднечасовая выработка 1 рабочего (шт./час) | 25 | 26 |
| Продолжительность рабочего дня (час) | 7,8 | 7,6 |
| Продолжительность рабочего периода (дней) | 20 | 22 |

Определить:

1. Месячную выработку работника за май и апрель;
2. Влияние среднечасовой выработки, продолжительности рабочего дня и рабочего периода на изменение среднемесячной выработки работника.

Решение.

Месячная выработка работника за апрель равна

$$25 \cdot 7,8 \cdot 20 = 3900 \text{ шт/мес.}$$

Месячная выработка работника за май равна

$$26 \cdot 7,6 \cdot 22 = 4347,2 \text{ шт/мес.}$$

Влияние среднечасовой выработки на изменение среднемесячной выработки работника составляет

$$26 \cdot 7,6 \cdot 22 - 25 \cdot 7,6 \cdot 22 = 167,2 \text{ шт.}$$

Влияние продолжительности рабочего дня на изменение среднемесячной выработки работника составляет

$$25 \cdot 7,6 \cdot 22 - 25 \cdot 7,8 \cdot 22 = -110 \text{ шт.}$$

Влияние рабочего периода на изменение среднемесячной выработки работника составляет

$$25 \cdot 7,8 \cdot 22 - 25 \cdot 7,8 \cdot 20 = 390 \text{ шт.}$$

Задача 12.10.

Имеются данные о стоимости оборотных средств предприятия, в тыс. руб.

| Дата | Базисный | Отчетный |
|---------------------|----------|----------|
| 1 января | 400 | 430 |
| 1 апреля | 420 | 510 |
| 1 июля | 390 | 420 |
| 1 октября | 380 | 510 |
| 1 января след. года | 430 | 450 |

В отчетном периоде стоимость реализованной продукции возросла на 20% по сравнению с базисным и составила 4680000 рублей.

Проанализируйте динамику коэффициента оборачиваемости.

В какой степени изменение среднего остатка оборотных средств в отчетном периоде по сравнению с базисным обусловлено: увеличением объема реализованной продукции; изменением оборачиваемости оборотных средств.

Решение.

Коэффициент оборачиваемости определяется по формуле

$$K_{об} = \frac{C}{O},$$

где C – стоимость реализованной продукции, O – средний остаток оборотных средств предприятия.

Определим средний остаток оборотных средств предприятия в базисном и отчетном годах по формуле средней хронологической:

$$\bar{O}_0 = \frac{\frac{400}{2} + 420 + 390 + 380 + \frac{430}{2}}{4} = 401,25 \text{ тыс. руб.}$$

$$\bar{O}_1 = \frac{\frac{430}{2} + 510 + 420 + 510 + \frac{450}{2}}{4} = 470 \text{ тыс. руб.}$$

В базисном периоде стоимость реализованной продукции составила

$$C_0 = \frac{C_1}{1,2} = \frac{4680000}{1,2} = 3900000 \text{ тыс. руб.}$$

Коэффициент оборачиваемости в базисном периоде равен

$$K_{об,0} = \frac{C_0}{\bar{O}_0} = \frac{3900000}{401250} = 9,720.$$

Коэффициент оборачиваемости в отчетном периоде равен

$$K_{об,1} = \frac{C_1}{\bar{O}_1} = \frac{4680000}{470000} = 9,957.$$

Отсюда индекс коэффициента оборачиваемости равен

$$I_K = \frac{9,957}{9,720} = 1,024, \text{ или } 102,4\%,$$

т.е. коэффициент оборачиваемости в отчетном году вырос по сравнению с базисным на 2,4%.

Изменение среднего остатка оборотных средств в отчетном периоде по сравнению с базисным за счет изменения оборачиваемости оборотных средств составило

$$\Delta O(K_{об}) = \frac{C_1}{K_{об,1}} - \frac{C_1}{K_{об,0}} = \frac{4680000}{9,957} - \frac{4680000}{9,720} = -11500 \text{ руб.}$$

Изменение среднего остатка оборотных средств в отчетном периоде по сравнению с базисным за счет увеличения объема реализованной продукции составило

$$\Delta O(C) = \frac{C_1}{K_{об,0}} - \frac{C_0}{K_{об,0}} = \frac{4680000}{9,720} - \frac{3900000}{9,720} = 80250 \text{ руб.}$$

Задача 12.11.

По данным таблицы постройте индивидуальные и агрегатные индексы фондоотдачи.

| Завод | Стоимость произведенной продукции, млн. руб. | | Среднегодовая стоимость ОПФ, млн. руб. | |
|-------|--|-----------------|--|-----------------|
| | базисный период | отчетный период | базисный период | отчетный период |
| I | 400 | 726 | 200 | 330 |
| II | 300 | 364 | 200 | 220 |

Решение.

Фондоотдача равна отношению стоимости произведенной продукции (СПП) к среднегодовой стоимости основных производственных фондов (ОПФ)

$$ФОТ = \frac{СПП}{ОПФ}.$$

Построим индивидуальные индексы фондоотдачи.

Индивидуальный индекс фондоотдачи завода I равен

$$i_I = \frac{726}{330} / \frac{400}{200} = 1,10, \text{ или } 110,0\%.$$

Индивидуальный индекс фондоотдачи завода II равен

$$i_{II} = \frac{364}{220} / \frac{300}{200} = 1,103, \text{ или } 110,3\%.$$

Построим агрегатные индексы фондоотдачи.

Агрегатный индекс среднегодовой стоимости ОПФ равен

$$I_{опф} = \frac{\sum \frac{СПП_1}{ОПФ_1}}{\sum \frac{СПП_0}{ОПФ_0}} = \frac{\frac{726}{330} + \frac{364}{220}}{\frac{726}{200} + \frac{364}{200}} = \frac{3,855}{5,45} = 0,7073, \text{ или } 70,73\%.$$

Агрегатный индекс стоимости произведенной продукции равен

$$I_{опф} = \frac{\sum \frac{СПП_1}{ОПФ_0}}{\sum \frac{СПП_0}{ОПФ_0}} = \frac{\frac{726}{200} + \frac{364}{200}}{\frac{400}{200} + \frac{300}{200}} = \frac{5,45}{3,5} = 1,5571, \text{ или } 155,71\%.$$

Агрегатный индекс фондоотдачи равен

$$I_{опф} = \frac{\sum \frac{СПП_1}{ОПФ_1}}{\sum \frac{СПП_0}{ОПФ_0}} = \frac{\frac{726}{330} + \frac{364}{220}}{\frac{400}{200} + \frac{300}{200}} = \frac{3,855}{3,5} = 1,1013, \text{ или } 110,13\%.$$

Задача 12.12.

По данным таблицы постройте индексы переменного, фиксированного составов, структурных сдвигов по выработке одного рабочего, а также трудовой индекс производительности.

| Показатели | Предприятие А | | Предприятие Б | |
|---|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | Базисный период | Отчетный период | Базисный период | Отчетный период |
| 1. Выработано всего, тыс. шт. | 20700 | 15600 | 30100 | 45200 |
| 2. Отработано человеко-часов, тыс. | 200 | 150 | 210 | 250 |
| 3. Доля затрат рабочего времени каждого предприятия | 3, 4, 5 – рассчитать | | | |
| 4. Выработано на одного рабочего | | | | |
| 5. Трудоемкость | | | | |

Решение.

