ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

КРАСНОЯРСКИЙ ИНСТИТУТ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА –
ФИЛИАЛ ФГБОУ ВПО
«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ» в г. Красноярске

Контрольные задания по математике и руководство к их решению

Учебное пособие для втузов

Под редакцией Сизова С.Н.

Красноярск
КрИДТ ИрГУПС
2011

УДК 517+519
ББК 22.11
К 65

Авторы:

С.Н. Сизов, А.П. Хоменко, А.И. Свитачев, О.В. Пашковская, Е.А. Галькова, Е.В. Шалагина.

Рецензенты:

Я.Н. Нужин, д-р. физ.-мат. наук, профессор кафедры «Математического обеспечения дискретных устройств и систем», институт фундаментальной подготовки Сибирского Федерального Университета.

С.В. Ушанов, канд. техн. наук, профессор, зав. кафедры «Математики и информатики» Сибирского государственного технологического университета.

УДК 517+519
ББК 22.11
К 65

Контрольные задания по математике и руководство к их решению : учеб. пособ. для ВТУЗов. / С.Н. Сизов [и др.] ; под ред. С.Н. Сизова ; КрИЖТ ИрГУПС. - Красноярск : КрИЖТ ИрГУПС, 2011. -

Учебное пособие представляет собой сборник заданий контрольных работ по курсу математики для студентов-заочников, обучающихся по направлению «Технические науки» (550000). Задания сопровождаются краткими теоретическими сведениями и решениями типовых задач и примеров.

Рекомендовано к изданию методическим советом КрИЖТ ИрГУПС

Печатается в авторской редакции

Оглавление

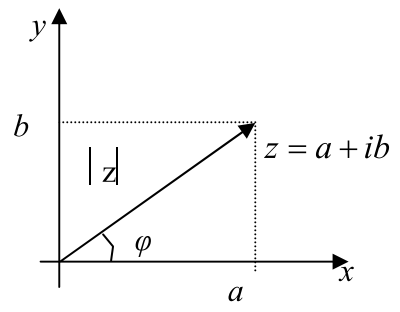
1. Комплексные числа. Основы линейной алгебры

1.1. Краткие сведения из теории

1.1.1. Некоторые сведения о комплексных числах

Комплексным числом называется число вида $z=a+ib$ (*алгебраическая* форма), где $i=\sqrt{-1}$ (*мнимая единица*), $a=Re\ z$-*действительная* часть, $b=Im\ z$-*мнимая* часть комплексного числа. Свойства мнимой единицы: $i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$.

Геометрически комплексное число изображается на плоскости в виде вектора z, имеющего длину $|z|$, называемую *модулем* комплексного числа, $(0\le|z|<\infty)$, и направление по отношению к абсциссе, определяемое углом φ, который называется *аргументом* комплексного числа ($0\le\varphi\le 2\pi$)



Перечисленные параметры связаны соотношениями:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2},\ \varphi=\arg z=arctg\frac{b}{a},\ a=\mathrm{Re}\, z=|z|\cos\varphi,\ b=\mathrm{Im}\, z=|z|\sin\varphi.$$

Выражение $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ есть *тригонометрическая* форма, а $z=|z|e^{j\varphi}$ – *показательная* форма комплексного числа. Здесь использовалась формула Эйлера: $e^{\pm j\varphi}=\cos\varphi\pm j\sin\varphi$.

Сопряженным называется комплексное число $\overline{z}$, отличающееся знаком мнимой части от комплексного числа z .

Если $z=a+jb=|z|(\cos\varphi+j\sin\varphi)=|z|e^{j\varphi}$, то

$$\overline{z}=a-jb=|z|(\cos\varphi-j\sin\varphi)=|z|e^{-j\varphi}.$$

Действия над комплексными числами

Сложение. Если $z_1=a_1+jb_1$, $z_2=a_2+jb_2$, то

$$z_1\pm z_2=a_1\pm a_2+j(b_1\pm b_2).$$

Следствие: сумма комплексно сопряженных чисел равна удвоенной их действительной части.

$$z + \overline{z} = a + jb + a - jb = 2a\ .$$

Умножение, деление. Если $z_1 = |z_1|e^{j\varphi_1}$, $z_2 = |z_2|e^{j\varphi_2}$ или
$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} = |z_1||z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Следствие: произведение комплексно сопряженных чисел равно квадрату их модуля.

$$z\overline{z} = |z|e^{j\varphi}\,|z|e^{-j\varphi} = |z|^2 .$$

Умножение и деление можно производить, если комплексные числа заданы в алгебраической форме: $z_1 = a_1 + jb_1; z_2 = a_2 + jb_2$.

$$z_1 z_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1a_2 + ja_1b_2 + ja_2b_1 + j^2b_1b_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + j(a_1b_2 + a_2b_1).$$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + jb_1}{a_2 + ib_2} =$ •|. умножим и разделим на сопряженный знаменатель .|• = [1*]

$$= \frac{(a_1 + b_1)}{(a_2 + b_2)}\frac{(a_2 - b_2)}{(a_2 - b_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + j(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\,\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Возведение в степень. Если $z = |z|e^{j\varphi} = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$, то

$$z^n = |z|^n e^{jn\varphi} = |z|^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi).$$

Извлечение корня $n-$ *ой степени*. Если $z = |z|e^{j\varphi} = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$, то

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|e^{j\varphi}} = \sqrt[n]{|z|}e^{j\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$ где

$$k = 0,1,\dots,n-1.$$

[**] Здесь и в дальнейшем знаки •|. .|• обозначают скобки, в которых даны пояснения.

1.1.2. Элементы линейной алгебры – матрицы и определители

Прямоугольные таблицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad .... \quad , \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & .a_{ij}.. & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

имеющие m строк и n столбцов и состоящие из элементов a_{ij} $(i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n)$, называются *матрицами*. Элементами матриц могут быть числа, функции или элементы иной природы. Элемент a_{ij} находится на пересечении i – той строки и j – того столбца.

Обозначаются матрицы большими буквами $A, B, C, \ldots$, а также

$$(a_{ij}), (b_{ij})_{mn}, \|a_{ij}\|_{mn}.$$

При $m=n$ – матрица *квадратная*, при $m \neq n$ – *прямоугольная*.

Матрицу $(a_{ij})_{1n} = (a_{11} a_{12} ... a_{1n})$ называют *матрицей-строкой*.

Матрицу $(b_{ij})_{m1} = \begin{pmatrix} \\ b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ называют *матрицей-столбцом*.

Этими матрицами выражают вектора, количество координат которых равно количеству элементов матрицы.

Определителем 2-ого порядка, соответствующим матрице

$A = \begin{pmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} \end{pmatrix}$, называется число $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Определителем 3-его порядка, соответствующим квадратной матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, полученный из данного определителя вычеркиванием i - строки и j- столбца.

Так, минором M_{23} определителя 3-его порядка является определитель, получаемый вычеркиванием второй строки и третьего столбца из исходного определителя: $M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, равный $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Вычисление определителя по элементам строки или столбца.

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

Так, по элементам второй строки вычислим определитель 3-его порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}A_{2j} =$$

$$= a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Операции над матрицами.

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, имеющих одинаковый размер, называется матрица $C = (c_{ij})$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B.

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; $i = 1,2, \ldots, m, \; j = 1,2, \ldots, n.$

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, где каждый элемент матрицы A умножается на число λ.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{mp}$ на матрицу $B = (b_{ij})_{pn}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{mn} = AB$, элемент c_{ij} которой равен сумме произведений соответствующих элементов i -ой строки матрицы A и j -ого столбца матрицы B:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}+\cdots+a_{ip}b_{pj}.$$

Произведение матриц имеет смысл только в случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Так, например,

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot5 & 1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot2+2\cdot1\\ 3\cdot3+4\cdot5 & 3\cdot1+4\cdot0 & 3\cdot2+4\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 1 & 4\\ 29 & 3 & 10\end{pmatrix}.$$

Частный случай – *скалярное произведение векторов*:

$$(a_1a_2a_3)\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Квадратная матрица A называется *вырожденной*, если ее определитель $|A| = 0$, и *невырожденной*, если $|A| \neq 0$.

Обратной для невырожденной матрицы A называется матрица A^{-1} такая, что

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E,$$

где E – единичная матрица (по главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы равны 0).

Чаще всего обратную матрицу A^{-1} находят по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^{T},\text{где}$$

$\left(A_{ij}\right)$– матрица, составленная из алгебраических дополнений исходной матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$. Значок «Т» обозначает *транспонирование*: строки и столбцы матрицы меняются местами.

Так, обратная матрица A^{-1} для квадратной матрицы A 3-его порядка имеет вид :

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{pmatrix}.$$

1.1.3. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Рассмотрим систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x + a_{12}\cdot y + a_{13}\cdot z = b_1, \\ a_{21}\cdot x + a_{22}\cdot y + a_{23}\cdot z = b_2, \\ a_{31}\cdot x + a_{32}\cdot y + a_{33}\cdot z = b_3. \end{cases} \qquad (1.1)$$

СЛАУ (1.1) можно представить в матричном виде:

$$A\cdot X = B, \qquad (1.2)$$

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица СЛАУ,

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$ – определитель СЛАУ, он же определитель матрицы A.

$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$ – расширенная матрица СЛАУ.

Элементарными преобразованиями матрицы (СЛАУ) наз. следующие преобразования:

1)Перестановка двух любых строк (уравнений).

2)Умножение всех элементов любой строки (любого уравнения) на произвольное число, отличное от нуля.

3)Прибавление к элементам любой строки (уравнения) соответствующих элементов другой строки (уравнения), умноженных на любое число, отличное от нуля.

Инженеру необходимо знать три метода решения СЛАУ.

1.Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных

– От исходной СЛАУ перейти к расширенной матрице.

– Элементарными преобразованиями привести расширенную матрицу к треугольному виду(все элементы ниже диагонали должны быть равны нулю).

– От треугольной расширенной матрицы перейти к СЛАУ.

– Определить неизвестное из последнего уравнения (все неизвестные исключены, кроме одного).

– Подставить найденное неизвестное в предыдущее уравнение, решить его, т. е. найти следующее неизвестное и так продолжать находить все остальные неизвестные.

2.Метод Крамера

Решение находится по *формулам Крамера*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Система имеет единственное решение при $\Delta \neq 0$, множество решений при $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ и не имеет решения при $\Delta = 0$ и хотя бы одном из Δ_x, Δ_y, Δ_z не равном нулю.

3.Матричный метод решения СЛАУ

Если в (1.2) матрица A невырожденная, то, умножая слева матричное уравнение на матрицу A^{-1}, обратную A, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

$$\text{Т.к. } A^{-1} \cdot A = E \quad \text{и} \quad E \cdot X = X, \quad \text{то} \quad X = A^{-1} \cdot B. \qquad (1.3)$$

1.1.4. Элементы линейных преобразований

Формула (1.2) показывает, что вектор X с помощью матрицы A преобразуется в вектор B. Это преобразование называется линейным, т. к. при переходе от векторной формы (1.2) к СЛАУ (1.1) все уравнения являются линейными.

Т. о., линейное преобразование характеризуется его матрицей. Поэтому действия над такими преобразованиями сводятся к действиям над их матрицами. Например, если вектор X переводится в вектор Y линейным преобразованием с матрицей A, т.е. $Y=AX$, а вектор Y переводится в вектор Z линейным преобразованием с матрицей B, т.е. $Z=BY$, то линейное преобразование переводящее вектор X в вектор Z определяется матрицей $C=BA$, т.к.

$$Z=BY=BAX=CX. \qquad (1.4)$$

В линейной алгебре очень важным является частный случай линейного преобразования, когда матрица A преобразует вектор X в коллинеарный (параллельный) самому себе вектор:

$$AX=\lambda X. \tag{1.5}$$

Если действительное число λ и вектор $X\neq 0$ таковы, что удовлетворяют (1.5), то число λ называется *собственным значением* матрицы A, а вектор X – *собственным вектором* этой матрицы.

Собственное значение λ матрицы A определяется в результате решения *характеристического уравнения матрицы A*:

$$A\text{-}\lambda E=0.$$

Это уравнение представляет собой алгебраическое уравнение n–й степени. Если корни этого уравнения действительные простые (первой степени), то таких корней, а значит и собственных значений будет n ,где n порядок матрицы A. Собственных векторов будет тоже n. Тогда (1.5) будет уточнено:

$$AX_i=\lambda_i X_i \text{ , где } i=1,2,\ldots,n. \tag{1.6}$$

Каждый собственный вектор находится в результате решения (1.6), преобразовав его в СЛАУ. Решение СЛАУ является координатами собственного вектора.

*Замечание***.** СЛАУ, полученное из (1.6) является совместной и неопределенной (имеет множество решений). Ее можно решить методом Гаусса (пример такого решения см. ниже). Очень часто эти СЛАУ можно привести к виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Такая однородная СЛАУ имеет два уравнения и три неизвестных.

Ее решение:

$$x_1 = k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, x_2 = -k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, x_3 = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \text{ ,} \tag{1.8}$$

где k – любое действительное число (свободная переменная).

1.2. Решение типовых примеров и задач

Пример 1. Записать число $z=\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}$ в алгебраической и тригонометрической формах. Найти все корни уравнения $\omega^3+z=0$.

*Решение***.** Для получения числа z в алгебраической форме помножим числитель и знаменатель на сопряженное число (1- i).

$$z=\frac{\sqrt{2}\left(1-i\right)}{\left(1+i\right)\left(1-i\right)}=\frac{\sqrt{2}\left(1-i\right)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-i\right).$$

Модуль числа z равен $\rho=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}}=1$, а аргумент $\varphi=arctg\dfrac{-1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}=\dfrac{7\pi}{4}$, так как число z находится в четвертой четверти.

Тригонометрическая форма числа z имеет вид $z=1\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

Для нахождения корней уравнения $\omega^3+z=0$ имеем $\omega^3=-z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-1+i\right)$. Так как число -$z$ находится во второй четверти, то тригонометрическая форма числа -z будет иметь вид $-z=1\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$. Используя приведенную выше формулу извлечения корня, получим

$$\omega=\sqrt[3]{-z}=\sqrt[3]{1\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\right),$$

где k=0, 1, 2.

При k=0, $\omega_1=\sqrt[3]{1}\left(\cos\dfrac{3\pi/4}{3}+i\sin\dfrac{3\pi/4}{3}\right)=\text{ños}\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$.

При k=1, $\omega_2=\sqrt[3]{1}\left(\cos\dfrac{3\pi/4+2\pi}{3}+i\sin\dfrac{3\pi/4+2\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

При k=2, $\omega_3=\sqrt[3]{1}\left(\cos\dfrac{3\pi/4+4\pi}{3}+i\sin\dfrac{3\pi/4+4\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{19\pi}{12}+i\sin\dfrac{19\pi}{12}$.

Пример 2. Решить методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ 2x + 3y - 7z = 16, \\ 5x + 2y + z = 16. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -7 & 16 \\ 5 & 2 & 1 & 16 \end{array}\right).$$

Приводим ее к треугольному виду с помощью элементарных преобразований.

Первую строку оставим без изменения. Умножим первую строку на (-2) и сложим со второй и ту же первую строку умножим на (-5) и сложим с третьей строкой. В результате получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 11 & -14 \end{array}\right).$$

Вторую строку оставим без изменения, а затем умножим вторую строку на (+3) и сложим с третьей. В результате имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

От расширенной матрицы переходим к СЛАУ:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ \quad\; y - 3z = 4, \\ \qquad\; 2z = -2. \end{cases}$$

Из этой системы последовательно находим

z =-1 $y = 4 + 3z = 1$ $x = 6 + 2z - y = 6 - 2 - 1 = 3.$

Решение x=3, y=1, z=-1 является единственным. Такая СЛАУ называется *совместной и определенной*.

Пример 3**.** . Решить методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x - y + 5z = 3, \\ 3x + 2y - z = 2, \\ 2x + 3y - 6z = -1. \end{cases}$$

Решение: Составим расширенную матрицу и выполним над ней элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & -16 & -7 \\ 0 & 5 & -16 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & -16 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Здесь первую строку умножили на *(-3)* и сложили со второй, далее - первую строку умножили на *(-2)* и сложили с третьей, а затем из третьей строки вычли вторую.

Последней матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x - y + 5z = 3, \\ 5y - 16z = -7. \end{cases}$$

Неизвестные x и y можно выразить через z:

$$y = -\frac{7}{5} + \frac{16}{5}z,$$

$$x = \frac{8}{5} - \frac{9}{5}z.$$

Придавая z произвольные значения, получим соответствующие значения x и y. Таким образом, система имеет множество решений вида:

$$x = \frac{8}{5} - \frac{9}{5}z, \qquad y = -\frac{7}{5} + \frac{16}{5}z.$$

Такая СЛАУ называется *совместной и неопределенной*.

Пример 4. Решить по правилу Крамера систему:

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ x + 3z = 7, \\ 5y - z = 3. \end{cases}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-15) - 1 \cdot (-1) = -29.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-15) - 1 \cdot (-7 - 9) = -45 + 16 = -29.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-7-9) - 3\cdot(-1) = -32+3 = -29.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-35) - 1\cdot(3-15) = -70+12 = -58.$$

По формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-29}{-29} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-29}{-29} = 1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-58}{-29} = 2.$$

Пример 5. Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 3x + 2z = 5, \\ 4x - 2y + 5z = 7. \end{cases}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\cdot(10-2) - 2\cdot(-2-8) = -24+20 = -4.$$

Найдем алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Обратная матрица имеет вид $A^{-1} = \dfrac{1}{-4}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$

Находим решение $X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Таким образом, система имеет решение $x = 1, \quad y = 1, \; z = 1.$

Пример 6. Даны два линейных преобразования:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - 1x_2 + 5x_3, \\ y_2 &= x_1 + 4x_2 - x_3, \\ y_3 &= 3x_1 - 5x_2 + 2x_3, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z_1 &= y_1 + 4y_2 + 3y_3, \\ z_2 &= 5y_1 - 1y_2 - 1y_3, \\ z_3 &= 3y_1 + 6y_2 + 7y_3. \end{aligned}$$

Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее вектор z через вектор $\boldsymbol{x}$.

*Решение***.** Преобразования определяются матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы B и A, получим искомую матрицу C:

$$C = \hat{A}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, преобразование будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} z_1 &= 15x_1 \qquad + 7x_3, \\ z_2 &= 6x_1 - 4x_2 + 24x_3, \\ z_3 &= 33x_1 - 14x_2 + 23x_3. \end{aligned}$$

Пример 7**.** Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение матрицы A и решаем его, т.е. находим собственные значения матрицы A.

$$|A-\lambda E| = \left|\begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 21 \\ 21 & 2-\lambda & 16 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 21 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)((5-\lambda)(1-\lambda)-21) = 0,$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda-16) = 0; (2-\lambda)(2+\lambda)(\lambda-8) = 0,$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 8, \lambda_3 = 2.$$

Для нахождения собственных векторов матрицы A необходимо каждое собственное значение λ_i, $i = 1,2,3.$ подставить в (1.6) и решить соответствующее СЛАУ. Решение СЛАУ и есть координаты собственных векторов.

Для $\lambda_1 = -2$ получим:

$$AX_1 = \lambda_1 X_1, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 5x_{11} & & +21x_{31} & = -2x_{11}, \\ 21x_{11} & +2x_{21} & +16x_{31} & = -2x_{21}, \\ x_{11} & & +x_{31} & = -2x_{31}, \end{cases} \begin{cases} 7x_{11} & & +21x_{31} & = 0, \\ 21x_{11} & +4x_{21} & +16x_{31} & = 0, \\ x_{11} & & +3x_{31} & = 0. \end{cases}$$

СЛАУ можно решить методом Гаусса.

Мы решим по иному. Если первое уравнение разделить на 7 , то оно окажется таким же, как третье. Это значит, что одно из уравнений лишнее. Отбросим первое уравнение и получим:

$$\begin{cases} 21x_{11} & +4x_{21} & +16x_{31} & = 0, \\ x_{11} & & +3x_{31} & = 0. \end{cases}$$

Решим СЛАУ, используя (1.8).

$$x_{11} = k\begin{vmatrix} 4 & 16 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12k, x_{21} = -k\begin{vmatrix} 21 & 16 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -47k, x_{31} = k\begin{vmatrix} 21 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4k.$$

Первый собственный вектор $X_1 = (12k, -47k, -4k) = k(12, -47, -4)$.

Для $\lambda_2 = 8$ получим:

$$AX_2 = \lambda_2 X_2, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 5x_{12} & & +21x_{32} & =8x_{12}, \\ 21x_{12} & +2x_{22} & +16x_{32} & =8x_{22}, \\ x_{12} & & +x_{32} & =8x_{32}, \end{cases} \begin{cases} -3x_{12} & & +21x_{32} & =0, \\ 21x_{12} & -6x_{22} & +16x_{32} & =0, \\ x_{12} & & -7x_{32} & =0. \end{cases}$$

Если первое уравнение почленно разделить на (-3), получим третье. Отбрасываем первое уравнение и решаем СЛАУ по формуле (1.8).

$$\begin{cases} 21x_{12} & -6x_{22} & +16x_{32} & =0, \\ x_{12} & & -7x_{32} & =0. \end{cases}$$

$$x_{12}=k\begin{vmatrix} -6 & 16 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}=42k, x_{22}=-k\begin{vmatrix} 21 & 16 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}=163k, x_{32}=k\begin{vmatrix} 21 & -6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=6k.$$

Второй собственный вектор $X_2=(42k,163k,6k)=k(42,163,6)$.

Для $\lambda_3=2$ получим:

$$AX_3=\lambda_3X_3, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 5x_{13} & & +21x_{33} & =2x_{13}, \\ 21x_{13} & +2x_{23} & +16x_{33} & =2x_{23}, \\ x_{13} & & x_{33} & =2x_{33}, \end{cases} \begin{cases} 3x_{13} & & +21x_{33} & =0, \\ 21x_{13} & +0x_{23} & +16x_{33} & =0, \\ x_{13} & & -x_{33} & =0. \end{cases}$$

Видно, что x_{23} может принимать любые значения (от этого СЛАУ не изменится). Значит $x_{23}=k$ – свободная переменная. СЛАУ преобразовалось в однородное, содержащее 3 уравнения и 2 переменные. Не трудно полагать, что оно имеет решение $x_{13}=x_{33}=0$.

Эту же СЛАУ решим метом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 21 & 0 \\ 21 & 0 & 16 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 21 & 0 \\ 21 & 0 & 16 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 37 & 0 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} x_{13}+ & 0\cdot x_{23}- & x_{33}=0, \\ & 0\cdot x_{23}+ & 24x_{33}=0, \\ & & 37x_{33}=0. \end{cases}$$

$$x_{33}=0, x_{23}=k, x_{13}=0.$$

Третий собственный вектор $X_3=(0k,k,0k)=k(0,1,0)$.

1.3. Задания на контрольную работу

Задание 1.

Дано комплексное число z. Требуется:

1) записать число z в алгебраической и тригонометрической формах;

2) найти все корни уравнения $\omega^3 + z = 0$.

1. $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$
2. $z = \dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$
3. $z = -\dfrac{2\sqrt{2}}{1-i}$
4. $z = -\dfrac{4}{1-i\sqrt{3}}$
5. $z = -\dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$
6. $z = -\dfrac{4}{\sqrt{3}-i}$
7. $z = \dfrac{4}{1-i\sqrt{3}}$
8. $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{1-i}$
9. $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}+i}$
10. $z = \dfrac{1}{\sqrt{3}-i}$

Задание 2.

Дана система линейных уравнений. Решить тремя способами:

1) методом Гаусса;

2) методом Крамера;

3) с помощью обратной матрицы.

1. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ 2x - y - 3z = -4 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 8x + 3y - 6z = 2 \\ 4x + y - 3z = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 3 \\ 2x + y - z = -5 \\ 5x - y + 3z = 4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x - 5y = 31 \\ 4x + 11z = -43 \\ 2x + 3y + 4z = -20 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$

Задание 3. Даны два линейных преобразования

$$x_1' = (a-b+3)x_1 + (b-a)x_2 + cx_3,$$
$$x_2' = (2c+2)x_1 + (2a-3b+c)x_2 + (a+c)x_3,$$
$$x_3' = ax_1 + (b+a)x_2 + (2a+c)x_3.$$

и

$$x_1'' = (b-3)x_1' + (2b+a)x_2' + (2a-c)x_3',$$
$$x_2'' = (2c-2)x_1' + (3b-c)x_2' + (a+c)x_3',$$
$$x_3'' = (3a-c)x_1' + (2-b)x_2' + (a+b+c)x_3'.$$

Средствами матричного исчисления найти преобразования, выражающие x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3. В качестве a взять последнюю цифру своего шифра, b=7, c=-7.

Задание 4.

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 0 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \\ -2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

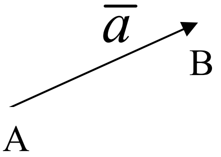
10. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Векторная алгебра и аналитическая геометрия

2.1. Краткие сведения из теории

2.1.1. Элементы векторной алгебры

Вектором называется направленный отрезок в пространстве, имеющий определенную длину (рисунок 2.1).



Обозначение векторов: $\vec{a}$ или $\overline{\hat{A}\hat{A}}$.

Рисунок 2.1.

Длина вектора – *модуль*, имеющий обозначение: $|\,\overline{a}\,|$ или $|\,\overline{AB}\,|$.

Нуль-вектор - $\overline{0}$ – вектор, не имеющий определенного направления, и модуль $|\,\overline{0}\,| = 0$.

Вектора, расположенные на одной или параллельных прямых, называются *коллинеарными.*

Вектор $(-\vec{a})$ называют *противоположным* вектору $\vec{a}$, он коллинеарен вектору $|\,\overline{a}\,|$ и направлен в противоположную сторону.

Сумма векторов есть вектор, начало которого совпадает с началом первого слагаемого, а конец – с концом последнего слагаемого, при условии, что начало каждого последующего вектора-слагаемого приложено к концу предыдущего.

Произведением вектора $|\,\overline{a}\,|$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, модуль которого $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и направление совпадает с направлением $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно, если $\lambda < 0$.

Вектора, лежащие на одной или параллельных плоскостях называются *компланарными.*

Система векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля и $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = 0$. В противном случае система называется *линейно независимой.*

Максимальное число линейно независимых векторов в пространстве называется *базисом.*

Вектора $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, попарно перпендикулярные и имеющие единичную длину, образуют прямоугольный декартов базис в трехмерном пространстве – пространстве R^3. Эти вектора называют *единичными ортами*. Они имеют строгое направление: орт

$\bar{i}$ – направлен по оси Ox, орт $\overline{j}$ – по оси Oy, орт $\overline{k}$ – по оси Oz.

Всякий вектор $\overline{a}$ может быть единственным образом представлен в трехмерном пространстве как:

$$\vec{\overline{a}} = \grave{a}_x \cdot \overline{i} + \grave{a}_y \cdot \overline{j} + \grave{a}_z \cdot \overline{k} = \left(a_x, a_y, a_z \right),$$

где $\grave{a}_x$, $\grave{a}_y$, $\grave{a}_z$ – координаты вектора в базисе ($\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$) и представляют собой проекции вектора $\overline{a}$ на оси Ox, Oy, Oz (рисунок 2.2.)

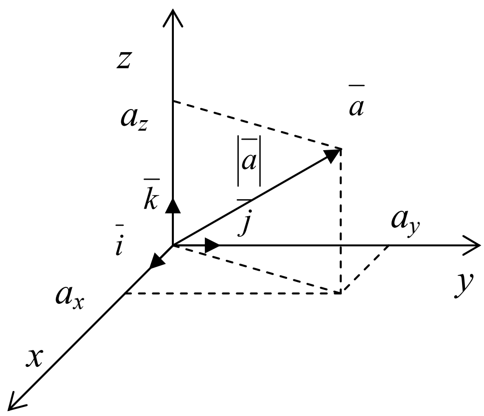


Рисунок 2.2.

Если $A\left(A_x, A_y, A_z\right)$, $B\left(B_x, B_y, B_z\right)$ начало и конец вектора $\overline{AB} = \overline{a}$, то координаты этого вектора $a_x = B_x - A_x, a_y = B_y - A_y, a_z = B_z - A_z$.

Чтобы определить координаты вектора, нужно от координат конца вычесть координаты начала.

Выразим модуль вектора через координаты его начала и конца.

$$\overline{AB} = \left(B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z\right),$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{\left(B_x - A_x\right)^2 + \left(B_y - A_y\right)^2 + \left(B_z - A_z\right)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Представление векторов своими координатами $\overline{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\overline{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$ позволяет производить аналитическим образом следующие действия над ними.

Сумма векторов:

$\overline{a} \pm \overline{b} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\pm \left(b_x, b_y, b_z\right) = \left(\left(a_x \pm b_x\right) \left(a_y \pm b_y\right) \left(a_z \pm b_z\right)\right)$, или

$\overline{a} \pm \overline{b} = \left(a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}\right) \pm \left(b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}\right) = \left(a_x \pm b_x\right)\overline{i} + \left(a_y \pm b_y\right)\overline{j} + \left(a_z \pm b_z\right)\overline{k}$.

Произведение числа λ *на вектор* $\overline{a}$:

$\lambda\overline{a} = \lambda\left(a_x, a_y, a_z\right) = \left(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\right)$, или

$$\lambda\overline{a} = \lambda\left(a_x\bar{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}\right) = \lambda a_x\bar{i} + \lambda a_y\overline{a}_y + \lambda a_z\overline{k}.$$

Скалярное произведение векторов. Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot cos\left(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}\right)$.

Если вектора заданы координатами $\overline{a}=(\grave{a}_x,\ \grave{a}_y\ ,\grave{a}_z\ )$, $\overline{b}=(b_x,\ b_y\ ,b_z\ )$, то скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}=\grave{a}_x\cdot b_x+\grave{a}_y\cdot b_y+\grave{a}_z\cdot b_z$.

Из формулы нахождения скалярного произведения можно найти косинус угла между двумя векторами

$$\cos\left(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}\right)=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Векторное произведение векторов. Векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\tilde{n}=\overline{a}\times\overline{b}$, определяемый тремя условиями:

1. модуль вектора $\left|\overline{c}\right|=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot sin\left(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}\right)$ – численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, как на сторонах;
2. вектор $\overline{c}\perp\vec{a}$ и $\overline{c}\perp\overline{b}$;
3. вектора $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют правую тройку, т. е. если смотреть с конца вектора $\overline{c}$ на вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то поворот от вектора $\overline{a}$ к $\overline{b}$ по кратчайшему расстоянию виден совершающимся против часовой стрелки (правило винта, рисунок 2.3).

Рисунок 2.3.

Если вектора $\vec{a}$ и $\overline{b}$ заданы координатами $\overline{a}=(\grave{a}_x,\ \grave{a}_y\ ,\grave{a}_z\ )$, $\overline{b}=(b_x,\ b_y\ ,b_z)$, то векторное произведение находится так:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение. Смешанным произведением трех векторов $\bar{a} = (\grave{a}_x,\ \grave{a}_y,\ \grave{a}_z),\ \bar{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z),\ \bar{c} = (c_x,\ c_y,\ c_z)$ называется число, равное векторно-скалярному произведению векторов $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \tilde{n}$.

Геометрически смешанное произведение с точностью до знака численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, как на ребрах.

Смешанное произведение через координаты векторов вычисляется по формуле:

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Если три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны, то их смешанное произведение $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = 0$ и наоборот.

2.1.2. Прямая на плоскости

Прямоугольные координаты на плоскости. Точка M на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат $x\ 0\ y$ задается координатами x и y и обозначается $M(x, y)$.

Расстояние d между двумя точками на плоскости $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяется по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Координаты точки $M(x, y)$, которая делит отрезок между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ в отношении λ, находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Координаты середины отрезка M_1M_2 находятся из условия $\lambda = 1$ и равны $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Основные виды уравнений прямой на плоскости.

1) $Ax + By + C = 0$ – *общее уравнение прямой.*

2) $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ – *уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ перпендикулярно нормальному вектору* $\bar{N} = (A, B)$.

3) $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n}$ – *каноническое уравнение прямой* – уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ параллельно направляющему вектору $\bar{s} = (m, n)$.

4) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – *уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

5) $y = k\,x + b$ – *уравнение прямой с угловым коэффициентом*, где $k = \text{tg}\alpha$ (α – угол наклона прямой к оси $0x$), b – ордината точки пересечения прямой с осью $0y$.

6) $\bar{r}=\overline{r_0}+\bar{s}\cdot t$ – *векторное уравнение* прямой, где $\bar{r}=(x,y)$ – радиус-вектор произвольной точки $M(x,y)$ на прямой, $\overline{r_0}=(x_0,y_0)$ радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на прямой, $\bar{s}=(m,n)$ – направляющий вектор прямой. Из векторного уравнения можно получить *параметрическое уравнение прямой:*

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}, \quad t \in (-\infty,\infty).$$

7) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – *уравнение прямой в отрезках*, где a – абсцисса точки пересечения прямой с осью $0x$, b – ордината точки пересечения прямой с осью $0y$.

Угол между двумя прямыми. Угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2\,x + b_2$ определяется по формуле:

$$tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Условие параллельности прямых: $k_1=k_2$.

Условие перпендикулярности прямых: $1+ k_1k_2=0$.

*Расстояние от точки до прямой***.** Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находится по формуле:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

2.1.3. Прямая и плоскость в пространстве R^3

Основные виды уравнений плоскости в пространстве R^3

1) $Ax+By+Cz+D=0$ – *общее уравнение плоскости*;

2) $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ – уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно нормальному вектору $\bar{N}=(A,B,C)$;

3) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ – *уравнение плоскости в отрезках*, где a, b, c – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях $0x$, $0y$, $0z$ соответственно;

4) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ – *уравнение плоскости, проходящей через три точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Основные виды уравнений прямой в пространстве R³

1. $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ –*общее уравнение прямой*, как пересечение двух плоскостей, где направляющий вектор прямой находится из векторного произведения нормальных векторов плоскостей

$$\overline{N_1}\times\overline{N_2}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

2. $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ – *каноническое уравнение прямой* или уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ параллельно вектору $\bar{s}=(m,n,p)$.

3. $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – *уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

4. $\bar{r}(t)=\bar{r}_0+\bar{s}t$ – *векторное уравнение прямой*, где $\overline{r_0}=(x_0,y_0,z_0)$ –радиус-вектор точки, лежащей на прямой, $\bar{s}=(m,n,p)$ – направляющий вектор прямой.

5. В *параметрической* форме уравнение прямой:

$$\begin{aligned} x &= x_0+mt \\ y &= y_0+nt \\ z &= z_0+pt \end{aligned}.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *до плоскости* $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Угол между двумя прямыми, заданными в канонической форме $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ è $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$, определяется как угол между их направляющими векторами:

$$\cos\varphi=\frac{m_1\, m_2+n_1\, n_2+p_1\, p_2}{\sqrt{m_1^{\ 2}+n_1^{\ 2}+p_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{m_2^{\ 2}+n_2^{\ 2}+p_2^{\ 2}}}\ .$$

Угол между прямой $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ *и плоскостью* $Ax+By+Cz+D=0$ определяется так:

$$\sin\varphi=\frac{m\,A+n\,B+p\,C}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

2.1.4. Кривые второго порядка

Каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где a и b соответственно большая и малая полуоси эллипса, $F_1(-c,o)$ и $F_2(c,o)$ – фокусы, $b^2=a^2-c^2$ (рис. 2.4). При $a=b$ получаем уравнение окружности.

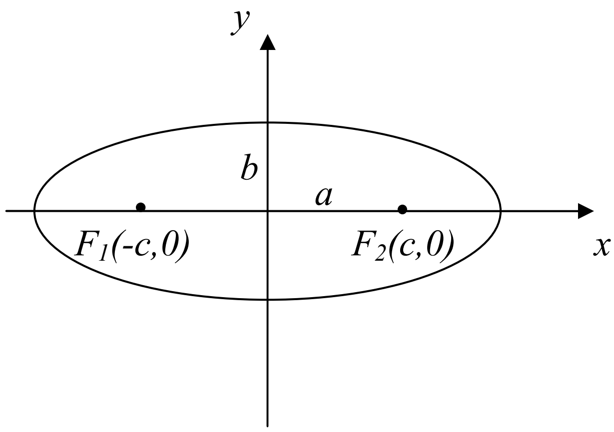


Рисунок 2.4.

Каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где a и b соответственно действительная и мнимая полуоси гиперболы, $F_1(-c,o)$ и $F_2(c,o)$ – фокусы, $b^2=c^2+a^2$ (рисунок 2.5).

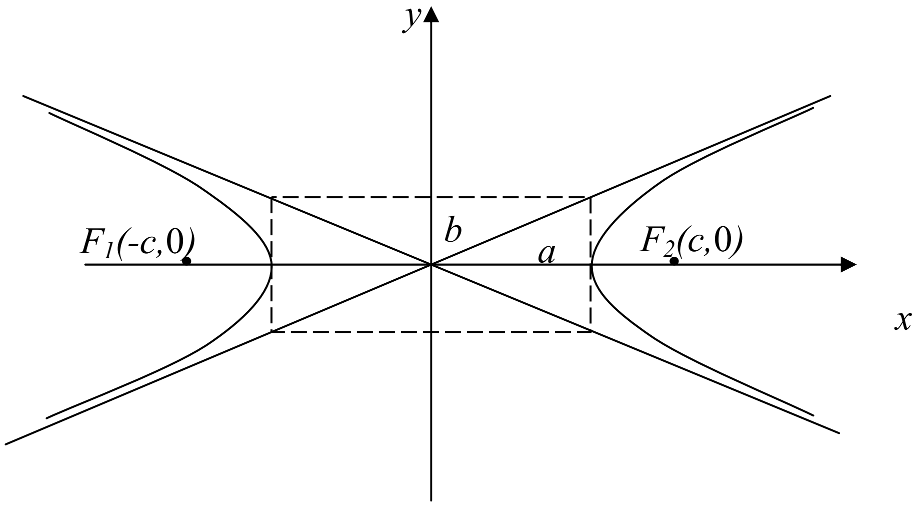


Рисунок 2.5.

Канонические уравнения парабол: $y^2 = 2px$, где p параметр (рисунок 2.6).

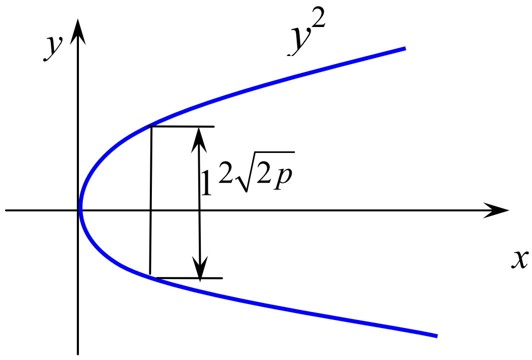


Рисунок 2.6.

2.2. Решение типовых примеров и задач

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A(*5,1,-4*), B(*1,2,-1*), C(*3,3,-4*), D(*2,2,2*)*. Требуется:

1) найти векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ и их модули;
2) найти угол между векторами $\overline{AB}$, $\overline{A\tilde{N}}$;
3) найти площадь грани *ABC*;
4) найти объем пирамиды.

Решение.

1) Найдем векторы и их модули.

$$\begin{cases} \overline{AB} = (1-5, 2-1, -1+4) = (-4,1,3), \overline{AC} = (3-5, 3-1, -4+4) = (-2,2,0), \\ \overline{AD} = (2-5, 2-1, 2+4) = (-3,1,6). \end{cases}$$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{26}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}$,

$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{46}$.

2) Косинус угла между векторами определяется по формуле

$$cos\left(\overline{AB}\,\hat{}\,\overline{AC}\right) = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|} = \frac{-4\cdot(-2)+1\cdot 2+3\cdot 0}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{8}} = \frac{5}{2\sqrt{13}},$$ тогда

$$\overline{AB}\,\hat{}\,\overline{AC} = arccos\frac{5}{2\sqrt{13}}.$$

3) Найдем векторное произведение векторов $\overline{AB}, \overline{AC}$.

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6\bar{i} - 6\bar{j} - 6\bar{k}.$$

Модуль векторного произведения векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$, как на сторонах

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{3}.$$

Тогда площадь ΔABC будет равна половине площади параллелограмма $S_\Delta = 3\sqrt{3}$.

4) Рассмотрим три вектора

$\overline{AB} = (-4,1,3)$, $\overline{AC} = (-2,2,0)$, $\overline{AD} = (-3,1,6)$.

Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-2+6) + 6(-8+2) = 12 - 36 = -24$$

Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, тогда

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}\right| = \frac{24}{6} = 4.$$

Задача 2. Задан ΔABC координатами своих вершин $A(1,2)$, $B(2,-2)$, $C(6,1)$. Найти:

1) длины сторон;

2) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты;

3) угол B;

4) уравнение высоты $СД$ и ее длину;

5) уравнение медианы AE и координаты точки K пересечения этой медианы с высотой $СД$;

6) уравнение прямой проходящей через точку K параллельно стороне AB.

Сделать чертеж.

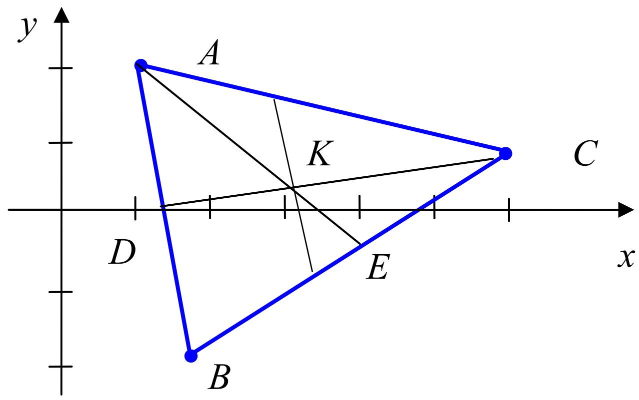


Рисунок 2.7.

Решение:

1) Находим длины сторон $AB=\sqrt{(2-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{17}$,

$B\tilde{N}=\sqrt{(6-2)^2+(1+2)^2}=5$, $A\tilde{N}=\sqrt{(6-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{26}$.

2) Уравнение стороны AB можно рассматривать как уравнение прямой, проходящей через две точки A $(1,2)$, B $(2,-2)$. Полагая $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = -2$ и подставляя в уравнение

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\text{ получаем }\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{-2-2}\text{ или }\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-4}.$$

Данное уравнение можно преобразовать к общему уравнению прямой.

-4 $(x$ -1 $= -2;$ - 4 x+ 4– + 2= 0; $4x+y-6=0$,

где нормальный вектор $\overline{N}=(4,1)$. Из общего уравнения прямой можно прийти к уравнению прямой с угловым коэффициентом y =-4 x + 6, где k=-4.

Уравнение стороны BC находится аналогично:

$$\frac{x-2}{6-2}=\frac{y+2}{1+2},$$

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+2}{3}, \qquad y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}, \text{ где } k\text{=3/4.}$$

3) Угол *B* образован прямыми *AB* и *BC*, так как $k_{AB}=-4, \quad k_{BC}=3/4$, получим $tgB=\dfrac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}k_{BC}}=\dfrac{-4-3/4}{1-4\cdot 3/4}=\dfrac{19}{8}\approx 2{,}4$, отсюда $B=arctg 2{,}4=1{,}17\ ðàä$.

4) Уравнение высоты *CD* можно рассматривать как прямую, проходящую через точку *C* параллельно нормальному вектору $\overline{N}=(4,1)$. и перпендикулярно прямой *AB*, т.е. вектор $\overline{N}$ является направляющим вектором для прямой *CD* . Тогда, пользуясь уравнением $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}$, получим $\dfrac{x-6}{4}=\dfrac{y-1}{1}$, или в общем виде $x-4y-2=0$.

Длину высоты *CD* находим как расстояние от точки *C* до прямой *AB*:

$$d=\left|\overline{CD}\right|=\frac{|4\cdot 6+1\cdot 1-6|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{19}{\sqrt{17}}.$$

5) Для того, чтобы найти уравнение медианы *AE*, найдем координаты точки *E*, как середины стороны *BC*.

$$x_E=\frac{2+6}{2}=4, \quad y_E=\frac{-2+1}{2}=\frac{-1}{2}\ .$$

Уравнение медианы *AE* получим как уравнение прямой, проходящей через две точки *A* и *E*.

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-2}{\frac{-1}{2}-2} \qquad \text{или} \qquad 5x+6y\text{-}17=0.$$

Для нахождения точки пересечения высоты *CD* и медианы *AE* решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x-4y-2=0 \\ 5x+6y-17=0 \end{cases}.$$

$$x=40/13, \quad y=7/26, \qquad K(40/13;\ 7/26).$$

6) Так как искомая прямая параллельна стороне *AB*, то их нормальные вектора равны. Тогда уравнение прямой проходящей через точку *K* будет иметь вид $4(x-40/13)+(y-7/26)=0,\ 4x+y-327/26=0.$

Задача 3. Дана пирамида *ABCD* с вершинами *A(*1,5,7*), B(*-1,0,1*), C(* 3,-2,4 *), D (* 0,1,-1). Найти:

1) уравнение грани ABC;

2) уравнение высоты DM, опущенной из точки D на грань ABC;

3) длину высоты ДМ;

4) уравнение ребра DC;

5*)* угол наклона ребра *DC* к плоскости *ABC.*

Решение.

1) Найдем уравнение грани *ABC,* т.е. уравнение плоскости, проходящей через три точки *A, B* и *C*.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z-7 \\ -1-1 & 0-5 & 1-7 \\ 3-1 & -2-5 & 4-7 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z-7 \\ -2 & -5 & -6 \\ 2 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-27(x-1) - 18(y-5) + 24(z-7) = 0,$$
$$-9x - 6y + 8z - 17 = 0\,.$$

2) Уравнение высоты *DM* представляет собой уравнение прямой, проходящей через точку *D* параллельно нормальному вектору грани *ABC* и будет иметь вид:

$$\frac{x-0}{-9} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z+1}{8}\,.$$

3) Длина высоты *DM* есть расстояние от точки *D* до плоскости *ABC* и находится по вышеприведенной формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-9 \cdot 0 - 6 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) - 17|}{\sqrt{(-9)^2 + (-6)^2 + 8^2}} = \frac{31}{\sqrt{181}}\,.$$

4) Уравнение ребра *DC* – уравнение прямой, проходящей через две точки *D* и *C* :

$$\frac{x-3}{0-3} = \frac{y+2}{1+2} = \frac{z\text{-}4}{-1\text{-}4} \quad \text{èëè} \quad \frac{x-3}{\text{-}3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{\text{-}5}\,.$$

5) Тогда угол между ребром и гранью будем находить по формуле угла между прямой и плоскостью:

$$\sin\,\varphi = \frac{(-9)\cdot(\text{-}3) + (-6)\cdot 3 + 8\cdot(\text{-}5)}{\sqrt{9^2 + 6^2 + 8^2}\;\cdot\;\sqrt{(\text{-}3)^2 + 3^2 + (\text{-}5)^2}} = \frac{\text{-}31}{\sqrt{181}\cdot\sqrt{44}} = \frac{\text{-}31}{2\cdot\sqrt{181}\cdot\sqrt{11}}$$

.

*Задача 4***.** Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки *A(*3,-2*)*, чем от прямой 2*x*+3=0. Сделать чертеж.

Решение. Возьмем произвольную точку *M(x,y)* (рис.2.8) и произвольную точку *P*(-1,5*;y),* лежащую на прямой *x*=-1,5. Так как каждая точка линии находится вдвое дальше от точки *A(3; -2)*, чем от прямой *x*=-1,5, то справедливо уравнение:

$$\left|\overrightarrow{MA}\right| = 2\left|\overrightarrow{MP}\right|.$$

Тогда

$$\sqrt{(3-x)^2 + (-2-y)^2} = 2\sqrt{(-1{,}5-x)^2}\ .$$

Возведя в квадрат обе части уравнения, получим:

$$(3-x)^2 + (-2-y)^2 = 4(1{,}5+x)^2\ .$$

После простейших преобразований получим каноническое уравнение гиперболы:

$$9-6x+x^2+(2+y)^2 = 9+12x+4x^2,\quad 3x^2+18x-(y+2)^2 = 0\,,$$

$$\left(\sqrt{3x}\right)^2 + 2\sqrt{3x}3\sqrt{3} + \left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2 - (y+2)^2 = 0\,,$$

$$\left(\sqrt{3x}+3\sqrt{3}\right)^2 - (y+2)^2 = 27\,,\quad 3(x+3)^2 - (y+2)^2 = 27\,,$$

$$\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{27} = 1\,.$$

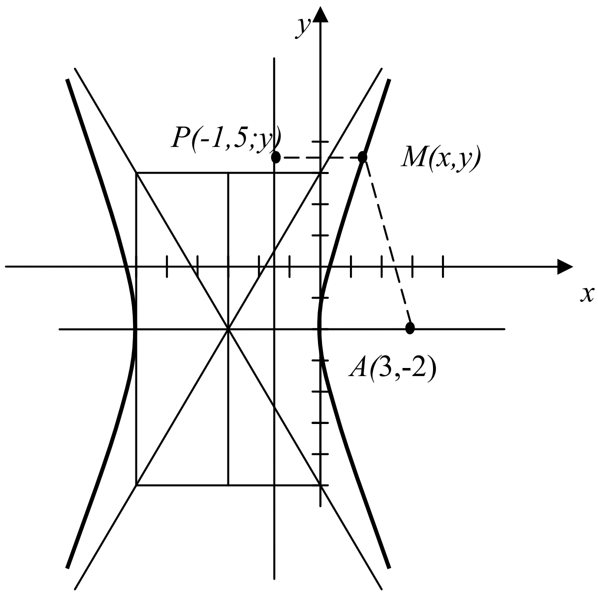


Рисунок 2.8.

2.3. Задания на контрольную работу

Задание 1.. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Требуется:

1) найти векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ и их модули;
2) найти угол между векторами $\overline{AB}$, $\overline{A\tilde{N}}$;
3) найти площадь грани ABC;
4) найти объем пирамиды.

1. $A(2,-3,1)$, $B(6,1,-1)$, $C(4,8,-9)$, $D(2,-1,2)$.
2. $A(5,-1,-4)$, $B(9,3,-6)$, $C(7,10,-14)$, $D(5,1,-3)$.
3. $A(1,-4,0)$, $B(5,0,-2)$, $C(3,7,-10)$, $D(1,-2,1)$.
4. $A(-3,-6,2)$, $B(1,-2,0)$, $C(-1,5,-8)$, $D(-3,-4,3)$.
5. $A(-1,1,-5)$, $B(3,5,-7)$, $C(1,12,-15)$, $D(-1,3,-4)$.
6. $A(-4,2,-1)$, $B(0,6,-3)$, $C(-2,13,-11)$, $D(-4,4,0)$.
7. $A(0,4,3)$, $B(4,8,1)$, $C(2,15,-7)$, $D(0,6,4)$.
8. $A(-2,0,-2)$, $B(2,4,-4)$, $C(0,11,-12)$, $D(-2,2,-1)$.
9. $A(3,3,-3)$, $B(7,7,-5)$, $C(5,14,-13)$, $D(3,5,-2)$.
10. $A(4,-2,5)$, $B(8,2,3)$, $C(6,9,-5)$, $D(4,0,6)$.

Задание 2. Даны координаты вершин треугольника *ABC.* Найти: 1) длины сторон; 2) уравнения сторон *AB* и *BC* и их угловые коэффициенты; 3) угол *B*; 4) уравнение высоты *СД* и ее длину; 5) уравнение медианы *AE* и координаты точки *K* пересечения этой медианы с высотой *СД*; 6) уравнение прямой проходящей через точку *K* параллельно стороне *AB*. Сделать чертеж.

1. *A*(-8, -6), B(4, -12), C(8, 10)
2. *A*(-5, 7), B(7, -2), C(11, 20)
3. *A*(-10, 9), B(2, 0), C(6, 22)
4. *A*(0, 2), B(12, -7), C(16, 15)
5. *A*(-9, 6), B(3, -3), C(7, 19)
6. *A*(1, 0), B(13, -9), C(17, 13)
7. *A*(-4, 8), B(8, 1), C(12, 23)
8. *A*(2, 5), B(14, -4), C(18, 18)
9. *A*(-1, 4), B(11, -5), C(15, 17)
10. *A*(-2, 7), B(10, -2), C(8, 12)

Задание 3. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*. Найти:
1) уравнение грани *ABC*;
2) уравнение высоты *DM*, опущенной из точки *D* на грань *ABC*;
3) длину высоты *ДМ*;
4) уравнение ребра *DC*;
5) угол наклона ребра *DC* к плоскости *ABC.*

1. *A*(-3;-2;-4), *B*(-4;2;-7), *C*(5;0;3), *D*(-1;3;0)
2. *A*(2;-2;1), *B*(-3;0;-5), *C*(0;-2;-1), *D*(-3;4;2)
3. A(5;4;1), *B*(-1;-2;-2), *C*(3;-2;2), *D*(-5;5;4)
4. *A*(3;6;-2), *B*(0;2;-3), *C*(1;-2;0), *D*(-7;6;6)
5. *A*(1;-4;1), *B*(4;4;0), *C*(-1;2;-4), *D*(-9;7;8)
6. *A*(4;6;-1), *B*(7;2;4), *C*(-2;0;-4), *D*(3;1;-4)

7.	$A(0;6;-5)$,	$B(8;2;5)$,	$C(2;6;-3)$,	$D(5;0;-6)$
8.	$A(-2;4;-6)$,	$B(0;-6;1)$,	$C(4;2;1)$,	$D(7;-1;-8)$
9.	$A(-4;-2;-5)$,	$B(1;8;-5)$,	$C(0;4;-4)$,	D(9;-2;-10)
10.	$A(3;4;-1)$,	$B(2;-4;2)$,	$C(5;6;0)$,	$D(11;-3;-12)$

Задание 4. Задачи на составление уравнения линии на плоскости.

1. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки $A(2; 2)$, чем от оси ординат. Сделать чертеж.

2. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A(2; 2)$ и от оси абсцисс. Сделать чертеж.

3. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое ближе к точке $A(1;0)$, чем к точке $B(-2; 0)$. Сделать чертеж.

4. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки $A(4; 0)$, чем от прямой $x=1$. Сделать чертеж.

5. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A(4; 2)$ и от оси ординат. Сделать чертеж.

6. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится втрое дальше от точки $A(9; 0)$, чем от точки $B(1; 0)$. Сделать чертеж.

7. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое ближе к точке $A(0;1)$, чем до прямой $y=4$. Сделать чертеж.

8. Составить уравнение множества точек, сумма расстояний которых от точек $O(0; 0)$ и $B(0; 1)$ равна 1. Сделать чертеж.

9. Составить уравнение множества точек, сумма квадратов расстояний которых до точек $A(1; 0)$ и $B(-1; 0)$ равна 4. Сделать чертеж.

10. Составить уравнение множества точек, разность квадратов расстояний которых до точек $A(2; 0)$ и $B(-2; 0)$ равна 16. Сделать чертеж.

3. Пределы

3.1 Краткие сведения из теории

Основное определение предела функции

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при x стремящимся к a, если для любого малого $\varepsilon>0$ существует такое малое $\delta>0$, что неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ наступает, как только наступает $|x-a|<\delta$.

Обозначается: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Очень удобным для понимания этого определения является определение предела функции «на языке окрестностей»: точка A называется пределом функции $y=f(x)$ в точке a (т.е. $x\to a$), если по любой ε-окрестности $(\bullet)A$ найдется δ-окрестность $(\bullet)a$ такая, что для любого x, принадлежащего δ-окрестности $(\bullet)a$ $(x\neq a)$, соответствующее значение функции $y=f(x)$ попадает в ε-окрестность $(\bullet)A$. Оба эти равноценные определения иллюстрируются на рисунке 3.1.

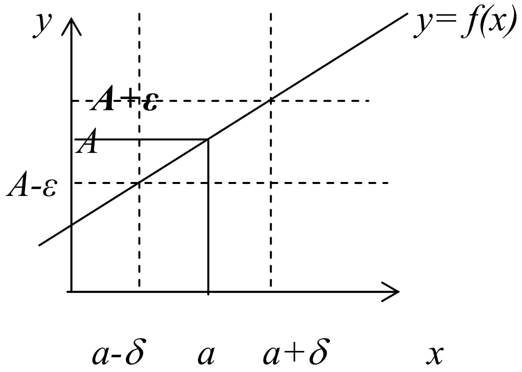
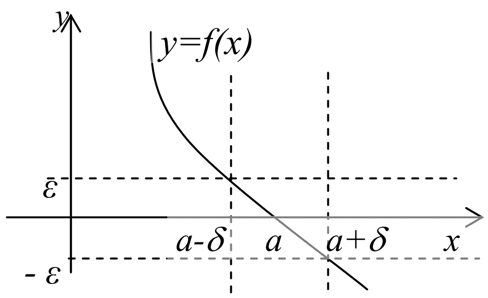
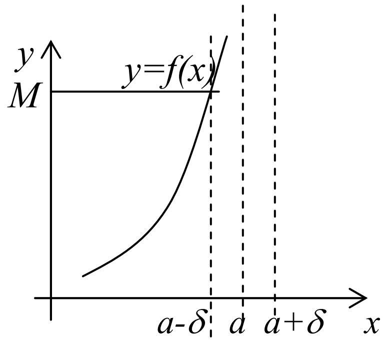


Рисунок 3.1.

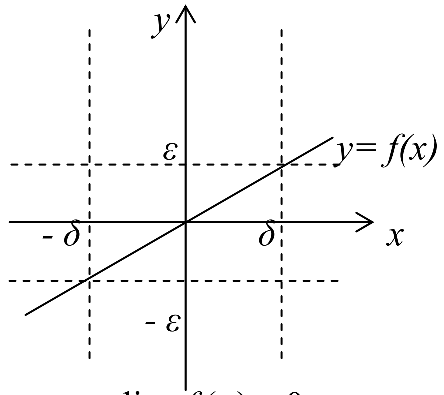
Эти определения охватывают все возможные ситуации, когда A и a конечны, равны 0 или бесконечны (одно их них или оба). Для вариантов A=∞ и a=∞ соответствующие неравенства выглядят так: $|f(x)|>M$; $|x|>N$, где $M>0$, $N>0$ – сколь угодно большие. На рис. 3.2 приводится геометрическая «трактовка» остальных восьми определений пределов функции без самих определений.



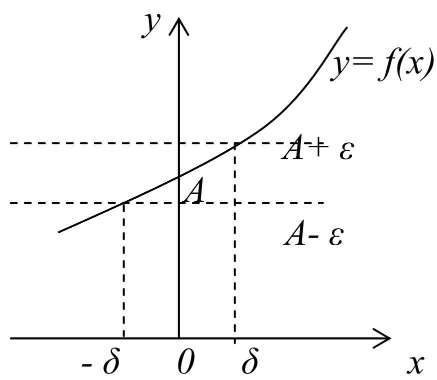
$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$



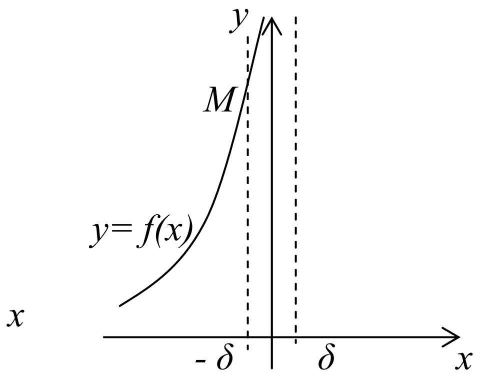
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$



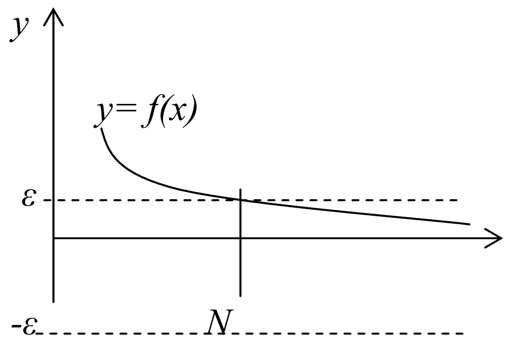
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$



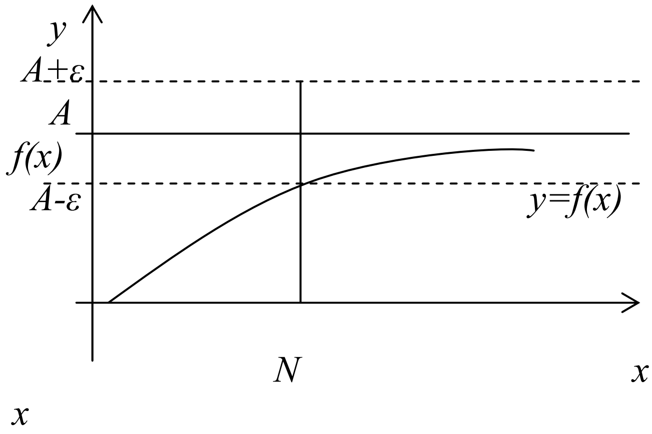
$$\lim_{x\to 0} f(x) = A$$



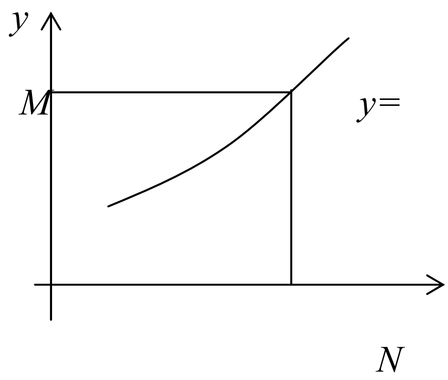
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$$



$$\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$$



$$\lim_{x\to \infty} f(x) = A$$



$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$$

Рисунок 3.2.

Свойства пределов

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=B,$ то:

1. $\lim\limits_{x\to a} C=C,\quad C$ - const
2. $\lim\limits_{x\to a}\left[C\cdot f(x)\right]=C\lim\limits_{x\to a} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$
5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)};\ \lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to a}\varphi\left[f(x)\right]=\varphi\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где φ - непрерывная в $(\bullet)a$

функция. Тогда предел и функцию можно менять местами.

7. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Бесконечно-малые и бесконечно-большие

Если предел величины (функции) равен нулю, то такую величину называют *бесконечно малой.* Обозначают эти величины малыми буквами $\alpha,\beta,\gamma,...\ \lim\alpha=\lim\beta=\lim\gamma=0$.

Если предел величины (функции) равен *бесконечности*, то такую величину называют *бесконечно-большой.*

$\lim f\left(x\right)=\infty,\ f\left(x\right)$ – есть бесконечно-большая.

Свойства бесконечно-малых и бесконечно-больших

Если $C\neq 0$; $\lim\alpha=\lim\beta=\lim\gamma=0$, то

1. $\dfrac{\tilde{N}}{0}=\infty;\quad \dfrac{\tilde{N}}{\infty}=0.$
2. $\alpha+\beta=\gamma;\quad \infty+\infty=\infty;\quad \infty\pm C=\infty.$
3. $\alpha\cdot\beta=\gamma;\quad \alpha\cdot C=\beta$ или $0\cdot\tilde{N}=0;\quad \infty\cdot\infty=\infty,\quad \infty\cdot C=\infty.$
4. $\dfrac{\infty}{0}=\infty\cdot\infty=\infty;\quad \dfrac{0}{\infty}=0\cdot 0=0.$

Существуют следующие виды *неопределенностей:*

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty}.$$

Их неопределенность заключается в том, что пределы этих выражений могут быть или нулем, или любым числом, или бесконечностью. Это зависит от интенсивности стремления каждой из бесконечно-малых к нулю и каждой из бесконечно-большой к бесконечности. Раскрытие (устранение) неопределенностей, а значит и вычисление таких пределов и составляет основное содержание контрольных заданий.

Если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то такие бесконечно-малые называются *эквивалентными.*

Их обозначают: $\alpha \approx \beta$. Важным свойством эквивалентных бесконечно-малых является то, что их можно менять (заменять) друг на друга.

Замечательные пределы

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. *Первый замечательный предел.*

На основе этого предела существуют следующие эквивалентные бесконечно-малые:
При $x \to 0$ $x \approx \sin\ x \approx \mathrm{tg}\ x \approx \arcsin\ x \approx \mathrm{arctg}\ x$,

$1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$ или $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2{,}71... = e$, а также $\lim\limits_{\alpha \to 0} \left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e$. *Второй замечательный предел.*

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_{\grave{a}}(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$. При $x \to 0$, $\log_{\grave{a}}(1+x) \approx \frac{x}{\ln a}$

Если $a = e$, то $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. При $x \to 0$, $\ln(1+x) \approx x$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, при $x \to 0$, $a^x - 1 \approx x \ln a$, $a^x \approx x \ln a + 1$.