Результаты расчетов приведем в таблице

| Показатели | Предприятие А | | Предприятие Б | |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | Базисный период | Отчетный период | Базисный период | Отчетный период |
| 1. Выработано всего, тыс. шт. | 20700 | 15600 | 30100 | 45200 |
| 2. Отработано человеко-часов, тыс. | 200 | 150 | 210 | 250 |
| 3. Доля затрат рабочего времени каждого предприятия | 0,571 | 0,429 | 0,457 | 0,543 |
| 4. Выработано на одного рабочего | 103,50 | 104,00 | 143,33 | 180,80 |
| 5. Трудоемкость | 0,0097 | 0,0096 | 0,0070 | 0,0055 |

Обозначим: p – выработка на одного рабочего, q – количество отработанных человеко-часов.

Индекс переменного состава по выработке одного рабочего равен:

$$I_{n.c.} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{104 \cdot 150 + 180,8 \cdot 250}{150 + 250} : \frac{103,5 \cdot 200 + 143,33 \cdot 210}{200 + 210} = \frac{60800}{400} / \frac{50800}{410} = 152 / 123,902 = 1,227, \text{ или } 122,7\%.$$

Индекс производительности труда постоянного (фиксированного) состава равен:

$$I_{\phi.c.} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{104 \cdot 150 + 180,8 \cdot 250}{103,5 \cdot 150 + 143,33 \cdot 250} = \frac{60800}{51358,33} = 1,184, \text{ или } 118,4\%.$$

Индекс структурных сдвигов по выработке одного рабочего равен

$$I_{стр} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{51358,33}{400} / \frac{50800}{410} = 1,036, \text{ или } 103,6\%.$$

Задача 12.13.

Имеются данные о стоимости оборотных средств предприятия, в тыс. руб.

| Дата | 2002 г. | 2003 г. |
|------------|---------|---------|
| 1 января | 700 | 410 |
| 1 апреля | 420 | 510 |
| 1 июля | 390 | 420 |
| 1 октября | 380 | 510 |
| 31 декабря | 430 | 450 |

Стоимость реализованной продукции в действовавших оптовых ценах в 2002 году – 4051000 рублей, в 2003 – 4680000 рублей.

Проанализируйте динамику коэффициента оборачиваемости, коэффициента закрепления. В какой степени изменение среднего остатка оборотных средств в 2003 году по сравнению с 2002 годом обусловлено: увеличением объема реализованной продукции; изменением оборачиваемости оборотных средств.

Решение.

Коэффициент оборачиваемости определяется по формуле

$$K_{об} = \frac{C}{O},$$

где C – стоимость реализованной продукции, O – средний остаток оборотных средств предприятия.

Определим средний остаток оборотных средств предприятия в базисном и отчетном годах по формуле средней хронологической:

$$\bar{O}_0 = \frac{\frac{700}{2} + 420 + 390 + 380 + \frac{430}{2}}{4} = 438,75 \text{ тыс. руб.}$$

$$\bar{O}_1 = \frac{\frac{410}{2} + 510 + 420 + 510 + \frac{450}{2}}{4} = 467,5 \text{ тыс. руб.}$$

Коэффициент оборачиваемости в базисном периоде равен

$$K_{об,0} = \frac{C_0}{\bar{O}_0} = \frac{4051000}{438750} = 9,233.$$

Коэффициент оборачиваемости в отчетном периоде равен

$$K_{об,1} = \frac{C_1}{\bar{O}_1} = \frac{4680000}{467500} = 10,011.$$

Отсюда индекс коэффициента оборачиваемости равен

$$I_K = \frac{10,011}{9,233} = 1,084, \text{ или } 108,4\%,$$

т.е. коэффициент оборачиваемости в отчетном году вырос по сравнению с базисным на 8,4%.

Коэффициент закрепления определяется по формуле

$$K_{закр} = \frac{1}{K_{об}}.$$

Коэффициент закрепления в базисном периоде равен

$$K_{закр,0} = \frac{1}{K_{об,0}} = \frac{1}{9,233} = 0,1083.$$

Коэффициент закрепления в отчетном периоде равен

$$K_{закр,1} = \frac{1}{K_{об,1}} = \frac{1}{10,011} = 0,0999.$$

Отсюда индекс коэффициента закрепления равен

$$J_K = \frac{0,0999}{0,1083} = 0,922, \text{ или } 92,2\%,$$

т.е. коэффициент закрепления в отчетном году уменьшился по сравнению с базисным на 7,8%.

Изменение среднего остатка оборотных средств в отчетном периоде по сравнению с базисным за счет изменения оборачиваемости оборотных средств составило

$$\Delta O(K_{об}) = \frac{C_1}{K_{об,1}} - \frac{C_1}{K_{об,0}} = \frac{4680000}{10,011} - \frac{4680000}{9,233} = -39374,8 \text{ руб.}$$

Изменение среднего остатка оборотных средств в отчетном периоде по сравнению с базисным за счет увеличения объема реализованной продукции составило

$$\Delta O(C) = \frac{C_1}{K_{об,0}} - \frac{C_0}{K_{об,0}} = \frac{4680000}{9,233} - \frac{4051000}{9,233} = 68124,9 \text{ руб.}$$

Задача 12.14.

Данные о выпуске продукции и фондоотдаче по двум отраслям:

| Отрасль | Стоимость товарной продукции, млрд. р. | | Фондоотдача | |
|---------|--|-----------------|-----------------|-----------------|
| | Базисный период | Отчетный период | Базисный период | Отчетный период |
| А | 584,9 | 609,9 | 0,84 | 0,84 |
| В | 119,8 | 120,9 | 4,19 | 4,08 |

Определить динамику и факторы изменения фондоотдачи в целом по промышленности.

Решение.

Среднегодовая стоимость основных фондов равна

$$\Phi = \frac{Q}{\Phi_{от}},$$

где Q – стоимость товарной продукции; $\Phi_{от}$ – фондоотдача.

Внесем в таблицу среднегодовые стоимости основных фондов, рассчитанные по приведенной выше формуле.

| Отрасль | Стоимость товарной продукции, млрд. р. | | Фондоотдача, р. | | Стоимость основных фондов, млрд. р. | |
|---------|--|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------------------------|-----------------|
| | Базисный период | Отчетный период | Базисный период | Отчетный период | Базисный период | Отчетный период |
| А | 584,9 | 609,9 | 0,84 | 0,84 | 696,31 | 726,07 |
| В | 119,8 | 120,9 | 4,19 | 4,08 | 28,59 | 29,63 |
| Всего | 704,70 | 730,80 | 5,03 | 4,92 | 724,90 | 755,70 |

Индекс переменного состава равен

$$I^{nc} = \frac{\sum \Phi_{om1} \cdot d_1}{\sum \Phi_{om0} \cdot d_0},$$

где Φ_{om1} , Φ_{om0} – фондоотдача на каждом предприятии соответственно в отчетном и базисном периодах; d_1 , d_0 – доля стоимости основных фондов одного предприятия в общей стоимости основных фондов соответственно в отчетном и базисном периодах.