Если $a = e$: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. При $\tilde{o} \to 0$, $e^x - 1 \approx x$, $e^x \approx x + 1$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{mx} = 1$, при $x \to 0$, $(1+x)^m - 1 \approx mx$, где m>0 – любое.

На основе 1,3,4,5 пределов можно записать общую формулу эквивалентных преобразований: при $x \to 0$:

$$x \approx \sin x \approx \mathrm{tg}\, x \approx \arcsin x \approx \mathrm{arctg}\, x \approx \ln\left(1+x\right) \approx \ln a \log_a\left(1+x\right) \approx$$

$$\approx e^x - 1 \approx \frac{1}{\ln a}\left(a^x - 1\right) \approx \frac{1}{m}\left[\left(1+x\right)^m - 1\right].$$

На рис. 3.3 приводится геометрическая интерпретация преобразования эквивалентных бесконечно малых на основе перечисленных пределов в окрестностях нуля.

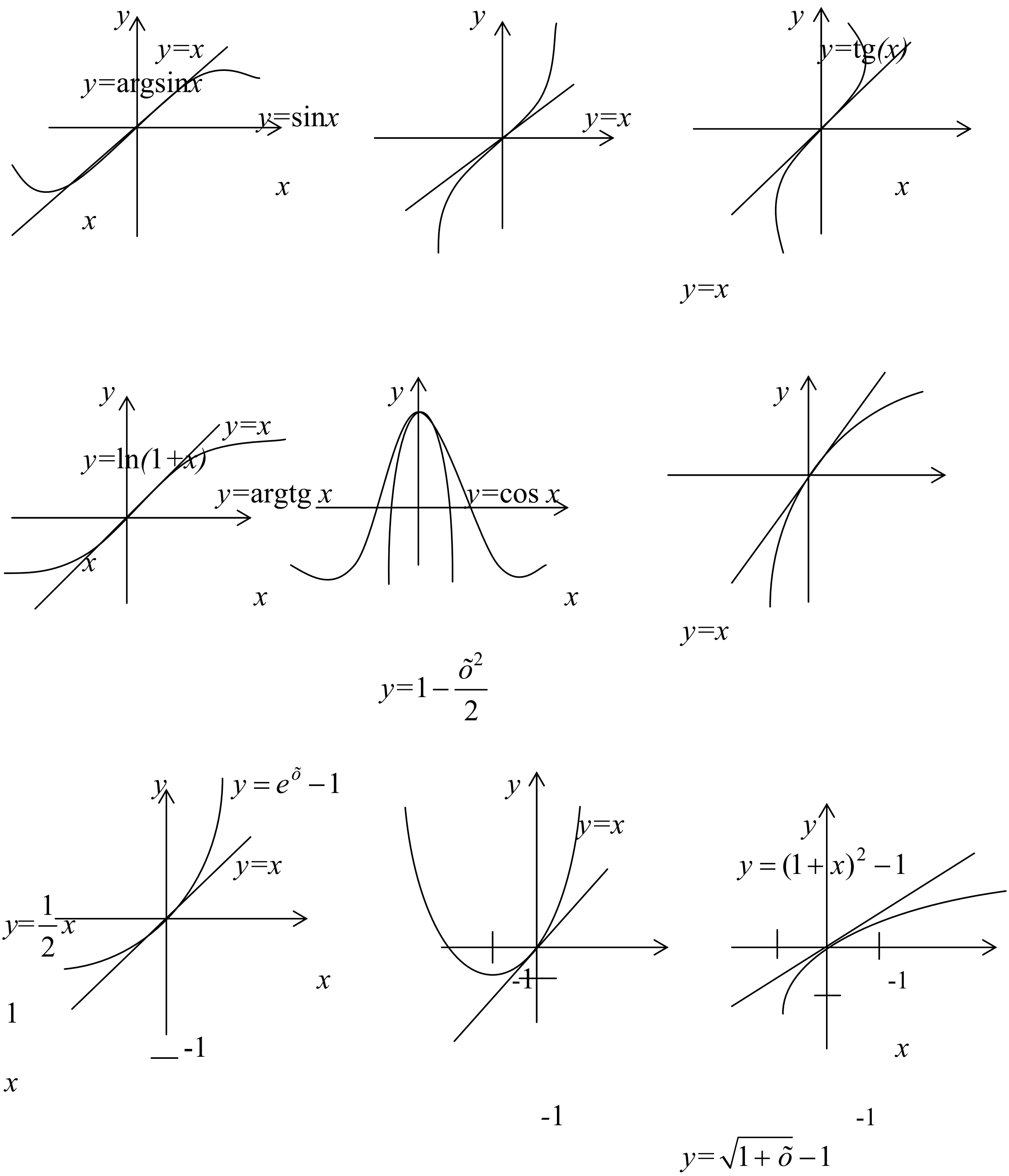


Рисунок 3.3.

Следует подчеркнуть – в окрестностях нуля трансцендентные функции sin$x$, tg$x$, arcsin$x$, arctg$x$, ln$x$, exp$x$, а также *двучлен в степени m* можно заменить на линейную функцию, а cos$x$ на квадратичную функцию.

Если аргумент функции сложный, т.е. в свою очередь является функцией, то рассмотренные ранее эквивалентные замены справедливы, но при условии стремления этого сложного аргумента к нулю, а сама замена должна быть соответствующей.

Так, если $u=u(x)$, то $\sin u \approx u$, при $u \to 0$; $e^u \approx u+1$, при $u \to 0$ и т.д.

Пример: $x \to 0$, $\sin(3x) \approx 3x$, $e^{7x^3} \approx 7x^3+1$, $\cos 5x \approx 1-\frac{(5x)^2}{2}$, $\ln\left(1+\sqrt{4x}\right) \approx \sqrt{4x}$.

3.2. Вычисление типовых пределов

Приводятся типовые пределы с неопределенностями и некоторые способы их вычисления.

Вычисление неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, ***содержащих алгебраические выражения***

Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ преобразованиями переводятся в неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Последние разрешаются единым подходом: необходимо выделить в числителе и знаменателе тот множитель, который дает неопределенность и его сократить. Иногда выделение такого множителя достаточно «головоломное».

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\frac{4}{2}=2$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{2x^2+2x^2-x-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to -1}\frac{3(x+1)(x+\frac{1}{3})}{(x+1)(2x^2-1)}=\frac{-2}{1}=-2$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^3-4x^2+4x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x(x-2)}=\frac{12}{2\cdot 0}=\infty$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3-\sqrt{2x+7}}{x^2+6x-7}=\left|\frac{0}{0}\right|$.

Дающий неопределенность множитель $(x\text{-}1)$ в знаменателе выделить легко, в числителе – труднее. Нужно весь предел умножить и разделить на сопряженный числитель, т.е на $(3+\sqrt{2x+7})$.

$$\lim_{x\to 1}\ \frac{(3-\sqrt{2x+7})(3+\sqrt{2x+7}\ )}{(x-1)(x+7)(3+\sqrt{2x+7}\ )}=\lim_{x\to 1}\ \frac{9-(2x+7)}{(x-1)(x+7)(3+\sqrt{2x+7}\ )}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\ \frac{(-2)(x-1)}{(x-1)(x+7)(3+\sqrt{2x+7}\ )}=-\frac{1}{24}\ .$$

*Пример 5***.** $\lim\limits_{x\to 1}\ \dfrac{(\sqrt{5-x})-(\sqrt{3+x})}{\sqrt{8+x}-3}=\left|\dfrac{0}{0}\right|.$

Нетрудно догадаться, что неопределенность дает множитель (x-1), но выделить его непросто. Нужно всё выражение умножить и разделить и на сопряженный числитель $(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x})$ и на сопряженный знаменатель $(\sqrt{8+\tilde{o}}+3)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{8+x}+3\right)}{\left(\sqrt{8+x}-3\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{8+x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{[(5-x)-(3+x)](\sqrt{8+x}+3)}{(8+x-9)(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(-2)(x-1)(\sqrt{8+x}+3)}{(x-1)(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x})}=\frac{-12}{4}=-3$$

*Пример 6***.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}=\left|\dfrac{0}{0}\right|.$

Обычное выделение множителя x, дающего неопределенность, не приводит к решению, т.к. опять получается неопределенность. Решение кроется в устранении радикалов любым способом, например, самым простым – заменой переменной, с дальнейшим выделением и сокращением множителя, дающего неопределенность.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}=\left|\begin{array}{c}1+x=t^6\\ x\to 0,\ t\to 1\end{array}\right|=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{2}{3}$$

*Пример 7***.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+7}{4x+3x^2-4x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}{x^3\left(\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x}-4\right)}=\dfrac{2}{-4}=-\dfrac{1}{2}.$

*Пример 8***.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+4x-x^4}{3x-2x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4\left(\dfrac{5}{x^4}+\dfrac{4}{x^3}-1\right)}{x^2\left(\dfrac{3}{x}-2\right)}=\dfrac{\infty(-1)}{(-2)}=\infty$.

*Пример 9***.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2+3n-1)^3+(3n^3-4)^2}{\left(\sqrt{4n^2+7}+\sqrt{9n^2-3n+1}\right)^6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[n^2\left(2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)\right]^3+\left[n^3\left(3-\dfrac{4}{n^3}\right)\right]^2}{\left(\sqrt{n^2\left(4+\dfrac{7}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(9-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}\right)^6}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^6\cdot\left(2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^3+n^6\cdot\left(3-\dfrac{4}{n^3}\right)^2}{\left(n\cdot\sqrt{4+\dfrac{7}{n^2}}+n\cdot\sqrt{9-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\right)^6}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^6\left[\left(2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^3+\left(3-\dfrac{4}{n^3}\right)^2\right]}{n^6\left(\sqrt{4+\dfrac{7}{n^2}}+\sqrt{9-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\right)^6}=\frac{17}{5^6}$$

.

Пример 10. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\left(\dfrac{3x^2-1}{x^2}-\dfrac{3x+5}{x}\right)=\left|\infty\left(\dfrac{\infty}{\infty}-\dfrac{\infty}{\infty}\right)\right|$, здесь несколько видов неопределенностей, которые устраняются последовательно, аналогично арифметическим действиям $\left|\ \right|=$

$$=\lim_{x\to\infty}(x-1)\left(\frac{x^2\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2}-\frac{x\left(3+\dfrac{5}{x}\right)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}(x-1)\left(3-\frac{1}{x^2}-3-\frac{5}{x}\right)=$$

$$=\left|\infty\cdot 0\right|=\lim_{x\to\infty}(x-1)\cdot\frac{(-1-5x)}{x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(-5-\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}=-5.$$

*Пример 11***.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{(n^3+1)(n^3+3)}-\sqrt{n(n^5+2)}\right]=\left|\infty-\infty\right|$, для перевода этой неопределенности в $\dfrac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить и умножить на сопряженное выражение $\left|\ \right|=$

$$
=\lim_{n\leftarrow\infty}\left(\left(\sqrt{(n^3+1)(n^3+3)}-\sqrt{n(n^5+2)}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{(n^3+1)(n^3+3)}+\sqrt{n(n^5+2)}\right)}{\left(\sqrt{(n^3+1)(n^3+3)}+\sqrt{n(n^5+2)}\right)}\right)=
$$

$$
=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+1)(n^3+3)-n(n^5+2)}{\sqrt{(n^3+1)(n^3+3)}+\sqrt{n(n^5+2)}}=
$$

$$
=\lim_{n\to\infty}\frac{n^6+4n^3+3-n^6-2n}{\left(\sqrt{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}+\sqrt{n^6\left(1+\frac{2}{n^5}\right)}\right)}=
$$

$$
=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(4-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{3}{n^3}\right)}+\sqrt{1+\frac{2}{n^5}}\right)}=\frac{4}{2}=2.
$$

*Пример 12***.** $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-3}\right)}{\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n-3}\right)}=\left|\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}\right|$, для устранения неопределенности вида $(\infty-\infty)$ в числителе нужно все выражение умножить и разделить на неполный квадрат суммы числителя, а в знаменателе - нужно все выражение умножить и разделить на сопряженный знаменатель. $\Bigg|\; =\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-3}\right)}{\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n-3}\right)}\times$

$$
\times\frac{\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{(n+2)(n-3)}+\sqrt[3]{(n-3)^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{(n+2)(n-3)^2}+\sqrt[3]{(n-3)^2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{n+7}+\sqrt{n-3}\right)}{\left(\sqrt{n+7}+\sqrt{n-3}\right)}=
$$

$$
=\lim_{n\to\infty}\frac{\left((n+2)-(n-3)\right)\cdot\left(\sqrt{n+7}+\sqrt{n-3}\right)}{\left((n+7)-(n-3)\right)\cdot\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{(n+2)(n+3)}+\sqrt[3]{(n-3)^2}\right)}=
$$

$$
=\lim_{n\to\infty}\frac{5\left(\sqrt{n\left(1+\frac{7}{n}\right)}+\sqrt{n\left(1-\frac{3}{n}\right)}\right)}{10\left(\sqrt[3]{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}+\sqrt[3]{n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)^2}\right)}=
$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{7}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{n}}\right)}{2\sqrt[3]{n^2}\cdot\left(\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1-\dfrac{3}{n}\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\dfrac{7}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{n}}\right)}{2\sqrt[6]{n}\cdot\left(\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1-\dfrac{3}{n}\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^2}\right)}=\frac{2}{2\cdot\infty\cdot 3}=0\,.$$

Вычисление неопределенности 1$^{\infty}$

В конечном счете, эта неопределенность сводится ко 2-му замечательному пределу:

$$\lim_{u\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}=å \text{ или } \lim_{v\to 0}(1+V)^{\frac{1}{V}}=e,$$

где $u=u(x)$, $V=V(x)$ – любые непрерывные функции от x.

Иногда полезно воспользоваться 7-м свойством пределов:

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left(\lim_{x\to\infty}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}g(x)}.$$

Вот типичный пример, когда $f(x)$ и $g(x)$ – алгебраические выражения.

Пример 13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+6}\right)^{3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+6-7}{5x+6}\right)^{3x+1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-7)}{5x+6}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{5x+6}{(-7)}}\right)^{3x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{5x+6}{(-7)}}\right)^{\left(\frac{-7}{5x+6}\right)\left(\frac{5x+6}{-7}\right)(3x+1)}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{5x+6}{(-7)}}\right)^{\left(\frac{5x+6}{(-7)}\right)}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(-7)(3x+1)}{5x+6}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(-7)x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(5+\frac{6}{x}\right)}}=e^{-\frac{21}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{e^{21}}}.$$

Вычисление неопределенностей с помощью замечательных пределов.

Общий подход: неопределенность $\frac{0}{0}$, выраженная известными трансцендентными функциями, с помощью 1, 3, 4, 5 замечательных пределов преобразуется в неопределенность $\frac{0}{0}$, выраженную алгебраическими функциями, которая разрешается сокращением в числителе и знаменателе множителя, дающего эту неопределенность.

*Пример 14***.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{5}\right)}{(\arcsin 2x)^3}=\left|\begin{array}{ll}\sin 3x\approx 3x, & \arcsin 2x\approx 2x\\ \mathrm{tg}\frac{x}{5}\approx\frac{x}{5}, & x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x\left(\frac{x}{5}\right)^2}{(2x)^3}=\frac{3}{200}.$$

*Пример 15***.** $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{\mathrm{tg}^2(2x)}=\left|\frac{0}{0}\right|$. Эквивалентные замены тригонометрических функций на алгебраические производить нельзя, т. к сам аргумент x не является бесконечно малой. Нужно перейти к новой переменной, которая была бы бесконечно малой и далее действовать по известному плану:

$$t=x-\pi,\ x\to\pi,\ t\to 0\ \Big|=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 3(t+\pi)-\cos(t+\pi)}{\mathrm{tg}^2[2(t+\pi)]}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 3t\cos 3\pi-\sin 3t\sin 3\pi-\cos t\cos\pi+\sin t\sin\pi}{\mathrm{tg}^2(2t+2\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\cos 3t}{\mathrm{tg}^2(2t)}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\cos 3t\approx 1-\frac{(3t)^2}{2};\cos t\approx 1-\frac{t^2}{2}\\ \mathrm{tg}\,2t\approx 2t\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{t^2}{2}-1+\frac{(3t)^2}{2}}{(2t)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{8t^2}{8t^2}=1.$$

*Пример 16***.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{e^{2x}-1}=\left|\begin{array}{c}\ln(1+4x)\approx 4x\\ e^{2x}-1\approx 2x\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{2x}=2$.

*Пример 17***.**

$$\lim_{x\to 10}\frac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 10}\frac{\lg\frac{x}{10}}{\sqrt{x-9}-1}=\lim_{x\to 10}\frac{\lg e\cdot\ln\frac{x}{10}}{\sqrt{x-9}-1}=$$

$$= \left| \begin{matrix} t = x-10,\ x\to 10 \\ x = t+10,\ t\to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{\lg e \ln\left(\frac{t+10}{10}\right)}{\sqrt{t+10-9}-1} = \lg e \lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{10}\right)}{\sqrt{1+t}-1} =$$

$$= \left| \ln\left(1+\frac{t}{10}\right) \sim \frac{t}{10}, \sqrt{1+t}-1 \sim \frac{t}{2} \right| = \lg e \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{10}}{\frac{t}{2}} = \frac{\lg e}{5}.$$

*Пример 18***.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-\sqrt{2x-3})}{\sin^2\frac{\pi x}{2}} = \left|\dfrac{0}{0}\right|$. Непосредственный переход к новой переменной $t = x - 2$, с последующей заменой эквивалентных бесконечно малых приведет опять к неопределенности $\dfrac{0}{0}$. Нужно предварительно «разрушить» скрытый ноль в числителе с помощью сопряженного выражения. $\left| \quad \right| =$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\ln\left[(x-\sqrt{2x-3})\left(\frac{x+\sqrt{2x-3}}{x+\sqrt{2x-3}}\right)\right]}{\sin^2\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 2}\frac{\ln\frac{x^2-2x+3}{x+\sqrt{2x-3}}}{\sin^2\frac{\pi x}{2}} = \left| \begin{matrix} t = x-2,\ x\to 2 \\ x = t+2,\ t\to 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{t^2+4t+4-2t-4+3}{t+2+\sqrt{2t+4-3}}}{\sin^2\left[\frac{\pi}{2}(t+2)\right]} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{t^2+2t+3}{t+2+\sqrt{1+2t}}}{\sin^2\left[\frac{\pi t}{2}+\pi\right]} = \left| \sqrt{1+2t} \sim \frac{1}{2}2t+1 \right| =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{t^2+2t+3}{t+2+t+1}}{\left(-\sin\frac{\pi t}{2}\right)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{t^2+2t+3}{2t+3}}{\sin^2\frac{\pi t}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t^2}{2t+3}\right)}{\sin^2\frac{\pi t}{2}} =$$

$$= \left| \ln\left(1+\frac{t^2}{2t+3}\right) \sim \frac{t^2}{2t+3},\ \sin\frac{\pi t}{2} \sim \frac{\pi t}{2} \right| = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{(2t+3)\left(\frac{\pi t}{2}\right)^2} = \frac{4}{3\pi^2}.$$

*Пример 19***.**

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2^x+7}-\sqrt{2^{x+1}+5}}{x^2-1}=\left|\frac{0}{0},\ \begin{matrix}t=x-1,\ x=t+1\\ x\to1,\ t\to0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{2^{t+1}+7}-\sqrt{2^{t+2}+5}}{t^2+2t+1-1}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(\sqrt{2\cdot2^t+7}-\sqrt{4\cdot2^t+5})(\sqrt{2\cdot2^t+7}+\sqrt{4\cdot2^t+5})}{t(t+2)(\sqrt{2\cdot2^t+7}+\sqrt{4\cdot2^t+5})}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2\cdot2^t+7-4\cdot2^t-5}{t(t+2)(\sqrt{2\cdot2^t+7}+\sqrt{4\cdot2^t+5})}=\lim_{t\to0}\frac{-2\cdot2^t+2}{t(t+2)(\sqrt{2\cdot2^t+7}+\sqrt{4\cdot2^t+5})}=$$

$$=\left|2^t\approx t\cdot\ln2+1\right|=\lim_{t\to0}\frac{(-2)(t\ln2+1)+2}{t(t+2)(\sqrt{2\cdot2^t+7}+\sqrt{4\cdot2^t+5})}=\frac{-\ln2}{6}.$$

*Пример 20***.**

$$\lim_{x\to0}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln(1+\mathrm{tg}^2 3x)}}=\left|1^{\infty},\ \begin{matrix}\sin\frac{x}{2}\approx\frac{x}{2}\\ \mathrm{tg}\,3x\approx3x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{\ln(1+9x^2)}}=$$

$$=\left|\ln(1+9x^2)\approx9x^2\right|=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{4}{x^2}\right)}\right)^{\left(-\frac{4}{x^2}\right)\left(-\frac{x^2}{4}\right)\cdot\frac{1}{9x^2}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{4}{x^2}\right)}\right)^{\left(-\frac{4}{x^2}\right)}\right]^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{-x^2}{4\cdot9x^2}\right)}=e^{-\frac{1}{36}}=\frac{1}{\sqrt[36]{e}}.$$

3.3. Задания на контрольную работу

1.

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+2}{2x^2-7x+6}$
3. $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x^2-8x-9}{\sqrt{2x+7}-5}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{25x^2+2x+1}-5x\right)$
5. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{3x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}{\cos 2x\cdot\sin^3(2x)}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$
9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)^m-1}{\sin x}$

2.

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^2+3x-1}{2x^3+2x^2+2x+2}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+12x+9}{5x^2+6x+9}$
3. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-5x+4}{3-\sqrt{2x+1}}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-1}\right)^{4x-5}$
7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x\cdot\sin^2\left(\dfrac{x}{4}\right)}{\mathrm{tg}\left(2x^2\right)}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{6x^2}$
9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[m]{1+bx}}{\sin(3x)}$

3.

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2-x-3}{x^3-x^2+2x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+7)\left(5x^2+3x+1\right)}{4x^3+5x+6}$
3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-\sqrt{2x+7}}{x^2+6x-7}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{81x^2+7x+81}-9x\right)$
5. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x-2}{9x+1}\right)^{2x+5}$
7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cdot\mathrm{tg}\,3x}{\sin 6x\cdot\sin 5x}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)^3}{x\,\mathrm{tg}^2(4x)}$
9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{\ln\left(1+2x^3\right)}$

4.

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+4x+3}{x^3+3x^2+4x+12}$

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\left(x^2+5x+1\right)\left(3x+4\right)}{3x^3+4x^2+2x+1}$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{\sqrt{5-2x}-3}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\left[\sqrt{\left(x+2\right)\left(x+1\right)}-\sqrt{\left(x-1\right)\left(x+3\right)}\right]$

5. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-7}{x+2}\right)^{4x+3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x\cdot tg\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{x^2\sin x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{tgx}$

5.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{2x^3+2x^2-x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^4+2x^3-1}{\left(3x^2+1\right)\left(3x^2+2\right)}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{\sqrt{2x+19}-5}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(6x-\sqrt{36x^2+7x+49}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+1}\right)^{5x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot tg\left(\dfrac{x}{3}\right)}{\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{x}{4}\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln\left(1+5\,\mathrm{tg}\,x\right)}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-x^n}{1-x}$

6.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-2}{4x^2-11x+7}$

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{\left(3x^2-7\right)\left(9x+1\right)}$

3. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{16+3x}-2}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}x^2\left[\sqrt{x\left(x^4-1\right)}-\sqrt{x^5-8}\right]$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{7x+3}{7x-5}\right)^{4x+5}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin\left(\dfrac{x}{4}\right)}{\mathrm{tg}^2\left(3x^2\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{(x-1)^2}-\cos\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)^2}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}-1}{\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{x}\right)}$

7.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{4x^2+7x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\left(6x^3-9\right)\left(3x+2\right)}{17x^4+19x^3-1}$

3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{\sqrt{1-5x}-4}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-8x}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+3x+8}-2}{x^2+x}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x+9}{4x+1}\right)^{9x-5}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x\sin^2\left(2x\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sin x\right)}{\operatorname{tg}\left(2x\right)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+2x\right)^4-1}{8x}$

8.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{3x^3-6x^2+x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\left(3x^2+4x-1\right)\left(x^2-1\right)}{9x^4+3x^2-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{13-2x}-3}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(5x-\sqrt{25x^2+8x+16}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{6x-2}{x+5}\right)^{4x+3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{5}\right)}{\arcsin^3\left(2x\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}-1}{3\operatorname{arctg} x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

9.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+2x^2-x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\left(2x^2-1\right)\left(2x^2+1\right)}{8x^4-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-20}{\sqrt{3x+4}-4}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt[3]{\left(x+2\right)^2}-\sqrt[3]{\left(x-3\right)^2}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{8x+3}{8x+2}\right)^{5x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x\cdot \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2\cdot \sin 2x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{\arcsin(x)}-1\right)^2}{x\sin x}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

10.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+2x-15}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2x^2-1\right)\left(2x^2+1\right)}{8x^4-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-12}{\sqrt{7x-5}-3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-3}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{8x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{3}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{4}\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-e^{2x}\right)^3}{\sin^2 x\cdot \operatorname{tg} 2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sin 4x}$

4. Непрерывность функций

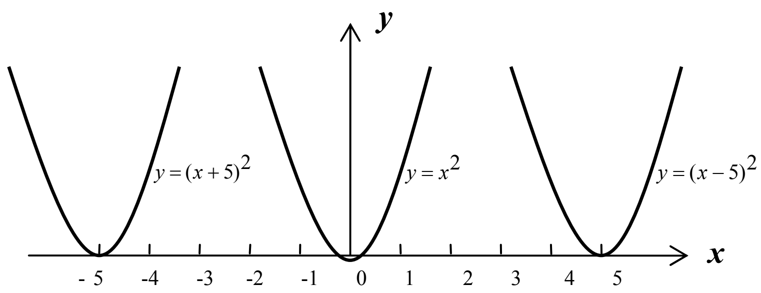
4.1. Краткие сведения из теории

В контрольной работе на эту тему студенту предстоит построить график непрерывной функции путем преобразований графика элементарной упрощенной функции, хорошо известной со школы. В продолжение темы предстоит также исследовать функции на непрерывность и разрыв.

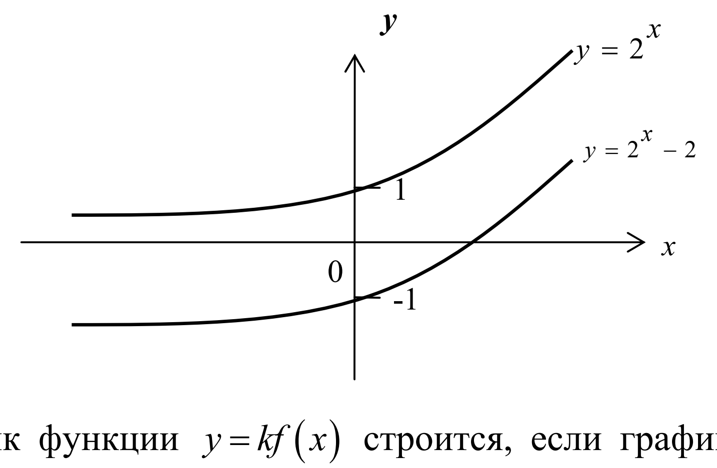
4.1.1. Преобразование графиков

Графики функций можно приблизительно построить, используя график элементарной упрощенной функции, при этом нужно применять правила преобразования графиков, приведенные ниже.

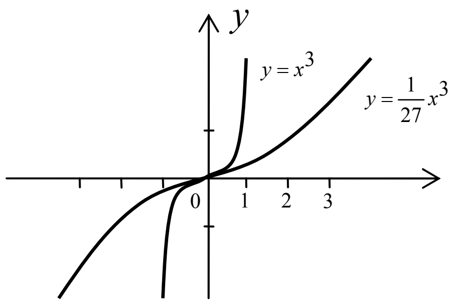
- График функции **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** строится, если график функции $y = f(x)$ переместить по **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.** вправо на a, если $a < 0$ и влево на a, если $a > 0$
-

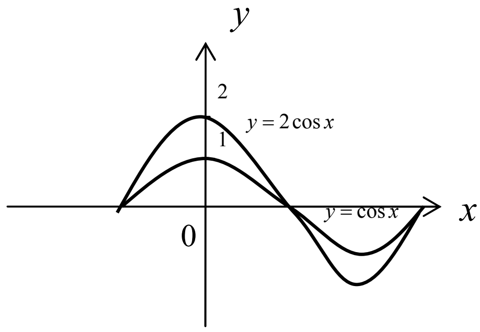


- График функции $y = f(x) + b$ строится, перемещением графика функции $y = f(x)$ по Oy вверх на b при $b > 0$ и вниз на b, если $b < 0$.

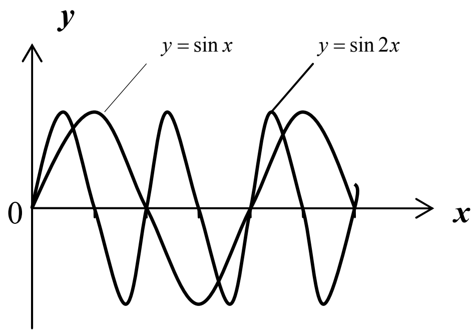


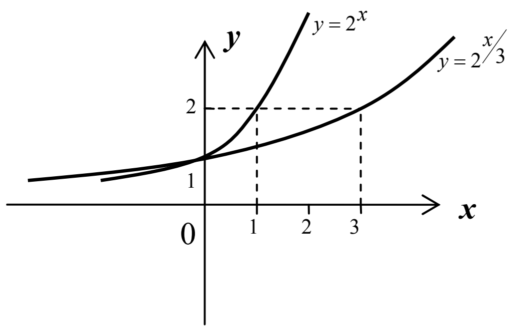
- График функции $y = kf\left(x\right)$ строится, если график функции $y = f(x)$ сжать по Oy при $k < 1$ и растянуть при $k > 1$.



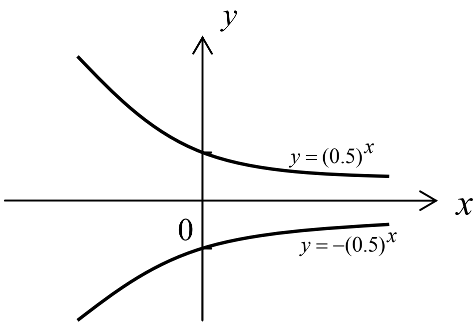


- График функции $y = f(px)$ строится, если график функции $y = f(x)$ сжать по Ox (по горизонтали) при $p > 1$ и растянуть при $p < 1$

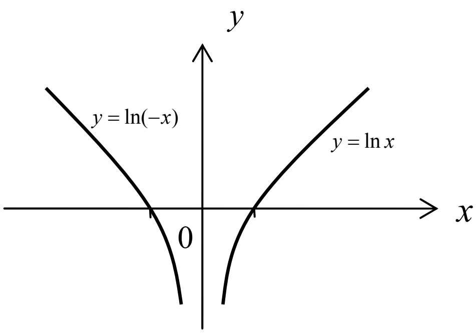


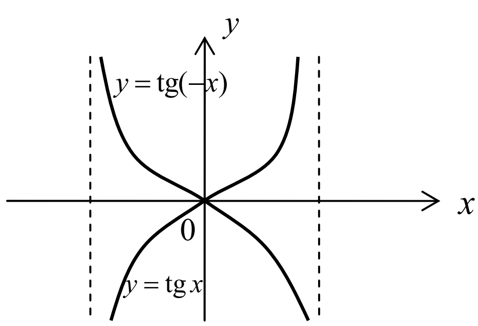


- График функции $y = -f(x)$ есть зеркальное отражение относительно оси Ox графика функции $y = f(x)$.

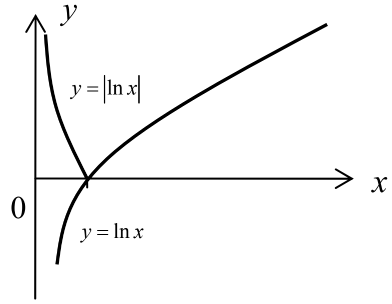


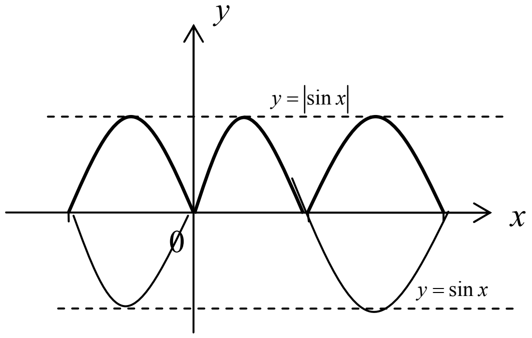
- График функции $y = f(-x)$ есть зеркальное отражение относительно оси Oy графика функции $y = f(x)$.



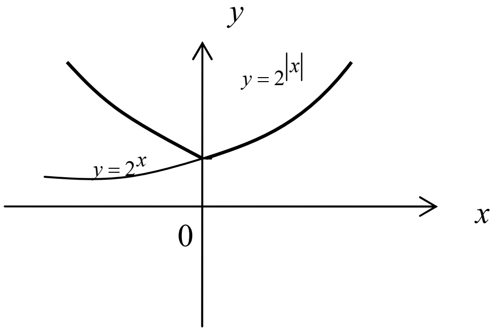


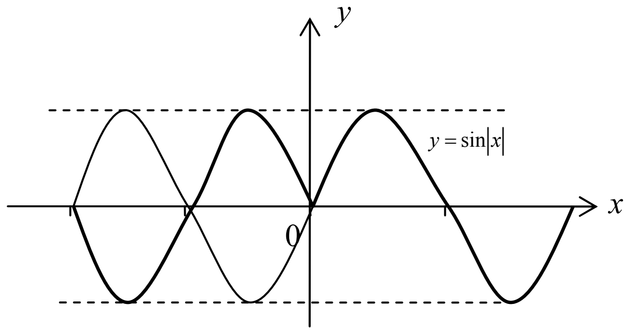
- График функции $y = |f(x)|$ есть повторение графика функции $y = f(x)$ в той части, для которой $f(x) > 0$. Остальная часть графика, для которой $f(x)<0$, зеркально отражается относительно оси Ox





- График функции $y=f(|x|)$ есть повторение графика функции $y=f(x)$ в той части, для которой $x>0$. Остальная часть графика функции $y=f(x)$, для которой $x<0$, устраняется. Вместо нее строится зеркальное отражение относительно оси Oy той части графика функции $y=f(x)$, для которой $x>0$





Замечание. При одновременном преобразовании графика по горизонтали (смещение и сжатие (растяжение)) можно допустить ошибку в смещении графика.

Например, график функции $y=\sin(3x-4)$ ошибочным образом можно построить так: сначала сжать график функции $y=\sin x$ в 3 раза по горизонтали и получить график функции $y=\sin 3x$, а затем сдвинуть его по горизонтали на 4 единицы влево.

Правильное построение будет такое: сжать график функции $y=\sin x$ по горизонтали в 3 раза, а затем сместить его по горизонтали влево на $\frac{4}{3}$ единицы, а не на 4 единицы, т.к.:

$$y=\sin(3x-4)=\sin\left[3\left(x-\frac{4}{3}\right)\right]$$

Смещение графика и, вообще, любое преобразование графика нужно производить при «очищенном» аргументе x.

В контрольной работе предстоит построить график функции $y=kf(px+a)+b$. Для этого необходимо построить график функции $y=f(x)$ Последовательными преобразованиями согласно изложенным правилам довести до искомого:

- График функции $y=f(x)$ сжать по Ox в p раз и получить график функции $y=f(xp)$;
- График функции $y=f(xp)$ сместить по Ox на величину $\frac{a}{p}$ в нужную сторону и получить график функции $y=f\left[p\left(x+\frac{a}{p}\right)\right]=f(px+a)$;
- График функции $y=f(px+a)$ растянуть по Oy в k раз и получить график функции $y=kf(px+a)$;
- График функции $y=kf(px+a)$ сместить по Oy на величину b в нужную сторону и получить искомый график функции $y=kf(px+a)+b$;

Типовой пример построения графика функции путем преобразования графика упрощенной функции в данном пособии не рассматривается т.к. автор считает, что после приведенных объяснений студент сможет самостоятельно выполнить данное задание.

4.1.2. Исследование функций на непрерывность в точке

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если она определена в окрестностях точки x_0 и в самой точке и если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x=x-x_0$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta y=y-y_0=f(x+\Delta x)-f(x_0)$, или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Необходимые и достаточные условия непрерывности функции в точке.

1.Функции должна быть определена в окрестностях точки и в самой точке.

2.Функция должна иметь в точке равные односторонние пределы

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

3. Эти односторонние пределы должны быть равны значению функции в точке

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется *разрывной* в точке, если она определена в окрестностях точки, но в самой точке не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности.

Разрыв функции $f(x)$ в точке x_0 называется *конечным или I рода*, если существуют односторонние пределы.

Если эти пределы различны, то разность её односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ называется *скачком* функции.

Если в точке разрыва x_0 хотя бы один из односторонних пределов не существует, то это *разрыв II рода.*

4.2. Решение типовых примеров

Типовые примеры включают исследования функций на непрерывность в точке в соответствии с необходимыми и достаточными условиями. В случае нахождения точек разрыва, их нужно классифицировать.

Пример 1. Задана функция $y = f(x)$. Найти точки разрыва функции и определить род разрыва. Сделать чертеж.

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 + 3, & x \le 0; \\ x - 1, & 0 < x < 3; \\ \ln(x-2), & x \ge 3. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ кусочно-составная. Внутри заданных интервалов каждая из составляющих функций непрерывна. Возможный разрыв функции $f(x)$ может быть только в граничных точках интервалов, т.е. в точках $x = 0, x = 3$. Поэтому исследования на непрерывность в точке на основе трех достаточных условий непрерывности нужно провести только в этих точках.

$x=0$ 1. Значение функции в точке: $f\left(0\right)=-\left(x+2\right)^2+3\Big|_0=-1$.

2. Односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 0-0} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0-0}\left[-\left(x+2\right)^2+3\right]=-(0-0+2)^2+3=-4+3=-1.$$

$$\lim_{x\to 0+0} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0+0}\left(x-1\right)=0+0-1=-1.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0-0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0+0} f\left(x\right)=f\left(0\right)=-1$.

В точке $x=0$ все три условия непрерывности соблюдены, значит, в этой точке функция непрерывна.

$x=3$ 1. $f(3)=\ln(x-2)\Big|_{x=3}=\ln(3-2)=\ln 1=0$.

2. $\lim\limits_{x\to 3-0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 3-0}\left(x-1\right)=3-0-1=2$.

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}\ln(x-2)=\ln(3+0-2)=\ln 1=0.$$

3. $\lim\limits_{x\to 3+0} f\left(x\right)\neq\lim\limits_{x\to 3-0} f\left(x\right)\neq f\left(3\right)$.

Функция в точке $x=3$ определена $f\left(3\right)=0$, но имеет разные односторонние пределы. Значит, в точке $x=3$ имеет место разрыв I рода или скачок функции.

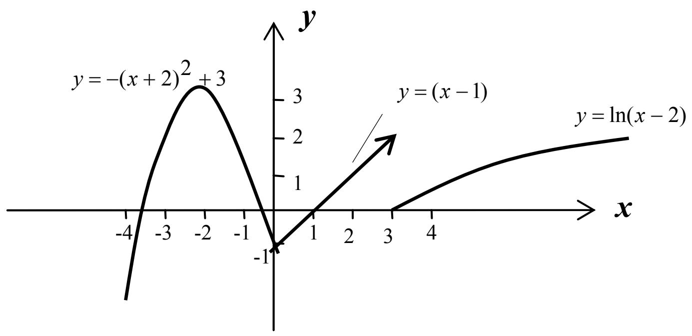
Для построения чертежа функции $f\left(x\right)$ воспользуемся правилами преобразования графиков простейших функций.

Для построения графика функции на интервале $\left]-\infty;0\right]$ необходимо график функции $f\left(x\right)=x^2$ сместить влево на 2 единицы, получим график функции $f\left(x\right)=\left(x+2\right)^2$, затем этот график зеркально отобразить относительно оси Ox, получим график функции $y=-\left(x+2\right)^2$ и, наконец, последний график сместить вверх на 3 единицы, получим график функции $f\left(x\right)=-\left(x+2\right)^2+3$.

На интервале $\left]0;3\right[$ необходимо график функции $f\left(x\right)=x$ сместить вниз на 1 единицу, получим график функции $f\left(x\right)=x-1$.

На интервале $\left[3;\infty\right[$ необходимо график функции $f\left(x\right)=\ln x$ сместить вправо на 2 единицы, получим график функции $f\left(x\right)=\ln\left(x-2\right)$.

Результирующий график функции имеет вид:



Пример 2. Найти точки разрыва функции *f(x)*, определить их род, построить приблизительный график функции.

$$f\left(x\right)=\operatorname{arctg}\frac{x-2}{x^2+x-12}.$$

Решение. Функция $\varphi(u)=\operatorname{arctg}u$ – непрерывная и возрастающая на всей числовой оси, если сложный аргумент $u=u\left(x\right)$ непрерывен и возрастает на числовой оси. В нашем случае сложный аргумент – функция $u\left(x\right)=\dfrac{x-2}{x^2+x-12}=\dfrac{x-2}{\left(x-3\right)\left(x+4\right)}$ имеет разрыв в точках $x=-4,\ x=3$, т.к. в этих точках $u\left(x\right)$ не существует:

$$u\left(-4\right)=\left.\frac{x-2}{\left(x-3\right)\left(x+4\right)}\right|_{x=-4}=\frac{-4-2}{\left(-4-3\right)\left(-4+4\right)}=\frac{-6}{(-7)\cdot 0}=\infty;$$

$$u\left(3\right)=\left.\frac{x-2}{\left(x-3\right)\left(x+4\right)}\right|_{x=3}=\frac{3-2}{\left(3-3\right)\left(3+4\right)}=\frac{1}{0\cdot 7}=\infty.$$

В остальных точках числовой оси функция $u\left(x\right)$ непрерывна, т.к. многочлены, входящие в функцию непрерывны на всей числовой оси

Искомая функция $f\left(x\right)\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{x^2+x-12}$ то же будет непрерывна на всей числовой оси кроме точек $x=-4,\ x=3$.

Проведем исследования непрерывности $f(x)$ в точках $x=-4,\ x=3$.

$x=-4$

1. $f(-4)=\operatorname{arctg}\left.\dfrac{x-2}{\left(x-3\right)\left(x+4\right)}\right|_{x=-4}=\operatorname{arctg}\dfrac{-4-2}{(-4-3)\left(-4+4\right)}=\operatorname{arctg}\dfrac{-6}{\left(-7\right)\cdot 0}=$

$=\operatorname{arctg}(+\infty).$

Функция $f(x)$ в точке $x=-4$ не определена, т.к. не определен $\operatorname{arctg}(+\infty)$ по той простой причине, что сам аргумент для arctg не определен (аргумент $(+\infty)$ для функции arctg не есть число).

2. $$\lim_{x\to-4-\Delta} f(x)=\lim_{x\to-4-\Delta}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{x^2+x-12}=\lim_{\Delta\to0}\operatorname{arctg}\frac{-4-\Delta-2}{(-4-\Delta)^2+(-4-\Delta)-12}=$$

$$=\lim_{\Delta\to0}\operatorname{arctg}\frac{-6-\Delta}{16+8\Delta+\Delta^2-4-\Delta-12}=\lim_{\Delta\to0}\operatorname{arctg}\frac{-6-\Delta}{7\Delta}=\lim\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-4+\Delta} f(x)=\lim_{x\to-4+\Delta}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{x^2+x-12}=\lim_{\Delta\to0}\operatorname{arctg}\frac{-4+\Delta-2}{(-4+\Delta)^2+(-4+\Delta)-12}=$$

$$=\lim_{\Delta\to0}\operatorname{arctg}\frac{-6+\Delta}{16-8\Delta+\Delta^2-4+\Delta-12}=\lim_{\Delta\to0}\operatorname{arctg}\frac{-6+\Delta}{-7\cdot\Delta}=\lim\operatorname{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}.$$

Замечание. Здесь символ Δ обозначает бесконечно-малую величину, при этом бесконечно-малой высшего порядка Δ^2 пренебрегают.

3. $\lim\limits_{x\to-4-\Delta} f(x)\neq\lim\limits_{x\to-4+\Delta} f(x)$.

Односторонние пределы функци $f(x)$ в точке $x=-4$ существуют, т.к. существуют пределы:

$$\lim\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2},\ \lim\operatorname{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}.$$

Эти пределы разные, значит, в точке $x=-4$ функция $f(x)$ имеет разрыв I первого рода в виде скачка.

$x=3$.

1. $$f(3)=\operatorname{arctg}\frac{x-2}{(x-3)(x+4)}\bigg|_{x=3}=\operatorname{arctg}\frac{3-2}{(3-3)(3+4)}=\operatorname{arctg}\frac{1}{0\cdot7}\operatorname{arctg}(\infty).$$

Функция $f(x)$ в точке $x=3$ не определена.

2. $$\lim_{x\to3-\Delta} f(x)=\lim_{x\to3-\Delta}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{x^2+x-12}=\lim_{\Delta\to0}\operatorname{arctg}\frac{3-\Delta-2}{(3-\Delta)^2+(3-\Delta)-12}=$$

$$=\lim_{\Delta\to0}\operatorname{arctg}\frac{1-\Delta}{9-6\Delta+\Delta^2+3-\Delta-12}=\lim_{\Delta\to0}\operatorname{arctg}\frac{1}{(-7)\cdot\Delta}=\lim\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x\to3+\Delta} f(x)=\lim_{x\to3+\Delta}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{x^2+x-12}=\lim_{\Delta\to0}\operatorname{arctg}\frac{3+\Delta-2}{(3+\Delta)^2+(3+\Delta)-12}=$$

$$=\lim_{\Delta\to0}\operatorname{arctg}\frac{1}{9+6\cdot\Delta+\Delta^2+3+\Delta-12}=\lim_{\Delta\to0}\operatorname{arctg}\frac{1}{7\cdot\Delta}=\lim\operatorname{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}.$$

3. $\lim\limits_{x\to3-\Delta} f(x)\neq f(x)$.

В точке $x=3$ функция $f(x)$ не определена, имеет разные односторонние пределы, т.е. в этой точке имеет место разрыв I рода в виде скачка.

Для построения графика функции $f(x)$ определяем её поведение в бесконечно удаленных точках $x=\pm\infty$, для чего нужно определить пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\frac{x-2}{x^2+x-12} = \operatorname{arctg}\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x^2+x-12} =$$

$$= \operatorname{arctg}\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(x+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}\right)} = \operatorname{arctg}\frac{1-\frac{2}{-\infty}}{\left(-\infty+\frac{1}{-\infty}-\frac{12}{\infty^2}\right)} = \operatorname{arctg}\frac{1+0}{\left(-\infty-0-12\cdot 0^2\right)} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{1}{-\infty} = \operatorname{arctg}(-0) = -0.$$

Функция $f(x)$ стремится к нулю, оставаясь меньше нуля.

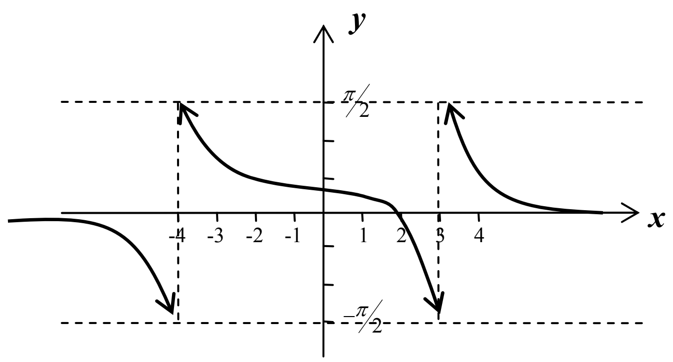
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{x-2}{x^2+x-12} = \operatorname{arctg}\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^2+x-12} =$$

$$= \operatorname{arctg}\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2}\right)} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty^2}}{\left(1+\frac{1}{\infty}-\frac{12}{\infty^2}\right)} = \operatorname{arctg}\frac{0}{1} = \operatorname{arctg}(0) = 0.$$

Функция стремится к нулю сверху, оставаясь больше нуля.

При построении графика учтем, что он пересекается с осью Ox в точке $x=2$, т.к. $f(2) = \operatorname{arctg}\left.\frac{x-2}{x^2+x-12}\right|_{x=2} = \operatorname{arctg}\frac{2-2}{2^2+2-12} = \operatorname{arctg}(0) = 0$.

Приближенный график функции $f(x)$ имеет вид:



Пример 3. Для функции $f(x)$ установить, является ли функция непрерывной или разрывной в двух точках x_1 è x_2. В случае разрыва определить род разрыва. Сделать схематический чертеж.

$$y = f(x) = 7^{\frac{1}{2+x}}, \ \ x_1 = -2, \ x_2 = -1.$$

*Решение***.** На основании трех достаточных условий непрерывности функции в точке проведем данные исследования в точках $x_1 \grave{e}\, x_2$.

$x_1 = -2.$

1. $f(-2) = 7^{\frac{1}{2-2}} = 7^{\frac{1}{0}} = 7^{\infty} = \infty.$

2. $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -2-0} 7^{\frac{1}{2+x}} = 7^{\frac{1}{2-2-0}} = 7^{\frac{1}{-0}} = 7^{-\infty} = \dfrac{1}{7^{\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0.$

$\lim\limits_{x\to -2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -2+0} 7^{\frac{1}{2+x}} = 7^{\frac{1}{2-2+0}} = 7^{\frac{1}{0}} = 7^{\infty} = \infty.$

Функция в точке $x_1 = -2$ не существует, её предел слева существует и равен нулю, но предел справа не существует. Это разрыв второго II рода.

$x_2 = -1.$

1. $f(-1) = 7^{\frac{1}{2+x}}\Big|_{x=-1} = 7^{\frac{1}{2-1}} = 7.$

2. $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1-0} 7^{\frac{1}{2+x}} = 7^{\frac{1}{2-1-0}} = 7^{\frac{1}{1-0}} = 7.$

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+0} 7^{\frac{1}{2+x}} = 7^{\frac{1}{2-1+0}} = 7^{\frac{1}{1+0}} = 7.$

3. $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = f(-1) = 7.$

В точке $x_2 = -1$ функция непрерывна, т.к. все три условия непрерывности соблюдены.

Для построения графика определим поведение функции в бесконечно удаленных точках $x = \pm\infty$.

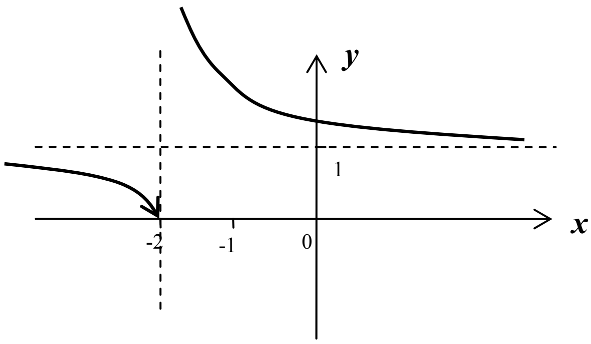
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} 7^{\frac{1}{2+x}} = 7^{\frac{1}{2-\infty}} = 7^{\frac{1}{-\infty}} = 7^{-0} = \frac{1}{7^0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Функция стремится к 1 снизу, оставаясь меньше 1.

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} 7^{\frac{1}{2+x}} = 7^{\frac{1}{2+\infty}} = 7^{\frac{1}{\infty}} = 7^0 = 1.$$

Функция стремится к 1 сверху, оставаясь больше 1.

График функции имеет вид:



4.3. Задания на контрольную работу

Задание 1. Построить график функции $y = kf\left(px + a\right) + b$ преобразованием графика функции $y = f\left(x\right)$.

1. $y = 2\sin\left(3x - 3\right) - 1$.

2. $y = -3\cos\left(\dfrac{x}{2} + 1\right) + 1$.

3. $y = -3\sin\left(\dfrac{x}{2} + 2\right) + 1$.

4. $y = \dfrac{1}{2}\cos\left(3x - 2\right) - 1$.

5. $y = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x - 1\right) - \dfrac{1}{2}$.

6. $y = 2\cos\left(\dfrac{x}{3} + 1\right) - 2$.

7. $y = \dfrac{1}{4}\sin\left(3x + \dfrac{1}{2}\right) + 2$.

8. $y = 3\cos\left(2x - 3\right) + 1$.

9. $y = -2\sin\left(\dfrac{x}{3} - 2\right) - \dfrac{1}{2}$.

10. $y = -\dfrac{1}{4}\cos\left(\dfrac{x}{2} - 3\right) - 2$.

Задание 2. В заданной функции $y = f(x)$ найти точки разрыва и определить род разрыва. Сделать чертеж.

1. а) $f\left(x\right) = \begin{cases} -x, & x \le 0; \\ -\left(x-1\right)^2, & 0 < x < 2; \\ x - 3, & x \ge 2. \end{cases}$ б) $f\left(x\right) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2 + x - 6}$.

2. а) $f\left(x\right) = \begin{cases} \left(x+6\right)^2 - 1, & x \le -4; \\ 3, & -4 < x < -2; \\ e^{x+2}, & x \ge -2. \end{cases}$ б) $f\left(x\right) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x^2 - 2x - 3}$.

3. а) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x\le 1; \\ -x+1, & 1<x<3; \\ -(x-5)^2+2, & x\ge 3. \end{cases}$ б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2+x-2}$.

4. а) $f(x)=\begin{cases} -(x+2)^2+5, & x\le 0; \\ 2x+3, & 0<x<2; \\ -1+\sqrt{x-2}, & x\ge 2. \end{cases}$ б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3+2x-x^2}$.

5. а) $f(x)=\begin{cases} (x+2)^2-4, & x\le 0; \\ \sin 2x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}; \\ -2, & x\ge\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{6-x-x^2}$.

6. а) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x<1; \\ x, & x\ge 1. \end{cases}$ б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2-x-x^2}$.

7. а) $f(x)=\begin{cases} (x+1)^3, & x\le 1; \\ -4(x-3), & 1<x<3; \\ 2, & x\ge 3. \end{cases}$ б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x^2+x-6}$.

8. а) $f(x)=\begin{cases} x+4, & x\le -1; \\ x^2+2, & -1\le x<1; \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$ б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x^2+2x-8}$.

9. а) $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\le 0; \\ tgx, & 0<x\le \pi/4; \\ 2, & x\ge \pi/4. \end{cases}$ б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4+3x-x^2}$.

10. а) $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1; \\ x^2+1, & -1<x\le 1; \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$ б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{9-x^2}$.

Задание 3. Для функции $y=f(x)$ установить, является ли функция непрерывной или разрывной в двух точках x_1 и x_2. В случае разрыва определить род разрыва. Сделать схематический чертеж.

1. $f(x)=3^{\frac{1}{5+x}}$, $x_1=-5,\ x_2=-3$.

2. $f(x)=4^{\frac{1}{7-x}}$, $x_1=5,\ x_2=7$.

3. $f(x)=5^{\frac{1}{4+x}}$, $x_1=-4,\ x_2=-1$.

4. $f(x)=6^{\frac{1}{3-x}}$, $x_1=1,\ x_2=3$.

5. $f(x)=7^{\frac{1}{2+x}}$, $x_1=-2,\ x_2=-1$.

6. $f(x)=8^{\frac{1}{4-x}}$, $x_1=3,\ x_2=4$.

7. $f(x)=9^{\frac{1}{7+x}}$, $x_1=-7,\ x_2=-3$.

8. $f(x)=10^{\frac{1}{5-x}}$, $x_1=2,\ x_2=5$.

9. $f(x)=11^{\frac{1}{2-x}}$, $x_1=1,\ x_2=2$.

10. $f(x)=12^{\frac{1}{3+x}}$, $x_1=-3,\ x_2=2$.

5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

5.1. Краткие сведения из теории

Определения

Производной функции $y=f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Производная функции $y=f(x)$ обозначается: $y^/$, $f^/(x)$, или $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx}=y^/=f^/(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+x_0)-f(x)}{\Delta x}$$

Операция нахождения производной $f^/(x)$ от функции $f(x)$ называется *дифференцированием* этой функции.

Геометрически значение производной функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ равно тангенсу угла, образованного положительным направлением оси Оx и касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0, то есть $f^/(x_0)=\mathrm{tg}\,\alpha$ (рисунок 5.1).

Число $\mathrm{tg}\,\alpha$ называют *угловым коэффициентом касательной* и обозначают k, то есть

$$k=f^/(x_0)=\mathrm{tg}\,\alpha.$$

В прямоугольной системе координат уравнения касательной и нормали к некоторой кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;\,y_0)$ имеют вид:

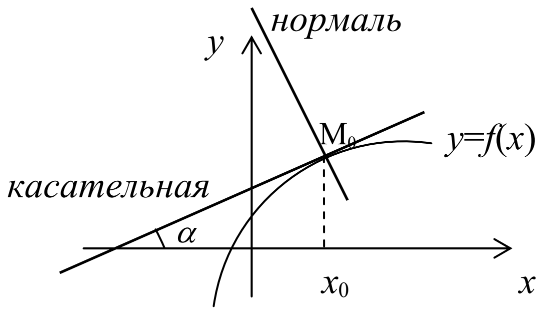


Рисунок 5.1.

$$y-y_0=f^/(x_0)\cdot(x-x_0)-\textit{уравнение касательной},$$

$$y-y_0=-\frac{1}{f^/(x_0)}\cdot(x-x_0)-\textit{уравнение нормали}.$$

Производной второго порядка (*второй производной*) функции $y=f(x)$ называется производная от первой производной. Вторая производная обозначается: $y^{//}$, или $f^{//}(x)$, или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка (*третьей производной*) функции $y = f(x)$ есть производная от производной второго порядка: $y''' = (y'')'$.

Производной n-го порядка функции $y = f(x)$ называется производная от (n–1)-го порядка: $y^{(n)} = y^{(n-1)'}$.

Производная n-го порядка обозначается: $y^{(n)}$, или $= f^{(n)}(x)$, или $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Производные высших порядков (вторая, третья и т.д.) вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Если функция $y = f(t)$ описывает какой–либо физический процесс во времени, то производная y' есть скорость протекания этого процесса.

Если функция $y = f(x)$ выражает связь между физическими величинами x и y, то производная y'_x выражает интенсивность изменения y по отношению к x (количество величины y приходящееся на единицу величины x). Вычисленная в точке производная показывает мгновенные или точечные значения этих интенсивностей.

Например: мгновенная скорость $V = \dfrac{ds}{dt}$, мгновенный ток $i = \dfrac{dq}{dt}$, плотность вещества в точке $d = \dfrac{dm}{dV}$, мгновенная мощность $p = \dfrac{dA}{dt}$ и т.д.

Основные правила дифференцирования

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют производные и c=const, то имеют место следующие правила дифференцирования:

1. $(c)' = 0$.
2. $x' = 1$.
3. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$.
4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

7. если дана сложная функция $y=f(u)$, где $u=u(x)$, то есть $y=f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то $y'_x = f'_u \cdot u'_x$ (правило дифференцирования сложной функции).

Таблица производных элементарных функций

1. $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

2. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$.

3. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

4. $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}} u'$.

5. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.

6. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.

7. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$.

8. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.

9. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$.

10. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$.

11. $\left(\mathrm{tg}\, u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

12. $\left(\mathrm{ctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

13. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

14. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

15. $\left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

16. $\left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

17. $\left(\mathrm{sh}\, u\right)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$.

18. $\left(\mathrm{ch}\, u\right)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$.

19. $\left(\mathrm{th}\, u\right)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'$.

20. $\left(\mathrm{cth}\, u\right)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'$.

При дифференцировании функций необходимо выполнять правила дифференцирования и применять соответствующие формулы таблицы производных элементарных функций.

Пример 1. Найти y' функции $y = \dfrac{1+x^3}{1-2x}$.

*Решение***.** Дифференцируем, как частное из правил дифференцирования и применяем соответствующие формулы.

$$y' = \frac{\left(1+x^3\right)' \cdot (1-2x) - \left(1+x^3\right) \cdot (1-2x)'}{(1-2x)^2} = \frac{3x^2 \cdot (1-2x) - (-2) \cdot \left(1+x^3\right)}{(1-2x)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot (1-2x) + 2 \cdot \left(1+x^3\right)}{(1-2x)^2} = \frac{3x^2 - 6x^3 + 2 + 2x^3}{(1-2x)^2} = \frac{-4x^3 + 3x^2 + 2}{(1-2x)^2}.$$

Логарифмический метод

Иногда, прежде чем находить производную от заданного выражения, лучше выражение преобразовать так, чтобы процесс дифференцирования упрощался. Например, прежде чем дифференцировать функцию нужно взять ее логарифм, определить затем производную от этого логарифма и по производной от логарифма отыскать производную от заданной функции. Такой прием называется способом *логарифмического дифференцирования*.

Метод логарифмического дифференцирования позволяет находить *производную от сложной показательной функции* вида $y = u^v$, где u,v- функции аргумента x. Логарифмируя обе части исходного равенства, получаем:

$\ln y = v \ln u$.

Дифференцируя последнее равенство, имеем: $\dfrac{y'}{y} = v' \ln u + v\dfrac{u'}{u}$.

Умножая обе части равенства на y и заменяя y через u^v, окончательно получаем $y' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} u'$.

Пример 2**.** Найти y', если $y = (\operatorname{ctg} x)^{x^3}$.

Решение. Логарифмируя, получим:

$\ln y = x^3 \cdot \ln(\operatorname{ctg} x)$.

Продифференцируем обе части последнего равенства по x. Так как y является функцией от x, то $\ln y$ есть сложная функция x и $(\ln y)' = \dfrac{1}{y} \cdot y'$. Следовательно,

$$(\ln y)' = \left(x^3 \cdot \ln\operatorname{ctg} x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \ln\operatorname{ctg} x + x^3 \cdot \left(\ln\operatorname{ctg} x\right)',$$

или $$\frac{y'}{y} = 3x^2 \ln\operatorname{ctg} x - x^3 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 x}.$$

Умножив последнее равенство на y, получим

$$y' = y \cdot \left(3x^2 \ln\operatorname{ctg} x - x^3 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 x}\right) = \left(\operatorname{ctg} y\right)^{x^3} \cdot \left(3x^2 \ln\operatorname{ctg} x - x^3 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 x}\right).$$

Методом логарифмического дифференцирования находят *производную от произведения нескольких функций* вида $y = \varphi \cdot U \cdot V \cdot W$, где φ, U, V, $W-$ функции аргумента x. Логарифмируя обе части исходного равенства, получаем:

$$\ln y = \ln\varphi + \ln U + \ln V + \ln W.$$

Дифференцируем обе части равенства:

$$\frac{y'}{y} = \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{U'}{U} + \frac{V'}{V} + \frac{W'}{W}.$$

Умножая обе части равенства на y и заменяя y через $\varphi \cdot U \cdot V \cdot W$, окончательно получаем:

$$y' = \varphi' \cdot U \cdot V \cdot W + U' \cdot \varphi \cdot V \cdot W + V' \cdot \varphi \cdot U \cdot W + W' \cdot \varphi \cdot U \cdot V.$$

Дифференцирование функций, заданных неявно

Если y как функция от x задается посредством соотношения $F(x,y)=0$, где $F(x,y)$ – выражение, содержащее x и y, то y называется *неявной функцией* от x. В некоторых случаях уравнение $F(x,y)=0$ удается разрешить относительно y, и тогда можно перейти от неявного способа задания функции к явному $y=f(x)$, в других случаях такой переход невозможно осуществить. Независимо от возможности перехода производная от y по x для функции, заданной неявно, может быть определена следующим образом:

- находим производную от левой части равенства $F(x,y)=0$, учитывая при этом y как функцию от x, и приравниваем ее к нулю.

-разрешаем полученное уравнение относительно y'. В результате будем иметь выражение производной от неявной функции в виде $y'=\varphi(x,y)$.

Пример 3. Найти y', если $\operatorname{arctg} y - y + x = 0$.

Решение. Дифференцируем данное выражение, рассматривая y как функцию от x:

$$(\operatorname{arctg} y)' - (y)' + (x)' = 0,$$

$$\frac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0, \quad y' - y'\left(1+y^2\right) + 1 + y^2 = 0,$$

$$y' - y' - y' \cdot y^2 + 1 + y^2 = 0, \quad y' \cdot y^2 = 1 + y^2,$$

$$y' = \frac{1+y^2}{y^2} = 1 + \frac{1}{y^2}.$$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Если функция y аргумента x задается при помощи параметрических соотношений $x=x(t)$, $y=y(t)$, причем, $x(t)$ и $y(t)$– дифференцируемые функции по t и $x'(t)\neq 0$, то производные y'_x, y''_{xx}, y'''_{xxx},…, вычисляются по формулам:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}, \quad y'''_{xxx} = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}.$$

Производную второго порядка можно вычислить и по формуле:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{\left(x'_t\right)^3}.$$

*Пример 4***.** Найти y''_{xx}, если $x=\ln t$, $y=\sin 2t$.