С учетом исходных данных получим, что индекс переменного состава равен

$$I^{nc} = \frac{\sum \Phi_{om1} \cdot d_1}{\sum \Phi_{om0} \cdot d_0} = \frac{0,84 \cdot 726,07 + 4,08 \cdot 29,63}{0,84 \cdot 696,31 + 4,19 \cdot 28,59} = \frac{0,84 \cdot 0,961 + 4,08 \cdot 0,039}{0,84 \cdot 0,961 + 4,19 \cdot 0,039} =$$

$$= \frac{0,967}{0,972} = 0,995, \text{ или } 99,5\%.$$

Индекс фиксированного состава равен

$$I^{fc} = \frac{\sum \Phi_{om1} \cdot d_1}{\sum \Phi_{om0} \cdot d_1} = \frac{0,84 \cdot 0,961 + 4,08 \cdot 0,039}{0,84 \cdot 0,961 + 4,19 \cdot 0,039} = \frac{0,967}{0,971} = 0,996, \text{ или } 99,6\%.$$

Индекс структуры равен

$$I^{sc} = \frac{\sum \Phi_{om0} \cdot d_1}{\sum \Phi_{om0} \cdot d_0} = \frac{0,84 \cdot 0,961 + 4,19 \cdot 0,039}{0,84 \cdot 0,961 + 4,19 \cdot 0,039} = \frac{0,971}{0,972} = 0,999, \text{ или } 99,9\%.$$

Изменение выпуска продукции за счет изменения фондоотдачи равно

$$\Delta g_{\phi} = \Delta \Phi_{om} \cdot \Phi_1 = (4,92 - 5,03) \cdot 755,70 = -83,127 \text{ млрд. р.}$$

Изменение выпуска продукции за счет изменения стоимости основных фондов равно

$$\Delta g_{o.\phi.} = \Delta \Phi \cdot \Phi_{om1} = (755,70 - 724,90) \cdot 4,92 = 155,548 \text{ млрд. р.}$$

Задача 12.15.

В 2002 г. материалоемкость продукции на предприятии составила 0,67 р. на 1 р. товарной продукции. В 2003 г. объем товарной продукции предприятия увеличился на 9,5 % по сравнению с 2002 г. и составил 25200 тыс. р., при этом общая сумма материальных затрат возросла на 7,2%.

Определить, в какой степени абсолютное и относительное изменение объема материальных затрат обусловлено: снижением материалоемкости продукции; увеличением объема производства.

Решение.

Обозначим:

- P_1, P_0 – материалоемкость продукции соответственно в 2003 (отчетном) и 2002 (базисном) годах;

- Q_1, Q_0 – объем товарной продукции соответственно в 2003 (отчетном) и 2002 (базисном) годах;

- Z_1, Z_0 – объем материальных затрат соответственно в 2003 (отчетном) и 2002 (базисном) годах.

Имеем из исходных данных: $P_0 = 0,67$; $Q_1 = 25200$ тыс. р., $Q_1 = 1,095Q_0$; $Z_1 = 1,072Z_0$.

Известно, что

$$P = \frac{Z}{Q}.$$

Отсюда

$$Z = PQ.$$

Определим все недостающие показатели за 2003 и 2002 годы:

$$Q_0 = \frac{Q_1}{1,095} = \frac{25200}{1,095} = 23013,7 \text{ тыс. р.},$$

$$Z_0 = P_0Q_0 = 0,67 \cdot 23013,7 = 15419,18 \text{ тыс. р.},$$

$$Z_1 = 1,072Z_0 = 1,072 \cdot 15419,18 = 16529,36 \text{ тыс. р.},$$

$$P_1 = \frac{Z_1}{Q_1} = \frac{16529,36}{25200} = 0,656.$$

Относительное изменение объема материальных затрат за счет изменения материалоемкости продукции равно

$$I_p = \frac{P_1Q_1}{P_0Q_1} = \frac{P_1}{P_0} = \frac{0,656}{0,67} = 0,979, \text{ или } 97,9\%.$$

Абсолютное изменение объема материальных затрат за счет изменения материалоемкости продукции равно

$$\Delta Z(P) = P_1Q_1 - P_0Q_1 = 0,656 \cdot 25200 - 0,67 \cdot 25200 = -354,64 \text{ тыс. р.}$$

Относительное изменение объема материальных затрат за счет изменения объема производства равно

$$I_q = \frac{P_0Q_1}{P_0Q_0} = \frac{Q_1}{Q_0} = \frac{25200}{23013,7} = 1,095, \text{ или } 109,5\%.$$

Абсолютное изменение объема материальных затрат за счет изменения материалоемкости продукции равно

$$\Delta Z(P) = P_0Q_1 - P_0Q_0 = 0,67 \cdot 25200 - 0,67 \cdot 23013,7 = 1464,82 \text{ тыс. р.}$$

Задача 12.16.

| | |
|---|-----|
| Произведено продукции, шт. | 500 |
| Из них отгружено и оплачено потребителем | 480 |
| Поступили деньги за отгруженные в мае изделия, шт. | 20 |
| Выработано полуфабрикатов всего, тыс. р. | 120 |
| Из них переработано | 95 |
| отгружено и оплачено покупателями | 30 |
| Остаток полуфабрикатов на 1 июня, тыс. р. | 10 |
| Выполнено работ промышленного характера по внешним заказам, тыс. р. | 10 |
| Выработано электроэнергии, тыс. р. | 10 |
| В том числе реализовано детскому саду | 3 |
| Потреблено | 7 |
| Изготовлено инструмента, тыс. р. | 12 |
| В том числе реализовано другим заводам | 3 |
| Пошло на пополнение запасов (остальное потреблено в цехах) | 7 |
| Остатки незавершенного производства, тыс. р.: | |
| на начало месяца | 70 |
| на конец месяца | 75 |
| Цена одного изделия, р. | 600 |

Определить валовой оборот, валовую продукцию, товарную продукцию, реализованную продукцию.

Решение.

Валовой оборот включает в себя:

- стоимость готовых изделий, выработанных в отчетном периоде всеми цехами предприятия;
- стоимость произведенных в отчетном периоде полуфабрикатов, инструментов, приспособлений;
- стоимость работ промышленного характера, выполненных по заказам со стороны или для непромышленных подразделений своего предприятия;
- стоимость работ по модернизации или реконструкции собственного оборудования и транспортных средств;
- изменение остатков незавершенного производства.

Валовой оборот по промышленному предприятию за отчетный период в оптовых ценах составляет:

$$ВО = 500 + 120 + 10 + 10 + 12 + (75 - 70) = 657 \text{ тыс. руб.}$$

Внутризаводской оборот включает в себя стоимость готовых изделий, полуфабрикатов и продукции вспомогательных цехов, произведенных в данном периоде и потребленных на предприятии на его собственные нужды. Он составляет

$$ВЗО = 95 \text{ тыс. руб.}$$

Валовая продукция представляет собой стоимость продукции всех цехов за вычетом той ее части, которая была использована внутри данного предприятия на собственные промышленно-производственные нужды. Валовая продукция составляет:

$$ВП = ВО - ВЗО = 657 - 95 = 562 \text{ тыс. руб.}$$

Товарная продукция охватывает стоимость той части произведенной в отчетном периоде продукции, которая отпущена или предназначена к отпуску на сторону. Товарная продукция составляет:

$$ТП = 480 \text{ тыс. руб.}$$

Реализованная продукция – это продукция, оплаченная в отчетном периоде покупателем, независимо от того, когда она была произведена. Реализованная продукция составляет:

$$РП = 480 + 20 = 500 \text{ тыс. руб.}$$

Задача 12.17.

Имеются данные по промышленному предприятию за отчетный период в оптовых ценах (тыс.руб.):

| | |
|---|------|
| произведено готовых изделий | 3250 |
| в т.ч. забраковано ОТК | 90 |
| произведено полуфабрикатов, всего | 1040 |
| в т.ч. переработано в своем производстве | 650 |
| реализовано | 286 |
| выполнено работ пром. характ. по заказам со стороны | 455 |
| произведен кап ремонт: | |
| собств. оборудования | 91 |
| здания цеха | 110 |
| реализовано отходов производства | 5 |
| остатки незавершенного производства на начало периода | 52 |

Определить стоимостные показатели объема продукции: валовой оборот, внутризаводской оборот, валовую продукцию, товарную продукцию, реализованную продукцию.

Решение.

Валовой оборот включает в себя:

- стоимость готовых изделий, выработанных в отчетном периоде всеми цехами предприятия;
- стоимость произведенных в отчетном периоде полуфабрикатов, инструментов, приспособлений;
- стоимость работ промышленного характера, выполненных по заказам со стороны или для непромышленных подразделений своего предприятия;
- стоимость работ по модернизации или реконструкции собственного оборудования и транспортных средств;
- изменение остатков незавершенного производства.

Валовой оборот по промышленному предприятию за отчетный период в оптовых ценах составляет:

$$ВО = 3250 + 1040 + 455 + 91 + 110 + 5 + (39 - 52) = 4938 \text{ тыс. руб.}$$

Внутризаводской оборот включает в себя стоимость готовых изделий, полуфабрикатов и продукции вспомогательных цехов, произведенных в данном периоде и потребленных на предприятии на его собственные нужды. Он составляет

$$ВЗО = 650 \text{ тыс. руб.}$$

Валовая продукция представляет собой стоимость продукции всех цехов за вычетом той ее части, которая была использована внутри данного предприятия на собственные промышленно-производственные нужды. Валовая продукция составляет:

$$ВП = ВО - ВЗО = 4938 - 650 = 4288 \text{ тыс. руб.}$$

Товарная продукция охватывает стоимость той части произведенной в отчетном периоде продукции, которая отпущена или предназначена к отпуску на сторону. Товарная продукция составляет:

$$ТП = 3250 - 90 = 3160 \text{ тыс. руб.}$$

Реализованная продукция – это продукция, оплаченная в отчетном периоде покупателем, независимо от того, когда она была произведена. Реализованная продукция составляет:

$$РП = 286 \text{ тыс. руб.}$$

Задача 12.18.

Имеются следующие данные по двум предприятиям, производящим одноименную продукцию:

| Предприятие | Товарная продукция в сопоставимых ценах, руб. | | Численность работников, чел. | |
|-------------|---|-----------------|------------------------------|-----------------|
| | Базисный период | Отчетный период | Базисный период | Отчетный период |
| 1 | 120000 | 105000 | 250 | 200 |
| 2 | 95000 | 100000 | 170 | 200 |

Определить изменение общего объема товарной продукции в целом по предприятиям (в % и абсолютном выражении), а так же за счет:

- а) изменения численности работников;
- б) изменения выработки 1 работника.

Проверить взаимосвязь рассчитанных показателей. Сделать выводы.

Решение.

В абсолютном выражении изменение общего объема товарной продукции в целом по предприятиям равно

$$\Delta V = \sum v_1 - \sum v_0 = (105000 + 100000) - (120000 + 95000) = -10000 \text{ руб.}$$

В процентном отношении изменение общего объема товарной продукции в целом по предприятиям равно

$$\delta V = \frac{\Delta V}{\sum v_0} \cdot 100\% = \frac{-10000}{215000} = -4,65\%.$$

Определим выработку 1 работника путем деления товарной продукции в сопоставимых ценах на соответствующую численность работников. В результате получим следующую таблицу:

| Предприятие | Выработка 1 работника, руб. | | Количество работников, чел. | |
|-------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------------|-----------------------|
| | базисный период p_0 | отчетный период p_1 | базисный период q_0 | отчетный период q_1 |
| 1 | 480 | 525 | 250 | 200 |
| 2 | 558,82 | 500 | 170 | 200 |

Изменение общего объема товарной продукции в целом по предприятиям за счет изменения выработки 1 работника составило

$$\Delta V(P) = \sum p_1 q_1 - \sum p_0 q_1 = 205000 - 207764,71 = -2764,71 \text{ руб.}$$

Изменение общего объема товарной продукции в целом по предприятиям за счет изменения численности работников составило

$$\Delta V(Q) = \sum p_0 q_1 - \sum p_0 q_0 = 207764,71 - 215000 = -7235,29 \text{ руб.}$$

Проверка взаимосвязи рассчитанных показателей:

$$\Delta V(P) + \Delta V(Q) = -2764,71 - 7235,29 = -10000 = \Delta V.$$

Выводы. В отчетном году общего объема товарной продукции в целом по предприятиям сократился на 10000 руб. в абсолютном измерении или на 4,65% в относительном измерении. Это главным образом вызвано изменением численности работников.

Задача 12.19.

Определить объем продукции, дополнительно полученной в отчетном периоде за счет:
а) изменения объема основных производственных фондов; б) повышения доли оборудования в составе основных производственных фондов; в) лучшего использования оборудования (фондоотдачи), если известно, что продукция предприятия увеличилась с 54 млн. руб. в базисном периоде до 61 млн. руб. в отчетном периоде при увеличении стоимости основных производственных фондов на 6% и повышении доли оборудования в стоимости всех фондов на 10%.

Проверить увязку полученных результатов (в относительной и разностной форме) в систему. Сделать выводы.

Решение.

Индекс объема продукции, дополнительно полученной в отчетном периоде за счет изменения объема основных производственных фондов равен

$$I_q = \frac{P_0 Q_1}{P_0 Q_0} = \frac{Q_1}{Q_0} = 1,06, \text{ или } 106\%,$$

т.е. объем продукции, дополнительно полученной в отчетном периоде за счет изменения объема основных производственных фондов, вырос на 6%.

Индекс объема продукции, дополнительно полученной в отчетном периоде за счет изменения доли оборудования в составе основных производственных фондов равен

$$I_p = \frac{P_1 Q_1}{P_0 Q_1} = \frac{P_1}{P_0} = 1,1, \text{ или } 110\%,$$

т.е. объем продукции, дополнительно полученной в отчетном периоде за счет изменения доли оборудования в составе основных производственных фондов, вырос на 10%.

Фондоотдача растет пропорционально увеличению доли оборудования в стоимости всех фондов. Поэтому объем продукции, дополнительно полученной в отчетном периоде за счет лучшего использования оборудования (фондоотдачи) вырастет на 10%.

Задача 12.20.

| Завод | Валовая продукция в сопоставимых ценах, млн. руб. | | Среднегодовая стоимость ОПФ, млн. руб. | |
|-------|---|-----------------|--|-----------------|
| | базисный период | отчетный период | базисный период | отчетный период |
| А | 400 | 726 | 200 | 330 |
| В | 300 | 364 | 200 | 220 |

Определить с помощью индексов по каждому заводу и объединению изменение выпуска продукции (тыс. руб.) за счет изменения:

1. Фондоотдачи;
2. Стоимости основных фондов.

Решение.