Решение. Дифференцируем исходные соотношения:

$$x_t' = \frac{1}{t}, \; y_t' = 2\cos 2t .$$

Отсюда $\quad y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t'} = \dfrac{2\cos 2t}{\frac{1}{t}} = 2t\cos 2t .$

Найдем производную второго порядка

$$y_{xx}'' = \frac{\left(y_x'\right)_t'}{x_t'} = \frac{(2t\cos 2t)_t'}{\frac{1}{t}} = \frac{(2t)_t'\cos 2t + 2t(\cos 2t)_t'}{\frac{1}{t}} = \frac{2\cos 2t + 2t(-2\sin 2t)}{\frac{1}{t}} =$$

$$= \frac{2\cos 2t - 4t\sin 2t}{\frac{1}{t}} = t(2\cos 2t - 4t\sin 2t).$$

5.2. Решение типовых задач и примеров

Пример 1**.** Найти y' функции $y = \sqrt[3]{x^4 + \dfrac{3}{x\sqrt[3]{x}} + (2x)^2}$.

Решение.

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^4 + \frac{3}{x\sqrt[3]{x}} + (2x)^2}\right)' = \left(\left(x^4 + \frac{3}{x\sqrt[3]{x}} + (2x)^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^4 + \frac{3}{x\sqrt[3]{x}} + (2x)^2\right)^{\frac{1}{3}-1} \cdot \left(x^4 + 3x^{-\frac{4}{3}} + (2x)^2\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^4 + \frac{3}{x\sqrt[3]{x}} + (2x)^2\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left[\left(x^4\right)' + \left(3x^{-\frac{4}{3}}\right)' + \left((2x)^2\right)'\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^4 + \frac{3}{x\sqrt[3]{x}} + (2x)^2\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left[4x^3 + 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}-1} + 4\left(x^2\right)'\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^4 + \frac{3}{x\sqrt[3]{x}} + (2x)^2\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(4x^3 + 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-\frac{7}{3}} + 4\cdot 2x\right) =$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^4+\frac{3}{x\sqrt[3]{x}}+(2x)^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(4x^3-\frac{4}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}+8x\right)=$$

$$=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^4+\frac{3}{x\sqrt[3]{x}}+(2x)^2\right)^2}}\cdot\left(4x^3-\frac{4}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}+8x\right)=$$

$$=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{x^5\cdot\sqrt[3]{x}+3+4x^3\cdot\sqrt[3]{x}}{x\cdot\sqrt[3]{x}}\right)^2}}\cdot\left(\frac{4x^5\cdot\sqrt[3]{x}-4+8x^3\cdot\sqrt[3]{x}}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}\right)=$$

$$=\frac{4x^5\cdot\sqrt[3]{x}-4+8x^3\cdot\sqrt[3]{x}}{3\cdot x^2\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{\left(x^5\cdot\sqrt[3]{x}+3+4x^3\cdot\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}}}=\frac{4x^5\cdot\sqrt[3]{x}-4+8x^3\cdot\sqrt[3]{x}}{3\cdot x^2\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(x^5\cdot\sqrt[3]{x}+3+4x^3\cdot\sqrt[3]{x}\right)^2}}{\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}}}=$$

$$=\frac{4x^5\cdot\sqrt[3]{x}-4+8x^3\cdot\sqrt[3]{x}}{3\cdot x^{\frac{7}{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(x^5\cdot\sqrt[3]{x}+3+4x^3\cdot\sqrt[3]{x}\right)^2}}{x^{\frac{8}{9}}}}=\frac{4x^5\cdot\sqrt[3]{x}-4+8x^3\cdot\sqrt[3]{x}}{3\cdot x^{\frac{13}{9}}\cdot\sqrt[3]{\left(x^5\cdot\sqrt[3]{x}+3+4x^3\cdot\sqrt[3]{x}\right)^2}}=$$

$$=\frac{4x^5\cdot\sqrt[3]{x}-4+8x^3\cdot\sqrt[3]{x}}{3\cdot x\cdot\sqrt[9]{x^4}\cdot\sqrt[3]{\left(x^5\cdot\sqrt[3]{x}+3+4x^3\cdot\sqrt[3]{x}\right)^2}}.$$

Замечание. Пример считается вычисленным (решенным) до конца, если:

– дробь содержит только два этажа,

– отсутствуют отрицательные степени,

– отсутствуют дробные степени.

Пример 2. $y = 2^{\mathrm{ctg}\,7x} \cdot \ln^3\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right).$

Решение.

$$y' = \left(2^{\mathrm{ctg}7x} \cdot \ln^3\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right)\right)' = \left(2^{\mathrm{ctg}7x}\right)' \cdot \ln^3\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right) + 2^{\mathrm{ctg}7x} \cdot$$

$$\cdot\left(\ln^3\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right)\right)' = 2^{\mathrm{ctg}7x} \cdot \ln 2(\mathrm{ctg}7x)' \cdot \ln^3\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right) + 2^{\mathrm{ctg}7x} \cdot 3\ln^{3-1}\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\ln\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right)\right)' = 2^{\mathrm{ctg}7x} \cdot \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 7x}\right)(7x)' \cdot \ln^3\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right) + 2^{\mathrm{ctg}7x} \cdot$$

$$\cdot 3\ln^2\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{5x^2 + 2\sqrt{x}} \cdot \left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right)' = 2^{\mathrm{ctg}7x} \cdot \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 7x}\right)7 \cdot$$

$$\cdot \ln^3\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right) + 2^{\mathrm{ctg}7x} \cdot 3\ln^2\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{5x^2 + 2\sqrt{x}} \cdot \left(\left(5x^2\right)' + \left(2\sqrt{x}\right)'\right) =$$

$$= -\frac{7\ln 2}{\sin^2 7x} \cdot 2^{\mathrm{ctg}\,7x} \cdot \ln^3\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right) + 2^{\mathrm{ctg}\,7x} \cdot 3\ln^2\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right)\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{5x^2 + 2\sqrt{x}} \cdot \left(5 \cdot 2x + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{7\ln 2}{\sin^2 7x} \cdot 2^{\mathrm{ctg}\,7x} \cdot \ln^3\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right) +$$

$$+ 2^{\mathrm{ctg}\,7x} \cdot 3\ln^2\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{5x^2 + 2\sqrt{x}} \cdot \left(10x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) =$$

$$= -\frac{7\ln 2}{\sin^2 7x} \cdot 2^{\mathrm{ctg}\,7x} \cdot \ln^3\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right) + +2^{\mathrm{ctg}\,7x} \cdot 3\ln^2\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right) \cdot \frac{10x\sqrt{x} + 1}{\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right)\sqrt{x}} =$$

$$= -\frac{7\ln 2}{\sin^2 7x} \cdot 2^{\mathrm{ctg}\,7x} \cdot \ln^3\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right) + 2^{\mathrm{ctg}\,7x} \cdot 3\ln^2\left(5x^2 + 2\sqrt{x}\right) \cdot \frac{10x\sqrt{x} + 1}{5x^2 \cdot \sqrt{x} + 2x}.$$

Пример 3. Найти y' функции $y = \frac{1}{2}\arcsin^2\left(\mathrm{tg}\,6x^3\right).$

Решение.

$$y' = \left(\frac{1}{2}\arcsin^2\left(tg\,6x^3\right)\right)' = \frac{1}{2}\left(\arcsin^2\left(tg\,6x^3\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \arcsin^{2-1}\left(tg\,6x^3\right) \cdot \left(\arcsin\left(tg\,6x^3\right)\right)' = \arcsin\left(tg\,6x^3\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(tg\,6x^3\right)^2}} \cdot$$

$$\cdot\left(tg\,6x^3\right)' = \arcsin\left(tg\,6x^3\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(tg\,6x^3\right)^2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(6x^3\right)}\left(6x^3\right)' =$$

$$= \arcsin\left(tg\,6x^3\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(tg\,6x^3\right)^2}} \cdot \frac{6}{\cos^2\left(6x^3\right)}\left(x^3\right)' =$$

$$= \arcsin\left(tg6x^3\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(tg6x^3\right)^2}} \cdot \frac{6 \cdot 3 \cdot x^{3-1}}{\cos^2\left(6x^3\right)} =$$

$$=\arcsin\left(\operatorname{tg}6x^3\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\operatorname{tg}6x^3\right)^2}}\cdot\frac{18x^2}{\cos^2\left(6x^3\right)}.$$

Пример 4. Найти y' функции $y=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

Решение. Логарифмируя, получим:

$\ln y=\operatorname{tg}x\cdot\ln(\sin x)$.

Дифференцируем обе части равенства по x. Так как y является функцией от x, то $\ln y$ есть сложная функция от x и $(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}$.

$$(\ln y)'=(\operatorname{tg}x\cdot\ln(\sin x))'=(\operatorname{tg}x)'\cdot\ln(\sin x)+\operatorname{tg}x\cdot(\ln(\sin x))'.$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\ln(\sin x)+\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\ln(\sin x)+\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=$$

$$=\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}+1.$$

Умножив последнее равенство на y, получим

$$y'=y\left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}+1\right)=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}\cdot\left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x}+1\right).$$

Пример 5. Найти y' функции $\operatorname{arctg}\sqrt{xy}=\ln\dfrac{y^3}{x}$.

Решение. Дифференцируем данное выражение, рассматривая y как функцию от x.

$$\operatorname{arctg}\sqrt{xy}-\ln\frac{y^3}{x}=0.$$

$$\left(\operatorname{arctg}\sqrt{xy}-\ln\frac{y^3}{x}\right)'=0',\quad \left(\operatorname{arctg}\sqrt{xy}\right)'-\left(\ln\frac{y^3}{x}\right)'=0,$$

$$\frac{1}{1+\left(\sqrt{xy}\right)^2}\left(\sqrt{xy}\right)'-\frac{1}{\frac{y^3}{x}}\left(\frac{y^3}{x}\right)'=0,\quad \frac{1}{1+xy}\cdot\frac{1}{2\sqrt{xy}}(xy)'-\frac{x}{y^3}\left(\frac{y^3}{x}\right)'=0,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{xy}(1+xy)}\cdot\left(x'y+xy'\right)-\frac{x}{y^3}\cdot\frac{\left(y^3\right)'x-y^3x'}{x^2}=0,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{xy}(1+xy)}\cdot\left(y+xy'\right)-\frac{x}{y^3}\cdot\frac{3y^2y'x-y^3}{x^2}=0,$$

$$\frac{y+xy'}{2\sqrt{xy}(1+xy)}-\frac{1}{y^3}\cdot\frac{y^2(3y'x-y)}{x}=0,\ \frac{y+xy'}{2\sqrt{xy}(1+xy)}-\frac{3y'x-y}{xy}=0,$$

$$\frac{y}{2\sqrt{xy}(1+xy)}+\frac{xy'}{2\sqrt{xy}(1+xy)}-\frac{3y'x}{xy}+\frac{y}{xy}=0,$$

$$\frac{xy'}{2\sqrt{xy}(1+xy)}-\frac{3y'x}{xy}=-\frac{y}{2\sqrt{xy}(1+xy)}-\frac{y}{xy},$$

$$y'\left(\frac{x}{2\sqrt{xy}(1+xy)}-\frac{3x}{xy}\right)=-\frac{y}{2\sqrt{xy}(1+xy)}-\frac{y}{xy};$$

$$y'\left(\frac{x\sqrt{xy}-6x(1+xy)}{2xy(1+xy)}\right)=\frac{-y\sqrt{xy}-2y(1+xy)}{2xy(1+xy)};$$

$$y'\left(\frac{x(\sqrt{xy}-6(1+xy))}{2xy(1+xy)}\right)=\frac{y(-\sqrt{xy}-2(1+xy))}{2xy(1+xy)};$$

$$y'\left(\frac{\sqrt{xy}-6(1+xy)}{2y(1+xy)}\right)=\frac{-\sqrt{xy}-2(1+xy)}{2x(1+xy)};$$

$$y'=\frac{\dfrac{-\sqrt{xy}-2(1+xy)}{2x(1+xy)}}{\dfrac{\sqrt{xy}-6(1+xy)}{2y(1+xy)}}=\frac{-\sqrt{xy}-2(1+xy)}{2x(1+xy)}\cdot\frac{2y(1+xy)}{\sqrt{xy}-6(1+xy)}=\frac{y(-\sqrt{xy}-2(1+xy))}{x(\sqrt{xy}-6(1+xy))}.$$

$$y'=\frac{-y\sqrt{xy}-2y-2xy^2}{x\sqrt{xy}-6x-6x^2y}.$$

Пример 6. Найти y'' функции $y=5^{tg\,2x}$.

Решение.

$$y'=\left(5^{\mathrm{tg}2x}\right)'=5^{\mathrm{tg}2x}\cdot\ln 5(\mathrm{tg}\,2x)'=5^{\mathrm{tg}2x}\cdot\ln 5\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}(2x)'=$$

$$=5^{\mathrm{tg}2x}\cdot\ln 5\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2=5^{\mathrm{tg}2x}\cdot\frac{2\cdot\ln 5}{\cos^2 2x}.$$

$$y''=\left(5^{\mathrm{tg}2x}\cdot\frac{2\cdot\ln 5}{\cos^2 2x}\right)'=2\ln 5\left(\frac{5^{\mathrm{tg}2x}}{\cos^2 2x}\right)'=2\ln 5\left(\frac{\left(5^{\mathrm{tg}2x}\right)'\cdot\cos^2 2x-5^{\mathrm{tg}2x}\left(\cos^2 2x\right)'}{\left(\cos^2 2x\right)^2}\right)=$$

$$=2\ln 5\left(\frac{5^{\mathrm{tg}2x}\cdot\dfrac{2\cdot\ln 5}{\cos^2 2x}\cdot\cos^2 2x-5^{\mathrm{tg}2x}\cdot 2\cos^{2-1}2x(\cos 2x)'}{\cos^4 2x}\right)=$$

$$=2\ln 5\left(\frac{5^{\mathrm{tg}\,2x}\cdot 2\cdot\ln 5-5^{\mathrm{tg}\,2x}\cdot 2\cos 2x\cdot(-\sin 2x)(2x)'}{\cos^4 2x}\right)=$$

$$=2\ln 5\left(\frac{5^{\mathrm{tg}\,2x}\cdot 2\cdot\ln 5+5^{\mathrm{tg}\,2x}\cdot 2\cos 2x\cdot\sin 2x\cdot 2}{\cos^4 2x}\right)=4\ln 5\frac{5^{\mathrm{tg}\,2x}}{\cos^4 2x}(\ln 5+\sin 4x).$$

Пример 7**.** Найти y''_{xx} функции $\begin{cases} x=t^3+t, \\ y=t^4. \end{cases}$

Решение.

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\ y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}.$$

Найдем составляющие:

$$y'_t=\left(t^4\right)'=4t^3,\quad x'_t=\left(t^3+t\right)'=3t^2+1.$$

Тогда

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{4t^3}{3t^2+1}.$$

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\frac{\left(\dfrac{4t^3}{3t^2+1}\right)'_t}{3t^2+1}=\frac{\dfrac{\left(4t^3\right)'\cdot\left(3t^2+1\right)-4t^3\left(3t^2+1\right)'}{\left(3t^2+1\right)^2}}{3t^2+1}=$$

$$=\frac{4\cdot 3t^2\cdot\left(3t^2+1\right)-4t^3\cdot 3\cdot 2t}{\left(3t^2+1\right)^3}=\frac{12t^2\cdot\left(3t^2+1\right)-24t^4}{\left(3t^2+1\right)^3}=\frac{36t^4+12t^2-24t^4}{\left(3t^2+1\right)^3}=\frac{12t^4+12t^2}{\left(3t^2+1\right)^3}.$$

5.3. Задания на контрольную работу

Задание 1. Найти производные данных функций

1.

а) $y=\left(\dfrac{12}{5}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}+\dfrac{1}{4x^4}-5\sqrt[5]{x}\right)^3$,

б) $y=\left(\sin^3 2x+5\right)^2$

в) $y=\ln\left(3^{-x}+tg\sqrt{1-x^2}\right)$,

г) $y=(2+\ln x)^{\cos x}$

д) $\mathrm{tg}(xy)=2x^3+5xy^2$.

2.

а) $y=\left(\dfrac{1}{3}x^3+4\sqrt[4]{x^5-2}\right)^4$,

б) $y=\dfrac{\cos 3x}{\sin^2 3x}+3^{\sqrt[3]{2x}}$,

в) $y=\arcsin\left(\sqrt[3]{x^2}\cdot e^{3x+2}\right)$,

г) $y=(\mathrm{tg}\,x)^{5x+1}$,

д) $x-y^2=\sin(xy)$.

3.

а) $y=\left(\frac{1}{4}x^8-\frac{\sqrt[5]{x^3-1}}{5}\right)^3$,

б) $y=2^{x\cdot\sin^2 3x}+x^2/\sqrt[4]{x^5}$,

в) $y=\ln\sqrt[4]{\frac{1-x^4}{1+x^4}}$,

г) $y=(2-x)^{\ln x}$,

д) $xy-\sin x=\cos(x+y)$.

4.

а) $y=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{6}x^6-8x\cdot\sqrt[4]{x}+5\right)}$,

б) $y=\frac{x}{3\,\mathrm{ctg}^2\,3x}$,

в) $y=\ln\cos\left(3x^2+6x\right)$,

г) $y=(1+\ln x)^{\sqrt{x}}$,

д) $\cos(xy)=y^2-\sin x$.

5.

а) $y=\frac{3+6x}{\sqrt{3+2x-5x^2}}$,

б) $y=e^{2x^3}\cdot\frac{3x}{\sqrt[3]{x^4}}$,

в) $y=\mathrm{arctg}\left(\sin^2 4x\right)$,

г) $y=(1+\sin 2x)^{\ln x}$,

д) $x^3-y^3+3xy=0$.

6.

а) $y=\left(6\sqrt[6]{x^4}+\frac{2x}{\sqrt{x}}-3\right)^3$,

б) $y=3x\cdot\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{3}\right)$,

в) $y=\arcsin\ln\left(1+3x^5\right)$,

г) $y=(\mathrm{arctg}\,6x+1)^{\sqrt{x}}$,

д) $xy^2-x^2y=e^{y/x}$.

7.

а) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+6\sqrt[6]{x^4+1}}$,

б) $y=\frac{\mathrm{arctg}\sqrt[4]{5x^3}}{2x^6}$,

в) $y=3^{\cos^2 4x}\cdot\sqrt[3]{x^5}$,

г) $y=(\mathrm{tg}\,2x)^{1/x}$,

д) $x^3-y^2+e^{xy}=0$.

8.

а) $y=\left(\frac{1}{3}x^4-\frac{4x}{\sqrt[4]{x}}+2\right)^5$,

б) $y=x^2\cdot tg^3\left(7x-x^4\right)$,

в) $y=3\cos\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}x^2-1}\right)$,

г) $y=(2+\ln x)^{x^2}$,

д) $x-y=e^y\cdot\arcsin x$.

9.

а) $y=3\cdot\sqrt[3]{x^3+\frac{5}{x}-\frac{10}{x\cdot\sqrt{x^3}}}$,

б) $y=\ln\sqrt[3]{\frac{7x-3}{x+2}}$,

в) $y=\mathrm{arctg}\left(\log_2^3 5x\right)$,

г) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\cos x}$,

д) $\arcsin(xy)=\ln\left(\frac{x}{y}\right)$.

10.

а) $y=\left(3\cdot\sqrt[3]{x^2-1}-\frac{3x}{\sqrt[3]{x^2}}+5\right)^2$,

б) $y=e^{\cos 4x}\cdot\log_2^4\left(3x^2-4\right)$,

в) $y=5\cdot\sqrt[5]{\arcsin^3(\mathrm{tg}\,2x)}$,

г) $y=(2+x)^{\ln x}$,

д) $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{y}\right)=x^2+y^3$.

Задание 2.Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций:

а) $y = f(x)$;
б) $x = x(t)$, $y = y(t)$.

1. а) $y = \left(e^{\cos x} - 1\right)^2$;
   б) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = t + \sin 2t. \end{cases}$

2. а) $y = x \cdot \sqrt{1 - x^4}$;
   б) $\begin{cases} x = t^3 - t^5 \\ y = t^4. \end{cases}$

3. а) $y = \operatorname{artg} e^{4x}$;
   б) $\begin{cases} x = \cos\left(3t^2 + 6t\right) \\ y = (6t + 6)^2. \end{cases}$

4. а) $y = 3^{\cos 5x}$;
   б) $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2} \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

5. а) $y = e^{2x} \cdot \cos x$;
   б) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$

6. а) $y = 5^{1/x}$;
   б) $\begin{cases} x = \sin t^2 \\ y = \cos 2t. \end{cases}$

7. а) $y = x^2 (1 + \ln x)$;
   б) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = t \cdot \cos 2t. \end{cases}$

8. а) $y = x \cdot ctg\, 5x$;
   б) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = e^t. \end{cases}$

9. а) $y = \left(x^2 + 3x\right) \cdot \cos 4x$;
   б) $\begin{cases} x = 5^{2t} \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

10. а) $y = 2^{\cos^2 3x}$;
    б) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2t \\ y = t^2. \end{cases}$

6. Исследование функций

6.1. Краткие сведения из теории

Возрастание и убывание функции. Точки экстремума

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*неубывающей*) на некотором интервале (a,b), если для любых двух чисел x_1 и $x_2 \in (a,b)$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) \le f(x_2)\right)$.

Функция $f(x)$ называется *убывающей* (*невозрастающей*) в некотором интервале (a,b), если для любых двух чисел x_1 и $x_2 \in (a,b)$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$ $\left(f(x_2) \le f(x_1)\right)$.

Правило.

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$, для любого x из этого интервала, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

Функции, возрастающие и убывающие, а также функции невозрастающие и неубывающие называются *монотонными*.

Говорят, что функция $f(x)$ в точке x_0 имеет *максимум*, если при любом достаточно малом $h>0$ выполняются условия $f(x_0 - h) < f(x_0)$ и $f(x_0 + h) < f(x_0)$. В точке x_0 имеется *минимум*, если $f(x_0 - h) > f(x_0)$ и $f(x_0 + h) > f(x_0)$.

Точка x_0 (максимума или минимума) называется *точкой экстремума функции*.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует $f'(x) = \infty$, называются *критическими точками первого рода*.

Точки экстремума следует искать среди этих критических точек.

Необходимое условие экстремума.

Если x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$, то производная функции в этой точке, либо равна нулю, либо бесконечности $\left(f'(x_0) = 0, f'(x_0) = \infty\right)$.

Достаточное условие экстремума.

Критическая точка x_0 является точкой экстремума функции $y = f(x)$, если при переходе через точку x_0 (слева направо) $f'(x)$ меняет знак. При этом, если знак меняется с «+» на «–», то точка x_0 есть *точка максимума* функции, а если $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то эта точка есть *точка минимума* функции.

Если же при переходе через критическую точку слева направо $f'(x)$ не меняет знак, то функция $f(x)$ в этой точке экстремума не имеет.

Выпуклость, вогнутость функции. Точки перегиба

Говорят, что на интервале (a,b) кривая вогнутая, если она лежит выше касательной, проведенной в любой ее точке.

Говорят, что на интервале (a,b) кривая *выпуклая*, если она лежит ниже касательной, проведенной в любой ее точке.

Если $f''(x)<0$ в интервале (a,b), то график функции является выпуклым в этом интервале; если же $f''(x)>0$, то в интервале (a,b) график функции – вогнутый.

Точка кривой, отделяющая ее выпуклость от вогнутости и наоборот, называется *точкой перегиба*.

Точки кривой, в которых $f''(x)=0$ или не существует $\left(f''(x)=\infty\right)$, называются критическими точками второго рода.

Точки перегиба следует искать среди критических точек второго рода.

Если при переходе через критическую точку второго рода x_0 слева направо и наоборот $f''(x)$ меняет знак, то точка x_0 является точкой перегиба функции $y=f(x)$.

Асимптоты

Прямая L называется *асимптотой* непрерывной кривой $y=f(x)$, если расстояние от прямой $\boldsymbol{L}$ до точки $M(x,y)$, принадлежащей кривой, стремится к нулю по мере удаления точки по этой кривой в бесконечность.

Различают асимптоты: 1) вертикальные, 2) наклонные, 3) горизонтальные.

Прямая $x=a$ называется *вертикальной асимптотой* кривой $y=f(x)$, если при $x\to a$ (справа или слева), значение функции стремится в бесконечность, то есть выполнено одно из следующих условий:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty, \quad \lim_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty.$$

Прямая $y=kx+b$ является *наклонной асимптотой* кривой $y=f(x)$, если существуют пределы

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}, \; b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Прямая $y=b$ является *горизонтальной асимптотой* кривой $y=f\left(x\right)$,

если существуют пределы $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ и $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

(горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной асимптоты при k=0).

План исследования функции:

1. Найти область определения функции, поведение функции в окрестностях точек разрыва и при $x\to\pm\infty$.
2. Установить четность, нечетность, периодичность функции.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат.
4. Найти асимптоты.
5. Найти интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума функции.
6. Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.
7. Используя полученные результаты исследования, построить график функции.

План исследования функции реализуем для функции $y=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$.

1. Область определения функции: $(-\infty;+\infty)$.

2. Для исследуемой функции, $f\left(-x\right)\neq f\left(x\right)$ и $f\left(-x\right)\neq -f\left(x\right)$, следовательно, данная функция не является ни четной, ни нечетной. Функция не периодична.

3. Найдем точки пересечения функции с осью Ox, для чего y=0. Тогда:

$\sqrt[3]{2x^2-x^3}=0,\ 2x^2-x^3=0,\ x=0,\ x=2.$

Значит, график функции проходит через точки (0;0) и (2,0).

Найдем точки пересечения графика с осью Oy, для чего x=0, тогда y=0. Значит, график функции проходит через точку с координатами (0;0).

4. Асимптоты

Вертикальных асимптот нет, так как функция определена всюду.

Наклонные асимптоты.

$y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2}{x}-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}=-1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f\left(x\right)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}\right)^2-x\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}\right)^2-\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x^3+x^3}{\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}\right)^2-x\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}\right)^2-x\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}\right)^2-x^2\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2\cdot\left(\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}\right)^2-\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}\right)^2-\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+1}=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}.$$

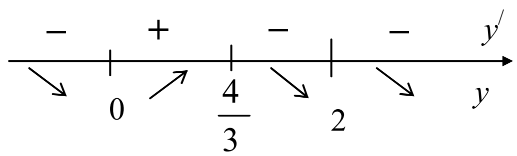
Уравнение наклонной асимптоты: $y=-x+\dfrac{2}{3}.$

5. Найдем интервалы возрастания и убывания функции, экстремальные точки.

$$y'=\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}\right)'=\frac{4x-3x^2}{3\sqrt[3]{\left(2x^2-x^3\right)^2}}=\frac{x(4-3x)}{3x\sqrt[3]{x(2-x)^2}}=\frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}}.$$

$$y'=\frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}}=\begin{cases}0, & 4-3x=0;\quad x_2=\dfrac{4}{3},\\ \infty, & x\sqrt[3]{x(2-x)^2}=0;\quad x_1=0,\ x_3=2.\end{cases}$$

Отметим эти критические точки на числовой оси и определим знак производной в каждом полученном интервале.



На интервалах $x\left((-\infty;0)\cup\left(\dfrac{4}{3};2\right)\cup(2;\infty)\right)$ производная отрицательная, следовательно, функция на этом интервале убывает, а на интервале $x\in\left(0;\dfrac{4}{3}\right)$ производная положительная, значит, функция возрастает. При переходе через критическую точку x=0 производная меняет знак с "–" на "+", следовательно, x=0 – точка минимума, $y_{\min}=f(0)=0$ – минимальное значение функции.

При переходе через критическую точку $x=\frac{4}{3}$ производная меняет знак с "+" на "–", следовательно, $x=\frac{4}{3}$ – точка максимума, $y_{\max}=f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$ – максимальное значение функции.

При переходе через критическую точку x=2 производная не меняет знак, следовательно, эта точка не является точкой экстремума.

6. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

$$y^{//}=\left(\frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}}\right)^{/}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4-3x}{\sqrt[3]{x(2-x)^2}}\right)^{/}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(4-3x)^{/}\sqrt[3]{x(2-x)^2}-(4-3x)\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^{/}}{\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{-3\sqrt[3]{x(2-x)^2}-(4-3x)\dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^2}\left((2-x)^2-2x(2-x)\right)}{\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{-3\sqrt[3]{x(2-x)^2}-(4-3x)\dfrac{4-4x+x^2-4x+2x^2}{3\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^2}}{\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{-9x(2-x)^2-(4-3x)\left(4-8x+3x^2\right)}{3\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^2\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^2}=$$

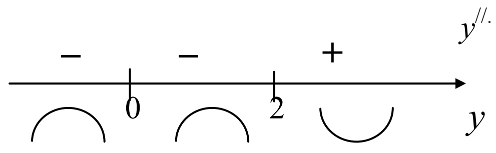
$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{-9x\left(4-4x+x^2\right)-\left(16-32x+12x^2-12x+24x^2-9x^3\right)}{\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^4}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{-36x+36x^2-9x^3-16+44x-36x^2+9x^3}{\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^4}=\frac{1}{9}\cdot\frac{-16+8x}{x^{\frac{4}{3}}(2-x)^{\frac{8}{3}}}=$$

$$=-\frac{8}{9}\cdot\frac{2-x}{x^{\frac{4}{3}}(2-x)^{\frac{8}{3}}}=-\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}(2-x)^{\frac{5}{3}}}=-\frac{8}{9x^{\frac{4}{3}}(2-x)^{\frac{5}{3}}}.$$

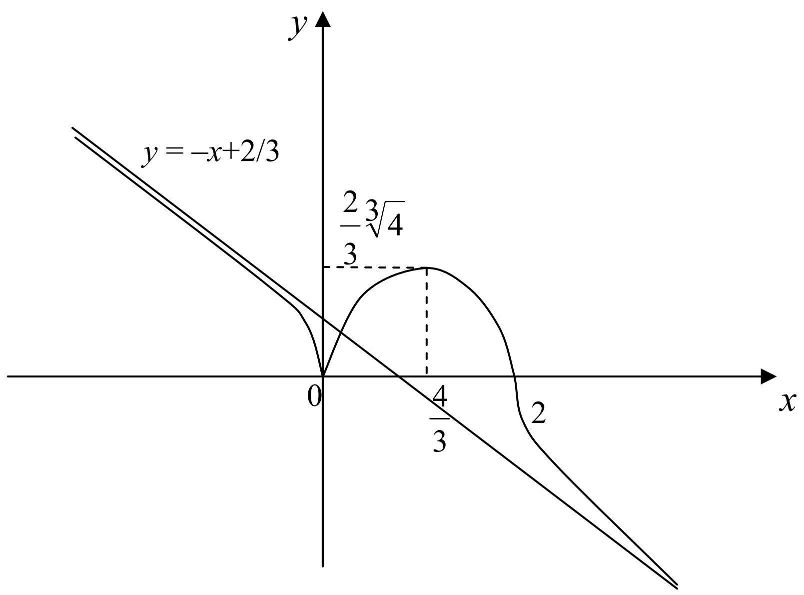
Ни в одной точке $y^{//}$ не обращается в нуль, но $y^{//} = \infty$, когда $x^{\frac{4}{3}} \cdot (2-x)^{\frac{5}{3}} = 0$. Таким образом, критические точки II рода есть $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Отметим эти критические точки на числовой оси и определим знак второй производной в каждом полученном интервале.



На интервалах $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$ вторая производная отрицательная, следовательно, функция на этих интервалах выпуклая, а на интервале $x \in (2; +\infty)$ вторая производная положительная, значит функция вогнутая. Точки входят в область определения. При переходе через критическую точку $x_1 = 0$ вторая производная знак не меняет, следовательно, точка $x_1 = 0$ не является точкой перегиба. При переходе через критическую точку $x_2 = 2$ вторая производная меняет знак с "–" на "+", следовательно, $x_2 = 2$ – точка перегиба, $y = f(2) = 0$ – значение функции в точке перегиба.

7. Построим график функции:



6.2. Решение типовых задач и примеров

Задача 1. Методами дифференциального исчисления исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$ и построить ее график.

*Решение***.** 1. Функция $y=\frac{x^3}{4-x^2}=\frac{x^3}{(2+x)(2-x)}$ имеет две точки x_1=-2 и x_2=2, в которых знаменатель равен нулю. Это значит, что в этих точках функция не существует (терпит разрыв II рода). Тогда область определения функции:

$$(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty).$$

Поведение функции в окрестностях точек разрыва определяют односторонние пределы функции.

$$\lim_{x\to-2+0}\frac{x^3}{4-x^2}=\frac{(-2+0)^3}{4-(-2+0)^2}=\frac{-8}{4-\left(4-4\cdot0+0^2\right)}=\frac{-8}{4-(4-0)}=\frac{-8}{4-4+0}=\frac{-8}{0}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x^3}{4-x^2}=\frac{(-2-0)^3}{4-(-2-0)^2}=\frac{-8}{4-\left(4+4\cdot0+0^2\right)}=\frac{-8}{4-(4+0)}=\frac{-8}{4-4-0}=\frac{-8}{-0}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to2+0}\frac{x^3}{4-x^2}=\frac{(2+0)^3}{4-(2+0)^2}=\frac{8}{4-\left(4+4\cdot0+0^2\right)}=\frac{8}{4-(4+0)}=\frac{8}{4-4-0}=\frac{8}{-0}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to2-0}\frac{x^3}{4-x^2}=\frac{(2-0)^3}{4-(2-0)^2}=\frac{8}{4-\left(4-4\cdot0+0^2\right)}=\frac{8}{4-(4-0)}=\frac{8}{4-4+0}=\frac{8}{0}=+\infty.$$

Рассмотрим поведение функции при $x\to\pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{4-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{4-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}=+\infty.$$

2. Исследуем функцию на четность, нечетность и периодичность:

$f(-x)=\frac{(-x^3)}{4-(-x^2)}=\frac{-x^3}{4-x^2}=-\frac{x^3}{4-x^2}=-f(x)$ – функция нечетная, и ее график симметричен относительно начала координат. Функция не периодическая.

3. Найдем точки пересечения функции с осью Ox:

y=0, $\frac{x^3}{4-x^2}=0;\ x^3=0;\ x=0,$

значит, график функции проходит через точку (0;0).

Найдем точки пересечения функции с осью Oy:

$x=0$. Получаем y=0.

Таким образом, точка с координатами (0;0) – единственная точка пересечения графика с осями координат.

4. Данная функция терпит разрыв II рода в точках $x = –2$ и $x = 2$.

В точках разрыва II рода существуют вертикальные асимптоты. Следовательно, уравнения двух вертикальных асимптот нашей функции есть x=-2, x=2.

Определим наклонную асимптоту $y = kx + b$.

Найдем k и b:

$$k = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x^3}{x\left(4-x^2\right)} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x^3}{x^3\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1}{\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^3}{4-x^2}-(-x)\right) = \lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^3}{4-x^2}+x\right) = \lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^3+4x-x^3}{4-x^2} = \lim_{x\to\mp\infty}\frac{4x}{4-x^2} = 0$$

.

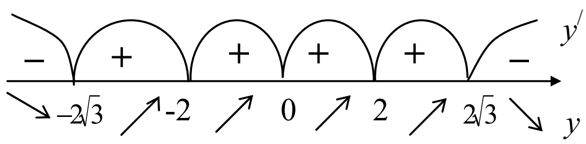
Итак, уравнение наклонной асимптоты: $y=–x$.

5. Исследуем функцию на интервалы возрастания, убывания, экстремальные точки.

$$y' = \frac{3x^2\cdot\left(4-x^2\right)-x^3\cdot(-2x)}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{12x^2-3x^4+2x^4}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{12x^2-x^4}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{x^2\left(12-x^2\right)}{\left((2+x)(2-x)\right)^2}.$$

$$y' = \begin{cases} 0, & x^2\left(12-x^2\right)=0, \\ \infty, & (2+x)(2-x)=0. \end{cases} \quad y' = \begin{cases} 0, & x_1=0, x_{2,3}=\pm 2\sqrt{3}, \\ \infty, & x_{4,5}=\pm 2. \end{cases}$$

Отметим эти критические точки на числовой оси и определим знак производной в каждом полученном интервале.



На интервалах $x \in \left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$ производная отрицательная, тогда, функция на этих интервалах убывает.

На интервалах $x \in \left(-2\sqrt{3};-2\right)\cup(-2;0)\cup(0;2)\cup\left(2;2\sqrt{3}\right)$ производная положительная, функция возрастает.

При переходе через критическую точку $x_2 = -2\sqrt{3}$ производная меняет знак с "–" на "+", следовательно, $x_2 = -2\sqrt{3}$ –точка минимума, $y_{\min} = f\left(-2\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3}$ –минимальное значение функции.

При переходе через критическую точку $x_4 = –2$ производная не меняет знак, следовательно, точка $x_4 = –2$ не является точкой экстремума.

При переходе через критическую точку $x_1 = 0$ производная не меняет знак, следовательно, точка $x_1 =0$ не является точкой экстремума.

При переходе через критическую точку $x_5 = 2$ производная не меняет знак, следовательно, точка $x_5 = 2$ не является точкой экстремума.

При переходе через критическую точку $x_3 = 2\sqrt{3}$ производная меняет знак с "+" на "–", следовательно, $x_3 = 2\sqrt{3}$ – точка максимума, $y_{\max} = f\left(2\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3}$ – максимальное значение функции.

6. Исследуем функцию на интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

$$y^{//} = \left(\frac{12x^2 - x^4}{\left(4 - x^2\right)^2}\right)^{/} = \frac{\left(24x - 4x^3\right)\cdot\left(4 - x^2\right)^2 - \left(12x^2 - x^4\right)\cdot 2\cdot\left(4 - x^2\right)\cdot(-2x)}{\left(4 - x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(4 - x^2\right)\cdot\left(\left(24x - 4x^3\right)\cdot\left(4 - x^2\right) + 4x\left(12x^2 - x^4\right)\right)}{\left(4 - x^2\right)^4} =$$

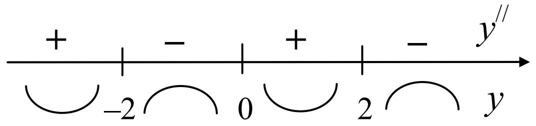
$$= \frac{\left(24x - 4x^3\right)\cdot\left(4 - x^2\right) + 4x\left(12x^2 - x^4\right)}{\left(4 - x^2\right)^3} =$$

$$= \frac{96x - 24x^3 - 16x^3 + 4x^5 + 48x^3 - 4x^5}{\left(4 - x^2\right)^3} = \frac{96x + 8x^3}{\left(4 - x^2\right)^3} = \frac{8x\left(12 + x^2\right)}{\left((2 + x)(2 - x)\right)^3}.$$

$$y^{//} = \begin{cases} 0, & 8x\left(12 + x^2\right) = 0, \\ \infty, & \left(2 + x\right)\left(2 - x\right) = 0. \end{cases} \quad y^{//} = \begin{cases} 0, & x_1 = 0, \\ \infty, & x_{2,3} = \pm 2. \end{cases}$$

$y^{//} = 0$ при $x_1 = 0$, $y^{//} = \infty$ при $x_2 = -2$ и при $x_3 = 2$.

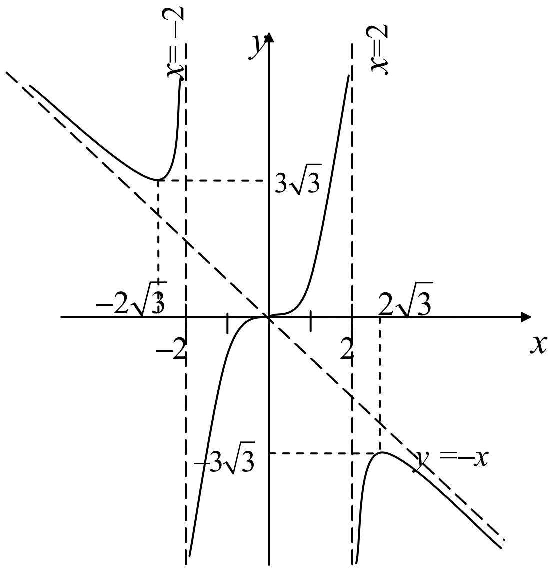
Отметим критические точки на числовой оси и определим знак второй производной в каждом полученном интервале.



На интервалах $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$ вторая производная положительная, следовательно, функция на этих интервалах вогнутая, а на интервале $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$ вторая производная отрицательная, то функция выпуклая. Точки $x = -2$ и $x = 2$ не входят в область определения.

При переходе через критическую точку $x_1 = 0$ вторая производная меняет знак с "–" на "+", следовательно, $x_1 = 0$– точка перегиба, $y = f(0) = 0$ – значение функции в точке перегиба.

7. Используя полученные результаты, построим график функции.



Задача 2. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = 3 - \ln\dfrac{x}{x+1}$ и построить ее график.

Решение. 1. Функция определена всюду, кроме интервала, где $\dfrac{x}{x+1} < 0$, или $-1 < x < 0$. Значит, область определения функции: $x \in (-\infty;-1) \cup (0;+\infty)$.

Данная функция не определена при $x = 0$ и при $x = -1$.

Рассмотрим поведение функции в окрестностях этих точек.

$$\lim_{x\to 0+0}\left(3 - \ln\frac{x}{x+1}\right) = 3 - \ln\frac{+0}{+0+1} = 3 - \ln 0 = 3 - (-\infty) = +\infty .$$

Для $x \to 0-0$ поведение функции рассматривать не будем так как интервал $(-1;0)$ не входит в область определения.

$$\lim_{x\to -1-0}\left(3 - \ln\frac{x}{x+1}\right) = 3 - \ln\frac{-1-0}{-1-0+1} = 3 - \ln\frac{-1}{-0} = 3 - \ln\infty = -\infty .$$

Для $x \to -1-0$ поведение функции рассматривать не будем так как интервал $(-1;0)$ не входит в область определения.

Рассмотрим поведение функции при $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty}\left(3 - \ln\frac{x}{x+1}\right) = 3 - \ln \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x+1} = 3 - \ln\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 3 - \ln\frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = 3.$$

Функция стремится к значению $y=3$, оставаясь больше 3.

$$\lim_{x\to -\infty}\left(3 - \ln\frac{x}{x+1}\right) = 3 - \ln \lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x+1} = 3 - \ln \lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 3 - \ln\frac{1}{1-\frac{1}{\infty}} = 3.$$

Функция стремится к значению $y=3$, оставаясь меньше 3.

2. Исследуем функцию на четность, нечетность и периодичность:

$$y(-x) = 3 - \ln\left(\frac{-x}{-x+1}\right) = 3 - \ln\frac{x}{x-1}.$$

Функция является ни четной и ни нечетной. Функция не периодическая.

3. Найдем точки пересечения функции с осью Оx:

y=0; $\quad 3 - \ln\frac{x}{x+1} = 0; \quad \ln\frac{x}{x+1} = 3; \quad \frac{x}{x+1} = e^3;$

$x\left(1 - e^3\right) = e^3; \; x = \dfrac{e^3}{1 - e^3} \approx -1{,}05$. График функции проходит через точку (–1,05;0).

Найдем точки пересечения функции с осью Oy: x = 0. Точка x = 0 не входит в область определения.

Таким образом, точка с координатами (–1,05;0) – единственная точка пересечения графика с осями координат.

4. Поведение функции в окрестностях точек x=0 и x=-1 позволяет сделать вывод: функция имеет две вертикальные асимптоты x =-1, x=0.

Наклонная асимптота $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x \to \mp\infty} \left(f(x) - kx\right)$.

Найдем k и b:

$$k = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{3 - \ln\frac{x}{x+1}}{x} = -\lim_{x \to \mp\infty} \frac{\ln\frac{x}{x+1}}{x} = -\lim_{x \to \mp\infty} \frac{\frac{x+1}{x} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{1} = -\lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x(x+1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \mp\infty}\left(3 - \ln\frac{x}{x+1}\right) = 3 - \lim_{x \to \mp\infty} \ln\frac{x}{x+1} = 3 - \ln\lim_{x \to \mp\infty}\frac{x}{x+1} = 3 - \ln 1 = 3 - 0 = 3.$$

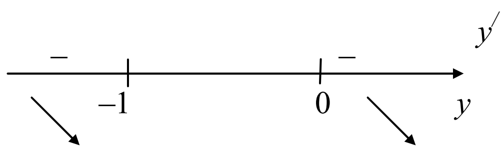
Имеем уравнение наклонной асимптоты: y= 3.

5. Исследуем функцию на интервалы возрастания, убывания, экстремальные точки.

$$y' = \left(3 - \ln\frac{x}{x+1}\right)' = -\frac{x+1}{x} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)}.$$

$$y' = \begin{cases} 0, & -1 \neq 0, \\ \infty, & x(x+1) = 0. \end{cases} \quad y' = \begin{cases} 0, & \varnothing, \\ \infty, & x_1 = 0,\; x_2 = -1. \end{cases}$$

Отметим эти критические точки на числовой оси и определим знак производной в каждом полученном интервале.



На интервалах $x \in (-\infty;-1) \cup (0;+\infty)$ производная отрицательная, следовательно, функция на этих интервалах убывает.

Точек экстремума нет, так как в области определения функции производная знак не меняет. Точки $x = -1$ и $x=0$ и интервал $(-1;0)$ не входят в область определения.

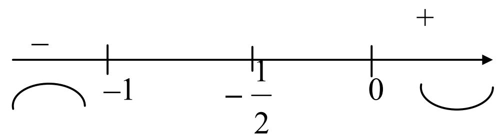
6. Исследуем функцию на интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

$$y'' = \left(-\frac{1}{x(x+1)}\right)' = \left(-\frac{1}{x^2+x}\right)' = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}.$$

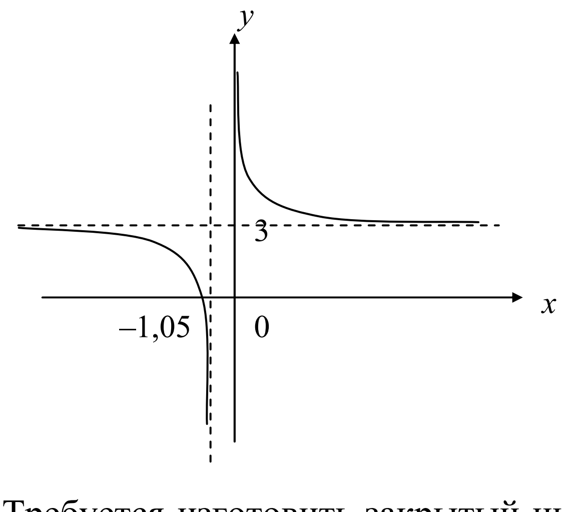
$$y'' = \begin{cases} 0, & 2x+1=0, \\ \infty, & x^2(x+1)^2 = 0. \end{cases} \quad y'' = \begin{cases} 0, & x_1 = -\dfrac{1}{2}, \\ \infty, & x_2 = -1,\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Отметим критические точки на числовой оси и определим знак второй производной в каждом полученном интервале.

На интервале $x \in (-\infty;-1)$ вторая производная отрицательная, следовательно, функция на этом интервале выпуклая, а на интервале $x \in (0;+\infty)$ вторая производная положительная, и функция вогнутая.



7. Используя полученные результаты, построим график



Задача 3. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом V. Каким должны быть его размеры, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

Решение. В задаче, требуется определить какими должны быть радиус и высота цилиндра, чтобы при заданном объеме V его полная поверхность была минимальной.

Полная поверхность цилиндра: $S = 2\pi RH + 2\pi R^2$. $(R>0)$

Следует определить наименьшее значение этой функции. В данной функции неизвестные переменные R и H. Но в свою очередь $V=\pi R^2 H$.

Тогда $H=\dfrac{V}{\pi R^2}$.

Подставляя в формулу полной поверхности цилиндра, получаем $S=2\pi R\dfrac{V}{\pi R^2}+2\pi R^2$ или $S=\dfrac{2V}{R}+2\pi R^2$.

Функция S – функция одной переменной R. Теперь найдем минимальное значение функции S.

Для этого найдем производную первого порядка по R и приравняем к нулю.

$$S' = \left(\frac{2V}{R}+2\pi R^2\right)' = \left(\frac{2V}{R}\right)' + \left(2\pi R^2\right)' = -\frac{2V}{R^2}+4\pi R = \frac{4\pi R^3-2V}{R^2}.$$

$S'=0$, когда $\dfrac{4\pi R^3-2V}{R^2}=0$.

$$4\pi R^3-2V=0,\ \ 4\pi R^3=2V,\ 2\pi R^3=V,\ R^3=\frac{V}{2\pi},\ R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Если $R<\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, то $S'<0$, а если $R>\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, $S'>0$.

Следовательно, при $R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ функция S достигает свое минимальное значение.

Найдем высоту H.

$$H=\frac{V}{\pi R^2}=\frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2}=\frac{V}{\pi\frac{V^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}}}=\frac{2^{\frac{2}{3}}V^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Ответ: $R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, H=2R.

6.3 Задания на контрольную работу

Задание 1. Методами дифференциального исчисления исследовать функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

1.
а) $y=\dfrac{x^2-3x-6}{x+1}$,
б) $y=(x-1)\cdot e^{-x}$.

2.
а) $y=\dfrac{x^2-4x}{x-2}$,
б) $y=\ln\left(4+x^2\right)$.

3. а) $y=\frac{4x-x^2+1}{x+2}$,

б) $y=\ln\frac{x}{x-2}-1$.

4. а) $y=\frac{x^3}{x^2+2x-3}$,

б) $y=\left(2+x^2\right)\cdot e^{-x^2}$.

5. а) $y=\frac{2-4x^2}{1-4x^2}$,

б) $y=\ln\left(x^2+1\right)$.

6. а) $y=\frac{x^2-6x+4}{x^2-4}$,

б) $y=xe^{x^2}$.

7. а) $y=\frac{3x-2x^2}{1-x}$,

б) $y=(x+1)\cdot e^{2x-1}$.

8. а) $y=\frac{x^2-3x-3}{x-1}$,

б) $y=\ln\left(x^2+3\right)$.

9. а) $y=\frac{3x-2x^2+1}{x-2}$,

б) $y=\ln\frac{x-1}{x}+3$.

10. а) $y=\frac{3x}{9-x^2}$,

б) $y=e^{2x-x^2}$.

Задание 2. Решить задачу на экстремум.

1. Определить максимальную площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна *l*.

2. Требуется вырыть яму конической формы с образующей *l*=3м. При какой глубине ямы ее объем будет наибольший?

3. Открытый бак имеет форму цилиндра объемом V=5м^3. Каковы должны быть радиус основания и высота цилиндра, чтобы его поверхность была наименьшей?

4. Определить наибольшую площадь равнобедренного треугольника, вписанного в круг радиуса R.

5. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

6. Чему должны быть равны радиус основания, высота и образующая прямого кругового конуса для того, чтобы при заданном объеме V он имел наименьшую полную поверхность?

7. Определить наименьшую площадь равнобедренного треугольника, описанного вокруг окружности радиуса R.

8. Найти радиус и высоту конуса наименьшего объема, который можно описать около шара радиуса R.

9. Резервуар открытый сверху, имеет форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Каковы должны быть размеры, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала, если он должен вмещать 300л. воды?

10. Чему должны быть равны радиус основания, высота и образующая прямого кругового конуса для того, чтобы при заданной боковой поверхности S он имел наибольший объем?

7. Функции нескольких переменных

7.1. Краткие сведения из теории

Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Если каждой точке $M \in D \subset R^n$ (R^n-n-мерное пространство) ставится в соответствие по известному закону некоторое число $u \in R$, то говорят, что на множестве D задана функция $u=f(M)$, или $u=f(x_1,\ldots,x_n)$. При этом множество D называется *областью определения функции*.

Число a называется *пределом* функции $u=f(M)$ в точке P (или при $M \to P$), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек M, удовлетворяющих условию $0<\rho(M,P)<\delta$, выполняется неравенство $|f(M)-a|<\varepsilon$ и записывают

$$\lim_{M\to P} f(M) = a, \quad или \quad \lim_{\substack{x_1\to p_1\\ \cdots\cdots\\ x_n\to p_n}} f(x_1,\ldots,x_n) = a.$$

Функция $u=f(M)$ называется *непрерывной* в точке P, если предел в этой точке существует и равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{M\to P} f(M) = f(P), \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x_1\to p_1\\ \cdots\cdots\\ x_n\to p_n}} f(x_1,\ldots,x_n) = f(p_1,\ldots,p_n).$$

Частные производные

Пусть функция $u=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ определена в некоторой окрестности точки M, включая саму эту точку. Дадим аргументу x_k приращение Δx_k, тогда функция тоже получит приращение, которое называется *частным приращением функции* $u = f\left(x_1, x_2,..., x_n\right)$:

$$\Delta_k u = f(x_1,..., x_k + \Delta x_k,..., x_n) - f(x_1,..., x_k,..., x_n).$$

Частной производной от функции $u = f\left(x_1, x_2,..., x_n\right)$ по независимой переменной x_k называется предел (если он существует и конечен):

$$\lim_{\Delta x_k\to 0} \frac{\Delta_k u}{\Delta x_k}.$$

Обозначают $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ или f'_{x_k}. Таким образом, по определению:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = f'_{x_k} = \lim_{\Delta x_k\to 0} \frac{\Delta_k u}{\Delta x_k}.$$

Отметим, что частная производная по независимой переменной x_k вычисляется при условии, что все другие переменные постоянны. Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Частными производными 2-го порядка функции $u=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Производные 2-го порядка обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=f''_{x_k x_k},\ \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}=f''_{x_k x_l}\ \text{и т.д.}$$

Аналогично определяются производные порядка выше второго.

Отметим, что результат многократного дифференцирования по различным переменным не зависит от очередности дифференцирования, если получающиеся при этом частные производные непрерывны. Если дифференцирование производится по различным переменным, по полученные частные производные называются *смешанными*.

Производные сложных функций

Пусть $z=f(x;y)$ – функция двух переменных x и y, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимой переменной t: $x=x(t),\ y=y(t)$. Тогда функция $z=f(x(t);y(t))$ является *сложной функцией* независимой переменной t, а переменные x и y – промежуточными переменными. И пусть функции $f(x;y),\ x(t),\ y(t)$ – дифференцируемы. *Полная производная* этой сложной функции находится по формуле:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \tag{7.1}$$

Для сложной функции, у которой число промежуточных переменных больше двух, производная находится аналогично. Например, если $u=f(x;y;z)$, где $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$, то *формула полной производной* примет вид:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}. \tag{7.2}$$

Рассмотрим более общий случай. Пусть $z=f(x;y)$ – функция двух переменных x и y, каждая из которых, в свою очередь, является функцией двух независимых переменных u и v: $x=x(u;v)$, $y=y(u,v)$. Тогда функция $z=f(x(u;v),y(u;v))$ является сложной функцией двух независимых переменных u и v, а переменные x и y – промежуточные переменные. И пусть функции $f(x;y),\ x(u;v),\ y(u;v)$ – дифференцируемы. Частные производные этой сложной функции $z=f(x(u;v);y(u;v))$ находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (7.3)$$

Производные неявных функций

Производная неявной функции $y=y(x)$, заданной с помощью уравнения $F(x;y)=0$, где $F(x;y)$ – дифференцируемая функция переменных *x* и *y*, находится по формуле:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} \qquad (7.4)$$

при условии $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$.

Аналогично найдем частные производные неявной функции двух переменных $z=f(x;y)$, заданной с помощью уравнения $F(x;y;z)=0$, где $F(x;y;z)$ – дифференцируемая функция переменных *x*, *y* и *z*.

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \text{ и } \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Учитывая, что *y* не зависит от *x*, а *x* не зависит от *y*, т. е. $\frac{\partial y}{\partial x}=0, \frac{\partial x}{\partial y}=0$, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} \qquad (7.5)$$

при условии $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$.

Полный дифференциал функции нескольких переменных

Полным приращением Δu функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точке $M(x_1,x_2,...,x_n)$, соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_n$, называется:

$$\Delta u=f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,...,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2,...,x_n). \qquad (7.6)$$

Полным дифференциалом 1-го порядка du функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точке $M(x_1,x_2,...,x_n)$ называется главная, линейная относительно приращений аргументов часть полного приращения функции.

Для полного дифференциала 1-го порядка функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ справедлива следующая формула:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n\,. \qquad (7.7)$$

Полным дифференциалом 2-го порядка d^2u функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется полный дифференциал от ее полного дифференциала:

$$d^2u = d(du).$$

Аналогично определяются полные дифференциалы более высоких порядков. Полный дифференциал $d^m u = d(d^{m-1}u)$ порядка m символически выражается формулой:

$$d^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m u\,,$$

которая раскрывается по биномиальному закону. Например, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ полный дифференциал 2-го порядка вычисляется по формуле:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2\,. \qquad (7.8)$$

Экстремум функции нескольких переменных

Пусть функция u=f(M) определена в области D и точка M_0 является внутренней точкой этой области. Говорят, что функция *f(M)* имеет в точке M_0 *экстремум* (*максимум* или *минимум*), если существует такая окрестность точки M_0 , в которой для любой точки M из этой окрестности выполняется неравенство $f(M) \le f(M_0)$ èëè $f(M) \ge f(M_0)$.

Если в точке в точке M_0 функция *f(M)* имеет ***экстремум***, то в этой точке ее частные производные либо равны нулю, либо не существуют.

Это *необходимые условия* существования экстремума.

Точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют, называются *критическими.* Все экстремальные точки являются критическими,но не каждая критическая точка является экстремальной.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{M_0} = 0. \qquad (7.9)$$

Точки, в которых выполняются условия (7.9), называются *стационарными точками* функции u=f(M).

Рассмотрим функцию двух переменных u=f(x,y) в окрестности стационарной точки $M_0(x_0, y_0)$. Обозначим

$$A_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ A_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\ A_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 .$$

Достаточные условия существования точек экстремума для функции двух переменных:

1) Если $\Delta>0$, то точка M_0 – точка экстремума, причем – максимум при $A_{11}<0$, минимум при $A_{11}>0$.

2) Если $\Delta<0$, то в точке M_0 экстремум отсутствует.

3) Если $\Delta=0$, то требуется дополнительное исследование на наличие экстремума данной функции в точке M_0.

Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция $f(M)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области, то она достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в стационарной точке или в граничной точке области. Таким образом, для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области, необходимо:

1) найти стационарные точки, расположенные в данной области, и вычислить значения функции в этих точках;

2) найти наибольшее и наименьшее значения на границе этой области;

3) из всех вычисленных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Производная по направлению. Градиент

Рассмотрим функцию $z = f(M)$, определенную в некоторой окрестности точки $M(x;y)$, и произвольный единичный вектор $\vec{l} = (\cos\alpha;\cos\beta)$.

Проведем в направлении вектора $\vec{l}$ прямую MM_1. Точка M_1 имеет координаты $(x+\Delta x; y+\Delta y)$. Величина отрезка MM_1 равна $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Функция $f(M)$ при этом получит приращение:

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$$

.

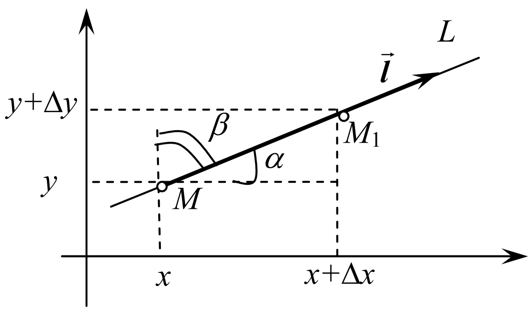


Рисунок. 7.1.

Предел отношения $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$ $(M \to M_1)$, если он существует и конечен, называется *производной функции* $z = f(M)$ *в точке* $M(x;y)$ *по направлению вектора* $\vec{l}$ и обозначается $\frac{\partial z}{\partial l}$, т.е. $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}$.

При нахождении производной по направлению пользуются формулой:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta. \tag{7.10}$$

Градиентом функции $z = f(M)$ в точке $M(x;y)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, взятым в точке $M(x;y)$. Обозначается:

$$\overrightarrow{grad\ z} = \left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}. \tag{7.11}$$

Учитывая определение градиента, формулу (7.10) можно представить в виде скалярного произведения двух векторов:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = \overrightarrow{gradz}\cdot\vec{l}. \tag{7.12}$$

Аналогично определяется производная по направлению и градиент функции трех переменных $u = f(x;y;z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma;$$

$$\overrightarrow{grad\ u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Градиент функции характеризует направление, а его модуль величину наибыстрейшего роста функции в данной точке (наибольшую скорость изменения функции в точке). Понятия производной по направлению и градиента функции играют важную роль во многих приложениях.

Метод наименьших квадратов

На практике мы часто сталкиваемся с задачей сглаживания экспериментальных зависимостей. Пусть зависимость между двумя переменными *x* и *y* выражается в виде таблицы.

x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

Эти данные могут быть получены в результате опытных измерений или статистических наблюдений. Требуется наилучшим образом сгладить зависимость между переменными *x* и *y*, т.е. по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости *y* от *x*, исключив при этом случайные отклонения, связанные с неизбежными погрешностями измерений или статистических наблюдений. Такую сглаженную зависимость стремятся представить в виде формулы $y = f(x)$, или, как говорят, *аппроксимировать* опытные данные функцией $f(x)$.

Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, получили название *эмпирических формул* (формулы, выведенные на основе опытных данных).

Вывод эмпирических формул состоит из двух этапов.

На *первом* этапе по совокупности и месторасположению экспериментальных точек (x_i, y_i), отображенных на графике, требуется подобрать функциональную зависимость между x и y на основе графиков известных функций. Эта функция носит качественный (обобщенный) характер связи между x и y, т.к. в ней не определены коэффициенты (параметры) при неизвестных.

Пусть такая функция имеет общий вид:

$y = \varphi(x; \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$, где α_0, α_1, …, α_{k-1} – неизвестные параметры

Назовем эту функцию теоретической.

На *втором* этапе следует подобрать указанные выше параметры так, чтобы выбранная функция «наилучшим» образом отображала экспериментальную зависимость между x и y. И тогда выбранная теоретическая формула преобразуется в эмпирическую.

Такой подбор (нахождение) параметров теоретической функции можно осуществить одним из наиболее распространенных способов, которым является *метод наименьших квадратов*.

Сущность метода: найти такие значения параметров α_0, α_1, …, α_{k-1}, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальных значений y_i от соответствующих теоретических значений $\varphi(x_i; \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1})$ (суммарная квадратичная ошибка) была минимальной.

$$Q(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \varphi(x_i; \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \right]^2 . \qquad (7.13)$$

Необходимым условием минимума функции (7.13) будет равенство нулю всех частных производных этой функции. В результате, для нахождения параметров α_0, α_1, …, α_{k-1} нужно решить систему k уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \alpha_0} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \alpha_{k-1}} = 0. \end{cases} \qquad (7.14)$$

7.2. Решение типовых примеров и задач

Пример 1**.** Найти все частные производные 1-го порядка функций:

а) $z = e^{2xy} + \sin x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y^5}}$; б) $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$; в) $z = (\cos x)^{y^2}$.

*Решение***.** а) Найдем частную производную функции $z = e^{2xy} + \sin x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y^5}}$ по переменной x. Считая y постоянной, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{2xy} + \sin x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{y^5}} \right)'_x = \left(e^{2xy}\right)'_x + \left(\sin x^2\right)'_x + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{y^5}} \right)'_x = e^{2xy}\left(2xy\right)'_x +$$

$$+\cos x^2 \left(x^2\right)'_x + 0 = e^{2xy} \cdot 2y + \cos x^2 \cdot 2x = 2\left(ye^{2xy} + x\cos x^2\right).$$

Найдем частную производную функции $z = e^{2xy} + \sin x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y^5}}$ по переменной y. Считая x постоянной, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{2xy} + \sin x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{y^5}} \right)'_y = \left(e^{2xy}\right)'_y + \left(\sin x^2\right)'_y + \left(y^{-\frac{5}{3}} \right)'_y = e^{2xy}\left(2xy\right)'_y + 0 +$$

$$+\left(-\frac{5}{3}\right) y^{-\frac{5}{3}-1} = e^{2xy} \cdot 2x - \frac{5}{3} y^{-\frac{8}{3}} = 2xe^{2xy} - \frac{5}{3\sqrt[3]{y^8}}.$$

б) Найдем частную производную функции $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$ по переменной x. Считая y постоянной, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\cos y^2}{x} \right)'_x = \cos y^2 \left(\frac{1}{x} \right)'_x = \cos y^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{\cos y^2}{x^2}.$$

Найдем частную производную функции $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$ по переменной y. Считая x постоянной, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\cos y^2}{x} \right)'_y = \frac{1}{x}\left(\cos y^2\right)'_y = \frac{1}{x}\left(-\sin y^2\right) \cdot 2y = -\frac{2y\sin y^2}{x}.$$

в) Найдем частную производную функции $z = (\cos x)^{y^2}$ по переменной x. Считая y постоянной, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\left(\cos x\right)^{y^2}\right)_x'=y^2\left(\cos x\right)^{y^2-1}\left(\cos x\right)_x'=y^2\left(\cos x\right)^{y^2-1}\left(-\sin x\right)=$$

$$=-y^2\sin x\left(\cos x\right)^{y^2-1}.$$

Найдем частную производную функции $z=\left(\cos x\right)^{y^2}$ по переменной *y*. Считая *x* постоянной, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\left(\cos x\right)^{y^2}\right)_y'=\left(\cos x\right)^{y^2}\ln\left(\cos x\right)\left(y^2\right)_y'=\left(\cos x\right)^{y^2}\ln\left(\cos x\right)\left(2y\right)=$$

$$=2y\left(\cos x\right)^{y^2}\ln\left(\cos x\right).$$

Пример 2. Найти все частные производные 2-го порядка функции $z=\dfrac{\cos y^2}{x}$.

Решение. В примере 1б) были найдены частные производные 1-го порядка этой функции: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\cos y^2}{x^2}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2y\sin y^2}{x}$. Найдем частные производные от этих производных, т. е. частные производные 2-го порядка.

Найдем частную производную второго порядка по переменной *x*:

$$z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{\cos y^2}{x^2}\right)_x'=-\cos y^2\left(\frac{1}{x^2}\right)_x'=-\cos y^2\left(\frac{-2}{x^3}\right)=\frac{2\cos y^2}{x^3}.$$

$$z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(-\frac{2y\sin y^2}{x}\right)_y'=-\frac{2}{x}\left(y\sin y^2\right)_y'=$$

$$=-\frac{2}{x}\left(\sin y^2+y\cdot\cos y^2\cdot 2y\right)=-\frac{2(\sin y^2+2y^2\cos y^2)}{x}.$$

Найдем смешанную частную производную второго порядка:

$$z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{\cos y^2}{x^2}\right)_y'=-\frac{1}{x^2}\left(\cos y^2\right)_y'=-\frac{1}{x^2}\left(-\sin y^2\cdot 2y\right)=$$

$$=\frac{2y\sin y^2}{x^2}.$$

Пример 3**.** Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3+\cos y+z^2=0$;

Решение. В данном примере функция $z=f(x;y)$ задана неявно уравнением $F(x;y;z)=0$.

Сначала найдем $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial z}$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\left(x^3+\cos y+z^2\right)_x'=\left(x^3\right)_x'+\left(\cos y\right)_x'+\left(z^2\right)_x'=3x^2+0+0=3x^2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\left(x^3+\cos y+z^2\right)_z'=\left(x^3\right)_z'+\left(\cos y\right)_z'+\left(z^2\right)_z'=0+0+2z=2z.$$

Найдем частную производную функции по переменной x, воспользовавшись формулой (7.5):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}=-\frac{3x^2}{2z}.$$

Найдем $\dfrac{\partial F}{\partial y}$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\left(x^3+\cos y+z^2\right)_y'=\left(x^3\right)_y'+\left(\cos y\right)_y'+\left(z^2\right)_y'=0-\sin y+0=-\sin y.$$

Найдем частную производную функции по переменной y, воспользовавшись формулой (7.5):

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}=-\frac{-\sin y}{2z}=\frac{\sin y}{2z}.$$

Пример 4**.** Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $e^{x^3y}+5\ln z+x^4=0$.

Решение. Найдем частную производную функции по переменной x, воспользовавшись формулой (7.5):

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\left(e^{x^3y}+5\ln z+x^4\right)_x'=\left(e^{x^3y}\right)_x'+\left(5\ln z\right)_x'+\left(x^4\right)_x'=e^{x^3y}\cdot\left(x^3y\right)_x'+0+4x^3=$$

$$=e^{x^3y}\cdot y\cdot 3x^2+4x^3=x^2\left(3ye^{x^3y}+4x\right);$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\left(e^{x^3y}+5\ln z+x^4\right)_z'=\left(e^{x^3y}\right)_z'+\left(5\ln z\right)_z'+\left(x^4\right)_z'=0+5\cdot\frac{1}{z}+0=\frac{5}{z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}=-\frac{x^2\left(3ye^{x^3y}+4x\right)}{5/z}=-\frac{x^2z\left(3ye^{x^3y}+4x\right)}{5}.$$

Найдем частную производную функции по переменной y, воспользовавшись формулой (7.5):

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\left(e^{x^3y}+5\ln z+x^4\right)_y'=\left(e^{x^3y}\right)_y'+\left(5\ln z\right)_y'+\left(x^4\right)_y'=e^{x^3y}\cdot\left(x^3y\right)_y'+0+0=x^3e^{x^3y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}=-\frac{x^3e^{x^3y}}{5/z}=-\frac{x^3ze^{x^3y}}{5}.$$

Пример 5**.** Найти полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков и проверить равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$ для функции $z = e^{xy}$.

Решение. Найдем частные производные 1-го порядка этой функции:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{xy}\right)'_x = e^{xy} \cdot y = ye^{xy};$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{xy}\right)'_y = e^{xy} \cdot x = xe^{xy}.$$

Используя формулу (7.7), найдем полный дифференциал 1-го порядка:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy = e^{xy}(ydx + xdy).$$

Найдем частные производные 2-го порядка:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(ye^{xy}\right)'_x = y^2 e^{xy};$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(xe^{xy}\right)'_x = e^{xy} + xye^{xy} = e^{xy}(1 + xy);$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(ye^{xy}\right)'_y = e^{xy} + xye^{xy} = e^{xy}(1 + xy);$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(xe^{xy}\right)'_y = x^2 e^{xy}.$$

Отметим, что справедливо равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Используя формулу (7.8), найдем полный дифференциал 2-го порядка:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = y^2 e^{xy}dx^2 + 2e^{xy}\left(1 + xy\right)dxdy + x^2 e^{xy}dy^2 =$$

$$= e^{xy}\left(y^2 dx^2 + 2\left(1 + xy\right)dxdy + x^2 dy^2\right).$$

*Пример 6***.** Исследовать функцию на экстремум:

$$u = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

*Решение***.** Найдем стационарные точки данной функции, для этого вычислим частные производные функции и приравняем их нулю (условие (7.9)):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xy + 2y. \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ 2xy + 2y = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим, что существует четыре стационарных точки:

$$M_1(0;\ 0),\ M_2\left(-\frac{5}{3};\ 0\right),\ M_3(-1;\ 2),\ M_4(-1;\ -2).$$

Теперь определим, есть ли в этих стационарных точках экстремумы. Для этого вычислим A_{11}, A_{22}, A_{12} и Δ. Поскольку

$$A_{11}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x+10,\ A_{22}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2x+2,\ A_{12}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2y,\ \Delta=A_{11}A_{22}-A_{12}^2,$$

то для вычисления этих коэффициентов в найденных стационарных точках составим таблицу:

	M_1	M_2	M_3	M_4
A_{11}	$10>0$	$-10<0$	-2	-2
A_{22}	2	$-4/3$	0	0
A_{12}	0	0	4	-4
Δ	$20>0$	$40/3>0$	$-16<0$	$-16<0$
	min	*max*	*экстремума нет*	*экстремума нет*

Таким образом, в точке $M_1(0;\ 0)$ функция имеет *минимум*, в точке $M_2(-5/3;\ 0)$ – *максимум*, в точках M_3 и M_4 экстремума нет.

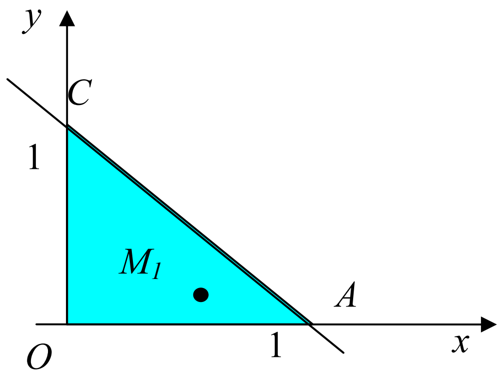


Рисунок 7.2.

Пример 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2+3y^2-x-y$ в области, ограниченной линиями $x=0,\ y=0,\ x+y=1$.

Решение. Изобразим область, ограниченную данными прямыми. Искомая область – треугольник OAC (рисунок 7.2).

1) Определим стационарные точки:

а) Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2+3y^2-x-y\right)'_x=2x-1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2+3y^2-x-y\right)'_y=6y-1.$$

б) Решая систему, найдем стационарную точку

$$\begin{cases}2x-1=0,\\6y-1=0.\end{cases}\quad \begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\[2mm] y=\dfrac{1}{6}.\end{cases}\quad M_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right).$$

Эта стационарная точка принадлежит рассматриваемой области (см. рисунок 7.2). Найдем значение функции в данной точке:

$$z(M_1)=z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}.$$

2) Исследуем функцию на границе области.

а) При x=0 (отрезок OC) имеем $z=3y^2-y,\quad y\in[0;1]$. Эта функция имеет минимум при $y=\frac{1}{6}$, $z\left(\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12}$ (для нахождения минимума найдем производную $\frac{dz}{dy}$ и приравняем ее к нулю: $6y-1=0;\, y=\frac{1}{6}$) и на концах отрезка принимает значения $z(0)=0,\, z(1)=2$. Таким образом, на отрезке AB наибольшее значение $z(1)=2$ и наименьшее значение $z\left(\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12}$.

б) При y=0 (отрезок OA) имеем z=x^2–x, $x\in[0;1]$. Эта функция имеет минимум при $x=\frac{1}{2}$, $z\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ (для нахождения минимума найдем производную $\frac{dz}{dx}$ и приравняем ее к нулю: $2x-1=0;\, x=\frac{1}{2}$) и на концах отрезка принимает значения $z(0)=0,\, z(1)=0$. Таким образом, на отрезке BC наибольшее значение $z(1)=z(0)=0$ и наименьшее значение $z\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

в) При y=1–x (отрезок CA) имеем z=4x^2–6x+2, $x\in[0;1]$. Эта функция имеет минимум при $x=\frac{3}{4}$, $z\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{4}$ (для нахождения минимума найдем производную $\frac{dz}{dx}$ и приравняем ее к нулю: $8x-6=0; x=\frac{3}{4}$) и на концах отрезка принимает значения $z(0)=2, z(1)=0$. Таким образом, на отрезке CA наибольшее значение $z(0)=2$ и наименьшее значение $z\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{4}$.

3) Сравнивая все найденные значения, получаем, что $z_{\text{наим}}=-\frac{1}{3}$ в точке $M_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right)$, $z_{\text{наиб}}=2$ в точке $C\,(0;1)$.

Пример 8**.** Найти градиент функции $z=f(x;y)$ в точке $M(x;y)$ и производную $f(x,y)$по направлению вектора $\overrightarrow{MM_1}$, если $z=x^2-3xy+y^2$, $M(1;2), M_1(4;5)$.

Решение. Воспользуемся определением градиента функции $\overrightarrow{\text{grad}\,z}=\left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right)$. Найдем частные производные в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2-3xy+y^2\right)'_x=2x-3y\big|_{M(1;2)}=2\cdot1-3\cdot2=-4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2-3xy+y^2\right)'_y=-3x+2y\big|_{M(1;2)}=-3\cdot1+2\cdot2=1;$$

Подставим в формулу $\overrightarrow{\text{grad}\,z}\big|_M=\left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(-4;1\right)$.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{MM_1}$: $\overrightarrow{MM_1}=(4-1;5-2)=(3;3)$. Найдем длину вектора $\left|\overrightarrow{MM_1}\right|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. Единичный вектор $\vec{l}$ в направлении вектора $\overrightarrow{MM_1}$:

$$\vec{l}=(\cos\alpha;\cos\beta)=\frac{1}{\left|\overrightarrow{MM_1}\right|}\cdot\overrightarrow{MM_1}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot(3;3)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Для определения производной по направлению найдем скалярное произведение вектора $\overrightarrow{\text{grad}\,z}$ и вектора $\vec{l}$:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\overrightarrow{\text{grad}\,z}\cdot\vec{l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta=-4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Пример 9. Методом наименьших квадратов подобрать функцию $y=ax+b$ по табличным данным и сделать чертеж.

x	0	2	4	6	8	10	12
y	1080	935	724	362	176	43	19

Решение. В соответствие с *методом наименьших квадратов* следует подобрать коэффициенты a и b таким образом, чтобы функция

$$Q(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-ax_i-b\right)^2$$

приняла минимальное значение. Необходимым условием экстремума функции Q является равенство нулю всех частных производных по неизвестным параметрам:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial a}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)x_i=0,\\ \dfrac{\partial Q}{\partial b}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)=0.\end{cases}$$

Упростим систему уравнений:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)x_i=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}y_ix_i-a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}y_i-a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-nb=0.\end{cases}$$

Обозначим: $A=\sum\limits_{i=1}^{n}y_ix_i;\ B=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2;\ C=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i;\ D=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$. Запишем систему и решим ее:

$$\begin{cases}A-aB-bC=0,\\ D-aC-nb=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A-aB-bC=0,\\ b=\dfrac{D-aC}{n},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A-aB-\dfrac{D-aC}{n}C=0,\\ b=\dfrac{D-aC}{n},\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A-aB-\dfrac{DC}{n}+\dfrac{aC^2}{n}=0,\\ b=\dfrac{D-aC}{n},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\left(\dfrac{C^2-nB}{n}\right)=\dfrac{DC-An}{n},\\ b=\dfrac{D-aC}{n},\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a=\dfrac{DC-An}{C^2-nB},\\ b=\dfrac{DC^2-nDB-DC^2+nAC}{nC^2-n^2B},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{DC-An}{C^2-nB},\\ b=\dfrac{-DB+AC}{C^2-nB}.\end{cases}$$

Далее, составим таблицу вычислений:

№	x	y	yx	x^2
1	0	1080	0	0
2	2	935	1870	4
3	4	724	2896	16
4	6	362	2172	36
5	8	176	1408	64
6	10	43	430	100
7	12	19	228	144
$\sum$	42	3339	9004	364

По таблице находим:

$$A=\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = 9004;\ B=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 364;\ C=\sum_{i=1}^{n} x_i = 42;\ D=\sum_{i=1}^{n} y_i = 3339.$$

$$\begin{cases} a=\dfrac{DC-An}{C^2-nB}=\dfrac{3339\cdot 42-9004\cdot 7}{42^2-7\cdot 364}=-98,48; \\ b=\dfrac{-DB+AC}{C^2-nB}=\dfrac{-3339\cdot 364+9004\cdot 42}{42^2-7\cdot 364}=1067,89. \end{cases}$$

Таким образом, искомая функция имеет вид: $y=-98,48\cdot x+1067,89$.

Изобразим на рисунок 7.3 исходные данные (квадратики) и искомую прямую:

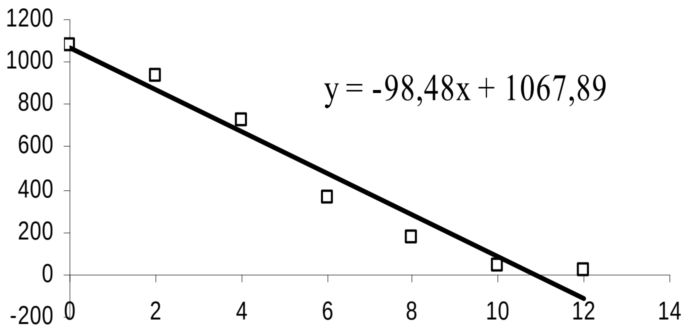


Рисунок 7.3.

7.3. Задания на контрольную работу

Задание 1. Найти все частные производные 1-го порядка:

1. а) $z = 2xy - \operatorname{tg} x + \sqrt{y}$, б) $z = \dfrac{\cos(2x)}{1+y^2}$, в) $z = (1+\operatorname{ctg} y)^{\sqrt{x}}$.

2. а) $z = \dfrac{x^3}{6} - \operatorname{ctg}(xy) + \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, б) $z = \dfrac{\sin(y^3)}{x^4}$, в) $z = (\cos x)^{\ln y}$.

3. а) $z = \operatorname{ctg}(xy) - e^{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{y^7}}$, б) $z = \dfrac{tg(y^4)}{\sqrt{x}}$, в) $z = (\cos y)^{\ln x}$.

4. а) $z = \operatorname{ctg}(xy) - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + e^{-2y^2}$, б) $z = \dfrac{x^4}{\cos 3y}$, в) $z = (1-3^y)^{\ln x}$.

5. а) $z = x^7 - \cos(2xy) + \sqrt{y^3}$, б) $z = \dfrac{e^{1/x}}{y^2}$, в) $z = (\cos x)^{\operatorname{ctg} y}$.

6. а) $z = e^{xy} + \operatorname{tg} x^3 + \sqrt[4]{y}$, б) $z = \dfrac{\ln(1+y^2)}{\sqrt{x}}$, в) $z = (\sin y)^{x^2}$.

7. а) $z = \dfrac{6}{x^3} - \operatorname{ctg}\dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{y^5}}$, б) $z = \dfrac{\sin\sqrt{y}}{1+x}$, в) $z = (\cos 2x)^{1/y}$.

8. а) $z = \operatorname{tg}(4xy) - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} + e^{\frac{-y^2}{4}}$, б) $z = \dfrac{1+x^3}{\cos 6y}$, в) $z = (\ln x)^{\sin y}$.

9. а) $z = xy^2 - \operatorname{tg}\dfrac{x}{3} + \sqrt{y^7}$, б) $z = \dfrac{\sin(4x)}{y^2-4}$, в) $z = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{y}}$.

10. а) $z = \sin(xy) + \dfrac{1}{x^5} + \lg y$, б) $z = \dfrac{\operatorname{ctg}(x^5)}{\sqrt[3]{y^2}}$, в) $z = (1+\ln x)^{1/y}$.

Задание 2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

1. $x^2 - 4y^2 + z^2 + 6x = 0$;
2. $e^{xy} + 4\cos x + z^2 = 0$;
3. $x^2 - \operatorname{tg} y + \cos z + 10x = 0$;
4. $e^{xy^3} + 4\sin z + x^2 = 0$;
5. $x^3 + 5y^2 + z^2 + 8y = 0$;
6. $e^{xy} + 5\sin x + z^3 = 0$;
7. $x^2 + \ln y + \sin z + 9x = 0$;
8. $e^{x^2 y} - 6\cos z + x^3 = 0$;
9. $x^3 - \operatorname{ctg} y + \cos z + 2y = 0$;
10. $e^{xy^2} + 3\ln x + z^3 = 0$.

Задание 3. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков и проверить равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$ для функции $z = f(x;y)$:

1. $z = e^{2x/y}$; 2. $z = \sin\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$; 3. $z = \ln\left(x^2 + 4y^4\right)$;

4. $z = y - \sin(xy)$; 5. $z = \sin\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)$; 6. $z = y\sin(3x - 5y)$;

7. $z = e^{1-x/y}$; 8. $z = \sin\left(x^2 y\right)$; 9. $z = \ln\left(3x^4 + y^5\right)$;

10. $z = y + \cos(xy)$.

Задание 4. Исследовать функцию на экстремум:

1. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$; 2. $z = x^3 + y^3 - 15xy$;
3. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12$; 4. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$;
5. $z = x^3 + xy^2 + 6xy$; 6. $z = x^3 + y^3 + 3xy$;
7. $z = x^3 + y^3 - 3xy$; 8. $z = x^3 + xy^2 + 3xy$;
9. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$; 10. $z = x^3 - y^3 - 12xy$.

Задание 5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции:

1. $z = 6xy - x^2 y - xy^2$ в области, ограниченной линиями x=0, y=0, x+y=12;
2. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в области, ограниченной линиями x=0, y=0, x= –5, y=7;
3. $z = x^2 - 2y^2 + 5$ в области, ограниченной линиями x=1, y= –1, x–y+1=0;
4. $z = xy + x + y$ в области, ограниченной линиями x=0, x= –2, y=0, y= –2;
5. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в области, ограниченной линиями x= –1, y=0, x+y=1;
6. $z = x^2 + 4xy - 2x + 4y$ в области, ограниченной линиями x=0,y=0, 3x–2y+6=0;
7. $z = x^2 + 2y^2 + x - 2y$ в области, ограниченной линиями x= –1, y=1, 2x–2y= –1;
8. $z = 5xy + 10x - y + 1$ в области, ограниченной линиями x=0, x=1, y= –3, y= –1;
9. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в области, ограниченной линиями x=0, y=0, 2x+3y–12=0;
10. $z = x^2 - 4xy - y^2 + 4x$ в области, ограниченной линиями x=0, y=0, 4x–y+4=0.

Задание 6. Найти градиент функции $z = f(x;y)$ в точке $M(x;y)$ и производную по направлению вектора $\overrightarrow{MM_1}$, если

1. $z = x^3 - 3xy + 2y^2$, $M(1;1), M_1(4;6)$;
2. $z = 3x^2 - 2xy + 2y^3$, $M(-1;1), M_1(4;2)$;
3. $z = 5x^2 - 4xy + y^2$, $M(1;-1), M_1(-4;3)$;
4. $z = 3x^3 + 2xy + y^3$, $M(1;1), M_1(4;3)$;
5. $z = x^3 + 3x^2y + y^2$, $M(2;1), M_1(5;6)$;
6. $z = 2x^3 + 4xy^2 + y^2$, $M(2;2), M_1(4;-6)$;
7. $z = 7x^2 + xy + 6y^2$, $M(1;1), M_1(-2;-1)$;
8. $z = x^3 + 4xy^2 + 2y^2$, $M(1;1), M_1(-2;-2)$;
9. $z = x^3 + x^2y - 3y^2$, $M(-1;2), M_1(3;3)$;
10. $z = 5x^2 + 4xy - 7y$, $M(1;-2), M_1(3;5)$.

Задание 7. Методом наименьших квадратов подобрать функцию $y = ax + b$ по табличным данным и сделать чертеж.

1.	x	0	1	1,5	2,1	3
	y	2,9	6,3	7,9	10,0	13,2
2.	x	0	3	6	9	12
	y	0,3	4,1	5,7	13,4	28,5
3.	x	1	2	3	4	5
	y	11,2	9,2	7,9	4,1	2,5
4.	x	1	3	5	7	9
	y	14,1	12,5	9,7	4,6	0,3
5.	x	0	0,5	1	1,5	2
	y	1,2	3,5	4,1	8,5	14,9
6.	x	2	4	6	8	10
	y	7,2	17,3	25,4	38,1	55,6
7.	x	0	0,5	1	1,5	2
	y	1,1	2,3	9,7	16,2	25,4
8.	x	1	4	7	10	13
	y	17,2	8,7	5,6	4,5	3,5
9.	x	1	3	5	7	9
	y	2,1	9,8	13,7	14,5	15,2
10.	x	1	4	7	10	13
	y	23,7	12,5	10,1	8,8	7,1

8. Неопределенный и определенный интегралы

8.1. Неопределенный интеграл

Определение

Функция *F(x)* называется *первообразной* функции *f(x)* на *(a; b),* если *F'(x) = f(x)* для любого $x \in (a;b)$.

Если *F(x)* и *Ф(x)* две первообразные функции *f(x),* то *Ф(x)=F(x)+C*, т. е. две любые первообразные одной и той же функции отличаются на постоянную величину *C*.

Совокупность всех первообразных *F(x) + C* функции *f(x)* называется *неопределенным интегралом* от функции *f(x)* и обозначается символом

$$\int f(x)dx \qquad \text{т.е.}$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (8.1)$$

В равенстве (8.1) $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Нахождение неопределенного интеграла по данной подынтегральной функции есть действие интегрирования. Геометрически неопределенный интеграл представляет собой множество плоских кривых *y = F(x) + C,* которые называют интегральными кривыми.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$
2. $\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C.$
3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$
4. $\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$
5. $\int f(x)dx = \int f(y)dy = \int f(t)dt = \int f(u)du.$

Таблица основных неопределенных интегралов:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1).$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int e^x dx = e^x + C.$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$

10. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$

14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C.$

Основные методы интегрирования неопределенного интеграла

1. Метод подстановки

Если интеграл $\int f(x)dx$ не является табличным, то часто его можно упростить путем введения новой переменной *t*. Пусть $x=\varphi(t)$. Это монотонная и непрерывно дифференцируемая функция на некотором промежутке. Если на указанном промежутке функция $f(x)$ интегрируема, то справедливо:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

После того, как интеграл найден с помощью подстановки, следует возвратиться к первоначальной переменной *x*.

Иногда вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют подстановку $t = \psi(x)$.

Примеры:

а) $\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ б) $\int e^{x^2+1}xdx.$

Решение:

а) Подстановка: $x = t^3$, тогда $dx = 3t^2dt$.

$$\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx =$$

$$\int \frac{e^t 3t^2dt}{t^2} = 3\int e^t dt = 3e^t + C = \left| t = \sqrt[3]{x} \right| = 3e^{\sqrt[3]{x}} + C.$$

б) Подстановка: $t = x^2 + 1$, тогда $dt = 2xdx$, $xdx = \frac{dt}{2}$.

$$\int e^{x^2+1}xdx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C.$$

2. Интегрирование по частям

Если *u(x)* и *v(x)* – дифференцируемые функции, то справедлива формула:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Данную формулу интегрирования по частям применяют в том случае, когда интеграл $\int vdu$ более простой в вычислении по сравнению с $\int udv$.

При этом следует иметь в виду, что если под знаком интеграла стоит произведение многочлена на тригонометрическую или показательную функции, то к *u* следует отнести многочлен, а оставшееся выражение к *dv*. Если же подынтегральная функция содержит сомножителем логарифмическую или обратную тригонометрическую функции, то их следует принимать за *u*, а остальное выражение за *dv*.

Примеры:

а) $\int x\cos xdx,$ б) $\int x^2 \ln xdx.$

*Решение***:**

а) $\int x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x, dv = \cos x dx, \\ du = dx, v = \sin x. \end{matrix} \right| = x\sin x - \int \sin x dx =$

$= x\,sin\,x + cos\,x + C.$

б) $\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, dv = x^2 dx, \\ du = \dfrac{dx}{x}, v = \dfrac{x^3}{3}. \end{matrix} \right| = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \int \dfrac{x^3}{3}\dfrac{dx}{x} =$

$= \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{1}{3}\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{1}{3}\dfrac{x^3}{3} + C.$

3. Интегрирование рациональных дробей

Дроби следующих четырех типов называются *простейшими*:

I. $\dfrac{A}{x - a}$, II. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$,

III. $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$, IV. $\dfrac{Mx+N}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$,

где m, n – натуральные числа, а $ax^2 + bx + c$ не имеет действительных корней.

Интегрирование дробей первых двух типов производится непосредственно. При интегрировании дробей третьего типа могут возникать две ситуации:

а) если выражение $MX + N$ является производной от квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то интеграл берется по формуле (2) таблицы основных интегралов;

б) если же выражение $MX + N$ не совпадает с производной трехчлена $ax^2 + bx + c$, то его следует преобразовать так, чтобы из него можно было выделить производную трехчлена. После этого интеграл представляется в виде суммы двух интегралов, один из которых берется по формуле (2) , а другой интеграл приводятся к табличным интегралам (13-14) путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене.

Интегрирование дроби четвертого типа связано с применением рекуррентной формулы вида:

$$\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^n} = \frac{t}{m^2(2n-2)(t^2+m^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{m^2(2n-2)}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{n-1}}.$$

Рациональная дробь – это дробь вида:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + ... + b_1 x + b_0},$$

имеющая действительные коэффициенты.

Если $m < n$, то дробь называется *правильной*, если же $m \geq n$, то дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ - *неправильная.*

В интересах интегрирования неправильной дроби ее необходимо представить в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)},$$

где $L_{m-n}(x)$ и $R_r(x)$ – многочлены степени $m - n \geq 0$ и r соответственно, причем $r \leq n\text{-}1$, т. е. $\dfrac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ - правильная.

Выделение целой части в дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ производится делением числителя на знаменатель «уголком».

*Пример***.** Выделить целую часть дроби

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}$$

Делим числитель на знаменатель таким образом

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - 3x^2 - 3x - 2 & x^3 - x^2 - 2x \\
- & \overline{} \\
x^4 - x^3 - 2x^2 & x + 1 \\
\hline
\quad x^3 - x^2 - 3x - 2 & \\
- & \\
\quad x^3 - x^2 - 2x & \\
\hline
\qquad\qquad -x - 2 &
\end{array}$$

Следовательно: $\dfrac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 + \dfrac{-x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}.$

Целая часть (многочлен) интегрируется просто. Для интегрирования правильной дроби последнюю нужно разложить на простейшие дроби.

Имеет место следующая теорема о разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.

*Теорема***.** Всякая правильная рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой $Q(x)$ имеет разложение

$$Q_n(x) = c_n(x-a)^k(x-b)^m \ldots (x^2 + px + q)^r (x^2 + p_1x + q_1)^s \ldots,$$

может быть представлена единственным образом в виде суммы конечного числа простейших дробей следующим образом:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{\left(x-a^2\right)}+\ldots+\frac{A_k}{\left(x-a\right)^k}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{\left(x-b\right)^2}+\ldots+\frac{B_m}{\left(x-b\right)^m}+\ldots+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_rx+N_r}{\left(x^2+px+q\right)^r}+$$

$$+\frac{D_1x+E_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{D_2x+E_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{D_sx+E_s}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^s}+\ldots\,.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов

$$A_1, A_2,\ldots, A_k, B_1, B_2,\ldots, B_m, M_1, M_2,\ldots, M_r, N_1, N_2,\ldots, N_r,\ldots$$

поступают следующим образом: приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x у многочлена $P(x)$ и многочлена, который получается в числителе правой части после сложения всех правильных дробей. Этот метод получил название-*метод неопределенных коэффициентов*.

Продолжим рассматривать предыдущий пример:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}=x+1+\frac{-x-2}{x^3-x^2-2x}.$$

Полученную правильную дробь представим в виде суммы простейших дробей

$$\frac{-x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{-x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{\tilde{N}}{x+1}.$$

Приведя правую часть к общему знаменателю, определив дополнительные множители к каждой дроби, формируем числитель правой части и приравниваем его к числителю левой части:

$$-x-2=A\left(x-2\right)\left(x+1\right)+Bx\left(x+1\right)+Cx\left(x-2\right)=$$

$$=(A+B+C)x^2+(-A+B-2C)x-2A.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ -A+B-2C=-1, \\ -2A=-2. \end{cases}$$

Откуда $A=1, B=-\frac{2}{3}, C=-\frac{1}{3}.$

Следовательно:

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}=x+1+\frac{1}{x}-\frac{2}{3(x-2)}-\frac{1}{3(x+1)}.$$

$$\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx=\int xdx+\int dx+\int\frac{dx}{x}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{dx}{3\left(x+1\right)}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x|-\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C=\frac{x^2}{2}+x+\ln\frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}}+C.$$

Пример. Найти интеграл

$$\int \frac{x^3+1}{x^5+2x^3+x}dx.$$

Решение. Дробь $\frac{x^3+1}{x^5+2x^3+x}$ правильная, разложим знаменатель на простейшие сомножители: $x^5+2x^3+x = x(x^4+2x^2+1) = x(x^2+1)^2$.

Дробь $\frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Приведя простейшие дроби к общему знаменателю, и приравнивая числители, получим:

$$x^3+1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x,$$

$$x^3+1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C=1, \\ 2A+B+D=0, \\ C+E=0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $A=1, B=-1, C=1, D=-1, E=-1.$ Следовательно

$$\frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1} + \frac{-x-1}{(x^2+1)^2},$$

тогда:

$$\int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}dx = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1} + \frac{-x-1}{(x^2+1)^2}\right)dx =$$

$$= \int\frac{dx}{x} - \int\frac{x}{x^2+1}dx + \int\frac{dx}{x^2+1} - \int\frac{xdx}{(x^2+1)^2} - \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + arctgx + \frac{1}{2(x^2+1)} - \int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Последний интеграл находим по рекуррентной формуле при $n = 2$ интегрирования простейших дробей четвертого типа:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}arctgx + C.$$

4. Интегрирование тригонометрических функций

а) Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx,$ где m и n – целые числа.

Если хотя бы одно из чисел m и n – нечетное положительное, то применяют подстановку $\cos x = z,$ при m – нечетном и $\sin x = z,$ при n – нечетном.

Пример. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Решение. Применяем подстановку $\sin x = z,\ \cos x dx = dz.$

$$\int z^2\left(1-z^2\right)dz = \int\left(z^2 - z^4\right)dz = \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Если m и n – четные положительные, то степени понижаются с применением формул вида:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \text{и} \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

*Пример***.** Найти интеграл $\int \sin^4 x \cos^2 x dx.$

Решение:

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int\left(\sin x \cos x\right)^2 \sin^2 x dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \frac{1-\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx -$$

$$-\frac{1}{16}\int \sin^2 2x d\left(\sin 2x\right) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Если m и n – четные и хотя бы один из них отрицательный, то применяют подстановку $\mathrm{tg}x = z$ или $\mathrm{ctg}x = z$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx.$

Решение. Применяем рекомендованную подстановку:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \left| \mathrm{tg}\, x = z, x = \mathrm{arctg} z, dx = \frac{dz}{1+z^2} \right| = \int \frac{z^2 dz}{1+z^2} =$$

$$\int \frac{z^2+1-1}{1+z^2} dz = \int dz - \int \frac{dz}{1+z^2} = z - \mathrm{arctg}\, z + \mathrm{C} = \mathrm{tg}\, x - x + \mathrm{C}.$$

б) Интегралы вида

$\int \sin mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx, \int \cos mx \cos nx dx.$

Для нахождения данных интегралов применяют формулы из тригонометрии:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin (m-n)x + \sin (m+n)x\right),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right),$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right).$$

*Пример***.** Найти интеграл $\int \sin 5x \cos 3x dx$

Решение:

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin(5-3)x + \sin(5+3)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2x dx + \frac{1}{2}\int \sin 8x dx = -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 8x}{16} + C.$$

в) Интегралы вида $\int R\left(\sin x, \cos x\right)dx$,

где $R\left(\sin x, \cos x\right)$– рациональная функция относительно sin$x$ и cos$x$. Для нахождения данных интегралов применяют *«универсальную» подстановку*:

$$tg\frac{x}{2} = z, \quad \text{при этом} \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x}$.

Решение: применяя указанные формулы, получим

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2dz}{2+2z} = \int \frac{dz}{1+z} =$$

$$= \ln\left|1+z\right| + C = \ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

5. Интегрирование некоторых иррациональных функций

а) Интегралы вида:

$$\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, ...)dx,$$

$$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, ...\right)dx,$$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, ...\right)dx,$$

где R $(x, y, z, ...)$ – рациональная функция своих аргументов; m_1, n_1, m_2, n_2, … - целые числа; вычисляются с помощью подстановок соответственно

$$x = z^s, ax + b = z^s, \frac{ax + b}{cx + d} = z^s,$$

где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}}$.

Решение: производим подстановку $x + 2 = z^6$, $dx = 6z^5 dz$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}} = \int \frac{6z^5 dz}{z^4 - z^3} = 6\int \frac{z^2}{z-1} dz = 6\int \frac{z^2 - 1 + 1}{z-1} dz =$$

$$= 6\int \left(z + 1 + \frac{1}{z-1} \right) dz = 6\left(\frac{z^2}{2} + z + \ln|z-1| \right) + C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[3]{x+2}}{2} + \sqrt[6]{x+2} + \ln\left(\sqrt[6]{x+2} - 1\right) \right) + C.$$

б) Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx,\ \int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx,\ \int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$$

сводятся к интегралам от рациональной функции относительно *sint* и *cost*, если применить соответственно подстановки:

$x = a\sin t$ или $x = a\cos t$,

$x = a\,\mathrm{tg}\,t$ t или $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$,

$x = a\sec t$ или $x = a\,\mathrm{cosec}\,t$.

Пример. Найти интеграл**:** $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$.

*Решение :*положим $x = \mathrm{tg}\,t$, тогда $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$.

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\left(1+tg^2 t\right)\sqrt{1+tg^2 t}} = \int \cos t dt = \sin t + C.$$

Выразим $\sin t$ через заданную переменную x:

$$\sin t = \mathrm{tg}\,t \cos t = \frac{\mathrm{tg}\,t}{\sec t} = \frac{\mathrm{tg}\,t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Следовательно:

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

8.2. Определенный интеграл и его приложения

Понятие определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Этот отрезок разделим на n произвольных, необязательно равных, частей:

$$a=x_0 < x_1 < \ldots < x_n=b.$$

В этом случае говорят, что произведено *разбиение* отрезка $[a,b]$. На каждом участке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ возьмем произвольную точку ξ_i и вычислим значение функции $f(x)$ в этих точках. Если умножить полученные значения функции $f(\xi_i)$ на длину соответствующего участка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и просуммировать , то получим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

которая называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Обозначим через $\Delta x = \max \Delta x_i$.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел последовательности интегральных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

если он существует, т.е. конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и от выбора точек ξ_i на соответствующих участках и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Здесь число a называется *нижним пределом*, число b называется *верхним пределом* интеграла.

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b \left[C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)\right]dx = C_1\int_a^b f_1(x)dx + C_2\int_a^b f_2(x)dx$.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx$.

4. Если функция $f(x)$ – четная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$,

если функция $f(x)$ – нечетная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и F(x) – какая-либо ее первообразная на этом отрезке, то имеет место следующая формула:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a).$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin 2x dx.$$

Решение:

$$\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin 2x \; dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{0}^{\pi/4} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{1}{2}.$$

Метод замены переменной в определенных интегралах

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема на отрезке $[t_1,t_2]$, где $a=\varphi(t_1)$ и $b=\varphi(t_2)$, то имеет место формула:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx.$$

Решение. Сделаем замену $\sqrt{e^x - 1} = t$. Тогда $x = \ln(1+t^2)$ и $dx = 2tdt/(1+t^2)$. Поскольку при $x=0$ $t=0$ и при $x=\ln 2$ $t=1$, то получим

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\;dx=\left|\begin{array}{ll} t=\sqrt{e^x-1}, & x=0\Rightarrow t=0\\ x=\ln(1+t^2), & x=\ln 2\Rightarrow t=1\\ dx=\dfrac{2t\;dt}{1+t^2} & \end{array}\right|=\int_0^1\frac{2t^2dt}{t^2+1}=$$

$$=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=2(t-arctgt)\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}.$$

Метод интегрирования по частям в определенных интегралах

Теорема. Если функции u=u(x) и v=v(x) непрерывны вместе со своими производными на отрезке [a,b], то имеет место формула:

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu\,.$$

*Пример***.** Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$, б) $\displaystyle\int_1^{e^2}\ln^2 xdx$.

Решение. а) Воспользуемся формулой интегрирования по частям, для этого положим u=x, $dv=e^{-x}dx$, откуда du=dx, $v=-e^{-x}$. Тогда

$$\int_0^1 xe^{-x}dx=\left|\begin{array}{ll} u=x & du=dx\\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x}\end{array}\right|=\left(-x\right)e^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-1}-e^{-x}\Big|_0^1=\frac{e-2}{e}$$

.

б) Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_1^{e^2}\ln^2 xdx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln^2 x, & du=2\ln x\dfrac{dx}{x},\\ dv=dx, & v=x.\end{array}\right|=x\ln^2 x\Big|_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}\ln xdx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x},\\ dv=dx, & v=x.\end{array}\right|=4e^2-2\left(x\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}dx\right)=2\left(e^2-1\right).$$

Вычисление площадей плоских фигур

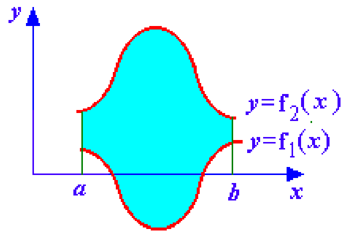


Рисунок 8.1.

Пусть плоская фигура на отрезке $[a,b]$ ограничена графиками двух функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, причем $f_2(x)\geq f_1(x)$ (см. рисунок 8.1). Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx.$$

*Пример***.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x-x^2$, $y=-x$.

*Решение***.** Сделаем чертеж (см. рисунок 8.2). Найдем точки пересечения параболы и прямой:

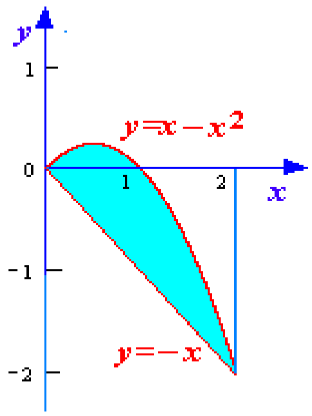


Рисунок 8.2.

$$x-x^2=-x \qquad \begin{cases} x_1=0, \\ x_2=2. \end{cases}$$

Поскольку на отрезке $[0;2]$ $x-x^2\geq -x$, то площадь заданной фигуры будет равна

$$S=\int_0^2 \left[(x-x^2)-(-x)\right]dx=\int_0^2 (2x-x^2)dx=\frac{4}{3}.$$

Замечание. Если функция $f(x)\leq 0$, то определенный интеграл будет меньше нуля. Знак минус означает, что криволинейная трапеция расположена ниже оси Ox и ее площадь будет равна $S=-\int_a^b f(x)dx$.

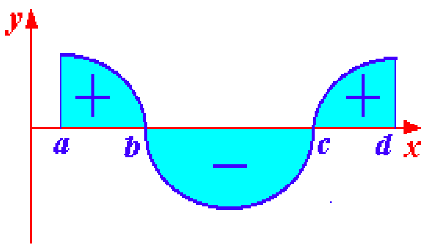


Рисунок 8.3.

Может оказаться, что функция $f(x)$ на отрезке интегрирования несколько раз меняет знак. В этом случае интеграл нужно разбить на сумму интегралов по участкам, на которых подынтегральная функция имеет постоянный знак. Например, площадь фигуры на рисунок 8.3 будет иметь вид:

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_b^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx$$

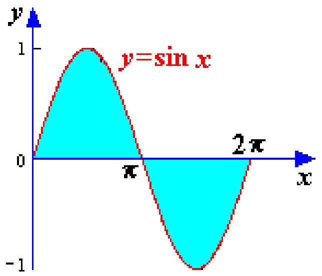


Рисунок 8.4.

Пример. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:

а) $y=\sin x,\ y=0,\ 0\le x\le 2\pi;$

б) $y=x-x^2,\ y=0,\ 0\le x\le 2.$

Решение.

а) Сделаем чертеж (см. рисунок 8.4). Так как при $0\le x\le \pi$ $\sin x\ge 0$ и при $\pi\le x\le 2\pi$ $\sin x\le 0$, то

$$S=\int_0^{\pi}\sin x dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx=4 \text{ (кв. ед.)}.$$

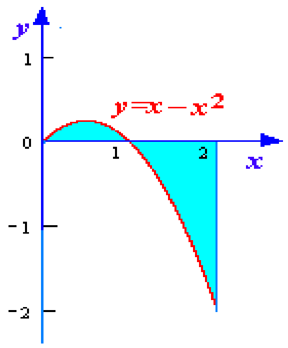


Рисунок 8.5.

б) Сделаем чертеж (см. рисунок 8.5). Найдем точки пересечения параболы с осью Ox: $x-x^2=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0,\\ x_2=1.\end{cases}$

Из рисунка видно, что

$$S=\int_0^1(x-x^2)dx-\int_1^2(x-x^2)dx=1 \text{ (кв. ед.)}.$$

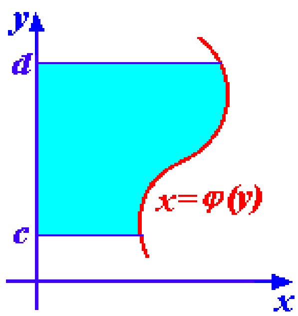


Рисунок 8.6.

Заметим, что криволинейная трапеция может образовываться графиком функции $x=\varphi(y)$ с осью Oy (см. рисунок 8.6). Тогда площадь такой криволинейной трапеции можно записать в виде $S=\int_c^d\varphi(y)dy$.

Такой случай следует иметь ввиду, поскольку это может упростить вычисления.

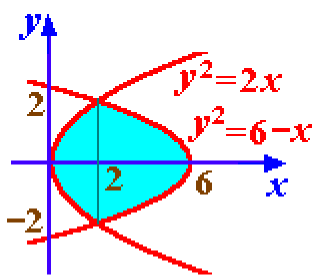


Рисунок 8.7.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами:

$y^2=2x$ и $y^2=6-x$.

Решение. Сделаем чертеж (см. рисунок 8.7). Будем искать площадь данной фигуры относительно оси Oy. Ординаты точек пересечения линий равны $y_1=-2$ и $y_2=2$. Следовательно,

$$S=\int_{-2}^{2}\left[(6-y^2)-\left(\frac{y^2}{2}\right)\right]dy=16 \text{ (кв. ед.)}.$$

Параметрические функции в определенных интегралах

Пусть верхняя граница криволинейной трапеции задана параметрическими функциями: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1\le t\le t_2$, причем $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$. Поскольку площадь криволинейной трапеции задается формулой $S=\int_a^b y(x)dx$ (если $y(x)\ge 0$ на отрезке $[a,b]$), то, производя замену переменной, получим формулу для вычисления площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt\,.$$

*Пример***.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом (рисунок 8.9):

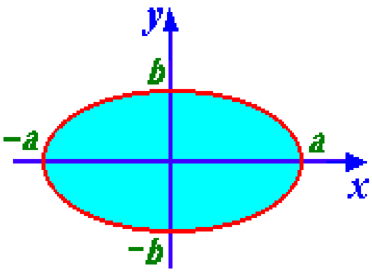


Рисунок 8.9.

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi..$$

*Решение***.** Вычислим площадь верхней половины эллипса, а затем результат удвоим. Здесь x меняется от $-a$ до a, следовательно, t должно изменяться от π до 0. Таким образом,

$$S=2\int_{\pi}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt=-2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t dt=\pi ab\,.$$

*Пример***.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Ox и одной аркой циклоиды (см. рисунок 8.10): $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

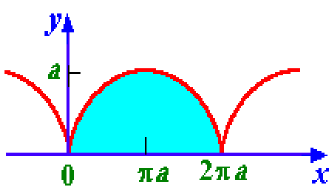


Рисунок 8.10.

*Решение***.** Для получения одной арки циклоиды, достаточно чтобы t изменялось от 0 до 2π. Тогда получим:

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=3\pi a^2.$$

Определенный интеграл в полярной системе координат

Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением: $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, причем функция $\rho(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на $[\alpha,\beta]$. Плоскую фигуру, ограниченную кривой $\rho(\varphi)$ и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β, назовем *криволинейным* *сектором* (рисунок 8.11).

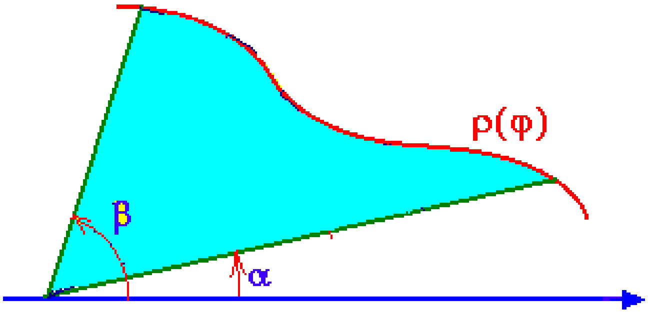


Рисунок 8.11.

Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi. \tag{8.2}$$

*Пример***.** Вычислить площадь ограниченной: а) лемнискатой Бернулли $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$; б) трехлепестковой розой $\rho = a\cos 3\varphi$.

*Решение***.** а) Поскольку $\rho^2 \geq 0$, то $\cos 2\varphi \geq 0$. Отсюда получаем

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \qquad -\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

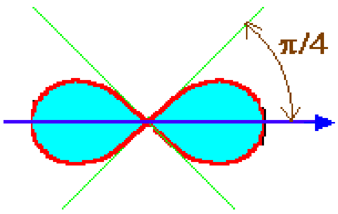


Рисунок 8.12.

где $k \in Z$. Таким образом, данная кривая расположена в двух секторах (см. рисунок 8.12). Для нахождения искомой площади достаточно вычислить четверть площади, а затем умножить ее на 4. Воспользуемся формулой (8.2):

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} \rho^2 d\varphi = 2 \cdot a^2 \int_{0}^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi =$$

$$= 2a^2 \cdot \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = a^2(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = a^2.$$

б) Поскольку $\rho \geq 0$, то $\cos 3\varphi \geq 0$. Тогда получаем:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 3\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3},$$

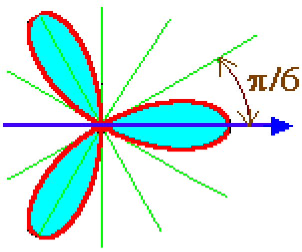


Рисунок 8.13.

где $k \in Z$. Таким образом, данная кривая будет расположена в трех секторах (см. рисунок 8.13). Для нахождения искомой площади достаточно вычислить площадь половины одного "лепестка" и умножить ее на 6:

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/6} \rho^2 d\varphi = 3a^2 \int_{0}^{\pi/6} \cos^2 3\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4}a^2.$$

Вычисление длины дуги плоской кривой

Если кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ – гладкая (т.е. производная $y' = f'(x)$ – непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx. \tag{8.3}$$

При параметрическом задании кривой $x = x(t),\quad y = y(t)$ (здесь $x = x(t),\quad y = y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции) длина дуги кривой, соответствующая монотонному изменению параметра t от t_1 до t_2, вычисляется по формуле:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \tag{8.4}$$

Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина дуги равна:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi. \tag{8.5}$$

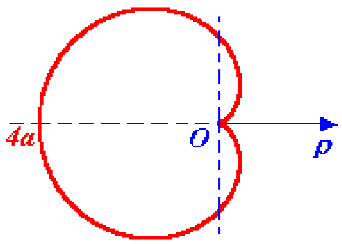


Рис. 8.14.

Пример. Найти длину кардиоиды $\rho = 2a(1-\cos\varphi)$ (рис. 8.14).

Решение. Найдем производную ρ':

$\rho' = \big(2a(1-\cos\varphi)\big)' = 2a\sin\varphi$. Подставляя в формулу (8.5) получим:

$$L = 2\int_0^\pi \sqrt{4a^2\sin^2\varphi + 4a^2(1-\cos\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^\pi \sqrt{4a^2\sin^2\varphi + 4a^2 - 8a^2\cos\varphi + 4a^2\cos^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^\pi \sqrt{8a^2 - 8a^2\cos\varphi}\,d\varphi = 2\cdot 2\sqrt{2}a\int_0^\pi \sqrt{1-\cos\varphi}\,d\varphi = 4\sqrt{2}a\int_0^\pi \sqrt{2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\,d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}\int_0^\pi \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = 8a\cdot 2\cdot\left(-\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\Bigg|_0^\pi = 16a\cdot\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos 0\right) = 16a.$$

Вычисление площади поверхности вращения

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[a,b]$. Тогда площадь поверхности, образованная вращением графика этой функции вокруг оси *Ox,* будет вычисляться по формуле:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\ . \qquad (8.6)$$

*Пример***.** Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox: а) отрезка прямой $y = x\,(0 \le x \le R)$; б) одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

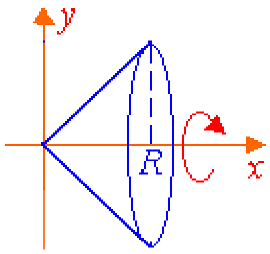


Рисунок 8.15.

Решение. а) Вычислим площадь поверхности, полученной вращением отрезка прямой $y=x\,(0\le x\le R)$ вокруг оси Ox (рисунок 8.15). Найдем производную: $y' = (x)' = 1$. Подставляя в формулу (8.6) получим:

$$S = 2\pi \int_0^R x\sqrt{1+1^2}\,dx = 2\pi\sqrt{2}\int_0^R x dx = 2\sqrt{2}\pi\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^R = \sqrt{2}\pi R^2.$$

б) В параметрической форме формулу (8.6) можно записать в следующем виде:

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(x)]^2}\,dt\ . \qquad (8.7)$$

Тогда площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды вокруг оси Ox, будет равна:

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{(a\sin t)^2 + a^2(1-\cos t)^2}\,dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^3}\,dt = 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^3}\,dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right) d\cos\frac{t}{2} = -16\pi a^2 \left(\cos\frac{t}{2} - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

Объем тела вращения

Если площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, является непрерывной функцией на отрезке $[a;b]$, то объем тела вычисляется по формуле:

$$V = \int_a^b S(x)dx\,. \qquad (8.8)$$

Выражение для функции $S(x)$ получается достаточно просто в случае тел вращения. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x), a\le x\le b$, или $x=\varphi(y), c\le y\le d$, вращается вокруг оси Ox или оси Oy соответственно, то объемы тел вращения вычисляются по формулам:

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx \quad \text{или} \quad V_y=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy. \tag{8.9}$$

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $\rho=\rho(\varphi)$ и лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения равен:

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta \rho^3\sin\varphi d\varphi. \tag{8.10}$$

Пример. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной а) линиями $y=\dfrac{x^2}{2}, x=0, y=2\sqrt{2}$ вокруг оси Oy; б) кардиоидой $\rho=2a(1-\cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

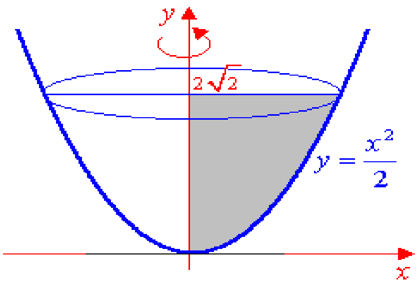


Рисунок 8.16.

Решение. а) Используя формулу (8.9), найдем объем данного тела (рис. 8.16):

$$V_y=\pi\int_0^{2\sqrt{2}} 2ydy=2\pi\cdot\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{2}}=8\pi\ (ед.^3).$$

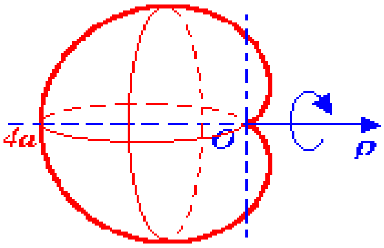


Рисунок 8.17.

б) Используя формулу (8.10), найдем объем данного тела (рис.8.17):

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_0^\pi\left(2a(1-\cos\varphi)\right)^3\sin\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{16a^3}{3}\pi\int_0^\pi(1-\cos\varphi)^3 d(1-\cos\varphi)=$$

$$=\frac{16a^3}{3}\pi\cdot\frac{(1-\cos\varphi)^4}{4}\Bigg|_0^\pi=\frac{16a^3}{3}\pi\cdot 4=\frac{64}{3}\pi a^3=21\frac{1}{3}\pi a^3.$$

8.3 Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются: 1) интегралы с бесконечными пределами – *несобственные интегралы 1-го рода*; 2) интегралы от неограниченных функций – *несобственные интегралы 2-го рода*.

Несобственный интеграл I-го рода от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (8.11)$$

Если этот предел существует и конечен, то интеграл называется *сходящимся*, если же предел не существует или равен бесконечности, то интеграл называется *расходящимся*.

Аналогично определяются:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{a} f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx. \quad (8.12)$$

Если функция имеет бесконечный разрыв в точке c отрезка $[a;b]$ и непрерывна при $a \le x < c$ и при $c < x \le b$, то несобственный интеграл 2-го рода определяется следующим равенством:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (8.13)$$

Несобственный интеграл 2-го рода называется *сходящимся*, если оба предела в правой части существуют и конечны; если же хотя бы один из интегралов не существует или бесконечен, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Пример. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость): а) $\int_{0}^{+\infty} \sin x dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; в) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$.

Решение. а) Согласно формуле (8.12) получим:

$$\int_{0}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} \sin x dx = \lim_{b\to+\infty} (-\cos x)\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\cos b + 1\right) = 1 - \lim_{b\to+\infty} \cos b.$$

Предел не существует и несобственный интеграл расходится.

б) Используя четность подынтегральной функции и формулу (8.12), получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_{0}^{b} = 2\lim_{b\to+\infty} arctgb = 2\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится и равен π.

в) Используя формулу (8.13), получим:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln x\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to+0}(-\ln\varepsilon) = +\infty.$$

Следовательно, несобственный интеграл расходится.

8.4. Задания на контрольную работу

Задание 1. Найти неопределенные интегралы. Первый и второй проверить дифференцированием.

1. а) $\int 2^{-2x+1}dx,$ б) $\int x3^{x}dx,$ в) $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx,$

г) $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x},$ д) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}.$

2. а) $\int \frac{2xdx}{x^2+2},$ б) $\int x^2\sin 3xdx,$ в) $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx,$

г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x},$ д) $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}}.$

3. а) $\int \sin^3 x\cos xdx,$ б) $\int \left(x^2-2x\right)e^{-x}dx,$ в) $\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1},$

г) $\int \frac{dx}{3\cos x+2},$ д) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}.$

4. а) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx,$ б) $\int \left(5-x\right)e^{x}dx,$ в) $\int \frac{x^4+1}{x^2-1}dx,$

г) $\int \operatorname{tg}^2 x\sin^2 xdx,$ д) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}.$

5. а) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx,$ б) $\int \left(3x^2+5\right)\ln xdx,$ в) $\int \frac{dx}{x^3+8},$

г) $\int \operatorname{tg}^6 xdx,$ д) $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx.$

6. а) $\int e^{x^3}x^2dx,$ б) $\int \left(5x+1\right)e^{2x}dx,$ в) $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}dx,$

г) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx,$ д) $\int \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}}.$

7. а) $\int 6x\sin\left(x^2+3\right)dx,$ б) $\int \left(2x-1\right)2^{x}dx,$ в) $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx,$

г) $\int \sin^4 x\cos^4 xdx,$ д) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx.$

8. а) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx,$ б) $\int x5^{x}dx,$ в) $\int \frac{4x(x-2)}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2}dx,$

г) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$, д) $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx.$

9. а) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctgx}}$, б) $\int\left(x^3+5x-1\right)\ln x dx,$ в) $\int \frac{2x}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}dx,$

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx,$ д) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx.$

10. а) $\int e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2}$, б) $\int x^2\cos x dx,$ в) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}dx,$

г) $\int \sin^4 x dx,$ д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}.$

Задание 2. Вычислить определенный интеграл.

1. а) $\int\limits_0^9 \frac{dx}{3+\sqrt{x}}$, б) $\int\limits_0^{\pi/2} x\cdot\cos 3x dx$.

2. а) $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)dx}{x}$, б) $\int\limits_0^{1/2} x\cdot e^x dx$.

3. а) $\int\limits_2^{e^3} \frac{dx}{x\ln x}$, б) $\int\limits_0^{\pi/2} x\cdot\sin x dx$.

4. а) $\int\limits_1^2 \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+3}$, б) $\int\limits_0^1 x\cdot 5^x dx$.

5. а) $\int\limits_1^{e^2} \frac{\sqrt{2+\ln x}dx}{x}$, б) $\int\limits_0^{1/2} \arcsin 2x dx$.

6. а) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{4+x^3}$, б) $\int\limits_0^{1/2} \operatorname{arctg} 2x dx$.

7. а) $\int\limits_0^1 x\left(2+x^2\right)^7 dx,$ б) $\int\limits_0^{\pi/4} x^2\sin x dx$.

8. а) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$, б) $\int\limits_0^1 \ln(x+2)dx$.

9. а) $\int\limits_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} 2x dx}{1+4x^2}$, б) $\int\limits_0^2 x\cdot\ln x dx$.

10.а) $\int\limits_{1}^{2}\frac{e^{2x}dx}{1+e^{2x}}$, б) $\int\limits_{0}^{1}x\cdot\operatorname{arctg}x dx$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

1. а) $\int\limits_{0}^{\infty}x\cdot e^{-x^2}dx$, б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2-4x+3}$.

2. а) $\int\limits_{-\infty}^{0}x^2\cdot e^{x^3}dx$, б) $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{-3}\frac{xdx}{(x^2+1)^3}$, б) $\int\limits_{0}^{2}\frac{xdx}{x^2-4}$.

4. а) $\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$, б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

5. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{arctgxdx}{x^2+1}$, б) $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{(x-2)^2}$.

6. а) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$, б) $\int\limits_{3}^{4}\frac{dx}{(x-3)^3}$.

7. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\ln x dx}{x}$, б) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x^2-x-2}$.

8. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+1)^2}$, б) $\int\limits_{0}^{1}\ln x dx$.

9. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-4x+7}$, б) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{(x-2)^2}$.

10. а) $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$, б) $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Задание 4. Задачи на геометрические приложения определенного интеграла.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y=x^2+1$, $y=\frac{1}{2}x^2$ и прямой $y=5$.

2. Вычислить длину дуги параболы $y^2=4x$ от вершины до точки $M(1;2)$.

3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси $0y$

криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 4$, прямыми $y = 1$, $y = 2$ и осью $0y$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$, $y = 2\left(y \ge 2 \right)$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной уравнением в полярных координатах $r = cos2\varphi$.

6 Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} x = 5\left(t - \sin t \right) \\ y = 5\left(1 - \cos t \right) \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$.

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 2\left(1 - \cos\varphi \right)$, $-\pi \le \varphi \le -\pi/2$.

8. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси $0x$ фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$.

9. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси $0y$ фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 2x + 1$, $y = 0$, $x = 2$.

10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 3\left(1 + \cos\varphi \right)$.

9. Дифференциальные уравнения

9.1. Краткие сведения из теории

9.1.1. Общие сведения

Дифференциальное уравнение (ДУ) – уравнение, связывающее аргумент (переменную) x, функцию $y=f(x)$ и ее производные y', y'', ..., $y^{(n)}$ или дифференциалы этой функции.

ДУ называется *обыкновенным*, если функция $y=f(x)$ является функцией одной переменной.

Порядок ДУ определяется порядком наивысшей производной (дифференциалом), входящей в уравнение.

ДУ n-го порядка имеет общий (неявный) вид:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Решением ДУ (интегралом ДУ) называется функция $y=f(x)$, которая при подстановке в ДУ обращает его в тождество.

Общее решение ДУ – функция, которая содержит столько неопределенных (произвольных) постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, каков порядок ДУ. Геометрически – это семейство кривых.

Частное решение ДУ – решение, получаемое из общего решения, если каждой неопределенной постоянной придать конкретное численное значение. Геометрически – это одна кривая из семейства кривых.

9.1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

В неявном виде дифференциальное уравнение первого порядка представляется как: $F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right) = 0$, где x – независимая переменная, y – искомая функция. В явном виде ДУ первого порядка представляется как: $y'=f(x,y)$.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x)g(y)$ или $f_1(x)g_1(y)dy + f_2(x)g_2(y)dx = 0$, где $f(x), g(y), f_1(x)$, $g_1(y)$, $f_2(x)$, $g_2(y)$ – непрерывные функции, называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.* Оно позволяет разделить переменные x и y относительно знака равенства. Это разделение производят так, чтобы дифференциалы переменных dx и dy находились в числителях. В этом случае можно произвести *квадратурное интегрирование* (по x и по y одновременно), а, значит, решить ДУ.

Так квадратурное интегрирование для первого ДУ представляется в виде: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$, а для второго ДУ: $\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = -\int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx$.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x,y)$ или $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется *однородным относительно x и y*, если функции $f(x,y), P(x,y), Q(x,y)$ есть *однородные функции одинакового измерения* (нулевого измерения) переменных *x* и *y*.

Однородной функцией нулевого измерения называется функция *f*(*x*,*y*), если $f(x,y) = f(\lambda x,\lambda y) = \lambda^0 f(x,y)$, где λ – действительное число.

Например:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}; f(\lambda x,\lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{\lambda x \lambda y} = \frac{\lambda^2 (x^2 - y^2)}{\lambda^2 xy} = \frac{x^2 - y^2}{xy} = f(x,y).$$

В этом случае ДУ решается подстановкой $y = tx$, где $t = t(x)$ есть функция. Тогда исходное ДУ преобразуется в ДУ с разделяющимися переменными *t*, *x*. Определив *t*(*x*) , необходимо вернуться к первоначальной функции $y = t(x) \cdot x$.

Дифференциальное уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$ называется *линейным неоднородным уравнением*. Это ДУ линейное, потому что *y* и y' находятся в первой степени, а неоднородное - потому что правая часть не равна нулю.

Оно решается подстановкой $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Этой подстановкой первоначальное ДУ преобразуется в два ДУ с разделяющимися переменными: одно с переменными *v* и *x*, другое с переменными *u* и *x*. После нахождения функций $u(x), v(x)$ необходимо вернуться к первоначальной функции $y = uv$.