Определим фондоотдачу по формуле

$$P = \frac{V}{Q},$$

где V – объем выпущенной продукции в денежном выражении, Q – среднегодовая стоимость основных фондов.

Изменение выпуска продукции за счет изменения фондоотдачи по заводу А составило

$$\Delta V_A(P) = p_A^1 q_A^1 - p_A^0 q_A^1 = \frac{v_A^1 q_A^1}{q_A^1} - \frac{v_A^0 q_A^1}{q_A^0} = \frac{726 \cdot 330}{330} - \frac{400 \cdot 330}{200} =$$

= 66 млн. руб., или 66000 тыс. руб.

Изменение выпуска продукции за счет изменения фондоотдачи по заводу В составило

$$\Delta V_B(P) = p_B^1 q_B^1 - p_B^0 q_B^1 = \frac{v_B^1 q_B^1}{q_B^1} - \frac{v_B^0 q_B^1}{q_B^0} = \frac{364 \cdot 220}{220} - \frac{300 \cdot 220}{200} =$$

= 34 млн. руб., или 34000 тыс. руб.

Изменение выпуска продукции за счет изменения фондоотдачи по объединению составило

$$\Delta V(P) = \Delta V_A(P) + \Delta V_B(P) = 34 + 66 = 100 \text{ млн. руб., или } 100000 \text{ тыс. руб.}$$

Изменение выпуска продукции за счет изменения стоимости основных фондов по заводу А составило

$$\Delta V_A(Q) = p_A^0 q_A^1 - p_A^0 q_A^0 = \frac{v_A^0 q_A^1}{q_A^0} - \frac{v_A^0 q_A^0}{q_A^0} = \frac{400 \cdot 330}{200} - \frac{400 \cdot 200}{200} =$$

= 260 млн. руб., или 26000 тыс. руб.

Изменение выпуска продукции за счет изменения стоимости основных фондов по заводу В составило

$$\Delta V_B(Q) = p_B^0 q_B^1 - p_B^0 q_B^0 = \frac{v_B^0 q_B^1}{q_B^0} - \frac{v_B^0 q_B^0}{q_B^0} = \frac{300 \cdot 220}{200} - \frac{300 \cdot 200}{200} =$$

= 30 млн. руб., или 30000 тыс. руб.

Изменение выпуска продукции за счет изменения стоимости основных фондов по объединению составило

$$\Delta V(Q) = \Delta V_A(Q) + \Delta V_B(Q) = 260 + 30 = 290 \text{ млн. руб., или } 290000 \text{ тыс. руб.}$$

Задача 12.21.

Имеются данные о стоимости оборотных средств предприятия, тыс. руб.

| | базисный год | отчетный год |
|------------|--------------|--------------|
| 1 января | 336 | 384 |
| 1 апреля | 391 | 451 |
| 1 июня | 350 | 363 |
| 1 октября | 400 | 418 |
| 31 декабря | 368 | 390 |

Стоимость реализованной продукции в действовавших оптовых ценах в базисном году - 3051 тыс. руб., в отчетном году - 3724 тыс. руб.

Проанализируйте:

1. Динамику коэффициента оборачиваемости, коэффициента закрепления и средней продолжительности одного оборота в днях.

2. В какой степени изменения среднего остатка оборотных средств в отчетном году по сравнению с базисным обусловлено:

- а) увеличение объема производства;
- б) изменение оборачиваемости оборотных средств.

Решение.

1. Определим стоимость оборотных средств предприятия по формуле средней хронологической. В базисном году стоимость оборотных средств предприятия составила

$$S_0 = \frac{\frac{336}{2} + 391 + 350 + 400 + \frac{368}{2}}{4} = 373,25 \text{ тыс. руб.}$$

В текущем году стоимость оборотных средств предприятия составила

$$S_1 = \frac{\frac{384}{2} + 451 + 363 + 418 + \frac{390}{2}}{4} = 404,75 \text{ тыс. руб.}$$

Коэффициент оборачиваемости в базисном году составил

$$k_{обор,0} = \frac{P_0}{S_0} = \frac{3051}{373,25} = 8,17 \text{ раз.}$$

Коэффициент оборачиваемости в текущем году составил

$$k_{обор,1} = \frac{P_1}{S_1} = \frac{3724}{404,75} = 9,20 \text{ раз.}$$

Коэффициент закрепления равен:

$$\text{- в базисном году } k_{закр,0} = k_{обор,0} = \frac{1}{k_{обор,0}} = \frac{1}{8,17} = 0,122,$$

$$\text{- в текущем году } k_{закр,1} = k_{обор,1} = \frac{1}{k_{обор,1}} = \frac{1}{9,20} = 0,109.$$

Средняя продолжительность одного оборота составила

$$\text{- в базисном году } t_0 = \frac{365}{k_{обор,0}} = \frac{365}{8,17} = 44,7 \text{ дней,}$$

$$\text{- в текущем году } t_1 = \frac{365}{k_{обор,1}} = \frac{365}{9,20} = 39,7 \text{ дней.}$$

2. В какой степени изменения среднего остатка оборотных средств в отчетном году по сравнению с базисным обусловлено:

- а) увеличение объема производства;
- б) изменение оборачиваемости оборотных средств.

Изменение среднего остатка оборотных средств в отчетном году по сравнению с базисным за счет увеличения объема производства составило

$$\Delta S(P) = k_{\text{закр.1}} P_1 - k_{\text{закр.1}} P_0 = 0,109 \cdot 3724 - 0,109 \cdot 3051 = 73,15 \text{ тыс. руб.}$$

Изменение среднего остатка оборотных средств в отчетном году по сравнению с базисным за счет изменения оборачиваемости оборотных средств а составило

$$\Delta S(P) = k_{\text{закр.1}} P_0 - k_{\text{закр.0}} P_0 = 0,109 \cdot 3051 - 0,122 \cdot 3051 = -41,64 \text{ тыс. руб.}$$

Задача 12.22.

По производственному предприятию имеются следующие данные об основных средствах за отчетный год, в тыс. руб.:

| | |
|---|-----|
| Полная первоначальная стоимость основных средств на начало года | 820 |
| Поступило в отчетном году, всего | 90 |
| В том числе: | |
| - введено новых основных фондов | 70 |
| - получено от других организаций по полной первоначальной стоимости | 20 |
| Выбыло в отчетном году, всего | 20 |
| В том числе: | |
| - передано другим организациям по полной первоначальной стоимости | 12 |
| - списано основных фондов по остаточной стоимости | 8 |
| Коэффициент износа списанных основных средств, % | 80 |
| Износ основных средств на начало года | 108 |

Определить:

1. Первоначальную стоимость основных средств на конец года;
2. Построить баланс основных средств по полной первоначальной стоимости;
3. Показатели движения стоимости основных средств;
4. Остаточную стоимость основных фондов на начало года.

Решение.

1. Первоначальная стоимость основных средств на конец года равна:

$$OC_{\text{к.г}} = 820 + 90 - 12 - \frac{8}{1 - 0,8} = 858 \text{ тыс. руб.}$$

2. Построим баланс основных средств по полной первоначальной стоимости.