Дифференциальное уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)y^a$, где *a* — действительное число называется *уравнением Бернулли*. Во всех случаях оно сводится к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-a}$. При *a*=0, *a*=1 уравнение становиться неоднородным линейным.

9.1.3. Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка

ДУ n-го порядка называется ДУ вида $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Обычно проще решается ДУ, если оно задано в форме, разрешенной относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}).$$

Решать такие ДУ удается достаточно редко.

Основной метод решения ДУ n-го прядка — метод *последовательного понижения порядка производной*, т. е. метод последовательного перехода к ДУ низшего порядка.

Рассмотрим этот метод для нелинейных ДУ (линейные ДУ рассмотрены дальше) второго порядка.

ДУ второго порядка общего вида $y'' = f(x, y, y')$ решаются проблематично.

Некоторые частные случаи ДУ второго порядка позволяют довести метод понижения порядка до конца. Ниже приводятся эти случаи.

1. $y'' = f(x)$. Общее решение находится двукратным интегрированием. Действительно:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = f(x), \int \frac{d(y')}{dx} dx = \int f(x) dx, y' = \frac{dy}{dx} = \int f(x) + C_1,$$

$$\int \frac{dy}{dx} dx = y = \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) dx = \iint f(x) dx^2 + \int C_1 dx + C_2 =$$

$$= \iint f(x) dx^2 + C_1 x + C_2.$$

2. $y'' = f(y)$. Применяют подстановку: $y'_x = p(y)$.

Несмотря на то, что $y = y(x)$ есть функция от x, в правой части вида ДУ отсутствует переменная x. Поэтому при подстановке в ДУ новой переменной p необходимо учитывать, что

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (p(y))'_x = (p(y(x)))'_x =$$

$= \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy} p = p'_y p(y)$. Такая подстановка позволяет понизить порядок первоначального ДУ до первого порядка относительно переменной p. В результате решения этого уравнения найденное $p(y)$ подставляют в формулу $y'_x = p(y)$ и, решая второе ДУ первого порядка относительно x, находят решение исходного ДУ.

3. $y'' = f(y')$. Применяют подстановку $y'_x = p(x)$.

В правой части ДУ в явном виде отсутствует переменная y. Поэтому $y''_{xx} = (y'_x)'_x = p'_x(x)$. Тогда первоначальное ДУ преобразуется в ДУ первого порядка относительно p вида $p'_x = f(p)$. Решение этого ДУ $p(x)$ подставляют во второе ДУ первого порядка относительно *x:* $y'_x = p(x)$, решение которого и есть решение ДУ второго порядка.

4. $y'' = f(x,y')$. В правой части явно отсутствует y. Применяем подстановку $y'_x = p(x)$ и $y''_{xx} = p'_x(x)$. ДУ решается аналогично случаю 3.

5. $y'' = f(y,y')$. В правой части явно отсутствует x. Применяем подстановку $y'_x = p(y)$ и $y''_{xx} = p'_y p(y)$. ДУ решается аналогично случаю 2.

9.1.4. Линейные ДУ с постоянными коэффициентами.

Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

называется *линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами* (правая часть равна нулю).

Для нахождения общего решения дифференциального уравнения составляется *характеристическое уравнение*, которое получают заменой производных соответствующими степенями переменной k, а сама функция заменяется единицей:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

В зависимости от корней характеристического уравнения существует три вида общего решения дифференциального уравнения.

1. Если корни характеристического уравнения $k_1, k_2, \ldots k_n$ действительные и простые (не кратные), то решение ДУ имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \cdots C_n e^{k_n x}.$$

2. Если корни $k_1, k_2, \ldots$ действительные и имеют соответственно кратность $l_1,\ l_2, \ldots$, то решение ДУ имеет вид:

$$y = \left(C_1 + C_2 x + \cdots + C_{l_1} x^{l_1 - 1}\right) e^{k_1 x} + \left(D_1 + D_2 x + \cdots + D_{l_2} x^{l_2 - 1}\right) e^{k_2 x} + \cdots.$$

3. Если корни $k_1, k_2, \ldots$ простые комплексные сопряженные

$$k_1 = a_1 \pm b_1 i, k_2 = a_2 \pm b_2 i, \cdots,$$

то решение ДУ имеет вид:

$$y = e^{a_1 x}(A_1 \cos b_1 x + B_1 \sin b_1 x) + e^{a_2 x}(A_2 \cos b_2 x + B_2 \sin b_2 x) + \cdots.$$

Случай кратных комплексных сопряженных корней не рассматриваем.

Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

называется *линейным неоднородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами* (правая часть не равна нулю).

Общее решение данного уравнения может быть найдено с помощью двух методов.

Первый метод – *метод вариации постоянных (метод Лагранжа)*.

Правую часть ДУ приравнивают к нулю и находят общее решение однородного ДУ (по корням характеристического уравнения):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n .$$

Общее решение первоначального неоднородного ДУ находят в виде:

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \cdots + C_n(x) y_n .$$

Постоянные $C_1, C_2, ..., C_n$ варьируют (обращают в функции), которые
находят из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \cdots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \cdots + C_n' y_n' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Второй метод – *метод решения ДУ со специальной правой частью*.

Если метод Лагранжа носит универсальный характер, то второй метод применяется тогда, когда правая часть ДУ имеет специальный вид:

$$f(x) = e^{ax}\left(P_{m_1}(x)\cos bx + Q_{m_2}(x)\sin bx\right).$$

Здесь приведен общий случай специального вида правой части, где *a,b*– действительные числа, P_{m_1}, Q_{m_2} – многочлены от *x* степени m_1, m_2 $(m_1 = m_2)$.

При различных значениях *a, b, m* правая часть может иметь всевозможные частные варианты:

$f(x) = 7, (a = 0, b = 0, m_1 = m_2 = 0).$

$f(x) = 3x^2 - 4, (a = 0, b = 0, m_1 = 2, m_2 = 0).$

$f(x) = e^{-5x}, (a = -5, b = 0, m_1 = m_2 = 0).$

$f(x) = 2x\cos 3x - 4\sin 3x, (a = 0, b = 3, m_1 = 1, m_2 = 0).$

Правая часть ДУ может также состоять из суммы различных вариантов специального вида.

Тогда общее решение неоднородного ДУ находится по формуле:

$$y = \overline{y} + y^*, \text{ где}$$

$\overline{y}-$ общее решение соответствующего однородного ДУ (определяется в зависимости от корней характеристического уравнения),

y^* – частное решение данного неоднородного ДУ, которое находится с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов предполагает:

1. Произвести выбор предполагаемого частного решения $y_{\ddot{i}}^*$, содержащего неопределенные коэффициенты.

2. Подставить предполагаемое частное решение $y_{\ddot{i}}^*$ в исходное ДУ.

3. Приравнять неопределенные коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x или при одинаковых функциях левой части к соответствующим коэффициентам правой части ДУ $f(x)$ и составить, таким образом, систему уравнений. Решить эту систему относительно неопределенных коэффициентов.

4. Подставить найденные коэффициенты в предполагаемое частное решение $y_{\ddot{i}}^*$, т.е. окончательно определить само частное решение y^*.

Из всех пунктов метода неопределенных коэффициентов более подробно остановимся на первом.

Выбор предполагаемого частного решения $y_{\ddot{i}}^*$

При выборе $y_{\ddot{i}}^*$ необходимо соблюдать два правила.

Правило первое. $y_{\ddot{i}}^*$ должен повторять полный вид правой части ДУ $f(x)$, не смотря на часто встречающиеся частные сокращенные случаи $f(x)$.

Эта «полнота» относится к многочленам и тригонометрическим функциям. При этом многочлены должны содержать неопределенные коэффициенты.

Например. $f(x) = 3x^2$. Правая часть ДУ содержит сокращенный многочлен второй степени. Значит, предполагаемое частное решение должно содержать развернутый, полный многочлен второй степени с неопределенными коэффициентами: $y_{\ddot{i}}^* = Ax^2 + Bx + C$.

Если $f(x) = x^2 \cos 3x$, то

$$y_{\ddot{i}}^* = \left(Ax^2 + Bx + C\right)\cos 3x + \left(Dx^2 + Ex + F\right)\sin 3x.$$

Правило второе. $y^*_{\ddot{i}}$ должен быть таким, чтобы в общем решении неоднородного ДУ $y = \overline{y} + y^*_{\ddot{i}}$ или $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y^*_{\ddot{i}}$ не было ни одной любой линейно зависимой пары слагаемых. Для выполнения этого правила нужно к выбранному по правилу 1 предполагаемому частному решению $y^*_{\ddot{i}}$ добавлять необходимое количество множителей *x*. Последнее зависит от величины и количества корней характеристического уравнения.

Рассмотренные правила выбора предполагаемого частного решения $y^*_{\ddot{i}}$ можно оформить в виде таблицы, в которой $P_m(x), Q_m(x)-$ многочлены от *x* степени *m* могут быть сокращенными, а $R_m(x), T_m(x)-$ полные, развернутые многочлены от *x* степени *m* с неопределенными коэффициентами.

	Вид правой части дифференциального уравнения *f(x)*	Вид соответствующего предполагаемого частного решения $y^*_{\ddot{i}}$
	$f(x) = P_m(x) -$ многочлен от *x*, степени *m* , где *m* может быть равным 0.	$y_n^* = R_m(x)$, если 0 не является корнем характеристического уравнения,
		$y_n^* = x^k R_m(x)$, если 0 является корнем характеристического уравнения с кратностью *k*.
	$f(x) = P_m(x)e^{ax}$, где *m* может быть равным 0.	$y_n^* = R_m(x)e^{ax}$, если *a* не является корнем характеристического уравнения,
		$y_n^* = x^k R_m(x)e^{ax}$, если *a* является корнем характеристического уравнения с кратностью *k*.
	$f(x) = (P_{m_1}(x)\cos bx + Q_{m_2}(x)\sin bx)e^{ax}$ где m_1, m_2 могут быть любыми и разными.	$y_n^* = (R_m(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)e$, если *a*+*bi* не является корнем характеристического уравнения, а *m*-наибольшая из степеней m_1, m_2.
		$y_n^* = x^k(R_m(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)e^{ax}$, если *a*+*bi* является корнем характеристического уравнения с кратностью *k*.

9.1.5. Системы дифференциальных уравнений

Совокупность уравнений вида

$$\begin{cases} F_1(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n')=0 \\ F_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n')=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n')=0 \end{cases},$$

называется *системой дифференциальных уравнений первого порядка.*

Если система принимает вид

$$\begin{cases} y_1' = P_{11}(x)y_1 + P_{12}(x)y_2 + \dots + P_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' = P_{21}(x)y_1 + P_{22}(x)y_2 + \dots + P_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = P_{n1}(x)y_1 + P_{n2}(x)y_2 + \dots + P_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases},$$

то она называется *линейной***.** Если функции $f_1(x), f_2(x),\dots, f_n(x)$ тождественно равны нулю, то линейная система является *однородной***.**

Одним из методов решения однородной линейной системы ДУ первого порядка является *метод исключения неизвестных***.** Из уравнений последовательно исключают неизвестные функции, и система сводится к одному дифференциальному уравнению *n*-го порядка относительно одной неизвестной функции. Это уравнение решается по известным правилам, найденную функцию подставляют в предыдущее ДУ и находят следующую функцию, подобно методу Гаусса при решении СЛАУ.

Другой метод-*метод Эйлера*. Аналогично тому, как обыкновенное линейное однородное ДУ I-го порядка с постоянными коэффициентами типа $y' = ky$ имеет решение в виде экспоненты, так Эйлер предложил искать решение однородной линейной системы ДУ I-го порядка в виде экспонент. Ниже метод будет подробно рассмотрен на конкретном примере, т.к. изложение для общего случая не дает возможность полностью раскрыть сущность метода.

9.2. Решение типовых примеров и задач.

Задание 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $5xy' + x^2 y = 0$.

Решение. Данное уравнение можно представить в виде

$$5x\frac{dy}{dx} + x^2 y = 0 \quad \text{или} \quad 5\frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

Разделяем переменные x и y относительно знака равенства:

$$5\frac{dy}{dx} = -xy, \qquad 5\frac{dy}{y} = -xdx.$$

Применяем квадратурное интегрирование и получаем общее решение.

$$5\int\frac{dy}{y} = -\int xdx \qquad 5\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + C.$$

$$\ln|y|^5 = -\frac{x^2}{2} + C, \qquad y^5 = e^{-\frac{x^2}{2}+C}, \; y = \sqrt[5]{e^{-\frac{x^2}{2}+C}}.$$

Замечание 1. Квадратурное интегрирование предусматривает одновременное решение двух неопределенных интегралов по x и по y. Казалось бы, при каждом неопределенном интегрировании необходимо проставлять неопределенную постоянную C, и тогда появятся две неопределенные постоянные C_1 и C_2, но общее решение ДУ первого порядка предусматривает наличие только одной неопределенной постоянной. По этой причине одну из постоянных (любую) устраняют.

Замечание 2. Неопределенное интегрирование производится по общей формуле: $\int f(x)dx = F(x) + C$. В интересах простоты решения дифференциальных уравнений в частных случаях , а именно, в случаях, когда встречаются интегралы $\int\frac{dy}{y}$ и (или) $\int\frac{dx}{x}$, последние рекомендуют решать как $\int\frac{dy}{y} = \ln|y| - \ln|C| = \ln\left|\frac{y}{C}\right|$, $\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln|C| = \ln\left(|xC|\right)$. При этом выражение $\ln|C|$ равносильно неопределенной постоянной C общего решения интеграла.

С учетом замечаний решим наше ДУ:

$$5\int\frac{dy}{y} = -\int xdx, \quad 5\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\frac{x^2}{2}, \quad \left(\left|\frac{y}{C}\right|\right)^5 = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad . \; y = C\sqrt[5]{e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

Задание 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $2x^2y' = y^2 + xy$.

*Решение**.*** Разделим на x^2 правую и левую части уравнения, получим

$$2y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}.$$

Убеждаемся, что в правой части ДУ находится однородная функция $f(x, y)$ нулевого измерения относительно x и y.

$$f(\lambda x,\lambda y) = \left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)^2 + \frac{\lambda y}{\lambda x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} = f(x,y).$$

Применяем подстановку $y = xt$, тогда $y' = t + xt'$ и уравнение принимает вид:

$$2(t + xt') = t^2 + t \text{ или } 2xt' = t^2 - t.$$

Разделим переменные

$$\frac{2dt}{t(t-1)} = \frac{dx}{x}.$$

Решаем

$$\int \frac{2dt}{t(t-1)} = 2\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dt = 2\int \frac{dt}{t-1} - 2\int \frac{dt}{t} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$2\left(\ln|t-1| - \ln|t|\right) = \ln|xC|, \qquad \ln\left(\frac{t-1}{t}\right)^2 = \ln|xC|, \qquad \left(\frac{t-1}{t}\right)^2 = Cx.$$

Возвращаемся к переменной y $\left(t = \frac{y}{x}\right)$:

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right)^2 = Cx.$$

Если есть возможность, то находим решение в явном виде:

$$y = \frac{x}{1 - \sqrt{Cx}}.$$

Задание 3. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$8y' - \frac{5y}{3x} = 18x, \; y(1) = 1.$$

*Решение**.*** Разделим на 8 правую и левую части уравнения, получим

$$y' - \frac{5}{24}\frac{y}{x} = \frac{9}{4}x.$$

Это линейное неоднородное ДУ первого порядка.

Делаем замену $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$ и уравнение принимает вид:

$$u'v + uv' - \frac{5}{24}\frac{uv}{x} = \frac{9}{4}x \quad \text{или} \quad u'v + u\left(v' - \frac{5}{24}\frac{v}{x}\right) = \frac{9}{4}x\,. (*)$$

Выражение в скобках приравниваем к нулю и получаем первое ДУ первого порядка с разделяющимися переменными *v* и *x*.

$$v' - \frac{5}{24}\frac{v}{x} = 0\,.$$

Решаем его, разделяя переменные:

$$\frac{dv}{v} = \frac{5}{24}\frac{dx}{x}, \qquad 24\int\frac{dv}{v} = 5\int\frac{dx}{x}, \qquad 24\ln|v| = 5\ln|x|, \qquad v = x^{\frac{5}{24}}\,.$$

Неопределенную постоянную *C* опускаем аналогично замечанию 1.

Подставляем полученное значение v в уравнение (*) и получаем второе ДУ первого порядка с разделяющимися переменными u и x.

$$u'x^{\frac{5}{24}} + u\cdot 0 = \frac{9}{4}x \qquad\qquad u' = \frac{9}{4}x^{1-\frac{5}{24}}\,.$$

Решаем его, разделяя переменные

$$\frac{du}{dx} = \frac{9}{4}x^{\frac{19}{24}}, \quad du = \frac{9}{4}x^{\frac{19}{24}}dx, \quad \int du = \frac{9}{4}\int x^{\frac{19}{24}}dx\,, \quad u = \frac{9}{4}\frac{x^{1+\frac{19}{24}}}{1+\frac{19}{24}} + C$$

$$u = \frac{54}{43}x^{\frac{43}{24}} + \tilde{N}.$$

Возвращаемся к переменной *y:*

$$y = uv = x^{\frac{5}{24}}\left(\frac{54}{43}x^{\frac{43}{24}} + C\right) = \frac{54}{43}x^2 + Cx^{\frac{5}{24}}\,.$$

Получили

$$y = \frac{54}{43}x^2 + Cx^{\frac{5}{24}}\,.$$

Найдем частное решение ДУ в соответствии с начальными условиями (задача Коши).

Подставим начальные условия для того, чтобы найти неопределенный коэффициент *C*

$$1 = \frac{54}{43}\cdot 1^2 + C\cdot 1^{\frac{5}{24}} \text{ или } C = 1 - \frac{54}{43} = -\frac{11}{43}\,.$$

Окончательный ответ:

$$y = \frac{54}{43}x^2 - \frac{11}{43}x^{\frac{5}{24}}\,.$$

Задание 4. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' + y' = 3$.

Решение. Перепишем ДУ в виде:

$$y'' = -\frac{y'}{x} + \frac{3}{x}.$$

В правой части ДУ явно отсутствует y. Для уменьшения порядка ДУ применяем подстановку $y'_x = p(x)$ и $y''_{xx} = p'_x(x)$. Тогда:

$$p'_x = -\frac{p(x)}{x} + \frac{3}{x}, \qquad \frac{dp}{dx} = -\frac{p-3}{x}.$$

Получили первое ДУ первого порядка с разделяющимися переменными p и x. Разделяя переменные, находим $p(x)$.

$$\frac{dp}{p-3} = -\frac{dx}{x},\ \int\frac{dp}{p-3} = -\int\frac{dx}{x},\ \ln|p-3| = -\left(\ln\left(C_1|x|\right)\right),\ \ln|p-3| = \ln\frac{1}{C_1|x|},$$

$$p-3 = \frac{1}{C_1 x}, \quad p(x) = \frac{1}{C_1 x} + 3.$$

Возвращаемся к переменной y, получаем второе ДУ первого порядка с разделяющимися переменными y, x и решаем его.

$$y'_x = \frac{1}{C_1 x} + 3, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{C_1 x} + 3, \quad dy = \left(\frac{1}{C_1 x} + 3\right)dx,$$

$$\int dy = \int\frac{1}{C_1 x}dx + \int 3dx,\ y = \frac{1}{C_1}\int\frac{dx}{x} + 3\int dx, \quad y = \frac{1}{C_1}\ln\left(C_2|x|\right) + 3x.$$

Задание 5. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 6y = 4x^2$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, соответствующее однородному дифференциальному уравнению $y'' + y' - 6y = 0$. Оно имеет вид:

$$k^2 + k - 6 = 0.$$

Корни этого уравнения $k_1 = 2,\ k_2 = -3$. Общее решение соответствующего однородного уравнения будет:

$$\overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Предполагаемое частное решение неоднородного ДУ повторяет полный вид правой части ДУ, т.к. в характеристическом уравнении нет нулевых корней: $y_i^* = Ax^2 + Bx + C$.

Дифференцируем это уравнение дважды и подставим полученные производные в исходное уравнение:

$$\left(y_i^*\right)'_x = 2Ax + B, \qquad \left(y_i^*\right)''_{xx} = 2A$$

$$2A+2Ax+B-6Ax^2-6Bx-6C=4x^2.$$

Приравнивая коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x слева и справа, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2: & -6A=4 \\ x: & 2A-6B=0 \\ x^0: & 2A+B-6C=0 \end{cases}$$

Получаем $A=-\dfrac{2}{3}$, $B=-\dfrac{2}{9}$, $C=-\dfrac{7}{27}$. Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y^*=-\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{7}{27}.$$

Общее решение ДУ: $y=\overline{y}+y^*=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}-\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{2}{9}x-\dfrac{7}{27}$.

Теперь, используя начальные условия, найдем неопределенные коэффициенты:

$$y(0)=C_1e^{2\cdot 0}+C_2e^{(-3)\cdot 0}-\frac{7}{27}=1. \qquad \begin{cases} C_1+C_2=\dfrac{34}{27}, \\ 2C_1-3C_2=-\dfrac{16}{9}. \end{cases}$$

$$y'(0)=2C_1e^{2\cdot 0}-3C_2e^{(-3)0}-\frac{2}{9}=-2.$$

Решение СЛАУ: $C_1=-\dfrac{10}{27}$, $C_2=\dfrac{44}{27}$.

Решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, имеет вид:

$$y=-\frac{10}{27}e^{2x}+\frac{44}{27}e^{-3x}-\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{7}{27}.$$

Задание 6. Найти решение дифференциального уравнения $y''+4y'+13y=x\cos 3x$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0)=0{,}49, y'(0)=0{,}36$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение и решаем его.

$$k^2+4k+13=0, \qquad k_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}=-2\pm j3.$$

Общее решение однородного ДУ представляет собой:

$$\overline{y}=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

Предполагаемое частное решение неоднородного ДУ имеет вид:

$$y_i^*=(Ax+B)\cos 3x+(Cx+D)\sin 3x.$$

Здесь имеет место повторение правой части ДУ, но в полном виде без дополнительных множителей.

Находим неопределенные коэффициенты согласно изложенному в 9.1.4 методу.

$$\left(y_{i}^{*}\right)' = A\cos 3x - 3\sin 3x(Ax+B) + C\sin 3x + 3\cos 3x(Cx+D) =$$
$$= \cos 3x(A + 3Cx + 3D) + \sin 3x(C - 3Ax - 3B).$$
$$\left(y_{i}^{*}\right)'' = -3\sin 3x(A + 3D + 3Cx) + 3C\cos 3x + 3\cos 3x(C - 3B - 3Ax) - 3A\sin 3x =$$
$$= \cos 3x(6C - 9B - 9Ax) + \sin 3x(-6A - 9D - 9Cx).$$
$$\cos 3x(6C - 9B - 9Ax) + \sin 3x(-6A - 9D - 9Cx) +$$
$$+ \cos 3x(4A + 12D + 12Cx) + \sin 3x(4C - 12B - 12Ax) +$$
$$+ \cos 3x(13B + 13Ax) + \sin 3x(13D + 13Cx) = x\cos 3x.$$
$$\begin{array}{r} x\cos 3x: \\ x\sin 3x: \\ \cos 3x: \\ \sin 3x: \end{array}\left\{\begin{array}{c} -9A + 12C + 13A = 1, \\ -9C - 12A + 13C = 0, \\ 6C - 9B + 4A + 12D + 13B = 0, \\ -6A - 9D + 4C - 12B + 13D = 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{c} 4A + 12C = 1, \\ 4C - 12A = 0, \\ 4A + 4B + 6C + 12D = 0, \\ -6A - 12B + 4C + 4D = 0. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{c} A = 0{,}1 \\ B = -0{,}01 \\ C = 0{,}3 \\ D = -0{,}18. \end{array}\right.$$

Общее решение неоднородного ДУ равно:

$$y = \overline{y} + y^{*} = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + (0{,}1\cdot x - 0{,}01)\cos 3x + (0{,}3\cdot x - 0{,}18)\sin 3x$$

Найдем значения C_1, C_2, соответствующие начальным условиям.

$$y' = -2e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + e^{-2x}(-3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x) + 0{,}1\cos 3x -$$
$$-(0{,}1x - 0{,}01)3\sin 3x + 0{,}3\sin 3x + (0{,}3x - 0{,}18)3\cos 3x.$$

$$y(0) = C_1 - 0{,}01 = 0{,}49, \qquad C_1 = 0{,}5,$$
$$y'(0) = -2C_1 + 3C_2 + 0{,}1 - 0{,}54 = 0{,}36. \qquad C_2 = 0{,}6.$$

Частное решение ДУ, соответствующее начальным условиям, имеет вид:

$$y = e^{-2x}(0{,}5\cos 3x + 0{,}6\sin 3x) + (0{,}1x - 0{,}01)\cos 3x + (0{,}3x - 0{,}18)\sin 3x.$$

*Задание 7***.** Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}.$$

Решение. Решение произведем двумя методами.

а) *Метод замены переменных:*

Выразим из первого уравнения

$$y = \frac{1}{4}(x' - 5x)$$

и продифференцируем его:

$$y' = \frac{1}{4}(x'' - 5x').$$

Подставим полученные выражения во второе уравнение системы:

$$\frac{1}{4}(x''-5x')=2x-2\cdot\frac{1}{4}(x'-5x).$$

Приводим подобные, помножив на 4:

$$x''-3x'-18x=0.$$

Таким образом, получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, решаем его. Составим характеристическое уравнение, соответствующие однородному дифференциальному уравнению: $x''-3x'-18x=0$.

Оно имеет вид:

$$k^2-3k-18=0.$$

Это уравнение имеет корни $k_1=-3,\ k_2=6$, поэтому общее решение соответствующего однородного ДУ представляет собой:

$$x=C_1e^{-3x}+C_2e^{6x}.$$

Подставим полученный *x* в *y*, выраженный из первого уравнения системы дифференциальных уравнений:

$$y=\frac{1}{4}((C_1e^{-3x}+C_2e^{6x})'-5(C_1e^{-3x}+C_2e^{6x})),$$

Делаем преобразования и получаем :

$$y=-2C_1e^{-3x}+\frac{1}{4}C_2e^{6x}.$$

Общее решение системы принимает вид

$$\begin{cases} x=C_1e^{-3x}+C_2e^{6x} \\ y=-2C_1e^{-3x}+\frac{1}{4}C_2e^{6x} \end{cases}.$$

б) Решаем систему *методом Эйлера.*

Ищем частные решения системы в виде экспонент:

$$x=p_1e^{kx},\quad y=p_2e^{kx}.$$

Здесь пока неизвестны ни коэффициенты p_1, p_2, ни коэффициент k в показателях степени. Дальнейшие исследования позволяют найти их, а, значит, и решение системы ДУ.

Возьмем производные от функций и сами функции и подставим их в исходную систему:

$$\begin{cases} kp_1e^{kx}=5p_1e^{kx}+4p_2e^{kx} \\ kp_2e^{kx}=2p_1e^{kx}-2p_2e^{kx} \end{cases}.$$

Есть возможность сократить на e^{kx}:

$$\begin{cases} (5-k)p_1+4p_2=0 \\ 2p_1-(2+k)p_2=0 \end{cases}.$$

Получили однородную СЛАУ, в которой неизвестными являются
p_1, p_2 , а коэффициенты при них также пока неизвестны, т.к. неизвестно k.

Тривиальное нулевое решение этой СЛАУ нас, естественно, не устраивает, т.к. решение системы ДУ обращается в ноль. Нам нужно иметь ненулевое решение, которое имеет место при условии, что определитель СЛАУ равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 4 \\ 2 & -2-k \end{vmatrix} = 0 .$$

Это условие позволит определить значение k, при котором p_1 и p_2 не являются нулями. Одновременно это условие называют *характеристическим уравнением* системы ДУ.

$$(5-k)(-2-k)-2\cdot 4=0 \ ; \qquad k^2-3k-18=0 .$$

Данное квадратное уравнение имеет два корня: $k_1=-3, k_2=6$.

Итак, имеются два значения k, при которых однородная СЛАУ имеет ненулевые решения. Последовательно подставим эти значения k в СЛАУ и решим ее.

$$k_1=-3 . \qquad \begin{cases} (5+3)p_1+4p_2=0, \\ 2p_1-(2-3)p_2=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 8p_1+4p_2=0, \\ 2p_1+p_2=0. \end{cases}$$

Если второе уравнение левую и правую части умножить на 4, то получится первое уравнение. Это значит, что одно (любое) из них лишнее. Имеет место совместная неопределенная СЛАУ (имеет множество решений). Так и должно быть при отыскании ненулевого решения однородной СЛАУ.

$$2p_1+p_2=0; \qquad p_2=-2p_1 .$$

Одна неизвестная выражается через другую. Давая произвольные значения одной переменной, получают соответствующие значения другой переменной. Но p_1, p_2 являются коэффициентами при экспонентах предполагаемых решениях системы ДУ, общее решение которой предусматривает наличие неопределенных, произвольных постоянных C_1, и C_2. Поэтому естественно положить $p_1=C_1$, тогда $p_2=-2C_1$. В этом случае первое частное решение системы ДУ сформируется как

$$x_1=C_1e^{-3x}; \qquad y_1=-2C_1e^{-3x} .$$

Индексы «1» в решении системы ДУ не случайны. Получено первое частное решение системы ДУ, соответствующее первому условию k_1=-3 ненулевого решения однородной СЛАУ.

Второе условие k_2=6 приведет ко второму частному решению системы ДУ.

$$k_2=6 \qquad \begin{cases} (5-6)p_1+4p_2=0, \\ 2p_1-(2+6)p_2=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} -p_1+4p_2=0, \\ 2p_1-8p_2=0. \end{cases} \qquad p_1=4p_2 .$$

Пусть $p_1=C_2$, тогда $p_2=\frac{1}{4}\tilde{N}_2$.

$$x_2 = C_2 e^{6x}; \qquad y_2 = \frac{1}{4} C_2 e^{6x}.$$

Общее решение системы ДУ:

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2, \\ y = y_1 + y_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{6x}, \\ y = -2C_1 e^{-3x} + \frac{1}{4} C_2 e^{6x}. \end{cases}$$

Задача 8. Найти кривую, проходящую через точку (2;1), если угловой коэффициент касательной к ней в любой ее точке вдвое больше абсциссы точки касания.

*Решение****.*** Угловой коэффициент касательной равен производной функции, задающую искомую кривую. Получаем уравнение

$$y' = 2x.$$

Ищем решение этого дифференциального уравнения.

$$y = x^2 + C.$$

Найдем неопределенный коэффициент: $y(2) = 1$. Получаем

$$2^2 + C = 1,$$
$$C = -3.$$

Искомая кривая имеет вид $y = x^2 - 3$.

9.3. Задания на контрольную работу

Задание 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

1. а) $xy' + y = 0.$ б) $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + 3\frac{y}{\ln x} = 0.$
2. а) $x\frac{dy}{dx} - 3y = 0.$ б) $\cos^2 xy' = tgx.$
3. а) $x^3 y' + 6y = 0.$ б) $x\ln y \cdot y' + 2y\ln x = 0.$
4. а) $xy' = 2y.$ б) $\frac{8x}{\sin^2 y} y' + tgy = 0.$
5. а) $\sin y \frac{dy}{dx} = 3.$ б) $\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} + 2\sqrt{1-y^2} = 0.$
6. а) $(1+x)y' + y = 0.$ б) $(1+x^2)^3 y' + yx = 0.$
7. а) $(1+x^2)y' = (1+y^2).$ б) $(1+\cos x)y' = 6y\sin x.$
8. а) $\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} + 2\sqrt{1-y^2} = 0.$ б) $\frac{x}{\cos^2 y}\cdot\frac{dy}{dx} + ctgy = 0.$
9. а) $x^3 y' = 8y^3.$ б) $\frac{tgydy}{\cos xdx} + \cos^2 y = 0.$
10. а) $(3+y)y' + 3x = 0.$ б) $x\ln xy' + y\ln y = 0.$

Задание 2. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

1. а) $x^2y' = x^2 + y^2 + xy$, $y(1) = 1$, б) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$, $y(1) = 1$.
2. а) $xy' = y(\ln x - \ln y)$, $y(0) = 1$, б) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{e^{2x^2}}{x}$, $y(1) = -1$.
3. а) $(6xy + x^2)y' + y^2 + 2xy = 0$, $y(0) = 2$, б) $y' + \frac{6y}{x} = \frac{e^{3x^2}}{x}$, $y(1) = 2$.
4. а) $x^2y' = x^2 + y^2 + xy$, $y(1) = 1$, б) $7y' + \frac{6y}{x} = 6\frac{e^{-x^2}}{x}$, $y(1) = 3$.
5. а) $(x^2 - xy)y' = -y^2$, $y(-1) = 1$, б) $y'x + y = -x$, $y(-1) = 1$.
6. а) $(x^2 + y^2)dx = 2xydy$, $y(1) = 3$, б) $3y'x + y = 3x^2$, $y(1) = 3$.
7. а) $(x^2 - 2y^2)dx = -2xydy$, $y(-1) = 1$, б) $5y'x + 6y = -x^3$, $y(1) = 1$.
8. а) $2xydx + (y^2 - 2x^2)dy = 0$, $y(1) = -1$, б) $7y'x + 3y = 5x$, $y(1) = 1$.
9. а) $(x^2 - xy + y^2)dx + (xy - 2x^2)dy = 0$, $y(1) = 0$, б) $x^2y' = y + x$, $y(-1) = 3$.
10. а) $x^2y' = 4x^2 + y^2 + 4xy$, $y(1) = 1$, б) $x^2y' = 5y - x$, $y(1) = 2$.

Задание 3. Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $y'' + 2x(y')^2 = 5$.
2. $tgxy'' = 2y'$.
3. $xy'' + 2y' = 0$.
4. $xy'' + y' + x = 0$.
5. $y''tg7x = 7y'$.
6. $y''x\ln x = y'$.
7. $tgxy'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$.
8. $x^3y'' + x^2y' = 5$.
9. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x$.
10. $xy'' + y' = 2x + 5$.

Задание 4. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

1. а) $y'' + 2y' - 15y = -48e^{-x}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 8$,
   б) $y'' + 4y = 4x^2 + 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$,
   в) $y'' - 2y' + y = -2e^x \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
2. а) $y'' + 4y = -15\cos 2x$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 4$,
   б) $y'' - 6y' - 7y = 10x^2 - 2x + 1$, $y(0) = 1{,}5$, $y'(0) = 3$,
   в) $y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
3. а) $y'' - y' + 20y = -2\sin x + \cos x$ $y(0) = 3$, $y'(0) = 8$,
   б) $y'' - 4y' + 13y = 10x + 5$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$,

в) $y'' - 6y' + 9y = 2e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

4. а) $y'' + 2y' - 3y = -21\sin 2x + 12\cos 2x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 13$,

б) $y'' + 2y' + 26y = 26x^2 + 30x + 4$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$,

в) $y'' - 2y' + y = 2e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

5. а) $y'' + 4y' + 3y = 12\cos 3x - 6\sin 3x$, $y(0) = -7$, $y'(0) = 8$,

б) $y'' + 4y' + 5y = 5x + 29$, $y(0) = 6$, $y'(0) = -1$,

в) $y'' - 8y' + 16y = -e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.

6. а) $y'' - y = 15e^{2x} + x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$,

б) $y'' + 2y' + 2y = -2\sin 2x + 4\cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$,

в) $y'' + 6y' + 9y = -4e^x \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

7. а) $y'' + 2y' + 2y = -2(\cos x + \sin x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,

б) $y'' + 6y' + 10y = 17 + 5x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$,

в) $y'' + 12y' + 36y = 10e^{-x}\cos 5x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

8. а) $y'' + y' = 18\cos 2x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 5$,

б) $y'' + 4y' + 5y = 10x + 33$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 0$,

в) $y'' + 2y' + y = -5e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

9. а) $y'' + 2y' + 2y = -9x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 10$,

б) $y'' - y = -2\cos x$, $y(\pi/2) = 0$, $y'(\pi/2) = 0$,

в) $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$

10. а) $y'' + y' - 2y = -6x$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 6$,

б) $y'' - 2y' + 5y = 2\sin x - 4\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$,

в) $y'' + 2y' + y = -10e^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Задание 5. Решить систему дифференциальных уравнений

1. $\begin{cases} x' = 5x + 3y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = 5x + 3y, \\ y' = 2x - 2y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 15x + 9y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = -3x - y, \\ y' = x - y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = 5x + 3y, \\ y' = 4x - 2y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = -10x - 6y, \\ y' = -4x + 2y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = 5x + 3y, \\ y' = 6x - 3y. \end{cases}$

Задание 6.

1. Определить и построить кривую, проходящую через точку $A(-2;4)$, если отрезок MN любой касательной к ней, заключенный между осями координат, делится точкой касания P пополам.
2. Определить в зависимости от времени координаты точки, движущейся по прямой, если на нее действует сила в направлении движения, пропорциональная времени, с коэффициентом k_1=3г*см/с^3.
3. Найти скорость движения точки, если известно, что ее ускорение пропорционально кубу скорости с коэффициентом k=-5 и в начальный момент времени ее скорость равна 1 $м/с$.
4. Определить зависимость угла поворота маховика, задерживаемого тормозом, от времени, если известно, скорость вращения маховика прямо пропорциональна времени с коэффициентом $k=-0.6,$ и в начальный момент времени угол равен нулю.
5. Найти кривую, у которой все нормали проходят через точку(3;-2).
6. Известно, что скорость уменьшения массы вещества, при радиоактивном распаде, пропорциональна его количеству с коэффициентом k=-5, найти закон изменение массы вещества от времени, если известно, что в начальный момент масса вещества составляла 300 г.
7. Пусть, население страны возрастает на 2% в год. Найти закон численности населения от времени, если зависимость численности населения страны прямо пропорционально росту населения.
8. Моторная лодка движется со скоростью 30 км/ч. Какова скорость лодки через три минуты, после выключения мотора, если лодка движется против течения реки, скорость которой 2 км/ч?
9. Скорость распада радия пропорциональна его массе. Половина массы распадается в течении 1600 лет. Какой процент массы радия распадается за 100 лет?
10. В течение, какого времени тело, нагретое до температуры 100^0, охладится до 30^0 при температуре окружающей среды 20^0, если до 60^0 оно охладилось за 10 минут? По закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

10. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.

Общая методология

Кратные (двойные, тройные), криволинейные и поверхностные интегралы, как и обыкновенный однократный (определённый) интеграл служат для вычисления различных величин. Всех их объединяет общий метод определения как пределов соответствующих интегральных сумм.

Суть метода:

- искомая величина разбивается произвольно на большое число малых элементов. Эти элементы настолько малы, что с точностью до малых высшего порядка их можно вычислить по известным геометрическим или физическим формулам;
- определяется приближённое значение каждого элемента и путём суммирования всех элементов находится приближённое значение всей искомой величины в виде интегральной суммы;
- находится предел этой интегральной суммы, который и даёт точное значение искомой величины.

Для обыкновенного однократного (определённого) интеграла определение сводилось к нахождению предела интегральной суммы, распространяющейся на прямолинейный отрезок изменения одной переменной. В более сложных задачах вычисление какой- либо величины сводится к определению предела интегральной суммы, распространяющейся или на плоскую область изменения двух переменных- двойной интеграл, или на пространственную область изменения трёх переменных- тройной интеграл, или вдоль дуги некоторой кривой- криволинейный интеграл, или по некоторой поверхности- поверхностный интеграл.

При дальнейшем изложении мы будем возвращаться к данному методу определения указанных интегралов в интересах выяснения их геометрических или физических смыслов, т.е. выяснения величин, которых они вычисляют.

Из общего метода определения перечисленных интегралов как предела интегральной суммы следуют их общие свойства. Отметим самые основные, необходимые для вычисления этих интегралов:

1. Интеграл от суммы равен сумме интегралов:
$$\int\limits_{(P)}(U_1 \pm U_2)dp = \int\limits_{(P)} U_1 dp \pm \int\limits_{(P)} U_2 dp.$$
2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:
$$\int\limits_{(P)} CUdp = C\int\limits_{(P)} Udp,\ (c = const).$$
3. Область интегрирования можно делить на части:
$$\int\limits_{(P)} Udp = \int\limits_{(p_1)} Udp + \int\limits_{(p_2)} Udp + ... + \int\limits_{(p_n)} Udp, \qquad p = p_1 + p_2 + ... + p_n.$$

4. Интеграл от единицы равен мере области интегрирования:

$$\int\limits_{(P)} dp = P\ .$$

Мера области интегрирования P есть мера длины, площади или объёма, в зависимости от того, рассматривается однократные (линейные, криволинейные), двойные (поверхностные) или тройные (объёмные) интегралы.

5. Если рассматриваемые переменные размерные, то

$$\left[\int\limits_{(P)} U dp\right] = [U][P].$$

11. Двойной интеграл

11.1. Определение

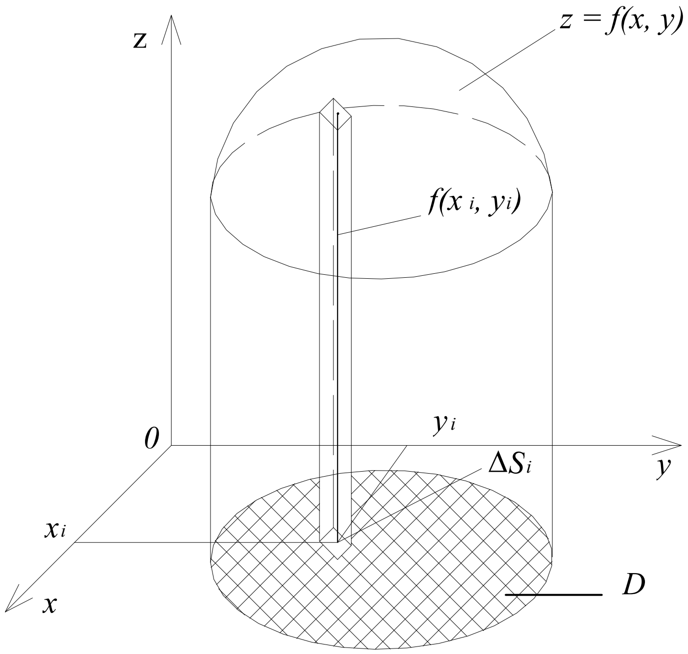


Рисунок 11.1.

Двойным интегралом от функции *f(x,y)* по области *D* называется предел интегральной суммы

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ diam\Delta S_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta S_i =$$

$$= \int_D f(x,y)dS = \iint_D f(x,y)dxdy,$$

где *f(x,y)* – непрерывная функция (гладкая поверхность), определённая в области *D*,

$\Delta S_{.i}$ – площадь *i*-того малого элемента, на которые разбита плоская область *D*,

n – количество малых элементов, на которые разбита, плоская область *D*,

$\left(i=\overline{1,n}\right)$, x_i, y_i – координаты точки, принадлежащей области $\Delta S_{.i}$: $(x_i; y_i) \in \Delta S_{.i}$, $f(x_i, y_i)$– значение функции в точке (x_i, y_i) (рисунок. 11.1)

Элементарное слагаемое $f(x_i, y_i)\ \Delta S_i$ в интегральной сумме есть объём элементарного цилиндра с площадью основания ΔS_i и высотой $f(x_i, y_i)$. Интегральная сумма даст приближённое значение, а её предел – точное значение объёма тела.

Геометрический смысл двойного интеграла – это есть объём тела, ограниченного сверху («шапка») поверхностью z= *f(x,y)*, с боков – цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси *Oz*, а направляющая является замкнутой кривой, ограничивающей область *D*, снизу – плоскостью $z = 0$.

Если *f(x, y)* есть поверхностная плотность распределения массы плоского тела $\left[\frac{кг}{м^2}\right]$, то $f(x_i, y_i)\Delta S_{.i}$ есть масса элементарного, плоского куска этого тела, интегральная сумма – приближённое значение, а её предел – точное значение массы плоского тела.

Физический смысл двойного интеграла – это есть масса плоского тела с поверхностной плотностью распределения массы *f(x, y)*.

11.2. Вычисление двойного интеграла

Перепишем двойной интеграл в различных тождественных выражениях:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_D\left[\int f(x,y)dx\right]dy = \int_D\left[\int f(x,y)dy\right]dx.$$

Видно, что двойной интеграл вычисляется через двукратный или повторный: сначала вычисляется внутренний (в скобках), затем внешний интеграл. При этом порядок интегрирования (внутренний интегрируется по *x*, внешний – по *y* или наоборот *dydx)* на результат не влияет, но может повлиять на трудность (простоту) вычислений.

Прежде чем вычислять двойной интеграл необходимо обязательно построить рисунок (чертёж) области интегрирования *D*. Это позволит правильно сформировать расчётный интеграл.

Пусть область *D* построена в прямоугольной системе координат.

Определение. Область *D* называется *правильной (выпуклой)* в направлении переменной интегрирования, если прямая, проходящая через любую внутреннюю точку области *D* параллельно оси переменной интегрирования, пересекает границы области *D* не более чем в 2-х точках.

Область *D* – правильная в направлении переменной *y* может быть задана в виде:

$D = \{(x, y) \in R^2 : x \in [a,b], y_1(x) \le y_2(x)\}$, где функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяют неравенству $y_1(x) \le y_2(x)$, $x \in [a,b]$.

Область *D* правильную в направлении *x* можно задать аналогично.

Правила вычисления двойного интеграла в прямоугольной системе координат

1. Вычисление внутреннего интеграла

- Внутренний интеграл берётся (вычисляется) по той переменной (*x* или *y*) для которой область интегрирования *D* правильная. Если это правило нельзя выполнить для всей области *D* последнюю прямыми линиями (что не обязательно) разбивают на части $D_1, D_2, ..., D_n$, которые будут правильными в направлении выбранной переменной интегрирования и весь расчёт интеграла сначала производится по этим частям, а затем производится суммирование (см. раздел 10, свойство 3).

- Пределами интегрирования внутреннего интеграла являются функции выбранной переменой интегрирования в зависимости от другой переменой. Нижний предел- функция, график которой есть граница области D при вхождении в эту область стрелки, указывающей направление возрастания выбранной переменной интегрирования. Верхний предел- функция, график которой есть граница области D при выходе указанной стрелки из области D.
- Нижний и верхний пределы интегрирования – функции- должны быть заданы одним аналитическим выражением, характеризующим соответствующие границы области D (границы должны быть гладкими, без изломов). Если это правило не удаётся реализовать, разбивают область D на части (обычно с помощью прямых, параллельных координатным осям и проходящих через точки излома), удовлетворяющие этому правилу, и дальнейший расчёт двойного интеграла производить согласно свойству 3 раздел 10.
- Вычисление внутреннего интеграла производить по известным правилам расчёта определённого интеграла, при этом переменную, не участвующую в интегрировании, считать постоянной величиной.

Результатом расчёта внутреннего интеграла является функция одной переменной, не участвующей в интегрировании.

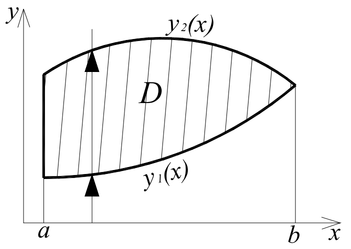
2. Вычисление внешнего интеграла

Это обычный определённый интеграл по оставшейся переменной интегрирования, пределы которого – числа – концы проекции области D на ось оставшейся переменной интегрирования. Нижний предел – меньшее число, верхний предел – большее число.

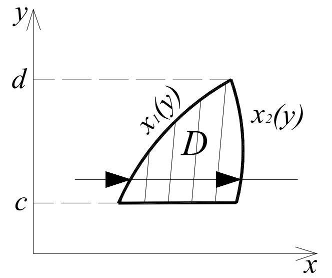
Результат вычисления двойного интеграла – число (объём тела или массы плоской фигуры). На рис 11.2. приводятся различные варианты расчёта двойного интеграла, соответствующие перечисленным правилам.

Пусть область D построена в полярной системе координат. Напомним связь прямоугольных и полярных координат: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, где r – полярный радиус, φ-полярный угол, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le \infty$.

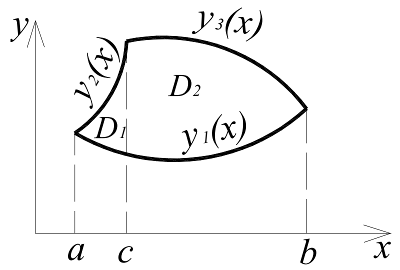
В двойном интеграле произойдёт замена переменных интегрирования x, y на новые переменные φ, r по известным формулам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, при этом $dxdy = rdrd\varphi$ (доказательство не приводим).



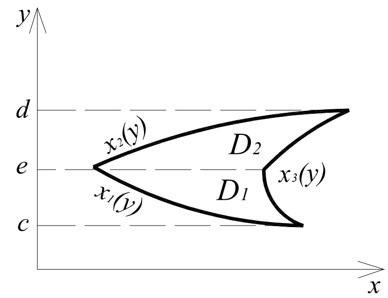
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$



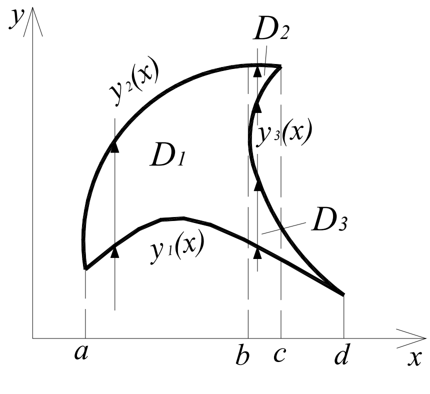
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$



$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \int_a^c dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy + \int_c^b dx \int_{y_1(x)}^{y_3(x)} f(x,y)dy$$



$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \int_c^e dy \int_{x_1(y)}^{x_3(y)} f(x,y)dx + \int_e^d dy \int_{x_2(y)}^{x_3(y)} f(x,y)dx$$



$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3} = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy + \int_b^c dx \int_{y_3(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy + \int_b^d dx \int_{y_1(x)}^{y_3(x)} f(x,y)dy$$

Рисунок 11.2.

В некоторых случаях такая замена переменных упрощает подынтегральную функцию, аналитическое выражение области интегрирования, что приводит к облегчению расстановки пределов и, самое главное, упрощает вычисление самого интеграла.

Правила вычисления двойного интеграла в полярной системе координат

1. Вычисление внутреннего интеграла.

- Внутренний интеграл однозначно берётся по переменной r, при этом область D, должна быть правильной (выпуклой), т.е. полярный радиус проведённый через любую внутреннюю точку области D пересекает её не более в двух точках. Если область D окажется неправильной, то с помощью дополнительных полярных радиусов разбить область D на правильные части D_1, D_2, ..., D_n , вычислить интеграл по этим частям и сложить согласно свойству 3, раздел 10.
- Пределами интегрирования внутреннего интеграла являются функции $r(\varphi)$. Нижний предел – функция $r_1(\varphi)$, график которой есть граница области D при вхождении в эту область возрастающего полярного радиуса (в частном случае это ноль, если точка (0; 0) входит в область D). Верхний предел – функция $r_2(\varphi)$, график которой есть граница области D при выходе указанного полярного радиуса из области D.
- Нижний и верхний пределы интегрирования – функции – должны быть заданы одним аналитическим выражением (границы области D должны быть гладкими). Если это правило не соблюдается, разбить область D полярными радиусами на части D_1, D_2, ..., D_n , удовлетворяющие этому правилу и произвести расчёт интеграла по свойству 3.
- Вычисление внутреннего интеграла произвести аналогично такому же пункту вычисления в прямоугольной системе координат.

2. Вычисление внешнего интеграла.

Это обычный определённый интеграл по переменной φ, пределы которого φ_1 - нижний, φ_2 - верхний есть полярные углы между которыми заключена область D.

На рис. 11.3. представлены варианты расчёта двойного интеграла в полярной системе координат согласно приведённым правилам.

11.3. Некоторые приложения двойных интегралов

Эти приложения основаны на геометрическом и физическом смыслах двойного интеграла.

Двойной интеграл применяется для вычисления следующих величин.

1. Вычисление объёма V тела (см. геометрический смысл).

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

2. Вычисление площади S плоской фигуры D.

$$S = \iint\limits_D dxdy; \; S = \iint\limits_D rdrd\varphi \quad \text{(полярная система).}$$

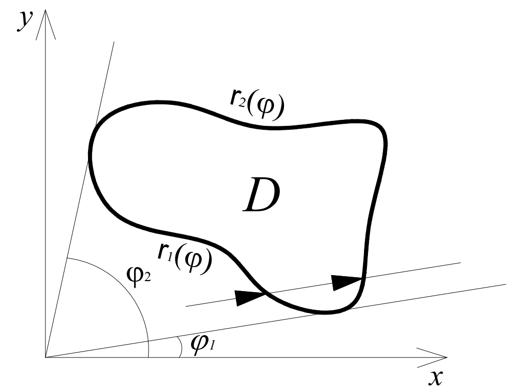
3. Вычисление массы m плоского тела (пластинки) с поверхностной плотностью распределения массы $f(x, y)$.

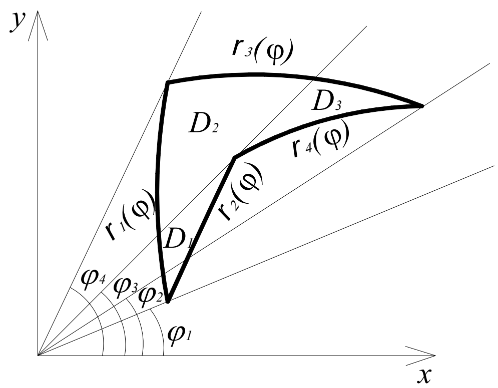
$$m = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

4. Вычисление координат (x_c, y_c) центра массы m плоского тела D.

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D xf(x, y)dxdy}{m}; \; y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_D yf(x, y)dxdy}{m},$$

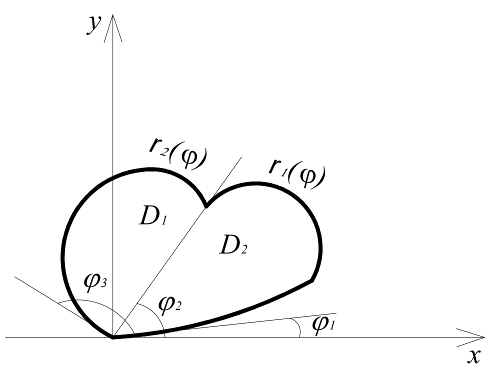
где M_x , M_y – статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy.





$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r, \varphi)rdr$$

$$\iint\limits_D = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2} + \iint\limits_{D_3} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_3} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r, \varphi)rdr + \int\limits_{\varphi_3}^{\varphi_4} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_3(\varphi)} F(r, \varphi)rdr + \int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_3} d\varphi \int\limits_{r_4(\varphi)}^{r_3(\varphi)} F(r, \varphi)rdr$$



$$\iint\limits_D = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{0}^{r_1(\varphi)} F(r,\varphi)rdr + \int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_3} d\varphi \int\limits_{0}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi)rdr$$

Рисунок 11.3.

5. Вычисление моментов инерции I_x, I_y, I_o относительно осей Ox, Oy и начала координат плоского тела D.

$$I_x = \iint_D y^2 f(x,y)dxdy\,;$$

$$I_y = \iint_D x^2 f(x,y)dxdy\,;$$

$$I_o = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2) f(x,y)dxdy\,.$$

11.4. Типовые примеры решения двойных интегралов

Напомним, что для расчёта любых примеров и задач на двойные интегралы нужно обязательно построить область интегрирования D, а затем руководствоваться правилами расчёта.

Пример1. Составить двукратный интеграл от функции $f(x,y)$ по областиD, если $f(x, y)$ задана в области D, ограниченной кривыми $y^2 = 2x$; $x - y - 4 = 0$.

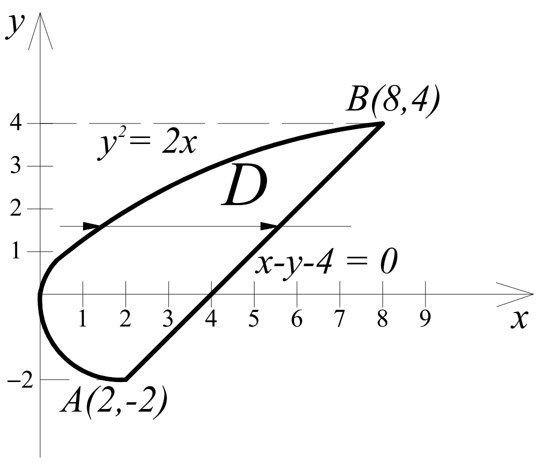


Рисунок 11.4.

Решение. Область D (рисунок 11.4) правильная в направлении переменной x, значит, внутренний интеграл берётся по x, внешний по y**.** Стрелка возрастания переменной x при вхождении в область D встречается на границе области D с кривой $x = \frac{y^2}{2}$ (нижний предел интегрирования внутреннего интеграла) и при выходе из области D встречается с прямой $x = y + 4$ (верхний предел).

Проектируем область D на ось Oy. Границы проекции есть числа -2 (нижний предел интегрирования внешнего интеграла), 4 (верхний предел).

Напомним, точки A и B пересечения кривых находятся в результате решения системы уравнений, описывающих эти кривые.

Составляем интеграл: $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{4} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} f(x,y)dx\,.$

Пример 2. В условиях примера 1 изменить порядок интегрирования.

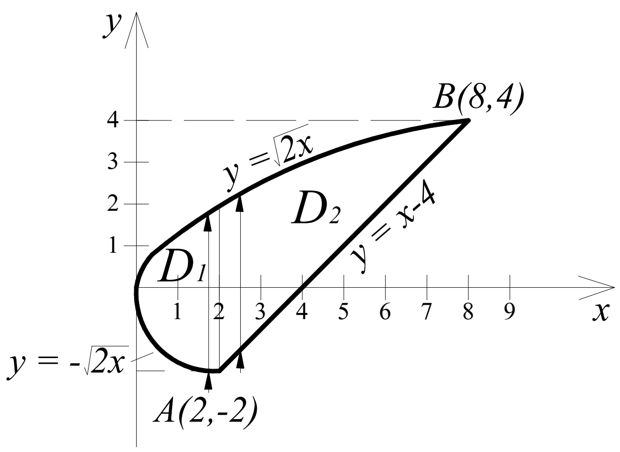


Рисунок 11.5.

Решение. Область D (рисунок 11.5) в направлении переменной y правильная, но нарушено правило задания нижнего предела интегрирования внутреннего интеграла одним аналитическим выражением (в точке A излом). Разбиваем область D на две части D_1 и D_2 составляем сумму двух интегралов по известному правилу:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f\left(x,y\right)dxdy + \iint\limits_{D_2} f\left(x,y\right)dxdy =$$

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} f\left(x,y\right)dy + \int\limits_2^8 dx \int\limits_{x-4}^{\sqrt{2x}} f\left(x,y\right)dxdy\ .$$

Пример 3. Изменить порядок интегрирования

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{e^y+2} f(x,y)dx.$$

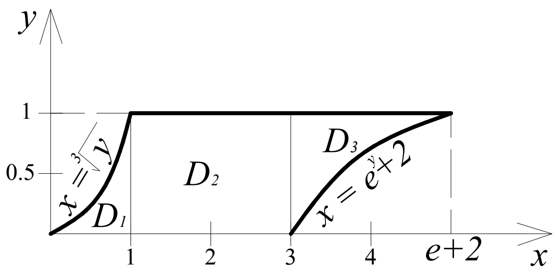


Рисунок 11.6.

Решение. По условиям примера строим область D (рис. 11.6), разбиваем её на 3 части D_1, D_2, D_3 и составляем интеграл:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{e^y+2} f(x,y)dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^3} f(x,y)dy +$$

$$+\int\limits_1^3 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy + \int\limits_3^{e+2} dx \int\limits_{\ln(x-2)}^{1} f(x,y)dy\ .$$

Пример 4. Вычислить $\iint\limits_{D} x^2 y\,dxdy$,D: $x^2+y^2=4x$, $x=0$, $x=4$, $y=3$, $y\geq 0$.

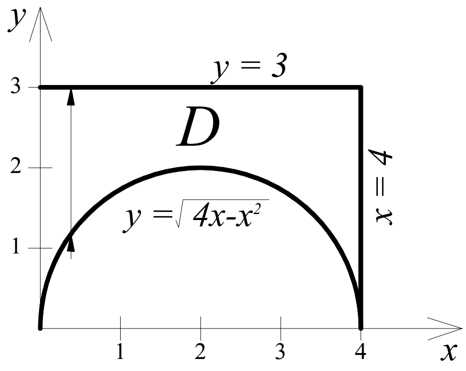


Рисунок 11.7.

Решение. Область D (рисунок 11.7) правильная в направлении y.

$$\iint\limits_D x^2 y\,dxdy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^3 x^2 y\,dy=\int\limits_0^4 dx\,x^2\frac{y^2}{2}\Bigg|_{\sqrt{4x-x^2}}^3=$$

$$=\int\limits_0^4 x^2\left(\frac{9}{2}-\frac{4x-x^2}{2}\right)dx=\int\limits_0^4\frac{9x^2-4x^3+x^4}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(9\frac{x^3}{3}-4\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^4=\frac{1}{2}\left(3\cdot 64-256+\frac{1024}{5}\right)=$$

$$=70,4.$$

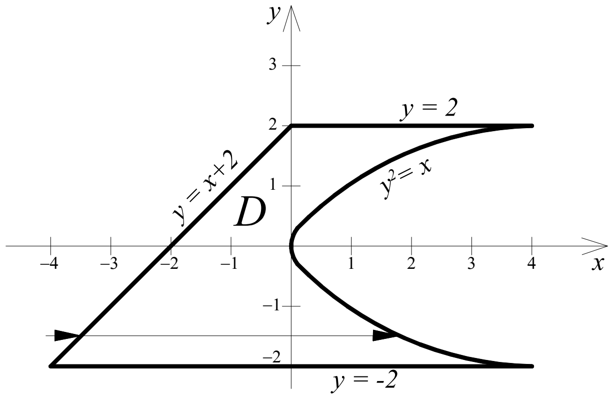


Рисунок 11.8.

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-2,\ y=x+2,\ y=2, y^2=x.$

Решение. Область D (рисунок 11.8) правильная в направлении x.

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-2}^{2}dy\int\limits_{y-2}^{y^2}dx=\int\limits_{-2}^{2}dy\cdot x\Bigg|_{y-2}^{y^2}=$$

$$=\int\limits_{-2}^{2}\left(y^2-y+2\right)dy=\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+2y\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{8}{3}-\frac{4}{2}+2\cdot 2+\frac{8}{3}+2+4=\frac{40}{3}\ \textit{кв. ед.}$$

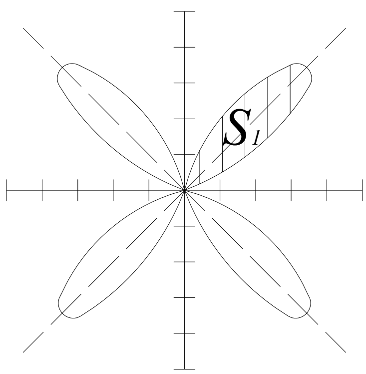


Рисунок 11.9.

Пример 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^2y^2, a>0.$

Решение. Переходим к полярным координатам: $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi.$

Тогда: $\left(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\right)^3=a^2r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin^2\varphi,$

$$r^6=a^2r^4\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi,$$

$$r^2=\frac{1}{4}a^2\sin^2 2\varphi, r=\frac{a}{2}\left|\sin 2\varphi\right|.$$

Строим область D (рисунок 11.9) в координатах r, φ и вычисляем двойной интеграл согласно правил его расчета в полярных координатах.

$$S=4S_1=4\iint\limits_D r\,dr\,d\varphi=4\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\cdot\int\limits_0^{\frac{a}{2}|\sin 2\varphi|}r\,dr=4\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{\frac{a}{2}|\sin 2\varphi|}=$$

$$=2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{a^2}{4}\sin^2 2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi=\frac{a^2}{4}\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{1}{8}\pi a^2.$$

11.5. Задания на контрольную работу

Задание 1. Изменить порядок интегрирования.

1а. $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}}f(x,y)dy$.

1б.. $\int\limits_0^{\pi/4}dx\int\limits_0^{\sin x}f(x,y)dy+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}dx\int\limits_0^{\cos x}f(x,y)dy$

2а. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x/3}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy$.

2б. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}}dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int\limits_{-\sqrt{3}}^0 dx\int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$.

3а. $\int\limits_1^4 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}}f(x,y)dy$.

3б. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{1-x^2}^1 f(x,y)dy+\int\limits_1^e dx\int\limits_{\ln x}^1 f(x,y)dy$.

4а. $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\frac{3}{4}x}^{\sqrt{25-x^2}}f(x,y)dy$.

4б. $\int\limits_{-2}^{-1}dx\int\limits_{-2-x}^0 f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{\sqrt[3]{x}}^0 f(x,y)dy$.

5а. $\int\limits_{-2}^1 dy\int\limits_{y-1}^{1-y^2}f(x,y)dx$.

5б. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int\limits_1^e dy\int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)dx$.

6а. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{x^2}^{4-x^2}f(x,y)dy$.

6б. $\int\limits_0^{\sqrt{3}}dx\int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x,y)dy+\int\limits_{\sqrt{3}}^2 dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x,y)dy$.

7а. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1}f(x,y)dx$.

7б. $\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_0^{\sqrt{2+y}}f(x,y)dx+\int\limits_{-1}^0 dy\int\limits_0^{\sqrt{-y}}f(x,y)dx$.

8а. $\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{x^2-2}^{-x^2}f(x,y)dy$.

8б. $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}}dy\int\limits_0^{\arcsin y}f(x,y)dx+\int\limits_{1/\sqrt{2}}^1 dy\int\limits_0^{\arccos y}f(x,y)dx.$

9а. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{2-x^2}f(x,y)dy$.

9б. $\int\limits_0^{\sqrt{3}}dx\int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int\limits_{\sqrt{3}}^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$.

10а. $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^2 f(x,y)dy$.

10б. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^3}f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x}f(x,y)dy$.

Задание 2. Вычислить.

1. $\iint\limits_D \left(8xy + 9x^2y^2\right)dxdy; D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3.$

$\iint\limits_D 12y\sin 2xydxdy; D: y = \pi/4, y = \pi/2, x = 2, x = 3.$

2. $\iint\limits_D \left(12xy + 27x^2y^2\right)dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x} \ \ (x \ge 0).$

$\iint\limits_D ye^{-xy/8}dxdy; D: x = 0, x = 1, y = \ln 2, y = \ln 3.$

3. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy; D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x}.$

$\iint\limits_D y\cos xydxdy; D: x = 0, x = 2, y = \pi, y = 5\pi.$

4. $\iint\limits_D \left(24xy - 48x^3y^3\right)dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$

$\iint\limits_D 4y\sin 2xydxdy; D: x = 0, x = 1, y = 2\pi, y = 3\pi.$

5. $\iint\limits_D \left(4xy + 16x^3y^3\right)dxdy; D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3.$

$\iint\limits_D 3y\cos xydxdy; D: x = 0, x = 0{,}5, y = \pi, y = 2\pi.$

6. $\iint\limits_D \left(44xy + 16x^3y^3\right)dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x}.$

$\iint\limits_D ye^{-xy/2}dxdy; D: x = 0, x = 2, y = \ln 3, y = \ln 4.$

7. $\iint\limits_D \left(xy - 4x^3y^3\right)dxdy; D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x}.$

$\iint\limits_D y\cos 2xydxdy; D: x = 0, x = 1, y = \frac{\pi}{2}, y = 2\pi.$

8. $\iint\limits_D \left(6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy; D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$

$\iint\limits_D 3y\sin\frac{xy}{2}dxdy; D: x = 0, x = 1 y = \frac{4\pi}{3}, y = \frac{2\pi}{3}.$

9. $\iint\limits_D \left(3x^2y^2 + \frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy; D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3.$

$\iint\limits_D ye^{-xy/2}dxdy; D: x = 0, x = 1, y = \ln 3, y = \ln 5.$

10. $\iint\limits_D \left(54x^2y^2 + 150x^4y^4\right)dxdy;\ D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x} \ \ (x \ge 0).$

$\iint\limits_D y\cos xydxdy; D: x = 0, x = 1, y = \pi, y = 2\pi.$

Задание 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1. $y=\sqrt{24-x^2}, 2\sqrt{3}y=x^2, x\geq 0.$

2. $y=20-x^2, y=-8x.$

3 $y=\sqrt{18-x^2}, y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}.$

4. $y=32-x^2, y=-4x.$

5. $y=2/x, y=5e^x, y=2, y=5.$

6. $x^2+y^2=36,\ 3\sqrt{2}y=x^2\ (y\geq 0).$

7. $y=3\sqrt{x}, y=3/x, x=4.$

8. $y=6-\sqrt{36-x^2}, y=\sqrt{36-x^2}, x\geq 0.$

9. $y=\frac{25}{4}-x^2, y=x-\frac{5}{2}.$

10. $y=\sqrt{x}, y=\frac{1}{x}, x=16.$

Задание 4. Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в декартовых координатах ($a>0$).

1. $x^6=a^2(x^4-y^4).$

2. $(x^2+y^2)^2=ax^3.$

3. $x^4=a^2(x^2-3y^2).$

4. $x^4=a^2(x^2-y^2).$

5. $y^6=a^2(y^4-x^4).$

6. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2+4y^2).$

7. $(x^2+y^2)^2=a^2(2x^2+3y^2).$

8. $(x^2+y^2)^3=a^2x^4.$

9. $y^6=a^2(3y^2-x^2)\cdot(y^2+x^2).$

10. $(x^2+y^2)^2=a^2(3x^2+y^2).$

12. Тройной интеграл

12.1. Определение

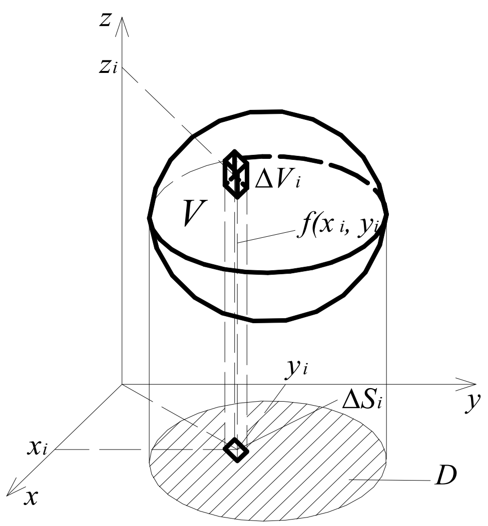


Рисунок 12.1.

Тройным интегралом от функции *f(x,y,z)* по области *V* называется предел интегральной суммы

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ diam\Delta V_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i = \int_V f(x,y,z)dV =$$

$$= \iiint_V f(x,y,z)dxdydz,$$

где $f(x,y,z)$ – непрерывная функция в объёмной области *V*,

ΔV_i – объём *i*-го малого элемента, на которые разбита область *V*, ($i=1,n$), см рисунок 12.1,

n – количество малых элементов,

x_i, y_i, z_i – координаты точки принадлежащей области ΔV_i: $(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$,

$f(x_i, y_i, z_i)$ – значение функции в точке (x_i, y_i, z_i).

Если *f(x, y, z)* – объёмная плотность распределения вещества $\left[\frac{кг}{м^3}\right]$ в области *V* (в объёме *V*) , то $f(x_i, y_i, z_i)$ ΔV_i – масса элементарного куска вещества объёмом ΔV_i , интегральная сумма – приближённое значение, а её предел – точное значение массы вещества в объёме *V*.

Физический смысл тройного интеграла – это есть масса вещества, заключённой в объёме *V*.

12.2. Вычисление тройного интеграла

Тройной интеграл вычисляется через трёхкратный:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_V \left\{ \int \left[\int f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx = \int_V \left\{ \int \left[\int f(x,y,z)dy \right] dz \right\} dx = \ldots$$

Сначала вычисляется внутренний, затем средний и, наконец, внешний интеграл. Переменные интегрирования в этих трёх интегралах – разные. Существует шесть вариантов расчета с различным порядком интегрирования (*dzdydx; dydzdx; dzdxdy;*…). Результат вычисления один и тот же, но эффективность расчёта (простота) может быть разной.

Для вычисления тройного интеграла нужно обязательно построить рисунок области интегрирования *V*, без которого немыслимо сформировать расчётный интеграл.

Пусть область *V* построена в прямоугольной системе координат.

Определение. Область *V* называется *правильной (выпуклой)* в направлении переменной интегрирования, если прямая, проходящая через любую внутреннюю точку области *V* параллельно оси переменной интегрирования, пересекает границы области *V* не более чем в двух точках.

Правила вычисления тройного интеграла в прямоугольной системе координат

1. Вычисление внутреннего интеграла

- Внутренний интеграл вычисляется по той переменной, для которой область *V* правильная. Если это правило нельзя выполнить, разбивают область *V* поверхностями (проще плоскостями) на части V_1, V_2,..., V_n, которые будут правильными в направлении выбранной переменной интегрирования и дальнейший расчёт производится согласно свойству3 раздел 10.
- Пределами интегрирования внутреннего интеграла являются функции выбранной переменной интегрирования в зависимости от оставшихся двух переменных (уравнения поверхностей). Нижний предел – функция, описывающая поверхность, которая есть граница области *V* при вхождении в эту область стрелки, указывающей направление возрастания выбранной переменной интегрирования. Верхний предел – функция, описывающая поверхность, которая является границей области *V* при выходе указанной стрелки из области *V*.
- Нижний и верхний пределы интегрирования – функции – должны быть заданы одним аналитическим выражением (границы – поверхности области *V* должны быть гладкими). Если эти границы кусочно-гладкие, разбить область *V* поверхностями на части $V_1, V_2, ..., V_n$,удовлетворяющие этому правилу и далее вычислять согласно свойству 3 раздел 10.
- Вычисление внутреннего интеграла производить по известным правилам расчёта определённого интеграла, при этом две переменные, не участвующие в интегрировании, считать постоянными величинами.

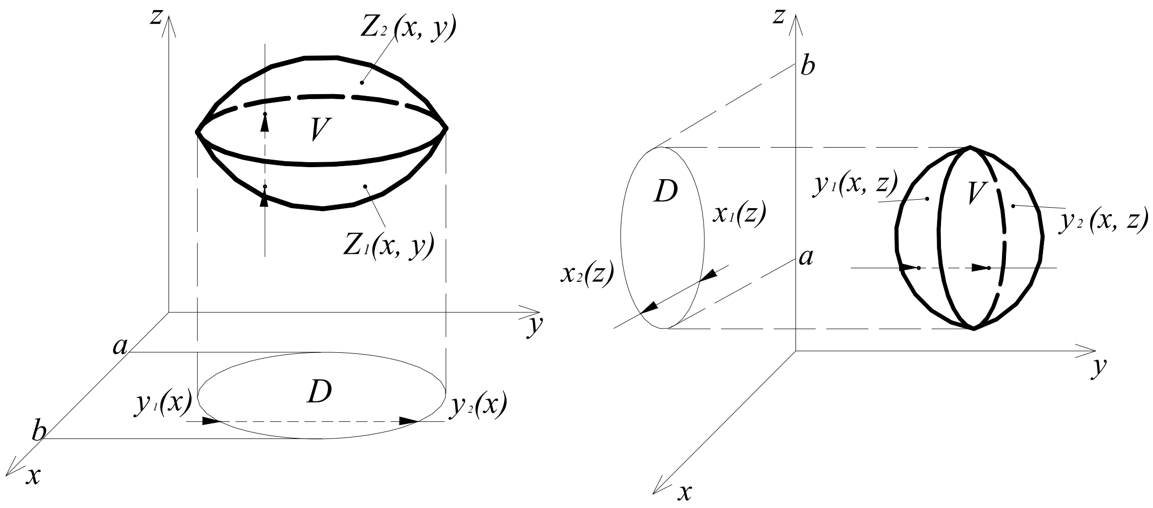
Результатом расчёта внутреннего интеграла является функция двух переменных, не участвующих в интегрировании.

2. Вычисление среднего и внешнего интегралов.

Это вычисление производить по правилам расчёта двойного интеграла, при этом область интегрирования D есть проекция области V на координатную плоскость оставшихся двух переменных.

Результат расчёта тройного интеграла – число (масса тела).

На рисунке 12.2 приводятся различные варианты расчёта тройного интеграла в прямоугольной системе координат.



$$\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

$$\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)dxdydz = \int\limits_a^b dz \int\limits_{x_1(z)}^{x_2(z)} dx \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy.$$

Рисунок 12.2.

Цилиндрическая система координат есть сочетание полярных координат в любой координатной плоскости трёхмерной прямоугольной системы и оставшейся прямоугольной координаты.

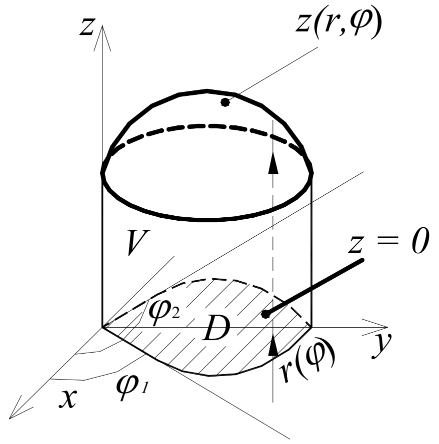
Варианты координат цилиндрической системы: (r,φ,z), $(r,\ \varphi,x)$, $(r,\ \varphi,y)$.

В некоторых случаях тройной интеграл в этой системе вычисляется значительно проще, чем в прямоугольной системе.

Правило вычисления тройного интеграла в цилиндрической системе координат

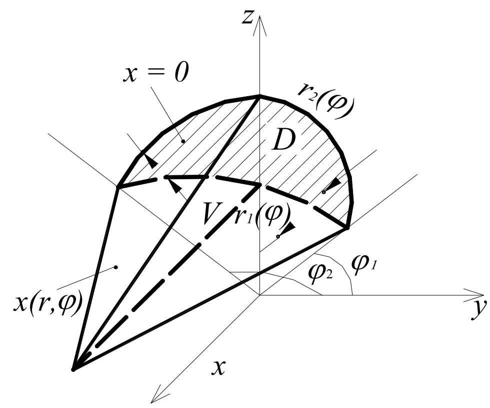
Средний и внешний интегралы образуют двойной интеграл в полярной системе координат, а внутренний интеграл вычисляется в прямоугольной системе по оставшейся переменной с использованием известных правил.

На рисунке 12.3 показаны некоторые варианты расчёта тройного интеграла в цилиндрической системе координат.



$$\iiint\limits_V F(r,\varphi,z)rdrd\varphi dz =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} rdr \int\limits_0^{z(r,\varphi)} F(r,\varphi,z)dz.$$



$$\iiint\limits_V F(r,\varphi,x)rdrd\varphi dx =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \int\limits_0^{x(r,\varphi)} F(r,\varphi,x)dx.$$

Рисунок 2.3.

В *сферических* координатах положение точки P в трёх мерном пространстве определяется тремя числами θ, r, φ (рис. 12.4), где

r – расстояние от начала координат до точки – это радиус-вектор точки, θ – угол между осью Oz и радиус-вектором,

φ – угол между осью Ox и проекцией радиус-вектора на плоскость xOy.

Положительные направления углов показаны на рис. 12.4. $0 \le r < \infty$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

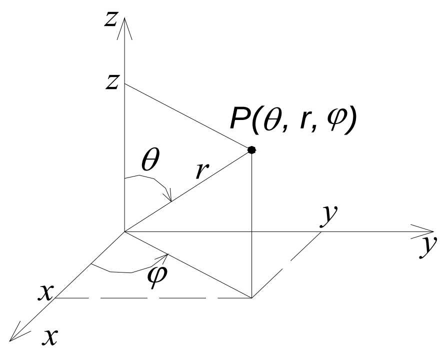


Рисунок 12.4.

Связь прямоугольных и сферических координат:

$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$.

Тройной интеграл в сферических координатах имеет вид:

$$\text{I}=\iiint\limits_V F(\theta,r,\varphi)r^2\sin\theta drd\varphi d\theta .$$

Преобразование тройного интеграла от декартовых координат к сферическим имеет вид:

$$\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)dxdydz = = \iiint\limits_V f\left[r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right]r^2\sin\theta drd\varphi d\theta.$$

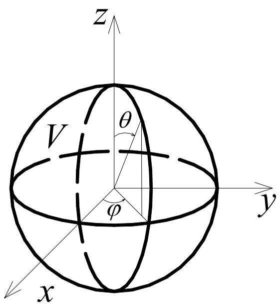


Рис. 12.5.

Если область V представляет собой шар - $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ (рис. 12.5), то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{R} f\left[r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right] r^2 dr.$$

12.3. Некоторые приложения тройных интегралов

Тройной интеграл применяется для вычисления следующих величин.

1. Вычисление объема тела $\left(f(x,y,z)=1\right)$

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_V rdrd\varphi dz = \iiint\limits_V r^2 \sin\theta drd\varphi d\theta.$$

2. Вычисление массы тела объемом V с объемной плотностью распределения массы $f(x,y,z)$.

$$m = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

3. Вычисление координат центра масс x_c, y_c, z_c тела массой m.

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V xf(x,y,z)dV}{m},\ y_{\tilde{n}} = \frac{\iiint\limits_V yf(x,y,z)dV}{m},\ z_c = \frac{\iiint\limits_V zf(x,y,z)dV}{m}.$$

4. Вычисление моментов инерции I_x, I_y, I_z, I_0 тела относительно осей Ox, Oy, Oz и начла координат.

$$I_x = \iiint\limits_V \left(y^2+z^2\right) f(x,y,z)dV,\ I_y = \iiint\limits_V \left(x^2+z^2\right) f(x,y,z)dV,$$

$$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right) f(x,y,z)dV,\ I_0 = \iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right) f(x,y,z)dV.$$

12.4. Типовые примеры решения тройных интегралов

Напомним, что здесь, как и в двойном интеграле, важным является построение чертежа области интегрирования. Область V ограничивается замкнутой поверхностью, которая в свою очередь состоит из отдельных кусков гладких поверхностей, заданных своими уравнениями. На рис. 12.6 представлены некоторые уравнения поверхностей и их геометрическое изображение, которые помогут построить тела (область V) в трехмерном пространстве.

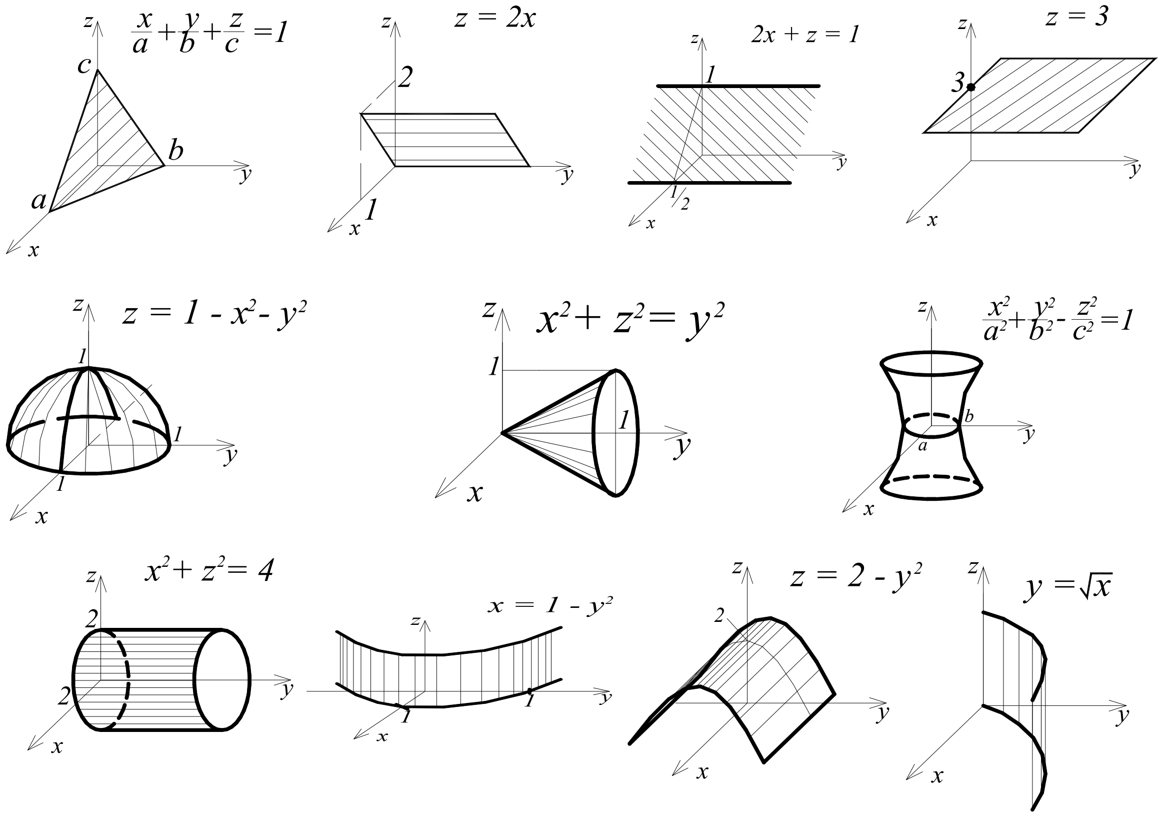


Рисунок 12.6.

Пример 1. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, где область V ограничена плоскостями: $x+z=3, y=2, y=0, x=0, z=0.$

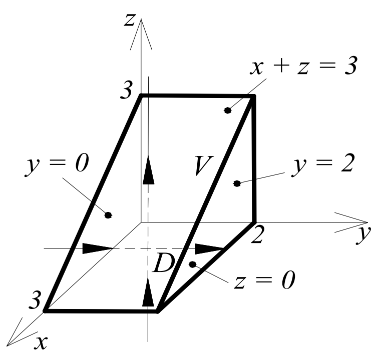


Рисунок 12.7.

Решение. Область V (рис. 12.7) правильная в направлении всех переменных. Выберем следующий порядок интегрирования тройного интеграла: внутренний интеграл – по z, средний – по y, внешний – по x.

Стрелка, указывающая возрастание z, входит в область V через границу $z = 0$ (нижний предел интегрирования), а выходит из области V через границу $z = 3 - x$ (верхний предел интегрирования). Стрелка, указывающая возрастание y, входит в область D (проекция области V на плоскость xOy) через границу $y = 0$ (нижний предел), а выходит из области D через границу $y = 2$ (верхний предел). Область D проектируется на ось Ox в отрезок, границы которого 0 (нижний предел) и 3 (верхний предел).

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{3-x} xyzdz = \int\limits_0^3 xdx \int\limits_0^2 ydy \cdot \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{3-x} =$$

$$= \int\limits_0^3 xdx \int\limits_0^2 y\frac{(3-x)^2}{2}dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 x(3-x)^2 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^3 \left(9x - 6x^2 + x^3\right)4dx = \left.\left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{6}{3}x^3 + \frac{x^4}{4}\right)\right|_0^3 = \frac{81}{2} - 54 + \frac{81}{4} = \frac{27}{4}.$$

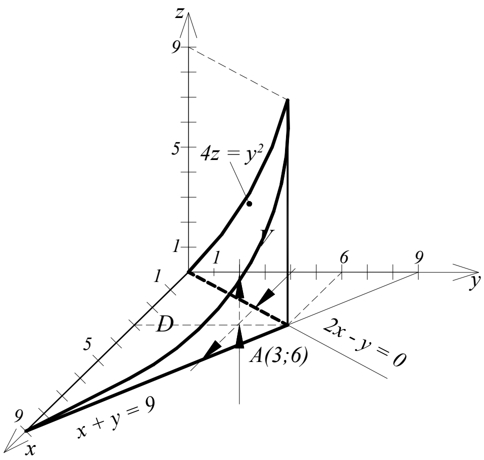


Рисунок. 12.8.

Пример 2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 0,\ 4z = y^2,\ 2x - y = 0,\ x + y = 9$.

Решение. Область V (рис. 12.8) – правильная в направлении всех переменных – есть пирамида с вогнутой «крышей» – параболическим цилиндром $4z = y^2$, боковыми гранями – плоскостями $2x - y = 0, x + y = 9$ и основанием (область D) $z = 0$, представляющим собой треугольник с вершиной $A(3;6)$, координаты которой находятся решением системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 9. \end{cases}$$

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^6 dy \int\limits_{y/2}^{9-y} dx \int\limits_0^{y^2/4} dz = \int\limits_0^6 dy \int\limits_{y/2}^{9-y} dx \cdot \left. z \right|_0^{y^2/4} =$$

$$= \int\limits_0^6 dy \int\limits_{y/2}^{9-y} \frac{y^2}{4}dx = \int\limits_0^6 \frac{y^2}{4}dy \cdot \left. x \right|_{y/2}^{9-y} = \frac{1}{4}\int\limits_0^6 y^2\left(9 - y - \frac{y}{2}\right)dy = \frac{1}{4}\int\limits_0^6 \left(9y^2 - \frac{3}{2}y^3\right)dy =$$

$$= \frac{1}{4}\left.\left(9\frac{y^3}{3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{y^4}{4}\right)\right|_0^6 = \frac{1}{4}\left(648 - \frac{3888}{8}\right) = 40{,}5 \text{ åä. î áúåì à.}$$

Пример 3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}y,\ z = x^2 + y^2 - 4,\ z = 0,\ z \ge 0.$$

Решение. Область V (рис. 12.9) – правильная в направлении переменной z. Внутренний интеграл (по z) имеет нижний предел интегрирования $z = 0$, верхний предел -. $z = x^2 + y^2 - 4$

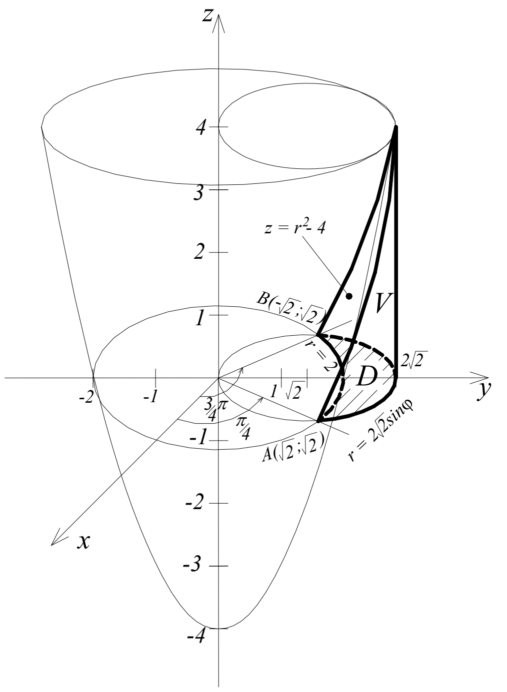


Рисунок 12.9.

Область D (проекция V на плоскость xOy) – «полумесяц», ограниченный окружностями, $x^2 + y^2 - 4 = 0$ $x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}y.$

Представим эти уравнения в каноническом виде:

$$x^2 + y^2 = 2^2, x^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2.$$

Видно, что внутренняя граница области D – окружность с радиусом $r = 2$ и центром в начале координат, а внешняя граница – окружность с радиусом $r = \sqrt{2}$ и смещенным вправо на $\sqrt{2}$ центром.

Вычисление тройного интеграла рациональнее произвести в цилиндрической системе координат *(r, φ, z)*. Воспользуемся связью: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, z{=}z$ и преобразуем уравнения поверхностей и кривых данного примера в прямоугольных координатах в уравнения в цилиндрических координатах.

$$x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}y, r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2\sqrt{2}r\sin\varphi,$$

$$r^2 = 2\sqrt{2}r\sin\varphi;\ r = 2\sqrt{2}\sin\varphi.$$

$$z = x^2 + y^2 - 4,\ z = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 4,\ z = r^2 - 4.$$

При $z = 0$ получаем окружность $r = 2$. Найдем полярные углы полярных радиусов, на которых находятся точки пересечения этих окружностей:

$$\begin{cases} r = 2\sqrt{2}\sin\varphi \\ r = 2 \end{cases},\ 2 = 2\sqrt{2}\sin\varphi;\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\varphi;\ \varphi_1 = \frac{\pi}{4};\ \varphi_2 = \frac{3}{4}\pi.$$

Анализ показывает, что тело V симметрично относительно плоскости

$x = 0$ (разделено пополам).

$$V = \iiint\limits_V r dr d\varphi dz = 2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{2}^{2\sqrt{2}\sin\varphi} r dr \int\limits_{0}^{r^2-4} dz =$$

$$= 2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{2}^{2\sqrt{2}\sin\varphi} r dr \cdot z\Big|_0^{r^2-4} = 2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{2}^{2\sqrt{2}\sin\varphi} (r^3 - 4r)dr =$$

$$= 2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi\left(\frac{r^4}{4} - 4\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_2^{2\sqrt{2}\sin\varphi} = 2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(16\sin^4\varphi - 16\sin^2\varphi + 4\right)d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(16\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 - 16\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right) + 4\right)d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left(4 - 8\cos 2\varphi + 4\cos^2 2\varphi - 8 + 8\cos 2\varphi + 4\right)d\varphi =$$

$$= 8\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}d\varphi = 4(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = = 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \pi \quad \textit{ед. объема.}$$

Пример 4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 4y,\ z = 6 - x^2,\ z = 0$.

Решение. Данное тело (рис. 12.10) представляет собой круговой цилиндр с радиусом равным 2 и смещенным по «y» вправо на 2, сверху ограниченным параболическим цилиндром.

В основании цилиндра круг, поэтому вычисление объема проще всего проводить в цилиндрической системе координат. Подготовим все необходимые аналитические выражения для поверхностей и кривых, необходимых для вычисления объема тела.

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi.$

Круговой цилиндр:

$x^2 + y^2 = 4y, r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 4r\sin\varphi,$

$r^2 = 4r\sin\varphi, r = 4\sin\varphi.$

Это же уравнение и для окружности ограничивающей круг в основании тела, при этом $0 \le \varphi \le \pi$.

Параболический цилиндр:

$z = 6 - x^2, z = 6 - r^2\cos^2\varphi.$

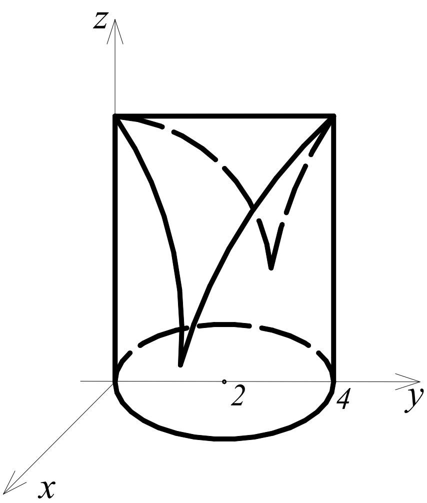


Рисунок 12.10.

Вычислим объем тела.

$$V=\iiint\limits_V r\,dr\,d\varphi\,dz=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{4\sin\varphi}rdr\int\limits_0^{6-r^2\cos^2\varphi}dz=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{4\sin\varphi}rdr\cdot z\Bigg|_0^{6-r^2\cos^2\varphi}=$$

$$\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{4\sin\varphi}\left(6-r^2\cos^2\varphi\right)rdr=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{4\sin\varphi}\left(6r-r^3\cos^2\varphi\right)dr=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\left(3r^2-\frac{1}{4}r^4\cos^2\varphi\right)\Bigg|_0^{4\sin\varphi}=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(48\sin^2\varphi-64\sin^4\varphi\cos^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left[48\left(\frac{1-\cos2\varphi}{2}\right)-64\left(\frac{1-\cos2\varphi}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)\right]d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left[24-24\cos2\varphi-8\left(1-2\cos2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)\left(1+\cos2\varphi\right)\right]d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(24-24\cos2\varphi-8+16\cos2\varphi-8\cos^2 2\varphi-8\cos2\varphi+16\cos^2 2\varphi-8\cos^3 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(16-16\cos2\varphi+8\cos^2 2\varphi-8\cos^3 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$\int\limits_0^{\pi}\left[16-16\cos2\varphi+8\left(\frac{1+\cos4\varphi}{2}\right)\right]d\varphi-\int\limits_0^{\pi}4\cos^2 2\varphi\, d\sin2\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(20-16\cos2\varphi+4\cos4\varphi\right)d\varphi-\int\limits_0^{\pi}4\left(1-\sin^2 2\varphi\right)d\sin2\varphi=$$

$$=\left(20\varphi-8\sin2\varphi+\sin4\varphi\right)\Big|_0^{\pi}-4\left(\sin2\varphi-\frac{1}{3}\sin^3 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}=20\pi\ \text{åä. î áúåì à.}$$

12.5. Задания на контрольную работу

Задание 1. Вычислить.

1. $\iiint\limits_V y^2 e^{2xy} dxdydz;\quad V:\begin{cases} x=0, y=1, y=x, \\ z=0, z=8. \end{cases}$

2. $\iiint\limits_V x^2 z e^{xyz} dxdydz;\quad V:\begin{cases} x=2, y=1, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

3. $\iiint\limits_V y^2 e^{xy/2} dxdydz;\quad V:\begin{cases} x=0, y=2, y=2x, \\ z=0, z=-1. \end{cases}$

4. $\iiint\limits_V y^2 z\cos\frac{xyz}{3} dxdydz;\quad V:\begin{cases} x=3, y=1, z=2\pi, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

5. $\iiint\limits_V y^2 \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) dxdydz;\quad V:\begin{cases} x=0, y=-1, y=x, \\ z=0, z=2\pi^2. \end{cases}$

6. $\iiint\limits_V 2x^2 z e^{xyz} dxdydz;\quad V:\begin{cases} x=1, y=-1, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

7. $\iiint\limits_V y^2 \cos(\pi xy) dxdydz;\quad V:\begin{cases} x=0, y=1, y=2x, \\ z=0, z=\pi^2. \end{cases}$

8. $\iiint\limits_V 3xz e^{2xyz} dxdydz;\quad V:\begin{cases} x=2, y=1/2, z=1/2, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

9. $\iiint\limits_V x^2 e^{2xy} dxdydz;\quad V:\begin{cases} x=-1, y=x, y=0, \\ z=0, z=8. \end{cases}$

10. $\iiint\limits_V x^2 z\sin\left(\frac{xyz}{2}\right) dxdydz;\quad V:\begin{cases} x=1, y=4, z=\pi, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

Задание2. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

1. $x+y=4, y=\sqrt{2x}, z=3y, z=0.$
2. $x=19\sqrt{2y}, x=4\sqrt{2y}, z=0, z+y=2.$
3. $y=6\sqrt{3x}, y=\sqrt{3x}, z=0, x+z=3.$
4. $x+y=6, y=\sqrt{3x}, z=4y, z=0.$
5. $y=2x^2, z+y=2, z=0.$
6. $x^2=y-1, x+y+z=3, z=0.$
7. $y^2=4-x, x=z, z=0.$
8. $y^2=x+4, x+z=0, z=0.$
9. $y^2=x, x+z=4, x=1, z=0.$
10. $y=x^2, y+z=9, y=1, z=0.$

Задание 3. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

1. $x^2+y^2=6x,\ x^2+y^2=8x,\ z=\sqrt{x^2+y^2}\ ,z=0,\ \ y=0\ (y\le 0).$
2. $x^2+y^2=6y,\ z=x^2+y^2-36,\ z=0\ (z\le 0).$
3. $x^2+y^2=2y,\ z=\dfrac{9}{4}-x^2,\ z=0.$
4. $x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=10y,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0.$
5. $x^2+y^2+2y=0,\ z=x^2+y^2-4,\ z=0\ (z\le 0).$
6. $x^2+y^2=4x,\ z=4-y^2,\ z=0.$
7. $x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2=10x,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,\ y=0\ (y\le 0).$
8. $x^2+y^2=8y,\ z=x^2+y^2-64,\ z=0\ (z\le 0).$
9. $x^2+y^2=2y,\ z=1-x^2,\ z=0.$
10. $x^2+y^2=8y,\ x^2+y^2=12y,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0.$

13. Криволинейные интегралы

В зависимости от величины (функции, поля), которая интегрируется по дуге (кривой) существует два рода криволинейных интегралов:

при интегрировании скалярной величины – интеграл I рода,

при интегрировании векторной величины – интеграл II рода.

13.1. Криволинейный интеграл I рода

13.1.1. Определение

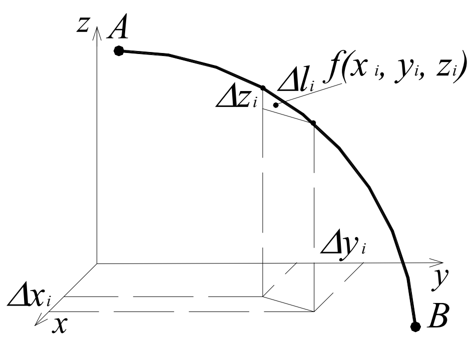


Рисунок 13.1.

Криволинейным интегралом I рода от скалярной функции *f(x,y,z)* по дуге *AB* называется предел интегральной суммы

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta l\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i = \int_{AB} f(x,y,z)dl$$

,

где *f(x,y,z)* непрерывная скалярная функция в трехмерном пространстве на дуге *AB* (рисунок 13.1),

Δl_i – длина *i*-ой элементарной дуги, на которые разбита вся дуга *AB*, $\left(i = \overline{1,n}\right)$,

n – количество элементарных дуг,

$f(x_i,y_i,z_i)$ – значение функции в точке (x_i,y_i,z_i), принадлежащей элементарной дуге Δl_i.

Если *f(x,y,z)* – линейная плотность распределения вещества на дуге *AB* $\left[\frac{кг}{м}\right]$, то $f(x_i,y_i,z_i)\ \Delta l_i$ – масса элементарного куска дуги *AB*, интегральная сумма – приближенное значение, а ее предел – точное значение массы вещества в дуге *AB* (прута).

Физический смысл криволинейного интеграла I рода – это есть масса вещества, заключенной в дуге *AB* (пруте, проводе и т.д.)

13.1.2. Вычисление криволинейного интеграла I рода

Вычисление сводится к расчету определенного интеграла. Предварительно, из рис. 13.1 следует: $\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}$. При переходе к пределу интегральной суммы: $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

Интегрирование определенного интеграла производится по одной переменной. Для этого переменные *x, y, z*, описывающие дугу *AB* в трехмерном пространстве должны быть заданы параметрическим образом:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), & t_1 \le t \le t_2 \\ z = z(t), \end{cases}.$$

Тогда

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 + \left(z'_t\right)^2}\, dt.$$

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z) dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t), z(t)] \cdot \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 + \left(z'_t\right)^2}\, dt. \qquad (13.1)$$

Если скалярная функция $f(x,y)$ задана на дуге AB в двухмерном пространстве, то существуют следующие формулы расчета криволинейного интеграла I рода.

1. Для дуги AB, заданной параметрическим образом: $x = x(t), y = y(t), t_1 \le t \le t_2$.

$$\int\limits_{AB} f(x, y) dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left[x(t), y(t)\right] \cdot \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\, dt. \qquad (13.2)$$

2. Для дуги AB, заданной гладкой функцией $y = y(x), y(a) = A, y(b) = B$ (рисунок 13.2).

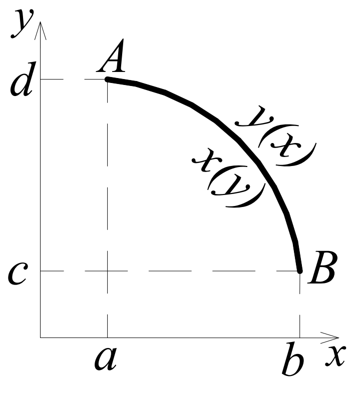


Рисунок 13.2.

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2}\, dx.$$

$$\int\limits_{AB} f(x, y) dl = \int\limits_{a}^{b} f\left[x, y(x)\right] \cdot \sqrt{1 + \left(y'_x\right)^2}\, dx. \quad (13.3)$$

3. Для дуги AB, заданной гладкой функцией $x = x(y), x(c) = B, x(d) = A$ (рисунок 13.2).

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy = \sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2}\, dy$$

.

$$\int\limits_{AB} f(x, y) dl = \int\limits_{d}^{c} f\left[x(y), y\right] \cdot \sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2}\, dy. \qquad (13.4)$$

Замечание: для криволинейного интеграла I рода: $\int\limits_{AB} = \int\limits_{BA}$.

4. Для дуги AB, заданной в полярной системе координат:

$$r = r(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2.$$

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, dx = \left(r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi\right)d\varphi, dy = \left(r'_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi\right)d\varphi,$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$$= \sqrt{\left(r'_\varphi \cos\varphi\right)^2 - 2rr'_\varphi \cos\varphi\sin\varphi + \left(r\sin\varphi\right)^2 + \left(r'_\varphi \sin\varphi\right)^2 + 2rr'_\varphi \cos\varphi\sin\varphi + \left(r\cos\varphi\right)^2}\, d\varphi =$$

$$= \sqrt{r^2 + \left(r'_\varphi\right)^2}\, d\varphi.$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left[r\cos\varphi, r\sin\varphi\right] \cdot \sqrt{r^2 + \left(r'_\varphi\right)^2}\, d\varphi. \qquad 13.5)$$

13.1.3. Некоторые приложения криволинейного интеграла I рода

1. Вычисление массы дуги (прута) AB с линейной плотностью вещества $f(x,y,z)$.

$$m = \int\limits_{AB} f(x,y,z)dl$$

2. Вычисление длины дуги AB (если $f(x,y,z) = 1$).

$$L = \int\limits_{AB} dl$$

3. Координаты центра масс x_c, y_c, z_c дуги AB массой m.

$$x_c = \frac{\int\limits_{AB} xf(x,y,z)dl}{m}, y_c = \frac{\int\limits_{AB} yf(x,y,z)dl}{m}, z_c = \frac{\int\limits_{AB} zf(x,y,z)dl}{m}$$

4. Моменты инерции I_x, I_y, I_z, I_O дуги AB массой m относительно осей Ox, Oy, Oz и начала координат.

$$I_x = \int\limits_{AB} \left(y^2 + z^2\right) f(x,y,z)dl, I_y = \int\limits_{AB} \left(x^2 + z^2\right) f(x,y,z)dl, I_z =$$

$$= \int\limits_{AB} \left(x^2 + y^2\right) f(x,y,z)dl,$$

$$I_O = \int\limits_{AB} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) f(x,y,z)dl.$$

При расчетах перечисленных величин в трехмерном пространстве следует пользоваться формулой (13.1), а в двухмерном пространстве формулами (13.2), (13.3), (13.4), (13.5).

13.1.4. Типовые примеры решения криволинейных интегралов I рода

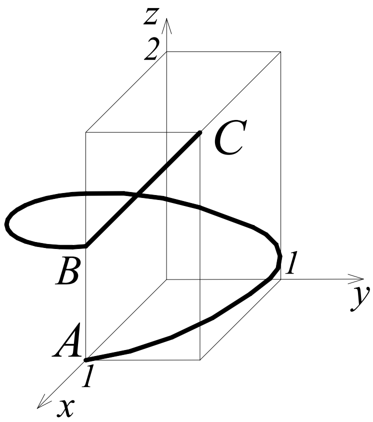


Рисунок 13.3.

Пример 1. Вычислить, $\int\limits_{ABC}\left(x^2y+2z\right)dl$ где AB – дуга винтовой линии BC – *отрезок прямой;* $A(1;0;0), B(1;0;1), C(1;1;2)$.

Решение. Кривая интегрирования – ломаная ABC (рисунок 13.3).

$$x=\cos t, y=\sin t, z=\frac{t}{6}, 0\le t\le 2\pi;$$

$$\int\limits_{ABC}=\int\limits_{AB}+\int\limits_{BC}.$$

$$\int\limits_{AB}\left(x^2y+2z\right)dl=\left|\begin{array}{l} x=\cos t, y=\sin t, z=t/6, 0\le t\le 2\pi \\ dl=\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2+\left(z_t'\right)^2}\,dt= \\ =\sqrt{\left(-\sin t\right)^2+\cos^2 t+\frac{1}{36}}\cdot dt=\frac{\sqrt{37}}{6}dt \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos^2 t\cdot\sin t+2\cdot\frac{t}{6}\right)\frac{\sqrt{37}}{6}dt=-\frac{\sqrt{37}}{6}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\cdot d\cos t+\frac{\sqrt{37}}{18}\int\limits_0^{2\pi}tdt=$$

$$=-\frac{\sqrt{37}}{6}\cdot\frac{\cos^3 t}{3}\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{\sqrt{37}}{18}\cdot\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=-\frac{\sqrt{37}}{18}(1-1)+\frac{\sqrt{37}}{18}\cdot\frac{4\pi^2}{2}=\frac{\sqrt{37}}{9}\pi^2.$$

$$\int\limits_{BC}\left(x^2y+2z\right)dl=\Bigg|\, BC:\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-1}{2-1}, y=z-1, dy=dz, x=1, dx=0,$$

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{2}\,dz\,\Bigg|=$$

$$=\int\limits_1^2\left(1^2(z-1)+2z\right)\sqrt{2}dz=\sqrt{2}\int\limits_1^2(3z-1)dz=\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}z^2-z\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}(4-1)-(2-1)\right)=\frac{7}{2}\sqrt{2}.$$

$$\int\limits_{ABC}\left(x^2y+2z\right)dl=\frac{\sqrt{37}}{9}\pi^2+\frac{7}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{18}\left(2\sqrt{37}\pi^2+63\sqrt{2}\right).$$

Пример 2. Найти массу дуги *AB* кривой γ, если ее линейная плотность меняется по закону $\rho(M)$.

$$\gamma:\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$$ - эвольвента окружности,

$$A(1;0),\ B(1;-2\pi),\ \rho(M)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Решение. Нетрудно видеть, что при движении от *A* к *B* параметр *t* меняется от 0 до 2π, т.е. $0\le t\le 2\pi$. Масса дуги определяется по формуле:

$$m=\int_{AB}\rho(M)dl=\int_{AB}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{dx^2+dy^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x=\cos t+t\sin t;dx=(-\sin t+\sin t+t\cos t)dt \\ y=\sin t-t\cos t;dy=(\cos t-\cos t+t\sin t)dt \end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(\cos t+t\sin t)^2+(\sin t-t\cos t)^2}\cdot\sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2}tdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(t^2+1)^{1/2}d(t^2+1)=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 3}(t^2+1)^{3/2}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{3}\left(\sqrt{((2\pi)^2+1)^3}-1\right)\text{ед. массы.}$$

13.1.5. Задания на контрольную работу

Задание 1. Вычислить.

1. $\int\limits_{AB}x^2dl$, *AB* – кривая $y=\ln x, 1\le x\le 2.$

2. $\int\limits_{AB}xdl$, *AB* – кривая $y=x^2, A(2;4), B(1;1).$

3. $\int\limits_{AB}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *AB* – отрезок прямой, $A(0;-2), B(4;0).$

4. $\int\limits_{\gamma}\frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, γ – винтовая линия
$x=a\cos t, y=a\sin t; z=bt, 0\le t\le 2\pi.$

5. $\int\limits_{\gamma}(x+y)dl$, γ – правый лепесток лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi.$

6. $\int\limits_{\gamma}\sqrt{x^2+y^2}\,dl$, γ – дуга кривой

$x=a\left(\cos t+t\sin t\right), y=a\left(\sin t-t\cos t\right), 0\le t\le 2\pi.$

7. $\int\limits_{\gamma} y^2 dl$, γ – первая арка циклоиды $x=a\left(t-\sin t\right), y=a\left(1-\cos t\right).$

8. $\int\limits_{\gamma} xydl$, γ – четверть эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, x\ge 0, y\ge 0.$

9. $\int\limits_{OA}\dfrac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, OA – отрезок прямой, $O(0,0), A(1,2)$.

10. $\int\limits_{\gamma} xyzdl$, γ – винтовая линия $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ 0\le t\le 2\pi.$

Задание 2. Найти массу дуги *AB* кривой γ если ее линейная плотность меняется по закону *ρ(M)*.

1. $\gamma:\begin{cases}x=3\cos t\\ y=3\sin t\end{cases}, x\ge 0, y\ge 0, A\left(3;0\right), B\left(0;3\right), \rho\left(M\right)=xy.$

2. $\gamma:\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}, x\ge 0, y\ge 0, A\left(1;0\right), B\left(0;1\right), \rho\left(M\right)=x^2+y^2.$

3. $\gamma:\begin{cases}x=2\sin t-\sin 2t\\ y=2\cos t-\cos 2t\end{cases}, x\ge 0, A\left(0;1\right), B\left(0;-3\right), \rho\left(M\right)=x.$

4. $\gamma:\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}, A\left(0;0\right), B\left(2\pi;0\right), \rho\left(M\right)=y.$

5. $\gamma:\begin{cases}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}, A\left(1;0\right), B\left(\dfrac{\pi}{2};1\right), \rho\left(M\right)=x.$

6. $\gamma:\begin{cases}x=e^t\left(\cos t+\sin t\right)\\ y=e^t(\cos t-\sin t)\end{cases}, A\left(1;1\right), B\left(-e^{\pi};-e^{\pi}\right), \rho\left(M\right)=x^2+y^2.$

7.

$\gamma:\begin{cases}x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t\\ y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t\end{cases}, A\left(0;2\right), B\left(-2\pi;\pi^2-2\right), \rho\left(M\right)=x^2+y^2.$

8. $\gamma:\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}, A(0;0), B(2\pi;4), \rho(M)=y^2.$

9. $\gamma:\begin{cases} x=2\cos t \\ y=5\sin t \end{cases}, x\ge 0, y\ge 0, A(2;0), B(0;5), \rho(M)=xy.$

10. $\gamma:\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}, x\ge 0, y\ge 0, A(0;2), B(2;0), \rho(M)=xy.$

13.2. Криволинейный интеграл II рода

13.2.1. Определение

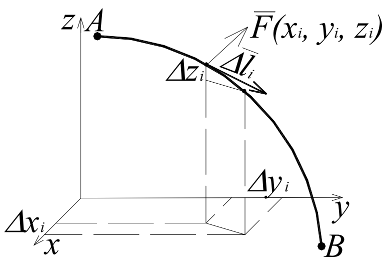


Рис. 13.4.

Криволинейным интегралом II рода от векторной функции $\overline{F}(x,y,z)$ по дуге AB называется предел интегральной суммы

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta l\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\overline{F}(x_i,y_i,z_i)\overline{\Delta l}_i=\int_{AB}\overline{F}(x,y,z)\cdot\overline{dl}=\int_{AB}\overline{F}\cdot\overline{dl}$$

,

где

$\overline{F}(x,y,z)=F_x(x,y,z)\overline{i}+F_y(x,y,z)\overline{j}+F_z(x,y,z)\overline{k}$ – непрерывная векторная функция (векторное поле) в трехмерном пространстве на дуге AB (рис.13.4),

$\overline{\Delta l}_i=\Delta x_i\overline{i}+\Delta y_i\overline{j}+\Delta z_i\overline{k}$ – вектор i-ой элементарной дуги, на которые разбита вся дуга AB, $(i=\overline{1,n})$, направлен он по касательной к элементарной дуге в сторону направления интегрирования,

$\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i$ – соответствующие координаты вектора $\overline{\Delta l}_i$,

n – количество элементарных дуг,

$\overline{F}(x_i,y_i,z_i)$ – значение векторной функции $\overline{F}$ в точке (x_i,y_i,z_i), принадлежащей i-ой элементарной дуге,

$\overline{F}(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta\overline{l}_i$ – скалярное произведение указанных векторов.

При переходе от интегральной суммы к ее пределу $\Delta\overline{l}_i=\Delta x_i\overline{i}+\Delta y_i\overline{j}+\Delta z_i\overline{k}$ преобразуется в $d\overline{l}=dx\overline{i}+dy\overline{j}+dz\overline{k}$ и тогда криволинейный интеграл II рода

$$\int_{AB}\overline{F}\overline{dl}=\int_{AB}\left(F_x(x,y,z)\overline{i}+F_y(x,y,z,)\overline{j}+F_z(x,y,z)\overline{k}\right)\cdot\left(dx\overline{i}+dy\overline{j}+dz\overline{k}\right)=\int_{AB}F_xdx+F_ydy+F_zdz.$$

По последнему виду этот интеграл еще называют интегралом по координатам, а иногда линейным (в силу линейности подынтегрального выражения).

Последний вид интеграла понимается как

$$\int_{AB} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_{AB} F_x dx + \int_{AB} F_y dy + \int_{AB} F_z dz.$$

Если вектор $\overline{dl} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$ представить как произведение единичного вектора $\bar{n} = \frac{dx}{|\overline{dl}|}\bar{i} + \frac{dy}{|\overline{dl}|}\bar{j} + \frac{dz}{|\overline{dl}|}\bar{k}$ на модуль вектора $|\overline{dl}| = dl$, то $\int_{AB} \overline{F}\,\overline{dl} = \int_{AB} \overline{F}\bar{n}\,dl = \int_{AB} f(x,y,z)dl$, где скалярное произведение векторов $\overline{F}\bar{n}$ есть скалярная функция *f(x,y,z)*. Этим самым показывается связь криволинейных интегралов I и II родов.

Если $\vec{F}(x,y,z)$ – вектор силы на дуге *AB*, то скалярное произведение векторов $\overline{F}(x_i,y_i,z_i)\cdot\overline{\Delta l_i}$ есть элементарная работа A_i силы $\overline{F}$ на *i*-ой элементарной дуге, интегральная сумма – приближенное значение, а ее предел – точное значение работы *A*, которую затрачивает сила $\overline{F}$ по дуге *AB*.

Механический смысл криволинейного интеграла II рода – это есть работа, затрачиваемая силой $\overline{F}$ по дуге *AB*.

Если векторная функция есть напряженность электростатического поля $\overline{E}(x,y,z)$, то известные из электростатики соотношения физических величин $\left(\overline{E} = \frac{\overline{F}}{q}, \overline{E}\bar{l} = \frac{\overline{F}\bar{l}}{q} = \frac{A}{q} = U\right)$ приводят к тому, что скалярное произведение векторов $\overline{E}(x_i,y_i,z_i)\cdot\overline{\Delta l_i}$ – элементарное электрическое напряжение на концах *i*-ой элементарной дуги, интегральная сумма – приближенное значение, а ее предел – точное значение электрического напряжения U_{AB} на концах дуги *AB*.

Электротехнический смысл криволинейного интеграла II рода – это есть электрическое напряжение между точками *AB* в электростатическом поле с напряженностью $\overline{E}$.

$$U_{AB} = \int_{AB} \overline{E}\,\overline{dl}.$$

13.2.2. Вычисление криволинейного интеграла II рода

Вычисление сводится к расчету определенного интеграла.

Если дуга *AB* задана в трехмерном пространстве, а интегрировать нужно по одной переменной (однократно), то задавать уравнение дуги *AB* нужно параметрическим образом.

$$\begin{cases} x = x(t) & dx = x'_t dt \\ y = y(t) & dy = y'_t dt \\ z = z(t) & dz = z'_t dt \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2 .$$

Тогда

$$\int_{AB} \overline{F}\,\overline{dl} = \int_{AB} F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \Big(F_x\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'_t + F_y\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'_t + F_z\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'_t\Big)dt$$

(13.6)

Если векторное поле $\overline{F}(x,y)$ задано на дуге AB в двухмерном пространстве, то вычисление криволинейного интеграла II рода можно производить по любой из следующих формул.

1. Для дуги AB, заданной параметрическим образом: $x = x(t), y = y(t), t_1 \le t \le t_2$

$$\int_{AB} \overline{F}\,\overline{dl} = \int_{t_1}^{t_2} \Big(F_x\big(x(t),y(t)\big)x'_t + F_y\big(x(t),y(t)\big)y'_t\Big)dt.$$

(13.7)

2. Для дуги AB, заданной гладкой функцией $y = y(x), y(a) = A, y(b) = B$ (рис. 13.2)

$$\int_{AB} \overline{F}\,\overline{dl} = \int_{a}^{b} \Big(F_x\big(x,y(x)\big) + F_y\big(x,y(x)\big)y'_x\Big)dx$$

(13.8)

3. Для дуги AB, заданной гладкой функцией $x = x(y), x(c) = B, x(d) = A$ (рис. 13.2)

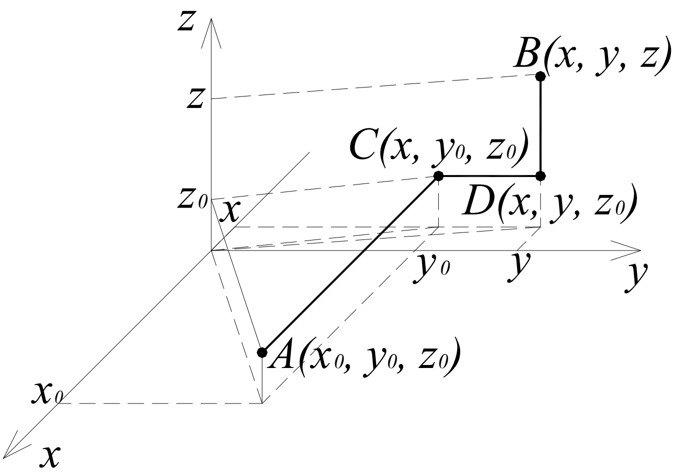
$$\int_{AB} \overline{F}\,\overline{dl} = \int_{d}^{c} \Big(F_x\big(x(y),y\big)x'_y + F_y\big(x(y),y\big)\Big)dy$$

(13.9)

Если кривая интегрирования замкнута, т.е. A и B совпадают, то криволинейный интеграл II рода называется *циркуляцией* вектора $\overline{F}$ по контуру l:

$$Ц = \oint_{l} \overline{F}\,\overline{dl} \,.$$

При этом, очень важно указывать стрелочкой в контуре направление интегрирования, т.к. для криволинейного интеграла II рода $\int_{AB} = -\int_{BA}$.



В практике вычислений криволинейного интеграла II рода особое место занимают интегралы инвариантные (независимые) от кривой интегрирования. Условия инвариантности выводят из формул Грина и Стокса и достаточно широко отображены в литературе.

Для таких интегралов форма кривой безразлична,

Рис. 13.5.

поэтому выбирают такую форму, для которой расчет интеграла был бы самым простым.

Классическим примером такого расчета являемся формула определения потенциала векторного поля.

Если векторное поле $\overline{F}$ потенциально, то оно инвариантно к кривой интегрирования. Тогда дугу AB заменяют на самую простую ломаную AB (рис.13.5), состоящую из трех отрезков прямых параллельных соответствующей одной из координатных осей. Тогда уравнения каждого отрезка представляют собой одну из переменных при постоянстве двух других переменных.

Потенциал φ векторного поля $\overline{F}$ равен:

$$\varphi = \int_{AB} \overline{F}\,\overline{dl} = \int_{AC} \overline{F}\,\overline{dl} + \int_{CD} \overline{F}\,\overline{dl} + \int_{DB} \overline{F}\,\overline{dl}.$$

$$\int_{AC} \overline{F}\,\overline{dl} = \int_{AC} F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz = \left| \begin{matrix} y = y_0, dy = 0 \\ z = z_0, dz = 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{x_0}^{x} F_x(x, y_0, z_0)dx,$$

$$\int_{CD} \overline{F}\,\overline{dl} = \int_{CD} F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz = \left| \begin{matrix} z = z_0, dz = 0 \\ x - const, dx = 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{y_0}^{y} F_y(x, y, z_0)dy,$$

$$\int\limits_{DB} \overline{F}\overline{dl} = \int\limits_{DB} F_x(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)\,dz = \left| \begin{array}{l} x - const, dx = 0 \\ y - const, dy = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{z_0}^{z} F_z(x,y,z)\,dz,$$

$$\varphi = \int\limits_{AB} \overline{F}\overline{dl} = \int\limits_{x_0}^{x} F_x(x,y_0,z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} F_y(x,y,z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} F_z(x,y,z)dz.$$

(13.10)

13.2.3. Некоторые приложения криволинейного интеграла II рода

1. Вычисление работы A силы $\overline{F}$ по кривой AB.

$$A = \int\limits_{AB} \overline{F}\,\overline{dl}.$$

2. Вычисление электрического напряжения U в электростатическом поле с напряженностью $\overline{E}$.

$$U = \int\limits_{AB} \overline{E}\,\overline{dl}.$$

3. Площадь фигуры на плоскости, например, на плоскости $z = 0$, ограниченной замкнутой линией γ.

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{\gamma} xdy - ydx.$$

13.2.4. Типовые примеры решения криволинейных интегралов II рода

Пример 1. Вычислить

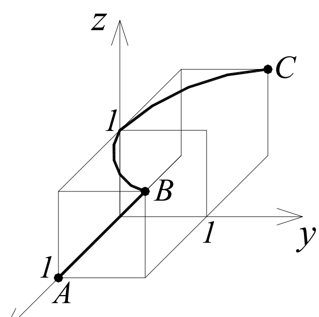


Рис. 13.6.

$$\int\limits_{ABC} (x^2 + 2yz)dx + (y^2 + 2xz)dy + (z^2 + 2xy)dz,$$

AB – отрезок прямой, BC – дуга

$y = x^2, z = 1, A(1;0;0), B(1;1;1), C(-1;1;1)$.

Начертить линию интегрирования.

Решение. Линия интегрирования – рис. 13.6.

$$\int\limits_{ABC} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC}.$$

$$\int\limits_{AB} (x^2 + 2yz)dx + (y^2 + 2xz)dy + (z^2 + 2xy)dz =$$

$$= \left| AB : \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-0}{1-0}, y = z, x = 1, dy = dz, dx = 0 \right| =$$

$$=\int_0^1\left(y^2+2y\right)dy+\left(y^2+2y\right)dy=2\int_0^1\left(y^2+2y\right)dy=2\left(\frac{y^3}{3}+y^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{8}{3}.$$

$$\int_{BC}\left(x^2+2yz\right)dx+\left(y^2+2xz\right)dy+\left(z^2+2xy\right)dz=$$

$$=\left|BC: y=x^2, z=1, dy=2xdx, dz=0\right|=$$

$$=\int_1^{-1}\left(x^2+2x^2\right)dx+\left(x^4+2x\right)2xdx=\int_1^{-1}\left(2x^5+7x^2\right)dx=\left(2\frac{x^6}{6}+7\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^{-1}=$$

$$=\frac{1}{3}(1-1)+\frac{7}{3}(-1-1)=-\frac{14}{3}.$$

$$\int_{ABC}=\frac{8}{3}-\frac{14}{3}=-2.$$

Пример 2. Вычислить работу силового поля $\overline{F}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги кривой γ от точки A до точки B.

$$\overline{F}=\left(y^2-z\right)\overline{i}+\left(z^2-x\right)\overline{j}+\left(x^2-y\right)\overline{k},$$

$$\gamma:\begin{cases} x=2\cos t, y=2\sin t, \\ z=\sin t, \end{cases} \qquad A(2;0;0), B(0;2;1).$$

Решение. Нетрудно видеть, что при перемещении материальной точки от A к B параметр t кривой γ меняется от 0 до $\pi/2$.

$$A=\int_{AB}\overline{F}\,\overline{dl}=\int_{AB}\left(y^2-z\right)dx+\left(z^2-x\right)dy+\left(x^2-y\right)dz=\left|dx=-2\sin tdt, dy=\right.$$

$$\left.=2\cos tdt, dz=\cos tdt,\ 0\le t\le\pi/2.\right|=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\Big(\left(4\sin^2 t-\sin t\right)\left(-2\sin t\right)+\left(\sin^2 t-2\cos t\right)\cdot 2\cos t+\left(4\cos^2 t-2\sin t\right)\cdot\cos t\Big)dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(-8\sin^3 t+2\sin^2 t+2\sin^2 t\cdot\cos t-4\cos^2 t+4\cos^3 t-2\sin t\cdot\cos t\right)dt=$$

$$=8\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 t\right)d\cos t+\int_0^{\pi/2}\left(2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}-4\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt+2\int_0^{\pi/2}\sin^2 td\sin t+$$

$$+4\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2 t\right)d\sin t-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin td\sin t=$$

$$=\left(8\cos t-8\frac{\cos^3 t}{3}-t-\frac{3}{2}\sin 2t+2\frac{\sin^3 t}{3}+4\sin t-4\frac{\sin^3 t}{3}-2\frac{\sin^2 t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$=-3-\dfrac{\pi}{2}$ ед. работы.

Пример 3. Найти циркуляцию вектора $\overline{F}$ вдоль контура γ, образованного пересечением двух поверхностей. Построить чертеж.

$$\overline{F}=3y\overline{i}-z\overline{j}+2x\overline{k},\gamma:\begin{cases}x^2+y^2=9,\\2x-y+z=2.\end{cases}$$

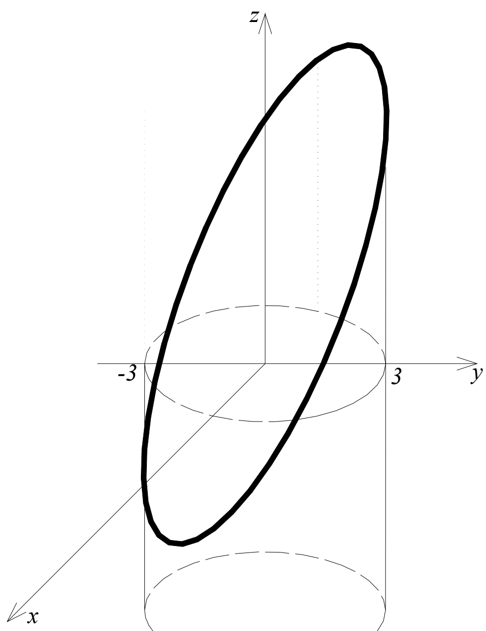


Рис.13.7.