Представим его в виде таблицы:

| | |
|---|-----|
| Полная первоначальная стоимость основных средств на начало года | 820 |
| Поступило в отчетном году по полной первоначальной стоимости | 90 |
| Выбыло в отчетном году по полной первоначальной стоимости | 52 |
| Первоначальная стоимость основных средств на конец года | 858 |

3. Определим показатели движения стоимости основных средств. Коэффициент обновления основных фондов равен

$$K_{об} = \frac{H}{OC_{к.г}},$$

где H – полная первоначальная стоимость введенных в эксплуатацию основных средств в отчетном году. Отсюда имеем

$$K_{об} = \frac{H}{OC_{к.г}} = \frac{12 + 8}{858} = 0,0233, \text{ или } 2,33\%.$$

Коэффициент выбытия основных средств определяется по формуле

$$K_{в} = \frac{B}{OC_{н.г}},$$

где $OC_{н.г}$ – полная первоначальная стоимость основных средств на начало года; B – стоимость выбывших основных средств. Отсюда имеем

$$K_{в} = \frac{B}{OC_{н.г}} = \frac{12 + \frac{8}{1 - 0,8}}{820} = \frac{12 + 40}{820} = 0,0634, \text{ или } 6,34\%.$$

4. Остаточная стоимость основных фондов на начало года равна:

$$OC'_{н.г} = 820 \cdot (1 - 0,8) = 820 \cdot 0,2 = 164 \text{ тыс. руб.}$$

Задача 12.23.

Имеются следующие данные по предприятию, р.:

| Показатель | Предыдущий год | Отчетный год |
|---|----------------|--------------|
| Валовая прибыль | 49062 | 52956 |
| Реализация продукции в ценах прошлого года | 398500 | 418937 |
| Средняя годовая стоимость основных фондов | 351437 | 354062 |
| Средняя годовая стоимость оборотных средств | 54400 | 55275 |

Определить:

- 1) фондоемкость продукции и фондоотдачу;
- 2) коэффициент закрепления оборотных средств и коэффициент оборачиваемости;
- 3) рентабельность реализованной продукции;
- 4) темпы роста (в %) всех перечисленных показателей.

Решение.

1. Фондоотдача определяется по формуле

$$\Phi_{отд} = \frac{T}{\overline{ОФ}},$$

где $\overline{ОФ}$ – среднегодовая стоимость основных фондов; T – объем реализации.

Подставив исходные данные, получим:

- фондоотдача в предыдущем году $\Phi_{отд}^0 = \frac{OP_0}{\overline{ОФ}_0} = \frac{398500}{351437} = 1,1339$;

- фондоотдача в текущем году $\Phi_{отд}^1 = \frac{OP_1}{\overline{ОФ}_1} = \frac{418937}{354062} = 1,1832$.

Фондоёмкость – показатель, обратный фондоотдаче:

- фондоёмкость в предыдущем году $\Phi_{емк}^0 = \frac{1}{\Phi_{отд}^0} = \frac{1}{1,1339} = 0,8819$;

- фондоёмкость в текущем году $\Phi_{емк}^1 = \frac{1}{\Phi_{отд}^1} = \frac{1}{1,1832} = 0,8452$.

2. Коэффициент оборачиваемости оборотных средств ($k_{обор}$), исчисляется по формуле:

$$k_{обор} = \frac{T}{C} \text{ обор.},$$

где C – средняя годовая стоимость оборотных средств; T – объем реализации.

Подставив исходные данные, получим коэффициент оборачиваемости:

- в предыдущем году $k_{обор}^0 = \frac{T_0}{C_0} = \frac{398500}{54400} = 7,3254$ обор.;

- в текущем году $k_{обор}^1 = \frac{T_1}{C_1} = \frac{418937}{55275} = 7,5791$ обор.

Коэффициент закрепления оборотных средств ($k_{закр}$), обратный коэффициенту оборачиваемости, определяется по формуле:

$$k_{закр} = \frac{1}{k_{обор}} .$$

Подставив рассчитанные коэффициенты оборачиваемости, получим, что коэффициент закрепления оборотных средств равен:

- в предыдущем году $k_{закр}^0 = \frac{1}{k_{обор}^0} = \frac{1}{7,3254} = 0,1365$;

- в текущем году $k_{закр}^1 = \frac{1}{k_{обор}^1} = \frac{1}{7,5791} = 0,1319$.

3. Рентабельность реализованной продукции определяется по формуле

$$R = \frac{P}{T},$$

где T – объем реализации; P – валовая прибыль.

Подставив исходные данные, получим рентабельность:

- в предыдущем году $R_0 = \frac{P_0}{T_0} = \frac{49062}{398500} = 0,1231$, или 12,31%;

- в текущем году $R_1 = \frac{P_1}{T_1} = \frac{52956}{418937} = 0,1264$, или 12,64%.

Определим темпы роста (в %) всех перечисленных показателей как отношение прироста за текущий год к показателю за прошлый год.

Темп роста фондоемкости равен

$$T_{\text{ф-емк}} = \frac{\Phi_{\text{емк}}^1 - \Phi_{\text{емк}}^0}{\Phi_{\text{емк}}^0} \cdot 100\% = \frac{0,8452 - 0,8819}{0,8819} \cdot 100\% = -4,16\%.$$

Темп роста фондоотдачи равен

$$T_{\text{ф-отд}} = \frac{\Phi_{\text{отд}}^1 - \Phi_{\text{отд}}^0}{\Phi_{\text{отд}}^0} \cdot 100\% = \frac{1,1832 - 1,1339}{1,1339} \cdot 100\% = 4,35\%.$$

Темп роста коэффициента оборачиваемости оборотных средств равен

$$T_{\text{обор}} = \frac{k_{\text{обор}}^1 - k_{\text{обор}}^0}{k_{\text{обор}}^0} \cdot 100\% = \frac{7,5791 - 7,3254}{7,3254} \cdot 100\% = 3,46\%.$$

Темп роста коэффициента закрепления оборотных средств равен

$$T_{\text{закр}} = \frac{k_{\text{закр}}^1 - k_{\text{закр}}^0}{k_{\text{закр}}^0} \cdot 100\% = \frac{0,1319 - 0,1365}{0,1365} \cdot 100\% = -3,37\%.$$

Темп роста рентабельности равен

$$T_{\text{рентаб}} = \frac{R_1 - R_0}{R_0} \cdot 100\% = \frac{0,1264 - 0,1231}{0,1231} \cdot 100\% = 2,68\%.$$

Задача 12.24.

Имеются следующие данные по акционерному предприятию за год (млн. р.):

| Показатель | Задание | По заданию на фактический объем реализации | Фактически |
|--|---------|--|------------|
| Выручка (валовый доход от реализации продукции за вычетом налога на добавленную стоимость) | 1108000 | 1111784 | 1114908 |
| Затраты на производство реализованной продукции) | 947340 | 950954 | 944204 |

Определить:

- 1) прибыль от реализации продукции;
- 2) общее изменение прибыли от реализации продукции и в том числе вследствие изменения
 - а) цен и тарифов;
 - б) себестоимости реализованной продукции;
 - в) объема реализованной продукции;
 - г) ассортимента реализованной продукции.

Сделать выводы.

Решение.

1. Прибыль от реализации продукции равна разности фактической выручки и затрат на производство реализованной продукции:

$$P = 1114908 - 944204 = 170704 \text{ млн. р.}$$

2. Общее изменение прибыли от реализации продукции составило

$$\Delta P = (1114908 - 944204) - (1108000 - 947340) = 10044 \text{ млн. р.}$$

Изменение прибыли от реализации продукции незначительно и составляет менее 6% от запланированного.