Решение. При пересечении данных поверхностей образуется контур – наклонный в пространстве эллипс (рис. 13.7). Чтобы найти циркуляцию вектора $\overline{F}$ вдоль этого контура, необходимо вывести его аналитическое выражение в параметрической форме.

$x=r\cos t, y=r\sin t, x^2+y^2=9,$

$r^2\cos^2 t+r^2\sin^2 t=9,\ r^2=9,\ r=3.$

$2x-y+z=2,\ 2r\cos t-r\sin t+z=2,$

$6\cos t-3\sin t+z=2.$

$$\begin{cases}x=3\cos t, & dx=3(-\sin t)dt,\\ y=3\sin t, & dy=3\cos t dt,\\ z=2-6\cos t+3\sin t, & dz=(6\sin t+3\cos t)dt.\\ 0\le t\le 2\pi.\end{cases}$$

Циркуляция вектора равна:

$$Ц=\oint_\gamma \overline{F}\,\overline{dl}=\oint_\gamma(3y\overline{i}-z\overline{j}+2x\overline{k})(dx\overline{i}+dy\overline{j}+dz\overline{k})=\oint_\gamma 3ydx-zdy+2xdz=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(3\cdot3\sin t\cdot3(-\sin t)-(2-6\cos t+3\sin t)3\cos t+2\cdot3\cos t(6\sin t+3\cos t)\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-27\sin^2 t-6\cos t+18\cos^2 t-9\sin t\cos t+36\cos t\sin t+18\cos^2 t\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-27\sin^2 t+36\cos^2 t+27\sin t\cos t-6\cos t\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left((-27)\frac{1-\cos 2t}{2}+36\frac{1+\cos 2t}{2}+\frac{27}{2}\sin 2t-6\cos t\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{27}{2}+\frac{27}{2}\cos 2t+\frac{36}{2}+\frac{36}{2}\cos 2t+\frac{27}{2}\sin 2t-6\cos t\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2}+\frac{63}{2}\cos 2t+\frac{27}{2}\sin 2t-6\cos t\right)dt=\left(\frac{9}{2}t+\frac{63}{4}\sin 2t-\frac{27}{4}\cos 2t-6\sin t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=9\pi.$$

13.2.5. Задания на контрольную работу

Задание 1. Вычислить интеграл, начертить линию интегрирования.

1. $\int\limits_{ABC}(2y+x)dx+4xyzdy+xdz,$ AB – дуга $y=x^2-3x+2, z=2,$

   BC – отрезок прямой, $A(1;0;2), B(0;2;2); C(0;0;0).$

2. $\int\limits_{ABC}(y-x+2z)dx+2xyzdy+y^2dz,$ ABC – ломаная,

   $A(2;1;2), B(-1;1;0); C(-1;2;1).$

3. $\int\limits_{ABC}2xyzdx+(2z+x+y)dy+(z+x)dz,$ AB – дуга $z=\sqrt[3]{y}, x=-1;$

   BC – отрезок прямой, $A(-1;1;1), B(-1;-1;-1); C(0;-1;1).$

4. $\int\limits_{ABC}(x-2y+z)dx+(y-3x-2)dy+yzdz,$ AB – дуга $z=\sqrt{x-1}, y=1;$

   BC – отрезок прямой, $A(2;1;1), B(1;1;0); C(1;2;2).$

5. $\int\limits_{ABC}(2y-3x-z)dx+(4xy+2z)dy+x^2zdz,$ AB – дуга $y=3x^2-x+1, z=2;$

   BC – отрезок прямой, $A(1;3;2), B(3;25;2); C(3;0;0).$

6. $\int\limits_{ABC}(2x-y-z)dx-2xy^2zdy-5x^2dz,$ AB – отрезок прямой,

   BC – дуга $y=z^2-4z+4, x=1,$ $A(2;-3;1), B(1;1;1); C(1;4;4).$

7. $\int\limits_{ABC}\sin ydx+x^2zdy-y^2xdz,$ AB – дуга $y=2\sqrt{x}, z=0;$

BC – отрезок прямой, $A(0;0;0), B(4;4;0); C(4;0;4).$

8. $\int\limits_{ABC} \frac{zdy}{x} - \frac{zdx}{y} + xy^2dz,$ AB – дуга $y = \sqrt[3]{x}, z = 4;$

BC – отрезок прямой, $A(1;1;4), B(8;2;4); C(8;0;0).$

9. $\int\limits_{ABC} (x^2 - y^2 + z^2)dx + (x^2 + y^2 - z^2)dy + xyzdz,$ AB – отрезок прямой,

BC – дуга $y = x^3, z = 2,$ $A(0;1;0), B(1;1;2); C(-1;-1;2).$

10. $\int\limits_{ABC} (2y - 3x + z^2)dx - (x\cos y + 2z)dy - z^2dz,$ AB – отрезок прямой,

BC – дуга $x^2 + z^2 = 1, y = 0$, $A(0;2;1), B(0;0;-1); C(1;0;0).$

Задание 2. Вычислить работу силового поля $\overline{F}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги кривой γ от точки A до точки B.

1. $\overline{F} = 2y\overline{i} + xz\overline{j} + y\overline{k}, \gamma : x = \cos t, y = \sin t, z = \cos t; A(1;0;1), B(-1;0;-1).$

2. $\overline{F} = xy\overline{i} + z^2\overline{j} + x\overline{k}, \gamma : x = \cos t, y = \sin t, z = 4 - \cos t - \sin t; A(1;0;3), B(-1;0;5).$

3. $\overline{F} = z\overline{i} - xz\overline{j} + y^2\overline{k}, \gamma : x = 5\cos t, y = 5\sin t, z = 4; A(5;0;4), B(-5;0;4).$

4. $\overline{F} = xz\overline{i} + x\overline{j} + z^2\overline{k}, \gamma : x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 1 - 2\cos t - 2\sin t; A(2;0;-1), B(0;2;-1).$

5. $\overline{F} = y^2\overline{i} + z\overline{j} + xy\overline{k}, \gamma : x = 2\cos t, y = 3\sin t, z = 4\cos t - 3\sin t - 2; A(2;0;2), B(0;3;-5).$

6. $\overline{F} = x\overline{i} + 2z^2\overline{j} + yx\overline{k}, \gamma : x = 3\cos t, y = 4\sin t, z = 6\cos t - 4\sin t + 1; A(3;0;7), B(0;4;-3).$

7. $\overline{F} = y^2\overline{i} + xz\overline{j} + x\overline{k}, \gamma : x = 4\cos t, y = 3\sin t, z = \cos t - 3\sin t - 3; A(4;0;-2), B(0;3;-6).$

8. $\overline{F} = zx\overline{i} + z^2\overline{j} + y\overline{k}, \gamma : x = 2\cos t, y = \sin t, z = 4\cos t - \sin t - 1; A(2;0;3), B(0;1;-2).$

9.

$\overline{F} = z^2\overline{i} + x\overline{j} + xy\overline{k}, \gamma : x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 4; A(3;0;4), B(0;3;4).$

10.

$\overline{F} = yx\overline{i} + x^2\overline{j} + z\overline{k}, \gamma : x = \cos t, y = \sin t, z = 4\sin t - 3\cos t; A(1;0;-3), B(0;1;4).$

Задание 3. Найти циркуляцию вектора $\overline{F}$ вдоль контура γ, образованного пересечением двух поверхностей. Построить чертеж.

1. $\overline{F} = 2z\overline{i} + 4y\overline{j} - x\overline{k}$, $\quad \gamma : \begin{cases} x^2 + z^2 = 4, \\ x - y + 2z = 2. \end{cases}$

2. $\overline{F} = yz\overline{i} - 2x\overline{j} + z^2\overline{k}$, $\quad \gamma : \begin{cases} z = 6\left(x^2 + y^2\right) + 2, \\ z = 8. \end{cases}$

3. $\overline{F} = -z\overline{i} + 2x\overline{j} - 4y^2\overline{k}$, $\quad \gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 4, z \geq 0. \end{cases}$

4. $\overline{F} = x^2\overline{i} - 3z\overline{j} + 2y\overline{k}$, $\quad \gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ z = 2. \end{cases}$

5. $\overline{F} = 4y\overline{i} + 2xz\overline{j} - z\overline{k}$, $\quad \gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4z^2, \\ z = 1/2. \end{cases}$

6. $\overline{F} = \left(3 - xy\right)\overline{i} + 2z\overline{j} - x\overline{k}$, $\quad \gamma : \begin{cases} y^2 + z^2 = 9, \\ y - 2x - 4z = 4. \end{cases}$

7. $\overline{F} = 5z\overline{i} + xy\overline{j} - xz\overline{k}$, $\quad \gamma : \begin{cases} y = 4\left(x^2 + z^2\right) - 2, \\ y = 2. \end{cases}$

8. $\overline{F} = x^2\overline{i} - z\overline{j} + y^2\overline{k}$, $\quad \gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y^2 + z^2 = 2, x > 0. \end{cases}$

9. $\overline{F} = yz\overline{i} + 2xz\overline{j} - xy\overline{k}$, $\quad \gamma : \begin{cases} x^2 + z^2 = 9, \\ y = 3. \end{cases}$

10. $\overline{F} = 2z^2\overline{i} - xy\overline{j} + 4z\overline{k}$, $\quad \gamma : \begin{cases} x^2 + z^2 = 9y^2, \\ y = 1. \end{cases}$

14. Поверхностные интегралы

В зависимости от величины (функции, поля), которая интегрируется по ограниченному куску гладкой кривой поверхности, существуют два рода поверхностных интегралов.

При интегрировании скалярной величины (поля) – поверхностный интеграл I рода.

При интегрировании векторной величины (поля) – поверхностный интеграл II рода.

14.1. Поверхностный интеграл I рода

14.1.1. Определение

Поверхностным интегралом I рода от скалярной функции *f(x,y,z)* по ограниченному куску гладкой (кусочно-гладкой) поверхности *σ* называется предел интегральной суммы

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta S_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i = \iint_{\sigma} f(x,y,z)dS,$$

где *f(x,y,z)* – ограниченная непрерывная скалярная функция (поле), определённая на ограниченном куске гладкой поверхности *σ* (рисунок 14.1),

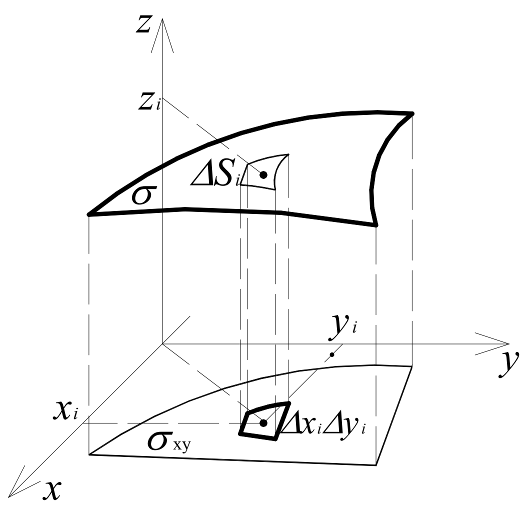


Рисунок 14.1.

ΔS_i – площадь i-ой элементарной площадки, на которые разбит весь кусок поверхности *σ*, $(i=\overline{1,n})$,

n – количество элементарных площадок,

$f(x_i,y_i,z_i)$ – значение функции в точке (x_i,y_i,z_i) принадлежащей элементарной площадке ΔS_i.

Если *f(x,y,z)* – поверхностная плотность распределения вещества [кг/м^2], то $f(x_i,y_i,z_i)\ \Delta S_i$ - масса элементарного кусочка поверхности *σ*, интегральная сумма – приближённое значение, а её предел – точное значение массы всего куска поверхности *σ*.

Физический смысл поверхностного интеграла I рода – это есть масса куска кривой поверхности *σ*.

С помощью этого интеграла можно посчитать массу пустой цистерны, обшивки ракеты, корпуса подводной лодки и т. п.

14.1.2. Вычисление поверхностного интеграла I рода.

Расчёт сводится к вычислению двойного интеграла. Общеизвестно, что двойной интеграл вычисляется по плоской области *D*.

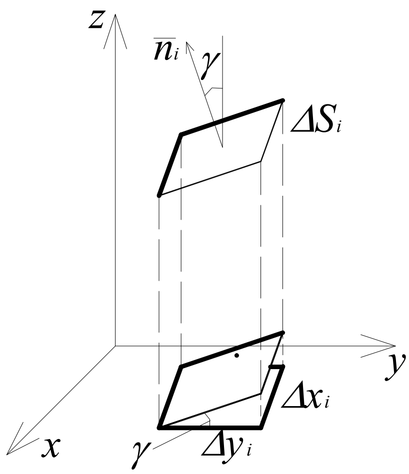


Рисунок 14.2

Значит, нужен переход от куска кривой поверхности σ к плоской области *D*. Этот переход осуществляется через проекцию σ на любую из координатных плоскостей, лишь бы выполнялось условие однозначности проектирования этой кривой поверхности на координатную плоскость.

Пусть поверхность σ однозначно проектируется на плоскость $Z = 0$ и эта проекция есть область σ_{xy} (рисунок 14.1). Тогда каждая из элементарных площадок ΔS_i будет иметь проекцию на плоскость $Z = 0$ в виде $\Delta x_i \Delta y_i$ (рисунок 14.2)

Элементарная площадка ΔS_i – кусочек плоскости изменяющей свою ориентацию от точки к точке по поверхности σ, площадка $\Delta x_i \Delta y_i$ – тоже кусочек плоскости, но с постоянной ориентацией, так как лежит на самой плоскости $Z = 0$.

Их площади связаны соотношением:

$\dfrac{\Delta x_i \Delta y_i}{\Delta S_i} = \cos\gamma$, где γ - угол между их плоскостями.

Но угол γ, это угол между единичным нормальным вектором $\overline{n}_i$ площадки ΔS_i и осью *Oz* (рис. 14.2), являющейся нормальным вектором площадки $\Delta x_i \Delta y_i$.

Напомним, если гладкая двухсторонняя поверхность σ задана уравнением $z = g(x,y)$ или $\varphi(x,y,z) = z - g(x,y) = 0$, то единичный нормальный вектор к такой поверхности определяется как

$$\overline{n} = \pm\frac{\overline{grad\varphi}}{\left|\overline{grad\varphi}\right|} = \pm\left(\frac{\varphi'_x}{\sqrt{(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2+(\varphi'_z)^2}}\overline{i} + \frac{\varphi'_y}{\sqrt{(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2+(\varphi'_z)^2}}\overline{j} + \frac{\varphi'_z}{\sqrt{(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2+(\varphi'_z)^2}}\overline{k}\right) =$$

$$= \pm\left(\frac{-g'_x}{\sqrt{1+(g'_x)^2+(g'_y)^2}}\overline{i} + \frac{-g'_y}{\sqrt{1+(g'_x)^2+(g'_y)^2}}\overline{j} + \frac{1}{\sqrt{1+(g'_x)^2+(g'_y)^2}}\overline{k}\right) = \quad (14.1)$$

$$= \pm\left(\cos\alpha\overline{i} + \cos\beta\overline{j} + \cos\gamma\overline{k}\right),$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы.

Поверхностный интеграл I рода, определяющий массу поверхности, не зависит от направления вектора $\bar{n}$, поэтому знаки $\pm$ опускаем.

Из формулы (14.1) следует:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(g'_x\right)^2+\left(g'_y\right)^2}}. \text{ Тогда } \Delta x_i \Delta y_i = \cos\gamma \cdot \Delta S_i, \quad \Delta S_i = \frac{\Delta x_i \Delta y_i}{\cos\gamma}$$

$$\Delta S_i = \sqrt{1+\left(g'_x\right)^2+\left(g'_y\right)^2}\,\Delta x_i \Delta y_j.$$

При переходе от интегральной суммы к её пределу имеем:

$$dxdy = \cos\gamma dS, \quad dS = \frac{dxdy}{\cos\gamma}, \quad dS = \sqrt{1+\left(g'_x\right)^2+\left(g'_y\right)^2}\,dxdy. \qquad (14.2)$$

Таким образом, если функция *f(x,y,z)* задана на поверхности *σ*, которая описывается уравнением z = *g(x,y),* и поверхность *σ* однозначно проектируется на плоскость *Z* = 0, то поверхностный интеграл I рода вычисляется:

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{\sigma_{xy}} f\left(x,y,g(x,y)\right)\frac{dxdy}{\cos\gamma} = \\ = \iint_{\sigma_{xy}} f\left(x,y,g(x,y)\right)\sqrt{1+\left(g'_x\right)^2+\left(g'_y\right)^2}\,dxdy. \qquad (14.3)$$

Если поверхность *σ* однозначно проектируется на другие координатные плоскости, например, на *X* = 0, и уравнение поверхности *σ* задаётся в виде *x=u(y,z)* то те же рассуждения приводят к формулам:

$$dydz = \cos\alpha dS, \quad dS = \frac{dydz}{\cos\alpha}, \quad dS = \sqrt{1+\left(u'_y\right)^2+\left(u'_z\right)^2}\,dydz, \qquad (14.4)$$

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{\sigma_{yz}} f\left(u(y,z),y,z\right)\frac{dydz}{\cos\alpha} = \\ = \iint_{\sigma_{yz}} f\left(u(y,z),y,z\right)\sqrt{1+\left(u'_y\right)^2+\left(u'_z\right)^2}\,dydz. \qquad (14.5)$$

Если расчёт привязать к плоскости *Y* = 0 и уравнение *σ* есть *y=v(x,z)*, то соответствующие формулы имеют вид:

$$dxdz = \cos\beta dS, \quad dS = \frac{dxdz}{\cos\beta}, \quad dS = \sqrt{1+\left(v'_x\right)^2+\left(v'_z\right)^2}\,dxdz, \qquad (14.6)$$

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint_{\sigma_{xz}} f\left(x, v(x,z), z\right)\frac{dxdz}{\cos\beta} =$$
$$= \iint_{\sigma_{xz}} f\left(x, v(x,z), z\right)\sqrt{1+\left(v'_x\right)^2+\left(v'_z\right)^2}\,dxdz. \tag{14.7}$$

Если проекции σ на координатные плоскости представляют собой фигуры, ограниченные окружностью или эллипсом, то расчёт поверхностного интеграла I рода (формулы (14.3),(14.5),(14.7)) удобнее проводить в полярной системе координат (см. расчёт двойного интеграла в полярной системе координат).

14.1.3. Некоторые приложения поверхностного интеграла I рода

1. Вычисление массы материальной поверхности с поверхностной плотностью распределения массы *f(x,y,z)*.

$$m = \iint_{\sigma} f(x,y,z)\,dS .$$

2. Вычисление площади поверхности σ (если *f(x,y,z)* = 1).

$$S = \iint_{\sigma} dS .$$

3. Вычисление координат центра масс x_c, y_c, z_c материальной поверхности σ: $x_c = \frac{m_{yz}}{m} = \frac{\iint_{\sigma} xf(x,y,z)dS}{m}$, $y_c = \frac{m_{xz}}{m} = \frac{\iint_{\sigma} yf(x,y,z)dS}{m}$,

$$z_c = \frac{m_{xy}}{m} = \frac{\iint_{\sigma} zf(x,y,z)dS}{m},$$

где m_{yz}, m_{xz}, m_{xy} – статические моменты материальной поверхности σ относительно координатных плоскостей.

4. Вычисление моментов инерции I_x, I_y, I_z, I_o относительно осей *Ox,Oy,Oz* и начала координат материальной поверхности σ.

$$I_x = \iint_{\sigma}\left(y^2+z^2\right)f(x,y,z)dS,\ I_y = \iint_{\sigma}\left(x^2+z^2\right)f(x,y,z)dS,$$

$$I_z = \iint_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)f(x,y,z)dS,\ I_0 = \iint_{\sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)f(x,y,z)dS .$$

При расчётах перечисленных величин следует пользоваться формулами (14.3, 14.5, 14.7).

14.1.4. Типовой пример решения поверхностных интегралов I рода

Пример. Вычислить массу, координаты центра масс и моменты инерции относительно координатных осей и начала координат материальной оболочки, которая представляет собой полую тонкостенную конструкцию, выполненную из композитного материала с поверхностной плотностью $\gamma(x,y,z)\left[{}^{кг}\!/_{м^2}\right]$. Оболочка имеет вид тела, ограниченного поверхностями S_1, S_2.

$$\gamma(x,y,z)=x^2,\ S_1: z=2-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right),\ S_2: z=0.$$

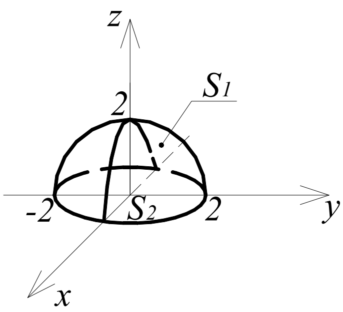


Рисунок 14.3.

Решение. Оболочка имеет вид тела – рис. 14.3, где S_1 – “крыша”, S_2 – основание.

Масса оболочки

$$m=\oiint\limits_{s}\gamma(x,y,z)dS=\iint\limits_{S_1}x^2dS_1+\iint\limits_{S_2}x^2dS_2,$$

$$S_1: z=g(x,y)=2-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right),$$

$$dS_1=\sqrt{1+\left(g'_x\right)^2+\left(g'_y\right)^2}dxdy=\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy.$$

$$S_2: z=0,\ dS_2=dxdy.$$

$\iint\limits_{S_1}x^2dS_1=^{\bullet}\Big|_{\bullet}$ *поверхность S_1 однозначно проектируется на плоскость Z=0 в виде поверхности S_2* $_{\bullet}\Big|^{\bullet}=\iint\limits_{S_2}x^2\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=$

$$=^{\bullet}\left|\begin{array}{l}x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, dxdy=rdrd\varphi, 0\le\varphi\le 2\pi,\\ {}_{\bullet}z=0=2-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right), 0=2-\frac{1}{2}\left(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\right), r^2=4, r=2.{}_{\bullet}\end{array}\right|^{\bullet}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 r^2\cos^2\varphi\sqrt{1+r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}\cdot rdr=\int\limits_o^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^2 r^3\sqrt{1+r^2}dr.$$

$$\int\limits_0^2 r^3\sqrt{1+r^2}dr=^{\bullet}\left|\begin{array}{l}1+r^2=t^2, t=\sqrt{1+r^2}, r=0, t=1,\\ {}_{\bullet}r^2=t^2-1, 2rdr=2tdt, r=2, t=\sqrt{5}{}_{\bullet}\end{array}\right|^{\bullet}=$$

$$=\int\limits_1^{\sqrt{5}}\left(t^2-1\right)ttdt=\int\limits_1^{\sqrt{5}}\left(t^4-t^2\right)dt=\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}}=\frac{1}{5}(25\sqrt{5}-1)-\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)=\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{15}.$$

$$\iint\limits_{S_1}x^2dS_1=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^2 r^3\sqrt{1+r^2}dr=\left(\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{15}\right)\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=\left(\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{15}\right)\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=\left(\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{15}\right)\left(\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\left(\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{15}\right)\pi.$$

$$\iint_{S_2}x^2dS_2=\iint_{S_2}x^2dxdy=\left|\begin{array}{c}x=r cos\varphi,\ 0\le r\le 2,\\ dxdy=rdrd\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\cdot\int_0^2 r^3dr=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi\cdot\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^2=4\left(\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=4\pi.$$

$$m=\left(\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{15}\right)\pi+4\pi=\left(\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{62}{15}\right)\pi\approx 36{,}401\,Ед.массы,$$

Координаты центра масс x_c, y_c, z_c.

$$x_c=\frac{\oint\!\!\oint_S x\gamma(x,y,z)dS}{m}=\frac{\oint\!\!\oint_S x^3dS}{m}=\frac{\iint_{S_1}x^3dS_1+\iint_{S_2}x^3dS_2}{m}.$$

$$\iint_{S_1}x^3dS_1=\iint_{S_2}x^3\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=\left|\begin{array}{l}x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi,0\le\varphi\le 2\pi,\\ dxdy=rdrd\varphi,\ 0\le r\le 2.\end{array}\right|=$$

$$=\iint_{S_2}r^3\cos^3\varphi\sqrt{1+r^2}rdrd\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^3\varphi d\varphi\int_0^2 r^4\sqrt{1+r^2}dr=\left|\int_0^2 r^4\sqrt{1+r^2}dr=A\right|=A\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi=$$

$$=A\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

$$\iint_{S_2}x^3dS_2=\iint_{S_2}x^3dxdy=\int_0^{2\pi}\cos^3\varphi d\varphi\int_0^2 r^4dr=\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi\frac{r^5}{5}\Bigg|_0^2=\frac{32}{5}\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

$$y_c=\frac{\oint\!\!\oint_S y\gamma(x,y,z)dS}{m}=\frac{\oint\!\!\oint_S yx^2dS}{m}=\frac{\iint_{S_1}yx^2dS_1+\iint_{S_2}yx^2dS_2}{m}.$$

$\iint_{S_1}yx^2dS_1=\iint_{S_2}yx^2\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=$ | *переход к полярным координатам* $|=$

$$=\iint\limits_{S_2} r\sin\varphi r^2\cos^2\varphi\sqrt{1+r^2}\cdot rdrd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^2 r^4\sqrt{1+r^2}dr=$$

$$=\left|\int\limits_0^2 r^4\sqrt{1+r^2}dr=A\right|=$$

$$=A\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\left(-\cos\varphi\right)=-A\frac{\cos^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{2\pi}=-\frac{A}{3}(1-1)=0\,.$$

$$\iint\limits_{S_2} yx^2dS_2=\iint\limits_{S_2} yx^2dxdy=\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^2 r^4dr=-\frac{32}{5}\cdot\frac{\cos^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

$$z_{c=}\frac{\oiint\limits_S z\gamma\left(x,y,z\right)dS}{m}=\frac{\oiint\limits_S zx^2dS}{m}=\frac{\iint\limits_{S_1} zx^2dS_1+\iint\limits_{S_2} zx^2dS_2}{m}.$$

$$\iint\limits_{S_1} zx^2dS_1=\left|\,z=2-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right|=\iint\limits_{S_2}\left(2-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)x^2\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=$$

$= \left|\,\textit{переход к полярным координатам}\,\right| =$

$$=\iint\limits_{S_2}\left(2-\frac{1}{2}r^2\right)r^2\cos^2\varphi\sqrt{1+r^2}\cdot rdrd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^2\left(2r^3-\frac{1}{2}r^5\right)\sqrt{1+r^2}\cdot dr.$$

$\int\limits_0^2 r^3\sqrt{1+r^2}dr=\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{15}$ (см. раньше).

$$\int\limits_0^2 r^5\sqrt{1+r^2}dr=\left|\begin{array}{l}1+r^2=t^2,\ t=\sqrt{1+r^2},\ r=0,\ t=1,\\ r^2=t^2-1,\ 2rdr=2tdt,\ r=2,\ t=\sqrt{5}.\end{array}\right|=\int\limits_1^{\sqrt{5}}\left(t^2-1\right)^2t^2dt=$$

$$=\int\limits_1^{\sqrt{5}}\left(t^6-2t^4+t^2\right)dt=\left(\frac{t^7}{7}-\frac{2}{5}t^5+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{1}{7}\left(125\sqrt{5}-1\right)-\frac{2}{5}\left(25\sqrt{5}-1\right)+\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)=\frac{200}{21}\sqrt{5}-\frac{8}{105}.$$

$$\iint\limits_{S_1} zx^2dS_1=\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^2\left(2r^3-\frac{1}{2}r^5\right)\sqrt{1+r^2}dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\varphi}{2}d\varphi\left[2\cdot\left(\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{15}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{200}{21}\sqrt{5}-\frac{8}{105}\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{20}{3}\sqrt{5}+\frac{4}{15}-\frac{100}{21}\sqrt{5}+\frac{4}{105}\right)\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\left[\sqrt{5}\left(\frac{20}{3}-\frac{100}{21}\right)+\frac{4}{15}+\frac{4}{105}\right]\pi=$$

$$=\left(\frac{40}{21}\sqrt{5}+\frac{32}{105}\right)\pi.$$

$$\iint\limits_{S_2} zx^2 dS_2 = \left| z = 0 \right| = 0.$$

$$z_c = \frac{\left(\frac{40}{21}\sqrt{5} + \frac{32}{105}\right)\pi}{\left(\frac{10}{3}\sqrt{5} + \frac{62}{15}\right)\pi} = \left(\frac{200\sqrt{5}+32}{50\sqrt{5}+62}\right)\cdot\frac{15}{105} = \frac{1}{7}\left(\frac{100\sqrt{5}+16}{25\sqrt{5}+31}\right) \approx 0{,}394 \textit{ед.длины}$$

$. x_c = 0, y_c = 0.$

Моменты инерции I_x, I_y, I_z, I_o.

$$I_x = \iint\limits_{S}\left(y^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)dS = \iint\limits_{S_1}\left(y^2+z^2\right)x^2 dS_1 + \iint\limits_{S_2}\left(y^2+z^2\right)x^2 dS_2.$$

$$\iint\limits_{S_1}\left(y^2+z^2\right)x^2 dS_1 = \iint\limits_{S_2}\left[y^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)^2\right]x^2\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$= \left| \textit{переход к полярным координатам} \right| =$$

$$= \iint\limits_{S_2}\left[r^2\sin^2\varphi + \left(2 - \frac{1}{2}r^2\right)^2\right]r^2\cos^2\varphi\sqrt{1+r^2}\cdot rdrd\varphi =$$

$$= \iint\limits_{S_2}\left(r^2\sin^2\varphi + 4 - 2r^2 + \frac{1}{4}r^4\right)r^2\cos^2\varphi\sqrt{1+r^2}\cdot rdrd\varphi =$$

$$= \iint\limits_{S_2} r^5\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sqrt{1+r^2}\,drd\varphi + \iint\limits_{S_2}\cos^2\varphi\left(4r^3 - 2r^5 + \frac{1}{4}r^7\right)\sqrt{1+r^2}\,drd\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\int\limits_0^2 r^5\sqrt{1+r^2}\,dr + \int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^2\left(4r^3 - 2r^5 + \frac{1}{4}r^7\right)\sqrt{1+r^2}\,dr.$$

$$\int\limits_0^2 r^3\sqrt{1+r^2}\,dr = \frac{10}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{15}, \qquad \int\limits_0^2 r^5\sqrt{1+r^2}\,dr = \frac{200}{21}\sqrt{5} - \frac{8}{105}.$$

$$\int\limits_0^2 r^7\sqrt{1+r^2}\,dr = \left| \begin{array}{c} 1+r^2 = t^2,\ r=0,\ t=1 \\ 2rdr = 2tdt,\ r=2,\ t=\sqrt{5} \end{array} \right| = \int\limits_1^{\sqrt{5}}\left(t^2-1\right)^3 t^2 dt =$$

$$= \int\limits_1^{\sqrt{5}}\left(t^8 - 3t^6 + 3t^4 - t^2\right)dt = \left(\frac{t^9}{9} - \frac{3}{7}t^7 + \frac{3}{5}t^5 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}} = \frac{1}{9}\left(625\sqrt{5}-1\right) - \frac{3}{7}\left(125\sqrt{5}-1\right) +$$

$$+ \frac{3}{5}\left(25\sqrt{5}-1\right) - \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right) = \sqrt{5}\left(\frac{625}{9} - \frac{375}{7} + 15 - \frac{5}{3}\right) - \frac{1}{9} + \frac{3}{7} - \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{1840}{63}\sqrt{5} + \frac{16}{315}.$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi\int_0^2 r^5\sqrt{1+r^2}dr=\left(\frac{200}{21}\sqrt{5}-\frac{8}{105}\right)\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi d\varphi=\left(\frac{200}{21}\sqrt{5}-\frac{8}{105}\right)\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=\left(\frac{200}{21}\sqrt{5}-\frac{8}{105}\right)\frac{1}{8}\left(\varphi-\frac{\sin\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\left(\frac{200}{21}\sqrt{5}-\frac{8}{105}\right)\frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^2\left(4r^3-2r^5+\frac{1}{4}r^7\right)\sqrt{1+r^2}dr=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi\cdot\left[4\left(\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{15}\right)-2\left(\frac{200}{21}\sqrt{5}-\frac{8}{105}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1840}{63}\sqrt{5}+\frac{16}{315}\right)\right]=$$

$$=\left[\sqrt{5}\left(\frac{40}{3}-\frac{400}{21}+\frac{1840}{252}\right)+\frac{8}{15}+\frac{16}{105}+\frac{4}{315}\right]\cdot\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\left(\frac{100}{63}\sqrt{5}+\frac{220}{315}\right)\pi.$$

$$\iint_{S_1}=\left(y^2+z^2\right)x^2dS_1=\left(\frac{200}{21}\sqrt{5}-\frac{8}{105}\right)\frac{\pi}{4}+\left(\frac{100}{63}\sqrt{5}+\frac{220}{315}\right)\pi=$$

$$=\left[\sqrt{5}\left(\frac{50}{21}+\frac{100}{63}\right)-\frac{2}{105}+\frac{220}{315}\right]\pi=\left(\frac{250}{63}\sqrt{5}+\frac{214}{315}\right)\pi.$$

$$\iint_{S_2}\left(y^2+z^2\right)x^2dS_2=\iint_{S_2}y^2x^2dxdy=\left|\begin{matrix}\textit{переход к полярным}\\ \textit{координатам}\end{matrix}\right|=$$

$$=\iint_{S_2}r^2\sin^2\varphi r^2\cos^2\varphi rdrd\varphi=\iint_{S_2}r^5\sin^2\varphi\cos^2\varphi drd\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int_0^2 r^5dr=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{r^6}{6}\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}\pi.$$

$$I_x=\left(\frac{250}{63}\sqrt{5}+\frac{214}{315}\right)\pi+\frac{8}{3}\pi=\left(\frac{250}{63}\sqrt{5}+\frac{1054}{315}\right)\pi\approx 38{,}368 \text{ ед. момента инерции.}$$

$$I_y=\oiint_S\left(x^2+z^2\right)x^2dS=\iint_{S_1}\left(x^2+z^2\right)x^2dS_1+\iint_{S_2}\left(x^2+z^2\right)x^2dS_2.$$

$$\iint_{S_1}\left(x^2+z^2\right)x^2dS_1=\iint_{S_2}\left[x^2+\left(2-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)^2\right]x^2\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{переход к полярным}\\ \textit{координатам}\end{matrix}\right|=\iint_{S_2}\left[r^2\cos^2\varphi+\left(2-\frac{1}{2}r^2\right)^2\right]r^2\cos^2\varphi\sqrt{1+r^2}rdrd\varphi=$$

$$=\iint_{S_2}\left(r^2\cos^2\varphi+4-2r^2+\frac{1}{4}r^4\right)r^3\cos^2\varphi\sqrt{1+r^2}drd\varphi=$$

$$\iint_{S_2} r^5\cos^4\varphi\sqrt{1+r^2}\,drd\varphi+\iint_{S_2}\cos^2\varphi\left(4r^3-2r^5+\frac{1}{4}r^7\right)\sqrt{1+r^2}\,drd\varphi=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos2\varphi+\frac{1+\cos4\varphi}{2}\right)d\varphi=\\ =\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\varphi+\sin2\varphi+\frac{1}{8}\sin4\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{3}{4}\pi,\\ \textit{остальные интегралы решены ранее.}\end{array}\right|=$$

$$=\left(\frac{200}{21}\sqrt{5}-\frac{8}{105}\right)\frac{3}{4}\pi+\left(\frac{100}{63}\sqrt{5}+\frac{220}{315}\right)\pi=\left[\sqrt{5}\left(\frac{50}{7}+\frac{100}{63}\right)-\frac{2}{35}+\frac{220}{315}\right]\pi=$$

$$=\left(\frac{550}{63}\sqrt{5}+\frac{202}{315}\right)\pi.$$

$$\iint_{S_2}\left(x^2+z^2\right)x^2dS_2=\int_{S_2}x^4dxdy=\left|\begin{array}{c}x=r\cos\varphi,\ r=2, 0\le\varphi\le2\pi,\\ z=0,\ dxdy=rdrd\varphi\end{array}\right|=$$

$$=\int_{S_2}r^4\cos^4\varphi\ rdrd\varphi=\iint_{S_2}r^5\cos^4\varphi drd\varphi=\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\ d\varphi\int_0^2 r^5dr=\frac{3}{4}\pi\frac{r^6}{6}\Bigg|_0^2=8\pi.$$

$I_y=\left(\dfrac{550}{63}\sqrt{5}+\dfrac{202}{315}\right)\pi+8\pi=\left(\dfrac{550}{63}\sqrt{5}+\dfrac{2722}{315}\right)\pi\approx88{,}43$ ед. момента инерции.

$$I_z=\oint\!\!\oint_S\left(x^2+y^2\right)x^2dS=\iint_{S_1}\left(x^2+y^2\right)x^2dS_1+\iint_{S_2}\left(x^2+y^2\right)x^2dS_2\,.$$

$$\iint_{S_1}\left(x^2+y^2\right)x^2dS_1=\iint_{S_2}\left(x^2+y^2\right)x^2\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\textit{переход к полярным}\\ \textit{координатам}\end{array}\right|=\iint_{S_2}r^2r^2\cos^2\varphi\sqrt{1+r^2}\,rdrd\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^2 r^5\sqrt{1+r^2}\,dr=\left(\frac{200}{21}\sqrt{5}-\frac{8}{105}\right)\pi.$$

$$\iint_{S_2}\left(x^2+y^2\right)x^2dS_2=\iint_{S_2}\left(x^2+y^2\right)x^2dxdy=\iint_{S_2}r^2r^2\cos^2\varphi rdrd\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^2 r^5d\varphi=\pi\frac{r^6}{6}\Bigg|_0^2=\frac{32}{3}\pi.$$

$I_z=\left(\dfrac{200}{21}\sqrt{5}-\dfrac{8}{105}\right)\pi+\dfrac{32}{3}\pi=\left(\dfrac{200}{21}\sqrt{5}+\dfrac{1112}{105}\right)\pi\approx100{,}123$ ед. момента инерции.

$$I_o=\oiint_S\left(x^2+y^2+z^2\right)x^2dS=\iint_{S_1}\left(x^2+y^2+z^2\right)x^2dS_1+\iint_{S_2}\left(x^2+y^2+z^2\right)x^2dS_2$$

$$\iint_{S_1}\left(x^2+y^2+z^2\right)x^2dS_1=\iint_{S_2}\left[x^2+y^2+\left(2-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)^2\right]x^2\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{переход к полярным}\\ \text{координатам}\end{matrix}\right|=\iint_{S_2}\left[r^2+\left(2-\frac{1}{2}r^2\right)^2\right]r^2\cos^2\varphi\sqrt{1+r^2}\,rdrd\varphi=$$

$$=\iint_{S_2}\left(4r^3-r^5+\frac{1}{4}r^7\right)\cos^2\varphi\sqrt{1+r^2}\,drd\varphi=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^2\left(4r^3-r^5+\frac{1}{4}r^7\right)\sqrt{1+r^2}\,dr=$$

$$=\pi\left[4\left(\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{15}\right)-\left(\frac{200}{21}\sqrt{5}-\frac{8}{105}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1840}{63}\sqrt{5}+\frac{16}{315}\right)\right]=$$

$$=\pi\left[\sqrt{5}\left(\frac{40}{3}-\frac{200}{21}+\frac{460}{63}\right)+\frac{8}{15}+\frac{8}{105}+\frac{4}{315}\right]=\left(\frac{700}{63}\sqrt{5}+\frac{196}{315}\right)\pi=\left(\frac{100}{9}\sqrt{5}+\frac{28}{45}\right)\pi.$$

$$\iint_{S_2}\left(x^2+y^2+z^2\right)x^2dS_2=\iint_{S_2}\left[x^2+y^2\right]x^2dxdy=\iint_{S_2}r^4\cos^2\varphi\, rdrd\varphi=\iint_{S_2}r^5\cos^2\varphi\, drd\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^2 r^5dr=\pi\left(\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^2=\frac{32}{3}\pi.$$

$$I_0=\left(\frac{100}{9}\sqrt{5}+\frac{28}{45}\right)\pi+\frac{32}{3}\pi=\left(\frac{100}{9}\sqrt{5}+\frac{508}{45}\right)\pi\approx 113{,}46$$ ед. момента инерции.

14.1.5. Задание на контрольную работу

Вычислить массу, координаты центра масс и моменты инерции относительно координатных осей и начала координат материальной оболочки, которая представляет собой полую тонкостенную конструкцию, выполненную из композитного материала с поверхностной плотностью $\gamma(x,y,z)\left[\frac{кг}{м^3}\right]$. Оболочка имеет вид тела, ограниченного поверхностями S_1, S_2, S_3.

1. $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2, S_1: z=x^2+y^2+1, S_2: z=5$.
2. $\gamma(x,y,z)=z^2, \quad S_1: y^2+z^2=x^2, \quad S_2: x=2.$
3. $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2, S_1: x^2+y^2=4z^2, S_2: z=1, z\ge 0.$
4. $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2, S_1: z=\sqrt{16-x^2-y^2}, S_2: z=0.$
5. $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2, S_1: 4\left(x^2+y^2-1\right)+z=0, S_2: z=0.$
6. $\gamma(x,y,z)=x^2, S_1: x^2+y^2+z=1, S_2: z=0.$

7. $\gamma(x,y,z) = y^2, S_1 : x^2 + z^2 = \frac{1}{9}y^2, S_2 : y = 3, y > 0.$

8. $\gamma(x,y,z) = z, S_1 : z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2), S_2 : z = 1.$

9. $\gamma(x,y,z) = y^2, S_1 : 1 - z = x^2 + y^2, S_2 : z = 0.$

10. $\gamma(x,y,z) = z^2, S_1 : x^2 + y^2 = 4, S_2 : z = -2, S_3 : z = 2.$

14.2. Поверхностный интеграл II рода

14.2.1. Определение

Поверхностный интеграл II рода от векторной функции (поля) $\overline{F}(x,y,z)$ по ограниченному куску гладкой двухсторонней поверхности называется предел интегральной суммы:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta S \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \overline{F}(x_i, y_i, z_i)\overline{n}_i \Delta S_i = \iint_{\sigma} \overline{F}(x,y,z)\overline{n} dS_i, \text{ где}$$

$\overline{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\overline{i} + F_y(x,y,z)\overline{j} + F_z(x,y,z)\overline{k}$ – непрерывная векторная функция (поле) определённая на ограниченном куске гладкой двухсторонней поверхности σ (рисунок 14.4),

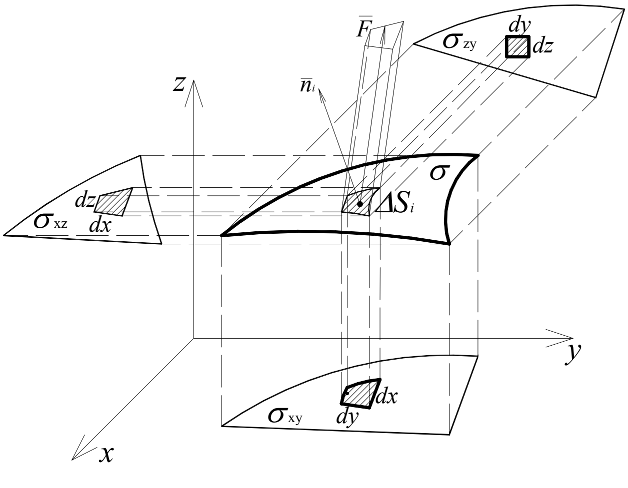


Рис. 14.4.

ΔS_i – площадь i-ой элементарной площадки, на которые разбит весь кусок поверхности σ, $(i = \overline{1,n})$. Элемент ΔS_i, как бесконечно малый участок кривой поверхности σ, можно с точностью до малых высшего порядка считать плоским,

n – количество элементарных площадок,

$\overline{F}(x_i, y_i, z_i)$ – значение функции $\overline{F}$ в точке (x_i, y_i, z_i), принадлежащей элементарной площадке ΔS_i,

$\overline{n}_i$ – единичный нормальный вектор к поверхности σ в точке (x_i, y_i, z_i).

Скалярное произведение векторов $\left(\overline{F}(x_i, y_i, z_i)\overline{n}_i\right)$ есть высота цилиндра с основанием ΔS_i (рис. 14.4),

$\overline{F}(x_i, y_i, z_i)\overline{n}_i \Delta S_i$ – объём указанного цилиндра.

Если $\overline{F}(x,y,z)$ – скорость жидкости, протекающей через поверхность σ, то $\overline{F}(x_i,y_i,z_i)\overline{n}_i\Delta S_i$ – количество жидкости, протекающей через элементарную площадку ΔS_i в единицу времени $\left[\frac{м^3}{c}\right]$ или расход жидкости, ещё проще – поток жидкости. Тогда интегральная сумма – приближенное значение, а её предел – точное значение потока вектора $\overline{F}$ через всю поверхность.

Физический смысл поверхностного интеграла II рода – это есть количество жидкости, протекающей в единицу времени (расход, поток) через поверхность σ в направлении вектора $\overline{n}$. Поэтому поверхностный интеграл II рода называют потоком векторного поля $\overline{F}$ через поверхность σ.

$$П=\iint_{\sigma}\overline{F}\overline{n}dS.$$

Электротехнический смысл поверхностного интеграла II рода : если $\overline{J}$ – плотность $\left[\frac{A}{м^2}\right]$ электрического тока $i[A]$, то

$$i=\iint_{\sigma}\overline{J}\cdot\overline{n}dS$$

есть ток, протекающий через сечение проводника с поверхностью σ.

Скалярное произведение векторов $\left(\overline{F}\overline{n}\right)$ образует скалярную функцию $f(x,y,z)$ и тогда поверхностный интеграл II рода преобразуется в поверхностный интеграл I рода.

14.2.2. Вычисление поверхностного интеграла II рода

При определении потока вектора $\overline{F}$ через поверхность σ как правило задают: вектор $\overline{F}$, поверхность σ (уравнение) и сторону двухсторонней поверхности σ, через которую проходит поток. Последнее условие обычно кратко формулируется направлением единичного нормального вектора $\overline{n}$ к внутренней или внешней стороне поверхности σ: нормаль внутренняя или внешняя. От этого условия зависит знак потока вектора $\overline{F}$, что отличает поверхностный интеграл II рода от поверхностного интеграла I рода.

Расчёт потока вектора сводится к вычислению двойного интеграла.

Пусть векторное поле $\overline{F}=F_x(x,y,z)\overline{i}+F_y(x,y,z)\overline{j}+F_z(x,y,z)\overline{k}.$

Поверхность σ задана уравнением $z=g(x,y)$ или $\varphi(x,y,z)=z-g(x,y)=0.$

Требуется найти поток $П$ вектора $\overline{F}$ через поверхность σ, нормаль внешняя (внутренняя).

Воспользуемся формулами (14.1), приведёнными в 14.1.2, для единичного нормального вектора $\overline{n}$ к поверхности σ:

$$\overline{n} = \pm\frac{\overline{grad\varphi}}{\left|\overline{grad\varphi}\right|} = \pm\left(\cos\alpha\overline{i} + \cos\beta\overline{j} + \cos\gamma\overline{k}\right),$$

а также формулами (14.2,14.4,14.6),устанавливающие связь направляющих косинусов cosα, cosβ, cosγ вектора $\overline{n}$ с элементами интегрирования dx, dy, dz, dS:

$$dxdy = \cos\gamma dS\,,\quad dydz = \cos\alpha dS\,,\quad dxdz = \cos\beta dS\,. \qquad (14.8)$$

Тогда поток Π вектора $\overline{F}$ равен:

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma}\overline{F}\overline{n}ds =$$

$$= \iint\limits_{\sigma}\left(F_x(x,y,z)\overline{i} + F_y\left(x,y,z\right)\overline{j} + F_z\left(x,y,z\right)\overline{k}\right)(\pm)\left(\cos\alpha\overline{i} + \cos\beta\overline{j} + \cos\gamma\overline{k}\right)dS =$$

$$= \pm\iint\limits_{\sigma}F_x\left(x,y,z\right)\cos\alpha dS + F_j\left(x,y,z\right)\cos\beta dS + F_z\left(x,y,z\right)\cos\gamma dS =$$

$$= \pm\iint\limits_{\sigma}F_x\left(x,y,z\right)dydz + F_y\left(x,y,z\right)dxdz + F_z\left(x,y,z\right)dxdy.$$

По последнему виду интеграла поток вектора ещё называют поверхностным интегралом по координатам.

При расчёте потока вектора эту формулу нужно понимать так:

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma}\overline{F}\overline{n}ds =$$

$$= \pm\left(\iint\limits_{\sigma_{yz}}F_x\left(x,y,z\right)dydz + \iint\limits_{\sigma_{xz}}F_y\left(x,y,z\right)dxdz + \iint\limits_{\sigma_{xy}}F_z\left(x,y,z\right)dxdy\right). \qquad (14.9)$$

Здесь σ_{yz}, σ_{xz}, σ_{xy} есть проекции поверхности σ на соответствующие координатные плоскости (рисунок 14.4). Обязательным условием применения формулы (14.9) для расчёта потока вектора является однозначность проектирования поверхности σ на координатные плоскости.

Если это условие нарушается, нужно поверхность σ разделить на куски $\sigma_1, \sigma_2, \ldots\sigma_m$, удовлетворяющие этому условию и расчёт потока вектора производить по каждому из этих кусков поверхности, а затем суммировать (см. раздел10, свойство 3).

Например, для расчёта потока вектора через поверхность S_1 (рисунок 14.3) по формуле (14.9) нужно данную поверхность разделить на 4 части (по октантам) и в каждой из них вычислить три двойных интеграла, т.е. требуется вычислить всего 12 интегралов. При этом необходимо правильно выбрать знак + или – перед интегралом.

Ниже приводится формула, позволяющая, например, для данного случая (рисунок 14.3) рассчитать поток вектора только по одному двойному интегралу.

Перепишем формулы (14.8) в следующем виде:

$$dS = \frac{dydz}{\cos\alpha},\ dS = \frac{dxdz}{\cos\beta},\ dS = \frac{dxdy}{\cos\gamma}, \tag{14.10}$$

Подставим формулы (14.10) в общую формулу для потока вектора:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \overline{F}\,\overline{n} dS = \begin{cases} \iint\limits_{\sigma_{yz}} \overline{F}\,\overline{n} \dfrac{dydz}{|\cos\alpha|}. \\ \iint\limits_{\sigma_{xz}} \overline{F}\,\overline{n} \dfrac{dxdz}{|\cos\beta|}. \\ \iint\limits_{\sigma_{xy}} \overline{F}\,\overline{n} \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}. \end{cases} \tag{14.11}$$

Для расчета потока вектора нужно выбрать любую из формул, удовлетворяющую условию однозначности проектирования поверхности σ на любую из координатных плоскостей.

Замечание. Элемент интегрирования dS есть площадь бесконечно-малой элементарной площадки, которая всегда положительная. Чтобы сохранить это обстоятельство в расчётной формуле при замене dS на соответствующие элементы интегрирования dx, dy, dz (положительные бесконечно-малые длины) и направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ по формулам (14.10), данные косинусы должны быть взяты по модулю.

Правила расчёта потока вектора

- По условиям задачи построить чертёж (рисунок) поверхности σ и по нему определить координатную плоскость, на которую поверхность σ проектируется однозначно. Этим самым выбирается одна из трёх формул (14.11) и область интегрирования сформированного в дальнейшем двойного интеграла.

Если поверхность σ однозначно проектируется на несколько координатных плоскостей, то от выбора одной из них может зависеть эффективность (простота) расчёта. Иногда могут встретиться случаи, когда неудачный выбор координатной плоскости приводит к неберущемуся интегралу, а удачный выбор разрешает все проблемы.

- По заданному уравнению поверхности σ найти единичный, нормальный вектор $\overline{n}$ к этой поверхности по формуле (14.1).

Здесь же определяются конкретные значения для направляющих косинусов, которые могут быть как числами, так и аналитическими выражениями (формулами).

- Определить знак + или – для единичного, нормального вектора $\overline{n}$, найденного по формуле (14.1). Для чего:
  - По условию задачи (нормаль внешняя или внутренняя) на рисунке построить вектор $\overline{n}$;
  - По рисунку определить знак того направляющего косинуса, который находится в выбранной формуле (14.1). Угол (*α, β* или *γ*) этого косинуса будет острым или тупым и сохраняться при перемещении вектора $\overline{n}$ по всей поверхности *σ*, а значит и знак этого косинуса будет сохраняться по всей этой поверхности;
  - Выбрать знак + или – перед аналитическим выражением вектора $\overline{n}$ (14.1) таким, чтобы знак направляющего косинуса, определённого в предыдущем пункте, совпадал со знаком этого косинуса в формуле для $\overline{n}$.
- Подставить значения $\overline{F}$ и $\overline{n}$ в формулу (14.11), произвести скалярное перемножение этих векторов, привести интеграл к двойному интегралу и рассчитать его. Если в подынтегральном выражении встречается переменная, не участвующая в интегрировании, то её нужно выразить через переменные интегрирования, используя уравнение поверхности *σ*. При необходимости двойной интеграл можно вычислить в полярной системе координат.

14.2.3. Некоторые приложения поверхностного интеграла II рода

Поверхностный интеграл II рода непосредственно применяется для вычисления потока вектора и электрического тока, о чём говорилось в 14.2.1. В тоже время, в формулах Остроградского-Гаусса и Стокса он нашёл применение, как в самом анализе, так и в его приложениях, в частности, в теории поля.

Формула Остроградского

Для векторной функции $\overline{F} = F_x(x,y,z)\overline{i} + F_y(x,y,z)\overline{j} + F_z(x,y,z)\overline{k}$ непрерывной вместе с частными производными первого порядка от координатных функций в пространственной области V, ограниченной замкнутой поверхностью S, имеет место следующая формула:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz} \right) dxdydz = \oiint\limits_S F_x dydz + F_y dxdz + F_z dxdz \text{ , или}$$

$$\iiint\limits_V div\overline{F}dV = \oiint\limits_S \overline{F}\overline{n}dS, \qquad \text{где } div\overline{F} = \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz}.$$

Интеграл от дивергенции векторного поля $\overline{F}$ по некоторому объёму равен потоку вектора через замкнутую поверхность, ограничивающую данный объём.

Формула Стокса

Для векторной функции $\overline{F}(x,y,z)=F_x(x,y,z)\bar{i}+F_y(x,y,z)\bar{j}+F_z(x,y,z)\bar{k}$ непрерывной вместе с частными производными первого порядка от координатных функции в пространственной области V, содержащей гладкую поверхность σ, ограниченную контуром γ имеет место следующая формула:

$$\oint_{\gamma} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \iint_{\sigma}\left(\frac{dF_z}{dy}-\frac{dF_y}{dz}\right)dydz+\left(\frac{dF_x}{dz}-\frac{dF_z}{dx}\right)dxdz+\left(\frac{dF_y}{dx}-\frac{dF_x}{dy}\right)dxdy$$

$$\text{или } \oint_{\gamma}\overline{F}\,\overline{dl}=\iint_{\sigma}\overline{rot\overline{F}}\cdot\overline{n}dS\ ,$$

где $$\overline{rot\overline{F}}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{d}{dx} & \dfrac{d}{dy} & \dfrac{d}{dz}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\left(\frac{dF_z}{dy}-\frac{dF_y}{dz}\right)\bar{i}+\left(\frac{dF_x}{dz}-\frac{dF_z}{dx}\right)\bar{j}+\left(\frac{dF_y}{dx}-\frac{dF_x}{dy}\right)\bar{k}$$

Циркуляция вектора $\overline{F}$ вдоль контура равна потоку ротора этого вектора через поверхность, натянутую на этот контур.

14.2.4. Типовые примеры решения поверхностных интегралов II рода

Пример 1. Вычислить поток векторного поля $\overline{F}$ через кривую поверхность тела V, заданного ограничивающими его поверхностями, нормаль внешняя.

$\overline{F}=3x\bar{i}-2y\bar{j}+z\bar{k}$,

$V: x^2+z^2=y^2, y=1, y=4$.

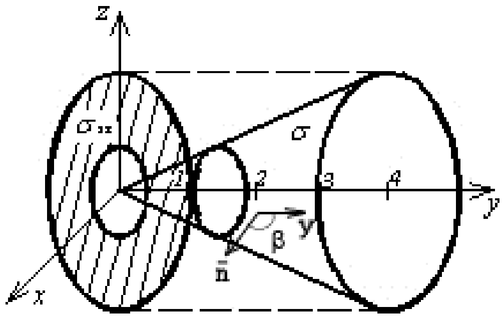


Рисунок 14.5.

Решение. Кривая поверхность тела V (рисунок 14.5) есть боковая поверхность усечённого конуса σ. Она однозначно проектируется на плоскость $y = 0$ в виде кольца. По формуле (14.11) определяем расчётную формулу:

$$\Pi=\iint_{\sigma_{xz}}\overline{F}\cdot\overline{n}\frac{dxdz}{|\cos\beta|}\ .$$

По формуле (14.1) определяем единичный нормальный вектор $\overline{n}$ к поверхности σ:

$$x^2+z^2=y^2, y=\sqrt{x^2+z^2}, \varphi=y-\sqrt{x^2+z^2}=0, \overline{grad\varphi}=\frac{d\varphi}{dx}\bar{i}+\frac{d\varphi}{dy}\bar{j}+\frac{d\varphi}{dz}\bar{k}=$$

$$=-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+z^2}}\bar{i}+\bar{j}-\frac{2z}{2\sqrt{x^2+z^2}}\bar{k}, \left|\overline{grad\varphi}\right|=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+z^2}+1+\frac{z^2}{x^2+z^2}}=\sqrt{\frac{2\left(x^2+z^2\right)}{x^2+z^2}}=\sqrt{2}.$$

$$\bar{n}=\pm\frac{\overline{grad\varphi}}{\left|\overline{grad\varphi}\right|}=\pm\left(-\frac{x}{\sqrt{2\left(x^2+z^2\right)}}\bar{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}-\frac{z}{\sqrt{2\left(x^2+z^2\right)}}\bar{k}\right).$$

Выбираем знак «-» для вектора $\bar{n}$. В формуле (14.11) для данного случая стоит cos*β*. В формуле (14.1) он имеет конкретное значение: $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ со знаком «+» . Но на рисунке 14.5 вектор $\bar{n}$ и ось *Oy* составляют тупой угол, значит cos*β* отрицательный. Чтобы привести cos*β* в формуле (14.1) в соответствие с рис.14.5, вектор $\bar{n}$ нужно взять со знаком «-».

Окончательно: $\bar{n}=\frac{x}{\sqrt{2\left(x^2+z^2\right)}}\bar{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}+\frac{z}{\sqrt{2\left(x^2+z^2\right)}}\bar{k}.$

Формируем расчётный интеграл.

$$\Pi=\iint_{\sigma}\bar{F}\cdot\bar{n}dS=\iint_{\sigma_{xz}}\bar{F}\cdot\bar{n}\frac{dxdz}{\left|\cos\beta\right|}=$$

$$=\iint_{\sigma_{xz}}\left(3x\bar{i}-2y\bar{j}+z\bar{k}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{2\left(x^2+z^2\right)}}\bar{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}+\frac{z}{\sqrt{2\left(x^2+z^2\right)}}\bar{k}\right)\frac{dxdz}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=$$

$$=\iint_{\sigma_{xz}}\left(\frac{3x^2}{\sqrt{x^2+z^2}}+2y+\frac{z^2}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)dxdz=\iint_{\sigma_{xz}}\left(\frac{3x^2}{\sqrt{x^2+z^2}}+2\sqrt{x^2+z^2}+\frac{z^2}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)dxdz=$$

$$=\iint_{\sigma_{xz}}\left(\frac{3x^2+2\left(x^2+z^2\right)+z^2}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)dxdz=\iint_{\sigma_{xz}}\frac{5x^2+3z^2}{\sqrt{x^2+z^2}}dxdz=$$

= $\left|.\sigma_{xz}\right.$ – есть кольцо: внутренняя окружность r_1 = 1, внешняя окружность r_2= 4. Перейдём к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, $0\le\varphi\le2\pi$, $1\le r\le4$, $dxdy = rdrd\varphi$.| **=**

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^4\frac{5r^2\cos^2\varphi+3r^2\sin^2\varphi}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}}rdr=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^4\frac{r^2\left(2\cos^2\varphi+3\right)}{r}rdr=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(2\cos^2\varphi+3\right)d\varphi\int_1^4 r^2dr=\int_0^{2\pi}\left(2\frac{1+\cos2\varphi}{2}+3\right)d\varphi\left.\frac{r^3}{3}\right|_1^4=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(4+\cos2\varphi\right)d\varphi\left(\frac{64}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{63}{3}\left.\left(4\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\right|_0^{2\pi}=168\pi.$$

Пример 2. Даны векторное поле $\overline{F}$ и плоскость p, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду V. Пусть σ – основание пирамиды, принадлежащее плоскости p, λ – контур ограничивающий σ. Вычислить:

а) поток векторного поля $\overline{F}$ через полную поверхность пирамиды в направлении внешней нормали к её поверхности непосредственно;

б) тот же поток с использованием формулы Остроградского;

в) циркуляцию векторного поля $\overline{F}$ по замкнутому контуру λ непосредственно;

г) ту же циркуляцию – с использованием формулы Стокса.

$\overline{F} = (2z\text{-}3x\text{-}4y)\,\overline{j}$, $p = 4z\text{-}3x\text{-}4y\text{-}4 = 0$.

Решение.

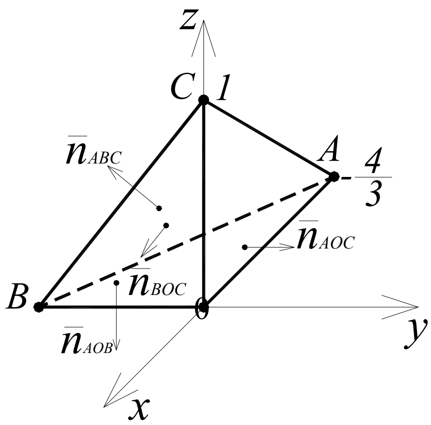


Рисунок 14.6.