Задача 12.25.

Имеются следующие данные по промышленному предприятию:

| ПОКАЗАТЕЛИ | тыс. руб. |
|--|-----------|
| Полная первоначальная стоимость основных фондов на начало года | 6000 |
| В течение года введено новых фондов | 1900 |
| Выбыло фондов | 800 |
| Численность рабочих | 8000 |
| Валовая продукция в сопоставимых ценах | 1950 |

Определить:

- 1) стоимость основных фондов на конец года;
- 2) среднегодовую стоимость основных фондов;
- 3) коэффициенты выбытия и обновления фондов;
- 4) фондоотдачу.

Решение.

1. Стоимость основных фондов на конец года равна:

$$C_k = 6000 + 1900 - 800 = 7100 \text{ тыс. руб.}$$

2. Среднегодовую стоимость основных фондов определим по формуле среднего арифметического:

$$\bar{C} = \frac{C_i + C_e}{2} = \frac{6000 + 7100}{2} = 6550 \text{ руб.}$$

3. Коэффициент обновления равен:

$$K_H = \frac{R}{C} = \frac{1900}{6550} = 0,2901, \text{ или } 29,01\%.$$

Коэффициент выбывания равен:

$$K_B = \frac{Q}{C} = \frac{800}{6550} = 0,1221, \text{ или } 12,21\%.$$

4. Фондоотдача равна

$$K_\phi = \frac{\bar{C}}{V} = \frac{6550}{1950} = 3,359.$$

Задача 12.26.

Фактическая стоимость реализованной продукции (в оптовых ценах предприятия) за полугодие составила 2090 тыс. руб. при плане 2005 тыс. руб. Определить выполнение плана по числу оборотов оборотных средств, если известны следующие данные о наличии оборотных средств (тыс. руб.).

| Даты | Оборотные средства, тыс. руб. | |
|------------|-------------------------------|------------|
| | По плану | Фактически |
| На 1.07.95 | 410 | 400 |
| На 1.08.95 | 500 | 500 |
| На 1.09.95 | 500 | 510 |
| На 1.10.95 | 500 | 495 |
| На 1.11.95 | 510 | 505 |
| На 1.12.95 | 510 | 515 |
| На 1.01.96 | 510 | 508 |

Решение.

Число оборотов оборотных средств за анализируемый период определяется по формуле

$$K_{обор} = \frac{V}{\bar{S}},$$

где V – стоимость реализованной продукции, \bar{S} – среднее значение оборотных средств.

Среднее значение оборотных средств находится по формуле среднего хронологического. По плану оно равно

$$\bar{S}_{\text{план}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 410 + 500 + \dots + 510 + \frac{1}{2} \cdot 510}{6} = \frac{2980}{6} = 496,667 \text{ тыс.руб.}$$

Фактически среднее значение оборотных средств составило:

$$\bar{S}_{\text{факт}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 400 + 500 + \dots + 515 + \frac{1}{2} \cdot 508}{6} = \frac{2979}{6} = 496,5 \text{ тыс.руб.}$$

Отсюда число оборотов оборотных средств по плану:

$$K_{\text{обор}}^{\text{план}} = \frac{V_{\text{план}}}{\bar{S}_{\text{план}}} = \frac{2005}{496,667} = 4,04.$$

Аналогично, фактическое число оборотов оборотных средств:

$$K_{\text{обор}}^{\text{факт}} = \frac{V_{\text{факт}}}{\bar{S}_{\text{факт}}} = \frac{2090}{496,5} = 4,21.$$

Т.к. $K_{\text{обор}}^{\text{факт}} > K_{\text{обор}}^{\text{план}}$, то это свидетельствует о выполнении плана по числу оборотов оборотных средств.

Задача 12.27.

Имеются данные по предприятию (тыс. руб.):

| Показатель | Условные обозначения | Базисный год | Отчетный год |
|---|----------------------|--------------|--------------|
| Средняя годовая стоимость основных средств производственного назначения | Ф | 22250 | 25900 |
| в том числе активной части | Ф ^{акт} | 15500 | 18226 |
| Объем выполненных работ (в сопоставимых ценах) | Q | 46500 | 49210 |

Определить:

- 1) индекс динамики фондоотдачи основных средств производственного назначения;
- 2) индекс динамики объема выполненных работ;
- 3) индекс динамики стоимости основных средств производственного назначения;
- 4) взаимосвязь между исчисленными индексами;
- 5) фондоотдачу активной части основных средств производственного назначения за каждый год;
- 6) долю активной части основных средств в их общей стоимости за каждый год;
- 7) прирост объема выполненных работ под влиянием: а) изменения стоимости основных фондов; б) изменения доли активной части основных средств; в) изменения фондоотдачи активной части основных средств.

Сделайте выводы.

Решение.

1) Фондоотдача основных средств производственного назначения определяется по формуле

$$V = \frac{Q}{\Phi}.$$

В базисном году фондоотдача основных средств производственного назначения составляла

$$V_0 = \frac{Q_0}{\Phi_0} = \frac{46500}{22250} = 2,09.$$

В отчетном году фондоотдача основных средств производственного назначения составляла

$$V_1 = \frac{Q_1}{\Phi_1} = \frac{49210}{25900} = 1,90.$$

Индекс динамики фондоотдачи основных средств производственного назначения равен

$$i_V = \frac{V_1}{V_0} = \frac{1,9}{2,0899} = 0,909, \text{ или } 90,9\%.$$

2) Индекс динамики объема выполненных работ равен

$$i_Q = \frac{Q_1}{Q_0} = \frac{49210}{46500} = 1,058, \text{ или } 105,8\%.$$

3) Индекс динамики стоимости основных средств производственного назначения равен

$$i_\Phi = \frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \frac{25900}{22250} = 1,164, \text{ или } 116,4\%.$$

4) Взаимосвязь между исчисленными индексами динамики фондоотдачи, объема выполненных работ и стоимости основных средств производственного назначения имеет вид: $i_Q = i_\Phi \cdot i_V$.

5) Фондоотдача активной части основных средств производственного назначения определяется по формуле:

$$V = \frac{Q}{\Phi_{акт}}.$$

В базисном году фондоотдача $V^{акт}$ активной части основных средств производственного назначения составляла

$$V_0^{акт} = \frac{Q_0}{\Phi_0^{акт}} = \frac{46500}{15500} = 3,0.$$

В отчетном году фондоотдача активной части основных средств производственного назначения составляла

$$V_1^{акт} = \frac{Q_1}{\Phi_1^{акт}} = \frac{49210}{18226} = 2,7.$$

6) Доля активной части основных средств в их общей стоимости в базисном году составляла

$$d_0^{акт} = \frac{\Phi_0^{акт}}{\Phi_0} = \frac{15500}{23250} = 0,667, \text{ или } 66,7\%.$$

Доля активной части основных средств в их общей стоимости в отчетном году составляла

$$d_1^{акт} = \frac{\Phi_1^{акт}}{\Phi_1} = \frac{18226}{25900} = 0,704, \text{ или } 70,4\%.$$

7) Абсолютный прирост объема выполненных работ в отчетном году составил:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_0 = 49210 - 46500 = 2710 \text{ тыс. руб.}$$

Прирост объема выполненных работ под влиянием изменения стоимости основных фондов составил:

$$\Delta Q(\Phi) = (\Phi_1 - \Phi_0) \cdot d_0^{акт} \cdot V_0^{акт} = (25900 - 23250) \cdot 0,667 \cdot 3 = 5300,0 \text{ тыс. руб.}$$

Прирост объема выполненных работ под влиянием изменения доли активной части основных средств составил:

$$\Delta Q(d^{акт}) = (d_1^{акт} - d_0^{акт}) \cdot \Phi_1 \cdot V_0^{акт} = (0,704 - 0,667) \cdot 25900 \cdot 3 = 2874,9 \text{ тыс. руб.}$$

Прирост объема выполненных работ под влиянием изменения фондоотдачи активной части основных средств составил:

$$\Delta Q(V^{акт}) = (V_1^{акт} - V_0^{акт}) \cdot \Phi_1 \cdot d_1^{акт} = (2,7 - 3) \cdot 25900 \cdot 0,704 = -5470,1 \text{ тыс. руб.}$$

Выводы.

1. Объем выполненных работ в отчетном году вырос за счет изменения стоимости основных фондов.
2. Одновременно следует отметить снижение в отчетном году фондоотдачи активной части основных средств.

Задача 12.28.

Имеются данные:

| Показатель | Условные обозначения | Базисный год | Отчетный год |
|---|----------------------|--------------|--------------|
| Товарная продукция, тыс. руб. | Q | 23856,4 | 25420,98 |
| Средняя списочная численность рабочих, чел. | T | 2300,0 | 2180,0 |

Определить:

- 1) уровни производительности труда за базисный и отчетный год;
- 2) абсолютный прирост продукции за счет изменения уровня производительности труда и численности рабочих.

Решение.

1) Уровень производительности труда определяется по формуле:

$$W = \frac{Q}{T}.$$

Уровень производительности труда за базисный год составляет:

$$W_0 = \frac{Q_0}{T_0} = \frac{23856,4}{2300} = 10,37 \text{ (тыс. руб./чел.)}.$$

Уровень производительности труда за отчетный год составляет:

$$W_1 = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{25420,98}{2180} = 11,66 \text{ (тыс. руб./чел.)}.$$

2) Абсолютный прирост продукции определяется по формуле:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_0 = W_1 T_1 - W_0 T_0 = 25420,98 - 23856,4 = 1564,6 \text{ тыс. руб.}$$

Абсолютный прирост продукции за счет изменения численности рабочих равен

$$\Delta Q(T) = (T_1 - T_0) \cdot W_0 = (2180 - 2300) \cdot 10,37 = -1244,4 \text{ тыс. руб.}$$

Абсолютный прирост продукции за счет изменения уровня производительности труда равен:

$$\Delta Q(W) = (W_1 - W_0) \cdot T_1 = (11,66 - 10,37) \cdot 2180 = 2812,2 \text{ тыс. руб.}$$

Вывод. Абсолютный прирост продукции произошел за счет роста производительности труда, поскольку в отчетном году численность рабочих сократилась.

Задача 12.29.

Имеются данные о стоимости оборотных средств предприятий, тыс. руб.

| По состоянию на | 1999 г. | 2000 г. |
|-----------------|---------|---------|
| 1 января | 336 | 384 |
| 1 апреля | 391 | 451 |
| 1 июля | 350 | 363 |
| 1 октября | 400 | 418 |
| 31 декабря | 368 | 390 |

Стоимость реализованной продукции в 1999 г. – 3051 тыс. руб., в 2000 г. – 3724 тыс. руб.

Вычислите и проанализируйте:

- 1) динамику коэффициента оборачиваемости, коэффициента закрепления и средней продолжительности одного оборота в днях;
- 2) в какой степени изменение среднего остатка оборотных средств в 2000 г. по сравнению с 1999 г. обусловлено:
 - а) увеличением объема производства;
 - б) изменением оборачиваемости оборотных средств.

Решение.

1) Коэффициент оборачиваемости оборотных средств предприятия определяется по формуле:

$$K_{\text{обор}} = \frac{PI}{CV},$$

где PI – стоимость реализованной продукции за год; \overline{CV} – среднегодовой остаток оборотных средств.

Определим по формуле средней хронологической среднегодовые остатки оборотных средств в 1999 и 2000 годах.

Среднегодовой остаток оборотных средств в 1999 г. равен:

$$\overline{CV}_0 = \frac{\frac{336}{2} + 391 + 350 + 400 + \frac{368}{2}}{4} = \frac{1493}{4} = 373,25 \text{ тыс. руб.}$$

Среднегодовой остаток оборотных средств в 2000 г. равен:

$$\overline{CV}_1 = \frac{\frac{384}{2} + 451 + 363 + 418 + \frac{390}{2}}{4} = \frac{1619}{4} = 404,75 \text{ тыс. руб.}$$

Коэффициент оборачиваемости оборотных средств в 1999 году составил:

$$K_0^{\text{обор}} = \frac{PI_0}{\overline{CV}_0} = \frac{3051}{373,25} = 8,174 \text{ оборота.}$$

Коэффициент оборачиваемости оборотных средств в 2000 году составил:

$$K_1^{\text{обор}} = \frac{PI_1}{\overline{CV}_1} = \frac{3724}{404,75} = 9,201 \text{ оборота.}$$

Коэффициент закрепления оборотных средств определяется по формуле:

$$K^{закр} = \frac{\overline{CV}}{PP}$$

Коэффициент закрепления оборотных средств в 1999 году составил:

$$K_0^{закр} = \frac{\overline{CV}_0}{PP_0} = \frac{373,25}{3051} = 0,1223.$$

Коэффициент закрепления оборотных средств в 2000 году составил:

$$K_1^{закр} = \frac{\overline{CV}_1}{PP_1} = \frac{404,75}{3724} = 0,1087.$$

Коэффициент средней продолжительности одного оборота определяется по формуле:

$$B = \frac{D}{K^{обор}},$$

где D – число календарных дней.

Коэффициент средней продолжительности одного оборота в 1999 году составил:

$$B_0 = \frac{D}{K_0^{обор}} = \frac{365}{8,174} = 44,654 \text{ дней.}$$

Коэффициент средней продолжительности одного оборота в 2000 году составил:

$$B_1 = \frac{D}{K_1^{обор}} = \frac{365}{9,201} = 39,670 \text{ дней.}$$

В 2000 году оборачиваемость оборотных средств увеличилась с 8,174 оборота до 9,201 оборотов в год. Соответственно, средняя продолжительность одного оборота уменьшилась с 44,654 дней до 39,67 дней.

2) Изменение среднего остатка оборотных средств за счет увеличения объема производства составило:

$$\Delta \overline{CV}(PP) = (PP_1 - PP_0) \cdot K_0^{закр} = (3724 - 3051) \cdot 0,1223 = 82,3 \text{ тыс. руб.}$$

Изменение среднего остатка оборотных средств за счет изменения оборачиваемости оборотных средств составило:

$$\Delta \overline{CV}(PP) = (K_1^{закр} - K_0^{закр}) \cdot PP_1 = (0,1087 - 0,1223) \cdot 3724 = -50,7 \text{ тыс. руб.}$$

Выводы.

1. Увеличение объема производства в 2000 году привело к возрастанию среднего остатка оборотных средств на 82,3 тыс. руб.

Увеличение оборачиваемости оборотных средств в 2000 году привело к сокращению среднего остатка оборотных средств на 50,7 тыс. руб.