2а) Поток векторного поля $\overline{F}$ через полную поверхность пирамиды V (рис. 14.6), имеющей 4 грани равен сумме потоков через эти грани:

$$\Pi = \oiint_{\sigma} \overline{F}\cdot\overline{n}dS = \iint_{\Delta ABC} + \iint_{\Delta AOC} + \iint_{\Delta AOB} + \iint_{\Delta BOC}.$$

Для $\iint_{\Delta ABC} \overline{F}\cdot\overline{n}_{ABC}dS$ поверхность ΔABC однозначно проектируется на все координатные плоскости, поэтому можно выбрать любую из трёх формул (14.11). Пусть $dS = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}$. Тогда

$$\iint_{\Delta ABC} \overline{F}\cdot\overline{n}_{ABC}dS = \iint_{\Delta AOB} \overline{F}\overline{n}_{ABC}\frac{dxdy}{|\cos\gamma|} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \overline{n}_{ABC} = \pm\dfrac{\overline{grad\,p}}{\left|\overline{grad\,p}\right|} = \pm\left(\dfrac{-3\overline{i}-4\overline{j}+4\overline{k}}{\sqrt{3^2+4^2+4^2}}\right)\cdot \text{ Выбираем знак «+».Тогда} \\ cos\gamma = \dfrac{4}{\sqrt{41}} > 0 \text{ в формуле и } \cos\gamma>0 \text{ на рис.14.6, т.к. } \gamma \\ = \left(\overline{n}_{ABC}\hat{\ }Oz\right) - \text{острый . Окончательно: } \overline{n}_{ABC} = -\dfrac{3}{\sqrt{41}}\overline{i} - \dfrac{4}{\sqrt{41}}\overline{j} + \dfrac{4}{\sqrt{41}}\overline{k}. \end{array} \right| =$$

$$=\iint\limits_{\Delta AOB}(2z-3x-4y)\bar{j}\left(-\frac{3}{\sqrt{41}}\bar{i}-\frac{4}{\sqrt{41}}\bar{j}+\frac{4}{\sqrt{41}}\bar{k}\right)\frac{dxdy}{\frac{4}{\sqrt{41}}}=$$

$$=\iint\limits_{\Delta AOB}(2z-3x-4y)\left(-\frac{4}{\sqrt{41}}\right)\frac{dxdy}{\frac{4}{\sqrt{41}}}=\iint\limits_{\Delta AOB}(3x+4y-2z)dxdy=$$

$$=\left|\text{ уравнение плоскости } \Delta ABC: z=\frac{4+3x+4y}{4}\right|=$$

$$=\iint\limits_{\Delta AOB}\left(3x+4y-2\left(1+\frac{3}{4}x+y\right)\right)dxdy=\iint\limits_{\Delta AOB}\left(\frac{3}{2}x+2y-2\right)dxdy=$$

$$=\left|AB: y=\frac{-3x-4}{4}, AO: y=0\right|=\int\limits_{-\frac{4}{3}}^{0}dx\int\limits_{\frac{-3x-4}{4}}^{0}\left(\frac{3}{2}x+2y-2\right)dy=\int\limits_{-\frac{4}{3}}^{0}dx\left(\frac{3}{2}xy+y^2-2y\right)\Bigg|_{\frac{-3x-4}{4}}^{0}=$$

$$=\int\limits_{-4/3}^{0}\left[\frac{3}{2}x\left(0-\frac{-3x-4}{4}\right)+0-\left(\frac{-3x-4}{4}\right)^2-2\left(0-\frac{-3x-4}{4}\right)\right]dx=$$

$$=\int\limits_{-4/3}^{0}\left(\frac{9}{8}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{16}x^2-\frac{3}{2}x-1-\frac{3}{2}x-2\right)dx=\int\limits_{-4/3}^{0}\left(\frac{9}{16}x^2-\frac{3}{2}x-3\right)dx=\left(\frac{9}{16}\frac{x^3}{3}-\frac{3}{4}x^2-3x\right)\Bigg|_{-4/3}^{0}=$$

$$=\frac{3}{16}\left(0+\frac{64}{27}\right)-\frac{3}{4}\left(0-\frac{16}{9}\right)-3\left(0+\frac{4}{3}\right)=-\frac{20}{9}.$$

$\iint\limits_{\Delta AOC}\bar{F}\cdot\bar{n}dS=\Big|$ ΔAOC *проектируется сам на себя, поэтому*

$dS=\dfrac{dxdz}{|\cos\beta|}, \bar{n}_{AOC}=\bar{j}, \cos\beta=1.\ \Big|=\iint\limits_{\Delta AOC}(2z-3x-4y)\bar{j}\cdot\bar{j}dxdz=$

$$=\iint\limits_{\Delta AOC}(2z-3x-4y)dxdz=\left|\ y=0, AC: z=\frac{4+3x}{4}\right|=$$

$$=\int\limits_{-4/3}^{0}dx\int\limits_{0}^{\frac{4+3x}{4}}(2z-3x)dz=\int\limits_{-4/3}^{0}dx\left(z^2-3xz\right)\Bigg|_{0}^{\frac{4+3x}{4}}=\int\limits_{-4/3}^{0}\left(\left(\frac{4+3x}{4}\right)^2-3x\left(\frac{4+3x}{4}\right)\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-4/3}^{0}\left(1-\frac{3}{2}x-\frac{27}{16}x^2\right)dx=\left(x-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{16}x^3\right)\Big|_{-4/3}^{0}=\frac{4}{3}.$$

$\iint\limits_{\Delta AOB}\bar{F}\bar{n}_{AOB}ds=\Big|$ ΔAOB *проектируется сам на себя,* $\bar{n}_{AOB}=-\bar{k}, \cos\gamma=$

$=-1\Big|=\iint\limits_{\Delta AOB}(2z-3x-4y)\bar{j}\cdot\left(-\bar{k}\right)ds=0.$

$$\iint\limits_{BOC} \overline{F}\overline{n}_{BOC}\,dS = \left|\, \overline{n}_{BOC} = \overline{i} \,\right| = \iint\limits_{\Delta BOC} (2z-3x-4y)\overline{j}\cdot\overline{i}dS = 0.$$

$$П = \oiint \overline{F}\overline{n}S = -\frac{20}{9} + \frac{4}{3} = -\frac{8}{9}.$$

2б) По формуле Остроградского: $П = \oiint\limits_{\sigma} \overline{F}\overline{n}ds = \iiint\limits_{V} div\overline{F}dV.$

$$div\overline{F} = \frac{\partial Fx}{\partial x} + \frac{\partial Fy}{\partial y} + \frac{\partial Fz}{\partial z} = 0 + \frac{\partial}{\partial y}(2z-3x-4y) + 0 = -4.$$

$$П = \iiint\limits_{V}(-4)dV = -4\iiint\limits_{V} dxdydz = -4\int\limits_{-4/3}^{0} dx \int\limits_{-\frac{3}{4}x-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{1+\frac{3}{4}x+y} dz = -4\int\limits_{-4/3}^{0} dx \int\limits_{-\frac{3}{4}x-1}^{0} dyz\Bigg|_{0}^{1+\frac{3}{4}x+y} =$$

$$= -4\int\limits_{-4/3}^{0} dx \int\limits_{-\frac{3}{4}x-1}^{0} (1+\frac{3}{4}x+y)dy = -4\int\limits_{-\frac{4}{3}} dx(y+\frac{3}{4}xy+\frac{y^2}{2})\Bigg|_{-\frac{3}{4}x-1}^{0} =$$

$$= -4\int\limits_{-4/3}^{0} (\frac{3}{4}x+1+\frac{3}{4}x(\frac{3}{4}x+1)-\frac{1}{2}(-\frac{3}{4}x-1)^2)dx = -4\int\limits_{-4/3}^{0} (\frac{3}{4}x+1+\frac{9}{16}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{9}{32}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2})dx =$$

$$= -4\int\limits_{-4/3}^{0} (\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{9}{32}x^2)dx = -4(\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{32}x^3)\Bigg|_{-4/3}^{0} = -4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}+\frac{3}{8}\left(\frac{16}{9}\right)+\frac{3}{32}\cdot\frac{64}{27}\right) = -\frac{8}{9}.$$

2в) Циркуляция вектора $\overline{F}$ вдоль контура-треугольника ABC (рис.14.6) непосредственно вычисляется:

$$Ц = \oint\limits_{l} \overline{F}\cdot\overline{dl} = \int\limits_{ABCA} \overline{F}\cdot\overline{dl} = \int\limits_{AB} \overline{F}\cdot\overline{dl} + \int\limits_{BC} \overline{F}\cdot\overline{dl} + \int\limits_{CA} \overline{F}\cdot\overline{dl}.$$

$$\int\limits_{AB} \overline{F}\cdot\overline{dl} = \left|\, \overline{F} = (2z-3x-4y)\overline{j}, \overline{dl} = dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k} \,\right| =$$

$$= \int\limits_{AB} (2z-3x-4y)\overline{j}\cdot(dx\overline{i}+dy\overline{j}+dz\overline{k}) = \int\limits_{AB} (2z-3x-4y)dy =$$

$$= \left|\, AB: 3x+4y+4=0, z=0 \,\right| = \int\limits_{0}^{-1} 4dy = 4y\Bigg|_{0}^{-1} = -4.$$

$$\int\limits_{BC} \overline{F}\cdot\overline{dl} = \int\limits_{BC} (2z-3x-4y)dy = \left|\, BC: z-y-1=0,\ x=0 \,\right| =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (2(y+1)-4y)dy = \int\limits_{-1}^{0} (2-2y)dy = (2y-y^2)\Bigg|_{-1}^{0} = -(-2-1) = 3.$$

$$\int\limits_{CA} \overline{F}\overline{dl} = \int\limits_{CA} (2z-3x-4y)dy = \left|\, CA: 4z-3x=4,\ y=0,\ dy=0 \,\right| = 0.$$

$$Ц = \oint\limits_{l} \overline{F}\overline{dl} = -4+3 = -1.$$

2г) По формуле Стокса: $Ц = \oint\limits_{\lambda} \overline{F}\,\overline{dl} = \iint\limits_{\sigma} \overline{rot\overline{F}}\,\overline{n}\,dS.$

$$\overline{rot\overline{F}} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 2z-3x-4y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial z}(2z-3x-4y)\overline{i} + 0\cdot\overline{j} + \frac{\partial}{\partial x}(2z-3x-4y)\overline{k} =$$

$$= -2\overline{i} - 3\overline{k}.$$

В формуле Стокса направление циркуляции вектора $\overline{F}$ и направление вектора $\overline{n}$ должны соответствовать правилу винта. В нашем случае вектор $\overline{n}$ должен быть по внешней нормали. Натянутая на контур λ поверхность есть плоский ΔABC.

$Ц = \iint\limits_{\sigma} \overline{rot\overline{F}}\,\overline{n}\,ds = \iint\limits_{\Delta ABC} \overline{rot\overline{F}}\,\overline{n}_{ABC}\,ds = \bullet\Big|\bullet$ Воспользуемся случаем 2а:

$$ds = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|},\quad \overline{n}_{ABC} = -\frac{3}{\sqrt{41}}\overline{i} - \frac{4}{\sqrt{41}}\overline{j} + \frac{4}{\sqrt{41}}\overline{k}\ \bullet\Big|^{\bullet} =$$

$$= \iint\limits_{\Delta AOB} \left(-2\overline{i} - 3\overline{k}\right)\left(-\frac{3}{\sqrt{41}}\overline{i} - \frac{4}{\sqrt{41}}\overline{j} + \frac{4}{\sqrt{41}}\overline{k}\right)\frac{dxdy}{\frac{4}{\sqrt{41}}} = \iint\limits_{\Delta AOB}\left(\frac{6}{4} - \frac{12}{4}\right)dxdy =$$

$$= -\frac{3}{2}\iint\limits_{\Delta AOB} dxdy = {}^{\bullet}\Big|_{\bullet}\ AB: y = -\frac{3}{4}x - 1, AO: y = 0\ {}_{\bullet}\Big|^{\bullet} = -\frac{3}{2}\int\limits_{-4/3}^{0} dx \int\limits_{-\frac{3}{4}x-1}^{0} dy =$$

$$= -\frac{3}{2}\int\limits_{-4/3}^{0} dy\Big|_{-\frac{3}{4}x-1}^{0} = -\frac{3}{2}\int\limits_{-4/3}^{0}\left(\frac{3}{4}x + 1\right)dx = -\frac{3}{2}\left(\frac{3}{8}x^2 + x\right)\Bigg|_{-4/3}^{0} = -\frac{3}{2}\left(\frac{3}{8}\left(-\frac{16}{9}\right) + \frac{4}{3}\right) = -1.$$

14.2.5. Задания на контрольную работу.

Задание 1. Вычислить поток векторного поля $\overline{F}$ через кривую поверхность тела *V*, заданного ограничивающими его поверхностями (нормаль внешняя).

1. $\overline{F} = x^2\,\overline{i} + z^2\,\overline{j}$, $\quad V$: $z^2 = 1 - x - y$, $x = 0, y = 0, z = 0$.
2. $\overline{F} = (x + xy^2)\overline{i} + (y - yx^2)\overline{j} + (z-3)\overline{k}$, $\quad V$: $x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 9$.
3. $\overline{F} = z^2 x\,\overline{i} + x^2 y\,\overline{j} + y^2 z\,\overline{k}$, $\quad V$: $4z = y^2, 2x - y = 0, x + y = 9, z = 0$.
4. $\overline{F} = (x + y^2)\overline{i} + (y + z^2)\overline{j} + (z + x^2)\overline{k}$, $\quad V$: $x + y = 6, y = \sqrt{3x}, z = 4y, z = 0$.
5. $\overline{F} = 3z\,\overline{i} - 2x\,\overline{j} - 4y\,\overline{k}$, $\quad V$: $x = y^2 + z^2 - 1, x = 3, x = 8$.

6. $\bar{F} = 2y^2\,\bar{i} + 3z^2\,\bar{j} - x^2\,\bar{k}$, V: $x + z = 4,\ x = y^2,\ z = 0.$

7. $\bar{F} = 4z\,\bar{i} + 3x^2\,\bar{j} - 2xyz\,\bar{k}$, V: $z = 1 - x^2,\ y = 3 - x,\ y = 0, z=0.$

8. $\bar{F} = y^2\,\bar{i} + z^2\,\bar{k}$, V: $y^2 = 1 - x - z,\ x = 0, y = 0, z = 0.$

9. $\bar{F} = (x + xy)\,\bar{i} + (y - x^2)\,\bar{j} + (z - 1)\,\bar{k}$ V: $y^2 + z^2 = x^2,\ x = 1, x = 4.$

10. $\bar{F} = y^2x\,\bar{i} + z^2y\,\bar{j} + x^2z\,\bar{k}$, V: $4x = y^2, 2z - y = 0, z + y = 9, x = 0.$

Задание 2. Даны векторное поле $\bar{F}$ и плоскость p, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду V. Пусть σ - основание пирамиды, принадлежащее плоскости p, λ - контур, ограничивающий σ. Вычислить:

а) поток векторного поля $\bar{F}$ через полную поверхность пирамиды (нормаль внешняя) непосредственно;

б) тот же поток с использованием формулы Остроградского;

в) циркуляцию вектора $\bar{F}$ по замкнутому контуру λ непосредственно;

г) ту же циркуляцию – с использованием формулы Стокса.

1. $\bar{F} = (3x - 4y + z)\,\bar{i}$, $p = 2x - 3y + z - 2 = 0.$

2. $\bar{F} = (2x + 3y - 6z)\,\bar{j}$, $p = 2y - 3x - 3z - 3 = 0.$

3. $\bar{F} = (2y - 5x + 3z)\,\bar{k}$, $p = 2z + 3x - y - 2 = 0.$

4. $\bar{F} = (4y - 7x - 2z)\,\bar{i}$, $p = x - 2y - 3z - 3 = 0.$

5. $\bar{F} = (3x + 6y - 2z)\,\bar{j}$, $p = y + 3x - 4z - 4 = 0.$

6. $\bar{F} = (5x - 2y - 4z)\,\bar{k}$, $p = z - 2y - 3x - 3 = 0.$

7. $\bar{F} = (6z - 2y - 3x)j$, $p = 3x + 2y - z - 2 = 0.$

8. $\bar{F} = (y + 2z - 3x)i$, $p = 3y - 2z + 3x - 3 = 0.$

9. $\bar{F} = (3y - 2x - 3z)\,\bar{k}$, $p = 3z + 2x - 2y - 3 = 0.$

10. $\bar{F} = (5x - 6y + z)\,\bar{i}$, $p = 4x - 3y + 4z - 3 = 0.$

15. Элементы теории поля

Пусть задано скалярное поле $\varphi(x,y,z)$ и векторное поле $\overline{F} = F_x(x,y,z)\overline{i} + \overline{F}_y(x,y,z)\overline{j} + \overline{F}_z(x,y,z)\overline{k}$. Эти поля можно преобразовывать с помощью трех операций I порядка и пяти операций II порядка.

15.1. Операции I порядка

Это операции $\overline{grad\varphi}$, $div\overline{F}$, $\overline{rot\overline{F}}$.

1. *Градиентом скалярного поля* $\varphi = \varphi(x,y,z)$ называется вектор:

$$\overline{grad\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\overline{k}.$$

Градиент преобразует скалярное поле в векторное.

Физический смысл градиента в точке – это есть вектор, указывающий направление наибольшей интенсивности изменения скалярного поля в этой точке. Модуль этого вектора равен наибольшей интенсивности изменения скалярного поля в точке (наибольшей скорости).

Градиент скалярного поля всегда перпендикулярен к поверхности уровня (линии уровня) этого поля. Если в точке $\overline{grad\varphi} = 0$, то это значит, что в точке вообще отсутствует изменение скалярного поля. В этой точке функция $\varphi(x,y,z)$ – *стационарна.* Тогда:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

2. *Дивергенцией векторного поля* $\overline{F} = F_x(x,y,z)\overline{i} + F_y(x,y,z)\overline{j} + F_z(x,y,z)\overline{k}$ называется скаляр

$$div\overline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Дивергенция преобразует векторное поле в скалярное.

Физический смысл дивергенции раскрывает формула Остроградского. При V→0, S→0 (область V и ограничивающая её поверхность S стягиваются в точку) получаем

$$\lim_{V\to 0}\iiint_V div\overline{F}dV = \lim_{s\to 0}\iint_S \overline{F}\overline{n}ds.$$

$div\overline{F}$ в точке (пусть точка M) есть величина постоянная (дивергенция, как сумма частных производных, аналогична производной функции одной переменной в точке – если существует, то равна числу). Тогда:

$$\lim_{V\to 0}\iiint_V div\overline{F}dV = div\overline{F}(M)\lim_{V\to 0}\iiint_V dV = div\overline{F}(M)\lim_{V\to 0}V = \lim_{S\to 0}\oiint_S \overline{F}\overline{n}dS .$$

$$div\overline{F}(M) = \lim_{\substack{S\to 0\\ V\to 0}}\frac{\oiint_S \overline{F}\overline{n}ds}{V} .$$

Физический смысл дивергенции: дивергенция векторного поля в точке есть отнесенный к единице объёма поток этого поля через бесконечно малую замкнутую поверхность окружающую данную точку.

С другой стороны, если вектор $\overline{F}$ – скорость жидкости, то поток векторного поля есть объем жидкости, протекающей через бесконечно малую замкнутую поверхность в единицу времени. В то же время для точечного источника мощность источника есть объем жидкости, выделяемый в единицу времени. Иначе, для точечного источника мощность источника и поток векторного поля совпадают.

Тогда дивергенция векторного поля в точке есть удельная мощность источника в точке.

- Если $div\overline{F}(M) > 0$, в точке *M* источник (исток) поля $\overline{F}$.
- Если $div\overline{F}(M) < 0$, в точке *M* поглотитель (сток) $\overline{F}$.
- Если $div\overline{F}(M) = 0$, в точке *M* нет ни истока, ни стока.

Распространяя эти понятия на область *V*, ограниченную поверхностью *S*, имеем:

- при $div\overline{F} > 0$ внутри области *V* истоки мощнее стоков, из нее вытекает больше жидкости, чем втекает;
- при $div\overline{F} < 0$ наоборот – в области *V* истоки слабее стоков, в неё втекает больше жидкости, чем вытекает;
- при $div\overline{F} = 0$ истоки и стоки в области *V* имеют равные мощности и компенсируют друг друга, или их там нет совсем. Количество втекающей в область *V* жидкости равно количеству вытекающей.

Если $div\overline{F} = 0$, векторное поле $\overline{F}$ называют *соленоидальным.*

Пример: поле скоростей жидкости (газа) при отсутствии истоков и стоков, магнитное поле электрического тока – $div\overline{B} = 0$ всегда, где $\overline{B}$– вектор магнитной индукции (в природе не существуют точечные источники магнитного поля электрического тока).

3. *Ротором (вихрем) векторного поля*
$\overline{F} = \overline{F}_x(x,y,z)\overline{i} + \overline{F}_y(x,y,z)\overline{j} + \overline{F}_z(x,y,z)\overline{k}$ называется вектор

$$\overline{rot\overline{F}} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\overline{k}.$$

Ротор (вихрь) преобразует векторное поле в другое векторное поле.

Геометрический смысл ротора раскрывает формула Стокса.

Выразим скалярное произведение векторов $\overline{rot\overline{F}\overline{n}}$ через проекцию одного вектора на другой: $\overline{rot\overline{F}\overline{n}} = \text{Ïð}_{\bar{n}}\overline{rot\overline{F}} = rot_n\overline{F}$. Устремим $\sigma \to 0, \gamma \to 0$ (контур γ сжимается в точку M).

$$\lim_{\gamma \to M}\oint_{r}\overline{F}\overline{dl} = \lim_{\sigma\to 0}\iint_{\sigma}\overline{rot\overline{F}\overline{n}}ds = \lim_{\sigma\to 0}\iint_{\sigma}rot_n\overline{F}ds =$$

$$(rot_n\overline{F})_M \lim_{\sigma\to 0}\iint_{\sigma}ds = (rot_n\overline{F})_M \lim_{\sigma\to 0}\sigma.$$

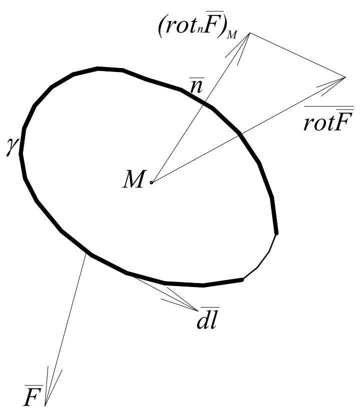


Рисунок 15.1.

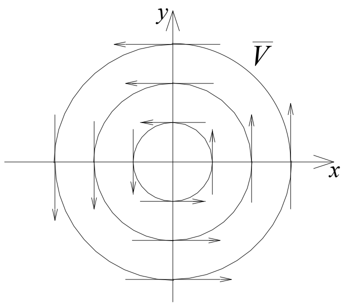
Здесь $\left(rot_n\overline{F}\right)_M$ – число – проекция вектора $\overline{rot\overline{F}}$ на вектор $\overline{n}$ в точке M.

$$\left(rot_n\overline{F}\right) = \lim_{\substack{\sigma\to 0\\ \gamma\to M}}\frac{\oint_{r}\overline{F}\overline{dl}}{\sigma}.$$

Геометрический смысл вектора $\overline{rot\overline{F}}$ (рисунок 15.1): в точке M проекция ротора поля $\overline{F}$ на любое направление $\overline{n}$ равна циркуляции векторного поля $\overline{F}$ по бесконечно малому контуру, перпендикулярному к $\overline{n}$, отнесенной к единице площади, охватываемой этим контуром.

Физический смысл ротора можно рассмотреть на примере вращательного движения твердого тела.

При вращении твердого тела вектор линейной скорости $\overline{V}$ по направлению совпадает с вектором $\overline{dl}$, тогда вектор $\overline{rot\overline{V}}$ будет совпадать с вектором $\overline{n}$. Линейная скорость равна (рисунок 15.2): $\overline{V} = -\omega y\overline{i} + \omega x\overline{j}$, где ω – модуль вектора угловой скорости $\left[\frac{рад}{с}\right]$.



$$\overline{rot\overline{V}} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\omega x + \frac{\partial}{\partial y}\omega y\right)\overline{k} = 2\omega\overline{k}.$$

Рис. 15.2.

Физический смысл ротора: ротор линейной скорости вращательного движения твердого тела равен удвоенному вектору угловой скорости.

И вообще, если $\overline{rot\overline{F}} \neq 0$, то вектор $\overline{F}$ участвует во вращении. Если $\overline{rot\overline{F}} = 0$, вращения нет, а векторное поле $\overline{F}$ называется *потенциальным*. Это поле имеет *потенциал φ (скалярное поле)*.

Потенциальное векторное поле $\overline{F}$ и его потенциал – скалярное поле связаны соотношением:

$$\overline{F} = \overline{grad\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\overline{k}\ .$$

Проверка потенциальности поля градиентов не сложная:

$$\overline{rot\overline{F}} = \overline{rot\left(\overline{grad\varphi}\right)} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right)\overline{k} = 0.$$

На основании формулы Стокса $\oint\limits_{r}\overline{F}d\overline{l} = \iint\limits_{\sigma}\overline{rot\overline{F}}\,\overline{n}ds$, при условии $\overline{rot\overline{F}} = 0$ криволинейный интеграл II рода $\int\limits_{AB}\overline{F}d\overline{l}$ становиться независимым от выбора кривой интегрирования *AB:*

$$\int\limits_{AB}\overline{F}d\overline{l} = \int\limits_{AB}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\overline{k}\right)\left(dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k}\right) = \int\limits_{AB}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz =$$

$= \left.{}^{\bullet}\right|_{\bullet}$. Под интегралом находится полный дифференциал $d\varphi\,\Big|_{\square}^{\square} = \int\limits_{AB} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$.

Это свойство потенциального векторного поля используют для нахождения потенциала по формуле $\varphi(x,y,z) = \int\limits_{M_0M}\overline{F}d\overline{l}$. При этом выбирают самую простую в интересах расчёта ломанную M_0M (см. рис. 13.5, формула (13.10).

$$\varphi(x,y,z) = \int\limits_{M_0M}\overline{F}d\overline{l} = \int\limits_{x_0}^{x}F_x(x,y_0,z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y}F_x(x,y,z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z}F_x(x,y,z)dz\ .$$

Примером потенциального векторного поля является поле $\overline{E}$ напряженностей электростатического поля в изотропной среде. Потенциалом такого поля является электрический потенциал *φ.*

$\int\limits_{AB} \overline{F}\overline{dl} = \int\limits_{AB} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A) = U_{AB}$, где U_{AB} – электрическое напряжение между точками AB (разность электрических потенциалов).

Обратим внимание на то, что потенциальное векторное поле $\overline{F}$ полностью определяется одной скалярной функцией $\varphi(x,y,z)$, тогда как в общем случае необходимо задать три скалярные функции $F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)$.

15.2. Операции II порядка

Если поля, получаемые в результате операций I порядка подвергнуть ещё раз операциям I порядка, то имеют место пять операций II порядка:

1. $div\overline{grad\varphi}$, 2. $div\overline{rot\overline{F}}$, 3. $\overline{grad div\overline{F}}$, 4. $\overline{rot\overline{grad\varphi}}$, 5. $\overline{rot\overline{rot\overline{F}}}$.

В 15.1. уже показано, что $\overline{rot\overline{grad\varphi}} = 0$. Это значит, что *поле градиентов всегда потенциальное*.

Не трудно показать, что $div\overline{rot\overline{F}} = 0$.

Действительно:

$$div\overline{rot\overline{F}} = \frac{\partial}{\partial x}rot_x\overline{F} + \frac{\partial}{\partial y}rot_y\overline{F} + \frac{\partial}{\partial z}rot_z\overline{F} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z \partial y} = 0.$$

Это значит, что *поле вихрей всегда соленоидальное*.

Из операций II порядка выделим первую, имеющую большое значение.

$$div\overline{grad\varphi} = \frac{\partial}{\partial x}grad_x\varphi + \frac{\partial}{\partial y}grad_y\varphi + \frac{\partial}{\partial z}grad_z\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Данная операция преобразует скалярное поле φ в векторное поле $\overline{grad\varphi}$, а затем опять в скалярное поле $div\overline{grad\varphi}$. Векторное поле $\overline{grad\varphi}$ является промежуточным.

Особое место занимает условие

$$div\overline{grad\varphi} = 0.$$

Это условие называется *уравнением Лапласа.*

Скалярное поле φ, удовлетворяющее уравнению Лапласа, называется *гармоническим*.

Это условие показывает, что градиент гармоничного поля есть соленоидальное поле. Но градиент любого скалярного поля всегда потенциальный. Значит векторное поле, образованное градиентом гармонического поля является одновременно и потенциальным, и соленоидальным и такое векторное поле называется *Лапласовым.*

И наоборот, если векторное поле Лапласово, т.е. потенциальное и соленоидальное, то его потенциал является гармоническим скалярным полем (функцией).

Важная роль гармонических полей в физике следует из таких примеров:

1. Если $\overline{grad\varphi}=\overline{F}$ - векторное поле сил тяготения гравитационного поля, то φ - ньютонов потенциал сил тяготения.

2. Если $\overline{grad\varphi}=\overline{V}$ - поле скоростей установившегося движения однородной жидкости или газа, то φ - потенциал скоростей.

3. Если $\overline{grad\varphi}=\overline{F}$ - поле напряженностей электрического поля в однородной и изотропной среде, то φ - потенциал электрического поля.

4. В случае стационарного распределения тепла в однородной и изотропной среде гармоническая функция φ является просто температурой среды.

Операции I и II порядка очень удобно производить, пользуясь символикой Гамильтона, которая достаточно подробно описана в литературе и здесь не приводится.

Остальные операции II порядка менее востребованы

15.3. Типовые примеры решения задач по теории поля

Пример 1. В каком направлении скалярное поле φ изменяется с наибольшей интенсивностью (скоростью) при переходе через точку A? Чему равна эта скорость? Найти точки, в которых поле φ стационарно. $\varphi = x^3 - 2x^2 y + xy^2 + \frac{4}{3}y^3 - 16y$, $A(1;-3)$.

Решение. Наибольшая скорость изменения поля φ в точке A будет в направлении градиента этого поля в точке A.

$$\overline{grad\varphi} = \varphi'_x\overline{i} + \varphi'_y\overline{j} = (3x^2 - 4xy + y^2)\overline{i} + (-2x^2 + 2xy + 4y^2 - 16)\overline{j}.$$

$$\overline{grad\varphi}\Big|_A = (3 - 4(-3) + (-3)^2)\overline{i} + (-2 + 2(-3) + 4(-3)^2 - 16)\overline{j} = 24\overline{i} + 12\overline{j}.$$

Наибольшая по абсолютной величине скорость изменения поля φ в точке А численно равна модулю градиента этого поля в точке A.

$$\left|\overline{grad}\varphi\big|_A\right| = \sqrt{24^{12} + 12^2} = \sqrt{720} = 12\sqrt{5}.$$

Поле φ будет стационарно в тех точках, для которых $\overline{grad}\varphi = 0$, или $\varphi'_x = 0$, $\varphi'_y = 0$.

$$\begin{cases} \varphi'_x = 3x^2 - 4xy + y^2 = 0, \\ \varphi'_y = -2x^2 + 2xy + 4y^2 - 16 = 0. \end{cases}$$

Разделив обе части первого уравнения на $x^2 \neq 0$, получим:

$3 - 4\dfrac{y}{x} + (\dfrac{y}{x})^2 = 0$. Пусть $\dfrac{y}{x} = t$, тогда t^2 - $4t$ + 3 = 0, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, или $y_1 = x_1, y_2 = 3x_2$.

Исходная система распадается на две простейшие системы:

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ -2x_1^2 + 2x_1 y_1 + 4y_1^2 = 16. \end{cases}$$

$$-2x_1^2 + 2x_1^2 + 4x_1^2 = 16, x_{1,3}^2 = 4, x_1 = 2, y_1 = 2, x_3 = -2, y_3 = -2.$$

$$\begin{cases} y_2 = 3x_2, \\ -2x_2^2 + 2x_2 y_2 + 4y_2^2 = 16. \end{cases} \qquad -2x_2^2 + 2x_2 \cdot 3x_2 + 4(3x_2)^2 = 16,$$

$40x_{2,4}^2 = 16$, $x_2 = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$, $y_2 = 3\sqrt{\dfrac{2}{5}}$, $x_4 = -\sqrt{\dfrac{2}{5}}$, $y_4 = -3\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

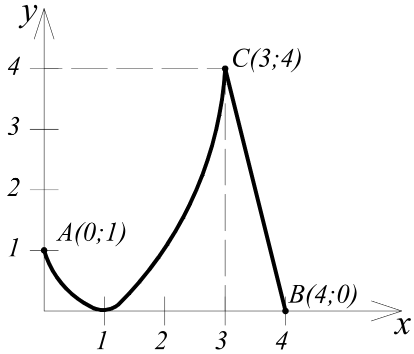
В точках (2;2), (-2;-2), $\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}};3\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)$, $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{5}};-3\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)$ поле φ стационарно.

Пример 2. Вычислить электрическое напряжение U между точками A и B электростатического поля напряженностью $\overline{F}$ двумя способами:

а) непосредственным вычислением криволинейного интеграла II рода, по заданному пути интегрирования γ, представляющего собой ломаную ACB, где AC – кривая линия, CB – отрезок прямой;

б) с помощью электрических потенциалов φ, предварительно исследовав поле $\overline{F}$ на потенциальность и определив сам потенциал φ

$\overline{F} = (6x + 2y^2)\overline{i} + 4xy\overline{j}$; $\gamma = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & 0 \le x \le 3, \\ \textit{отрезок } CB, & 3 \le x \le 4; \end{cases}$ $A(0;1)$, $C(3;4)$, $B(4;0)$.



Решение. 2а). Путь интегрирования от A до B (рис.15.3) имеет точку излома C, поэтому: $U = \int\limits_{AB} \overline{E}\overline{dl} = \int\limits_{AC} \overline{E}\overline{dl} + \int\limits_{CB} \overline{E}\overline{dl}$.

$$\int_{AC} \overline{E}\overline{dl} = \int_{AC} \left[(6x+2y^2)\overline{i} + 4xy\overline{j} \right](dx\overline{i} + dy\overline{j}) =$$

$$= \int_{AC} (6x+2y^2)dx + 4xydy = \Big| y = x^2 - 2x + 1,$$

Рисунок 15.3. $\quad dy = (2x-2)dx, \quad 0 \le x \le 3 \Big| =$

$$= \int_0^3 [6x + 2(x^2-2x+1)^2]dx + 4x(x^2-2x+1)(2x-2)dx =$$

$$= \int_0^3 (10x^4 - 32x^3 + 36x^2 - 10x + 2)dx = \left(10\frac{x^5}{5} - 32\frac{x^4}{4} + 36\frac{x^3}{2} - 10\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^3 = 123.$$

$$\int_{CB} \overline{E}\overline{dl} = \int_{CB} (6x+2y^2)dx + 4xydy = \Big| CB: \frac{x-3}{4-3} = \frac{y-4}{0-4}, y = 16-4x, \ dy = -4dx,$$

$$3 \le x \le 4 \Big| = \int_3^4 [6x + 2(16-4x)^2]dx + 4x(16-4x)(-4)dx =$$

$$= \int_3^4 (96x^2 - 506x + 512)dx = \left(96 \cdot \frac{x^3}{3} - 506 \cdot \frac{x^2}{2} + 512x\right)\Bigg|_3^4 = -75.$$

$U = \int_{AB} \overline{E}dl = 123 - 75 = 48$ *ед. электрического напряжения.*

2б). Исследуем поле $\overline{E}$ на потенциальность.

$$\overline{rot\overline{E}} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6x+2y^2 & 4xy & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial O}{\partial y} - \frac{\partial 4xy}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial(6x+2y^2)}{\partial z} - \frac{\partial O}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial 4xy}{\partial x} - \frac{\partial(6x+2y^2)}{\partial y}\right)\overline{k} =$$

$$= 4y - 4y)\overline{k} = 0.$$

Векторное поле $\overline{E}$ – потенциальное. Найдём его потенциал.

$$\varphi = \int_{x_0}^{x} E_x(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} E_y(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} E_z(x, y, z)dz = \Big| E_z = 0; \ z = z_0 = 0 \Big| =$$

$$= \int_{x_0}^{x} (6x + 2y_0^2)dx + \int_{y_0}^{y} 4xydy = \left(6\frac{x^2}{2} + 2y_0^2 x\right)\Bigg|_{x_0}^{x} + 4x\frac{y^2}{2}\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= 3x^2 - 3x_0^2 + 2y_0^2 x - 2y_0^2 x_0 + 2xy^2 - 2xy_0^2 = 3x^2 + 2xy^2 - 3x_0^2 - 2x_0 y_0^2 =$$

$$= 3x^2 + 2xy^2 + C.$$

Электрическое напряжение $U = \int_{AB} \overline{E}dl = \int_{AB} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$.

$$U = (3x^2 + 2xy^2 + C)\big|_B - (3x^2 + 2xy^2 + C)\big|_A =$$

$= 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 0 + C - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - C = 48$ ед. эл.напряжения

Пример 3. Исследовать векторное поле $\overline{F}$ на соленоидальность и потенциальность. В случае потенциальности поля $\overline{F}$ найти его потенциал. $\overline{F} = \dfrac{x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ (ньютоновское поле сил тяготения).

Решение. Поле $\overline{F}$ соленоидальное, если $div\overline{F} = 0$.

$$div\,\bar{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z},\; F_x = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3} - x\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\;\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2+z^2-3x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(y^2+z^2-2x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$$

$$F_y = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},\; \frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3} - y\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2+z^2-3y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+z^2-2y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$$

$$F_z = \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3} - z\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot 2z}{(x^2+y^2+z^2)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2+z^2-3z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2-2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$$

$$div\,\bar{F} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+z^2-2x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} + \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+z^2-2y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} +$$

$$+ \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2-2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(y^2+z^2-2x^2+x^2+z^2-2y^2+x^2+y^2-2z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} = 0.$$

Ньютоновское поле сил тяготения – соленоидальное.

Поле $\overline{F}$ потенциальное, если $\overline{rot\overline{F}} = 0$.

$$\overline{rot\overline{F}}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\overline{i}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\overline{j}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\overline{k}.$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right)=\frac{-z\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^3};$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right)=\frac{-y\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot 2z}{(x^2+y^2+z^2)^3};$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right)=\frac{-x\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot 2z}{(x^2+y^2+z^2)^3};$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right)=\frac{-z\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3};$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right)=\frac{-y\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3};$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right)=\frac{-x\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$$

$$\overline{rot\overline{F}}=\left(\frac{-3zy\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}-\frac{-3yz\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right)\overline{i}+$$

$$+\left(\frac{-3xz\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}-\frac{-3zx\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right)\overline{j}+$$

$$+\left(\frac{-3yx\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}-\frac{-3xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right)\overline{k}=0.$$

Ньютоновское поле сил тяготения – потенциальное.

Потенциал φ поля $\overline{F}$:

$$\varphi=\int_{x_0}^{x}F_x(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}F_y(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}F_z(x,y,z)dz=\int_{x_0}^{x}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2+y_0^2+z_0^2)^3}}+$$

$$+\int_{y_0}^{y}\frac{ydy}{\sqrt{(x^2+y^2+z_0^2)^3}}+\int_{z_0}^{z}\frac{zdz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(x^2+y_0^2+z_0^2)^{-\frac{3}{2}}d(x^2+y_0^2+z_0^2)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{y_0}^{y}(x^2+y^2+z_0^2)^{-\frac{3}{2}}d(y^2+x^2+z_0^2)+\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}d(z^2+x^2+y^2)=$$

$$=-\frac{2}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y_0^2+z_0^2}}\Bigg|_{x_0}^{x}-\frac{2}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}\Bigg|_{y_0}^{y}-\frac{2}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Bigg|_{z_0}^{z}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y_0^2+z_0^2}}+\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y_0^2+z_0^2}}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+C.$$

15.4. Задания на контрольную работу по теме “Элементы теории поля”

Задание 1. В каком направлении скалярное поле φ изменяется с наибольшей интенсивностью (скоростью) при переходе через точку А? Чему равна эта скорость? Найти точки, в которых поле φ стационарно.

1. $\varphi=e^x(x-y^3+3y),\quad A(2;\text{-}4)$.
2. $\varphi=x^3-4x^2y+4y^2x-y^3+\frac{1}{2}y^2,\quad A(4;-2)$.
3. $\varphi=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{2}x^2y^2-65x-20y, A(-2;4)$.
4. $\varphi=2\ln x+3\ln y+\frac{1}{3}xy-3x-2y, A(4;9)$.
5. $\varphi=xyz-99x-77y-63z, A(3;4;5)$.
6. $\varphi=2x^3-\frac{19}{2}x^2y+15xy^2+3y^3-16y,\quad A(-2;3)$.
7. $\varphi=\frac{1}{3}x^3y^3-16x-2y,\quad A(3;\text{-}2)$.
8. $\varphi=e^x\left(x^2-xy+3y^2-4x-4y\right), A(-2;3)$.
9. $\varphi=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}y^4+\frac{3}{2}x^2y^2-158x+185y, A(4;2)$.
10. $\varphi=8xy-8x^3-y^3+8\ln x+8\ln y,\quad A(2;3)$.

Задание 2. Вычислить электрическое напряжение U между точками A и B электростатического поля напряженностью $\overline{E}$ двумя способами:

а) непосредственным вычислением криволинейного интеграла II рода по заданному пути интегрирования γ, представляющего собой ломаную ACB, где AC – кривая линия, CB – отрезок прямой;

б) с помощью электрических потенциалов φ, предварительно исследовав поле $\overline{E}$ на потенциальность и определив сам потенциал φ.

1. $\overline{E} = 2xy\bar{i} + (x^2+2)\bar{j}, \quad \gamma: y = \begin{cases} e^x - 1, & -1 \le x \le 1, \\ \text{отрезок } CB, & 1 \ge x \ge -1; \end{cases}$

$A\left(-1; \frac{1}{e} - 1\right),\ C(1; e-1),\ B(-1, e+1).$

2. $\overline{E} = (3+2y^2)\bar{i} + 4xy\bar{j}, \quad \gamma: y = \begin{cases} \cos x - 1, & 0 \le x \le \frac{3}{2}\pi; \\ \text{отрезок } CB, & \frac{3}{2}\pi \ge x \ge \pi; \end{cases}$

$A(0;0),\ C\left(\frac{3}{2}\pi; -1\right),\ B(\pi;1).$

3. $\overline{E} = 3x^2y\bar{i} + \left(x^3 - 3\right)\bar{j},\ \gamma: y = \begin{cases} \ln(x-1), & \frac{1}{e} + 1 \le x \le e+1, \\ \text{отрезок } CB, & e+1 \ge x \ge 0; \end{cases}$

$A\left(\frac{1}{e} + 1; -1\right),\ C(e+1;1),\ B(0;e).$

4. $\overline{E} = 4xy\bar{i} + (2x^2+3)\bar{j}, \quad \gamma: y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & -1 \le x \le \sqrt{3}; \\ \text{отрезок } CB, & \sqrt{3} \le x \le 3; \end{cases}$

$A(-1;\frac{\pi}{4}),\ C\left(\sqrt{3}; \frac{\pi}{3}\right),\ B(3;\frac{\pi}{4}).$

5. $\overline{E} = 3x^2y\bar{i} + (x^3+y)\bar{j}, \quad \gamma: y = \begin{cases} \ln(1-x), & 1 - \frac{1}{e} \ge x \ge -e+1; \\ \text{отрезок } CB, & -e+1 \le x \le e; \end{cases}$

$A\left(1 - \frac{1}{e}; -1\right),\ C(-e+1;1),\ B(e;0).$

6. $\overline{E} = 3x^2y\bar{i} + (x^3+2)\bar{j}, \quad \gamma: y = \begin{cases} e^{-x/2} - 2, & 0 \ge x \ge -\ln 9; \\ \text{отрезок } CB, & -\ln 9 \le x \le \ln 9; \end{cases}$

$A(0;-1),\ C(-\ln 9;1),\ B(\ln 9;2).$

7. $\overline{E} = 3x^2y\overline{i} + (x^3 + 3y^2)\overline{j}, \quad \gamma : y = \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} + 1, \pi \le x \le 4\pi; \\ \text{отрезок } CB, 4\pi \ge x \ge \pi; \end{cases}$

$A(\pi;1),\ C(4\pi;2),\ B(\pi;-2).$

8. $\overline{E} = -e^{-x}y\overline{i} + (e^{-x} + 2)\overline{j}, \quad \gamma : y = \begin{cases} e^x \sin\dfrac{x}{2}, 0 \le x \le \pi; \\ \text{отрезок } CB,\ \pi \le x \le 2\pi; \end{cases}$

$A(0;0),\ C(\pi;e^{\pi}),\ B(2\pi;-1).$

9. $\overline{E} = y^2\overline{i} + 2xy\overline{j}, \quad \gamma : y = \begin{cases} -\sqrt{2x - x^2},\ 0 \le x \le 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \\ \text{отрезок } CB,\ 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ge x \ge 1; \end{cases}$

$A(0;0),\ C\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\ B(1;1).$

10. $\overline{E} = y\ln x\overline{i} + x(\ln x - 1)\overline{j} \quad \gamma : y = \begin{cases} (x-1)^3,\ 1 \le x \le 3; \\ \text{отрезок } CB,\ 3 \le x \le 4; \end{cases}$

$A(1;0),\ C(3;8),\ B(4;1).$

Задание 3. Исследовать векторное поле $\overline{F}$ на соленоидальность и потенциальность. В случае потенциальности поля $\overline{F}$ найти его потенциал.

1. $\overline{F} = \left(\dfrac{\sin z}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3\ln y}{x^4}\right)\overline{i} + \dfrac{1}{x^3 y}\overline{j} + \sqrt{x}\cos z\overline{k}$.

2. $\overline{F} = (\dfrac{y}{x} + \ln y + 2x)\overline{i} + (\ln x + \dfrac{x}{y} + 1)\overline{j} + 3\overline{k}$.

3. $\overline{F} = -3\sqrt{z}\sin(3x + y)\overline{i} + \left(\dfrac{1}{4 + y} - \sqrt{z}\sin(3x + y)\right)\overline{j} + \dfrac{\cos(3x + y)}{2\sqrt{z}}\overline{k}$.

4. $\overline{F} = (1 - e^{x-y} + \cos x)\overline{i} + (e^{x-y} + \cos y)\overline{j} + e^z\overline{k}$.

5. $\overline{F} = 2y^2\sin(2x + z)\overline{i} + \left(\dfrac{1}{y} - 2y\cos(2x + z)\right)\overline{j} + \left(\dfrac{1}{z} + y^2\sin(2x + z)\right)\overline{k}$.

6. $\overline{F} = (\sin^2 y - y\sin 2x)\overline{i} + (x\sin 2y + \cos^2 x + 1)\overline{j} + \overline{k}$.

7. $\overline{F} = \dfrac{y^4}{x}\overline{i} + \left(\sin y + 4y^3\ln(xz)\right)\overline{j} + \dfrac{y^4}{z}\overline{k}$.

8. $\overline{F} = (e^{x+y} + \cos(x - y))\overline{i} + (e^{x+y} - \cos(x - y) + 2)\overline{j} + \overline{k}$.

9. $\overline{F} = -(y^4 + z^3)\sin x\overline{i} + \left(4y^3\cos x + \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right)\overline{j} + 3z^2\cos x\overline{k}$.

10. $\overline{F} = (y + \ln(x + 1))\overline{i} + (x + 1 - e^y)\overline{j} + \sqrt{z}\overline{k}$.

16. Элементы теории функции комплексного переменного. Операционное исчисление

16.1. Краткие сведения из теории

Комплексные числа

Комплексными числами называются числа вида:

$$z = x + iy, \qquad (16.1)$$

где x и y – действительными числа, а i – *мнимая единица,* определяемая равенством $i = \sqrt{-1}$ или $i^2 = -1$.

Числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа z и обозначаются: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считаются *равными* $z_1 = z_2$, если равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются *сопряжёнными*.

При *сложении* и *вычитании* комплексных чисел складываются и вычитаются их действительные и мнимые части:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

Отметим, что сумма двух сопряженных комплексных числа есть действительное число, равное удвоенному значению действительной части:

$$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x.$$

Умножение комплексных чисел осуществляется по правилам:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_2y_1i + x_1y_2i + y_1y_2i^2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

Здесь учтено, что $i^2 = -1$.

Отметим, что произведение двух сопряженных комплексных чисел всегда есть действительное число: $z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$.

Деление комплексных чисел производится следующим образом

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

т.е. сначала числитель и знаменатель умножается на число, сопряжённое знаменателю, а после этого производятся алгебраические преобразования.

Любое комплексное число (16.1) в декартовой системе координат можно изобразить в виде точки $M(x,y)$ на плоскости. Такая плоскость называется *комплексной*, ось Ox – *действительной осью*, ось Oy – *мнимой осью* (рисунок 16.1).

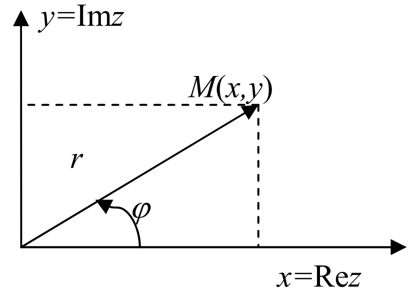


Рисунок 16.1.

Соединив точку $M(x,y)$ с началом координат, получим вектор $\overrightarrow{OM}$. Длина этого вектора называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $|z|$ или r: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox называется *аргументом z* и обозначается Arg$z$: $\varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Тогда комплексное число (16.1) можно представить в *тригонометрической* форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (16.2)$$

Использование тригонометрической формы комплексных чисел во многих случаях значительно упрощает вычисления. Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right], \qquad (16.3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]. \qquad (16.4)$$

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right),$$

или

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).$$

Это равенство носит название *формулы Муавра*.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Используя формулу Эйлера

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}, \qquad (16.5)$$

комплексное число (16.2) можно представить в *показательной* форме:

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (16.6)$$

В этом случае соответствующие действия над комплексными числами представляются следующим образом.

Если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \ z^n = r^n e^{in\varphi}, \ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \ k = 0,1,\ldots,(n-1).$$

Понятие функции комплексного переменного

Говорят, что на множестве D комплексной плоскости задана *функция комплексного переменного* (ФКП), если задан закон, ставящий в соответствие каждой точке множества D некоторое комплексное число. Множество D будем называть множеством значений независимой переменной. Символически указанное соответствие записывают в виде: $w = f(z)$.

Если z и w записать в алгебраической форме: $z = x + iy$, $w = u + iv$, то замечаем, что *действительная* $u = \operatorname{Re} f(z)$ и *мнимая* $v = \operatorname{Im} f(z)$ части функции $f(z)$ являются функциями двух переменных x и y: $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Таким образом, задание функции комплексной переменной $\omega = f(z), z \in D$, эквивалентно заданию на множестве D двух функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ двух действительных переменных.

Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Комплексное число $w_0 \neq \infty$ называется *пределом функции* $f(z)$ в точке z_0, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что для всех точек z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0. \tag{16.7}$$

Для того чтобы в точке $z_0=x_0+iy_0$ существовал предел функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы в точке (x_0,y_0) существовали пределы двух функций действительных переменных $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$; при этом

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0, \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0\ , \tag{16.8}$$

где $w_0=u_0+iv_0$.

Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если она определена в точке z_0 и в некоторой её окрестности и предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не только существует, но и равен значению функции $f(z)$ в точке z_0:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{16.9}$$

Производная ФКП. Условия Коши-Римана

Производной ФКП $w=f(z)$ в точке z_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, то есть

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{16.10}$$

Функция, имеющая производную в точке, называется *дифференцируемой в этой точке*. Функция, дифференцируемая в каждой точке области, называется *дифференцируемой в области*.

Для ФКП справедливы правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного, степени, сложной функции, обратной функции:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(z)\right)' = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k'(z). \tag{16.11}$$

$$\left(f(z)\cdot g(z)\right)' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \tag{16.12}$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \tag{16.13}$$

$$\left[f(\varphi(z))\right]' = f'(u)\Big|_{u=\varphi(z)} \cdot \varphi'(z). \tag{16.14}$$

Очевидно, что между дифференцируемостью ФКП и дифференцируемостью её действительной и мнимой частями, как функций двух действительных переменных существует тесная связь.

Теорема. Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке, то в этой точке существуют частные производные её действительной части $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ и мнимой части $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ и выполняются *условия Коши-Римана*[1]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{16.15}$$

Если $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и в этой точке выполняются условия Коши-Римана, то функция $f(z) = u + iv$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$.

Таким образом, если ФКП дифференцируема, то вычисление её производной равносильно вычислению частных производных по x или y, т.е. справедливы следующие равенства:

[1] или *условия Даламбера-Эйлера*.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y},$$
$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{16.16}$$

Из теоремы следуют правила исследования функции на дифференцируемость.

1) Для заданной функции $f(z)$ найти действительную и мнимую части: $u=\mathrm{Re}f(z)$, $v=\mathrm{Im}f(z)$.

2) Найти частные производные функций $u(x,y)$, $v(x,y)$.

3) Проверить выполнение условий Коши-Римана. Точки, в которых эти условия не выполняются, являются точками, где функция не дифференцируема. Точки, в которых условия Коши-Римана выполняются и частные производные непрерывны, принадлежат области, где функция дифференцируема.

4) Записать выражение производной в точках дифференцируемости по одной из формул (16.16).

Определения производной и дифференциала ФКП дословно совпадают с определениями тех же понятий для функции действительного переменного. Поэтому почти все основные теоремы и формулы дифференциального исчисления без изменения распространяются и на ФКП.

Таблица дифференцирования основных элементарных ФКП также сохраняется. Так, легко проверить, что

$$(z^m)'=mz^{m-1},\ (\sin z)'=\cos z \text{ и т.д.}$$

Функцию f(z), определённую в окрестности точки $z_0\in D$, называют *аналитической*[2] в этой точке, если f(z) дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0. Функцию, аналитическую в каждой точке области $D\subset C$, называют *аналитической* в этой области.[2]

Интегрирование ФКП

Пусть в каждой точке некоторой гладкой кривой L (рис. 16.2) с началом в точке z_0 и концом в точке z определена некоторая непрерывная функция $f(z)$.

Разобьем кривую L на n частей (элементарных дуг) в направлении от z_0 к z точками z_0, z_1, …, z_{n-1}. В каждой «элементарной

---

[2] а также *голоморфной* или *регулярной.*

дуге» $z_{k-1}z_k$ $(k=1,2,...,n)$ выберем произвольную точку C_k и составим интегральную сумму $\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k$, где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Предел такой интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшей из элементарных дуг, если он существует, называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой (по контуру) L и обозначается символом $\int_L f(z)dz$:

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\substack{\max|\Delta z_k|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k .$$

Приведем основные свойства интеграла от функции комплексного переменного.

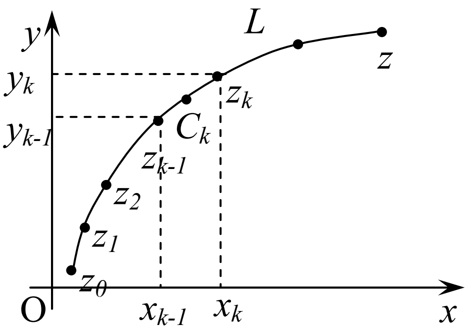


Рисунок 16.2

1. $\int_L dz = z - z_0$;

2. $\int_L \big(f_1(z) \pm f_2(z)\big)dz = \int_L f_1(z)dz \pm \int_L f_2(z)dz$;

3. $\int_L af(z)dz = a\int_L f(z)dz$, где a – комплексное число;

4. $\int_L f(z)dz = -\int_{L^-} f(z)dz$, т.е. при перемене направления пути интегрирования интеграл меняет свой знак на противоположный;

5. $\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz \pm \int_{L_2} f(z)dz$, где $L = L_1 + L_2$, т.е. интеграл по всему пути L равен сумме интегралов по его частям L_1 и L_2.

Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат данному множеству. Область D называется *односвязной*, если её граница является связным множеством, в противном случае область называется *многосвязной*. Область D будет *односвязной*, если любой замкнутый контур можно непрерывно деформировать (стянуть) в точку, не выходя за пределы этой области.

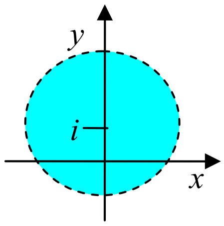


Рисунок 16.3

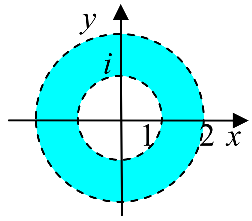


Рисунок 16.4

Например, область $|z-i|<2$ является односвязной областью, границей которой является окружность $|z-i|=2$ (рис.16.3); круговое кольцо $1<|z|<2$ представляет собой двухсвязную область (рис.16.4).

Теорема (Коши). Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области *D,* то интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру *L,* лежащему в области *D,* равен нулю, то есть:

$$\oint_L f(z)dz = 0. \qquad (16.17)$$

Теорема. Пусть $f(z)$ аналитична в замкнутой односвязной области $\overline{D}$ и L – граница области D. Тогда:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz, \qquad (16.18)$$

где z_0 – любая точка внутри области D, а интегрирование по контуру L проводится в положительном направлении.

Интеграл (16.17) называется *интегралом Коши,* а формула (16.18) называется *интегральной формулой Коши.* Формула Коши является одной из важнейших в теории функций комплексного переменного. Она позволяет находить значения аналитической функции $f(z)$ в любой точке z_0, лежащей внутри области *D* через ее значения на границе этой области.

Ряд Лорана

Теорема. Любая аналитическая функция $f(z)$ в кольце $r<|z-z_0|<R, (0 \le r < R \le \infty)$ может быть разложена в ряд:

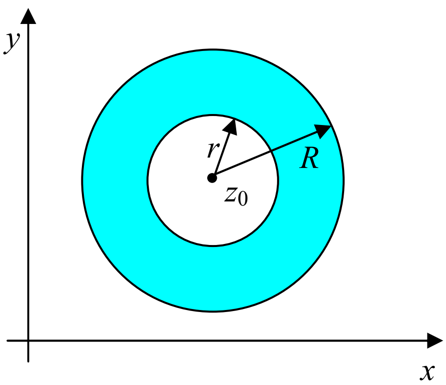


Рисунок. 16.5

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

где $\quad c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_L \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi, \quad L$ – окружность с центром в точке z_0, лежащая в кольце (рисунок 16.5).

Данный ряд называется *рядом Лорана.*

Ряд Лорана состоит из двух частей: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$

Первая часть $f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$ называется *правильной частью* ряда Лорана. Этот ряд сходится к функции $f_1(z)$ внутри круга $|z-z_0|<R$.

Вторая часть $f_2(z)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ называется *главной частью* ряда Лорана. Этот ряд сходится к функции $f_2(z)$ вне круга $|z-z_0|>r$.

Внутри кольца $r<|z-z_0|<R$ ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$ сходится к аналитической функции $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$.

Особые точки

Точку $z_0\in D$, называется *изолированной особой точкой* (ИОТ) функции $f(z)$, если у точки z_0. существует проколотая окрестность $\overset{0}{U}(z_0)=\{z\in D:0<|z-z_0|<r\}$ некоторого радиуса r, в которой данная функция аналитична, но в самой точке z_0 функция $f(z)$ не определена или теряет аналитичность

Изолированные особые точки делятся на следующие типы:

1) Изолированная особая точка z_0 называется *устранимой*, если существует конечный предел: $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$.

2) Изолированная особая точка z_0 называется *полюсом*, если $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$. При этом, если $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=A\,(\neq 0,\neq\infty)$, то z_0 – полюс порядка m.

3) Изолированная особая точка z_0 называется *существенно особой*, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции $f(z)$, при $z\to z_0$.

В кольце $0<|z-z_0|<R$ разложим функцию в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n=\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n}_{\text{правильная часть}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{главная часть}}.$$

По виду ряда Лорана можно определить тип изолированной особой точки:

1) Если ряд Лорана не содержит главной части, то точка z_0 является *устранимой особой точкой;*

2) Если главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых, то точка z_0 является *полюсом;*

3) Если главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых, то точка z_0 является *существенно особой точкой.*

Вычеты

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 (обозначают $\operatorname{Res} f(z_0)$) называется комплексное число, равное значению интеграла:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz,$$

где L – окружность с центром в точке z_0, целиком лежащая в области аналитичности функции $f(z)$, обход производится в положительном направлении.

Если в формуле для коэффициентов ряда Лорана взять $n=-1$, то получим:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz \quad \text{или} \quad \operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1}.$$

Таким образом, вычет есть комплексное число, равное коэффициенту ряда Лорана с индексом (-1).

Теорема (Коши) (основная теорема о вычетах). Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром *L,* за исключением конечного числа особых точек z_k $(k=1,2,\ldots,n)$, лежащих внутри области *D,* то

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re} sf(z_k).$$

Вычисление вычетов.

1) z_0 – устранимая особая точка: $\operatorname{Res} f(z_0) = 0$.

2) а) z_0 – простой полюс (полюс порядка 1):

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{g(z)}$, где $\varphi(z_0)\neq 0,\ g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0$, то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}.$$

б) z_0 – полюс порядка *m*:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right).$$

3) z_0 – существенно особая точка: $\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1}$.

Преобразование Лапласа

Основными понятиями операционного исчисления являются понятия функции-оригинала и функции-изображения.

Функция $f(t)$ действительного переменного t называется *оригиналом*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2. $f(t)$ – кусочно-непрерывна при $t \geq 0$, т.е. непрерывна или имеет на каждом конечном интервале конечное число точек разрыва I рода;

3. при возрастании t функция $f(t)$ возрастает не быстрее некоторой показательной функции, т.е. найдутся такие числа $M > 0$ и $s_0 \geq 0$, что $\left|f(t)\right| \leq M \cdot e^{s_0 t}$.

Отметим, что все перечисленные условия выполняются для большинства функций, которые описывают физические процессы.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного p, которая определяется интегралом:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt.$$

Переход от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называется *прямым преобразованием Лапласа*. Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается следующим образом: $f(t) \div F(p)$, при этом оригиналы принято обозначать малыми латинскими буквами, а изображения соответствующими им большими латинскими буквами.

Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность : $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \div c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$.

2. Подобие: $f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \lambda > 0$.

3. Смещение: $e^{at} \cdot f(t) \div F(p - a)$.

4. Запаздывание: $f(t - \tau) \div e^{p\tau} F(p), \tau > 0$.

5. Дифференцирование оригинала:

$$f'(t) \div p \cdot F(p) - f(0),$$

$$f''(t) \div p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \div p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0) \text{ и т.д.}$$

6. Дифференцирование изображения:

$$F'(p) \div -t \cdot f(t),$$

$$F''(p) \div (-1)^2 \cdot t^2 f(t),$$

$$F'''(p) \div (-1)^3 \cdot t^3 \cdot f(t) \text{ и т.д.}$$

7. Интегрирование оригинала: $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \div \dfrac{F(p)}{p}$.

8. Интегрирование изображения: $\int\limits_p^\infty F(\rho)d\rho \div \dfrac{f(t)}{t}$.

Таблица оригиналов и изображений

№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$	№	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	7	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	8	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	9	$t\cdot\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
4	$t^n, n\in$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	10	$t\cdot\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
5	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	11	$t\cdot\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
6	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	12	$t\cdot\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$

Общий способ определения оригинала по изображению дает *обратное преобразование Лапласа*, имеющее вид:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)\cdot e^{pt}dp,$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re}p=\gamma>s_0$.

На практике изображение $F(p)$ в качестве ИОТ имеет полюса, тогда этот интеграл обычно вычисляют с помощью вычетов по формуле:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-t\infty}^{\gamma+t\infty}F(p)\cdot e^{pt}dp=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left(F(p)\cdot e^{pt};p_k\right)$$

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\lim_{p\to p_k}\frac{1}{(m_k-1)!}\frac{\partial^{m_k-1}}{\partial p^{m_k-1}}\left(F(p)\cdot e^{pt}\cdot(p-p_k)^{m_k}\right),$$

где m_k – порядок полюса p_k функции $F(p)$.

Операционное исчисление может быть использовано при решении линейных дифференциальных уравнений и их систем. При этом предполагают реализацию следующего *плана решения дифференциального уравнения*:

1. Преобразовать дифференциальное уравнение в алгебраическое. Для этого переход от оригиналов к изображению осуществляют с помощью свойств преобразования Лапласа и таблицы оригиналов и изображений .

2. Решить алгебраическое уравнение. Это значит найти изображение решения дифференциального уравнения.

3. Найти оригинал изображения, полученного в п.2, т.е. найти решение дифференциального уравнения. Для этого используют обратное преобразование Лапласа. Оригинал по изображению можно найти в простом случае с помощью таблицы оригиналов и изображений, в более сложном случае – с помощью вычетов.

16.2. Решение типовых примеров и задач

Пример 1. Найти $z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, z_1^5$, если: $z_1 = 2 + 2i; z_2 = 5i - 3$.

Решение. Найдем сумму комплексных чисел:

$$z_1 + z_2 = (2 + 2i) + (5i - 3) = (2 - 3) + (2 + 5)i = -1 + 7i\,;$$

Найдем произведение комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = (2+2i)\cdot(5i-3) = (2+2i)\cdot(-3+5i) = (2\cdot(-3) - 2\cdot 5) + (2\cdot(-3) + 2\cdot 5)i =$$
$$= -16 + 4i.$$

Найдем частное комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+2i}{5i-3} = \frac{2+2i}{-3+5i} = \frac{(2+2i)\cdot(-3-5i)}{(-3+5i)\cdot(-3-5i)} = \frac{(2\cdot(-3)-2\cdot(-5)) + (2\cdot(-3)+2\cdot(-5))i}{(-3)^2 - (5i)^2} =$$
$$= \frac{4-16i}{9+25} = \frac{4}{34} - \frac{16}{34}i = \frac{2}{17} - \frac{8}{17}i.$$

Возведем комплексное число z_1 в степень.

Запишем комплексное число z_1 в тригонометрической форме. Найдем модуль комплексного числа: $|z_1| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Найдем аргумент комплексного числа: $\arg(z_1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{2}\right) = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$. Итак, тригонометрическая форма этого числа:

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Воспользуемся формулой Муавра:

$$z_1^5=\left(2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^5=\left(2\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\left(5\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(5\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=2^5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^5\cdot\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)=32\cdot 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-128-128i.$$

Пример 2. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)$ и найти её производную $f'(z)$: а) $f(z)=(z-2)^3$; б) $f(z)=(z+i)\cdot e^{-2z}$.

Решение. а) Найдем действительную и мнимую части функции. Учитывая, что $z=x+iy, i^2=-1$, запишем:

$$\left(x+jy-2\right)^3=\left(x-2\right)^3+3\left(x-2\right)^2 jy+3\left(x-2\right)\left(jy\right)^2+\left(jy\right)^3=$$
$$=x^3-6x^2+12x-8+jy\left(3x^2-12x+12\right)-y^2\left(3x-6\right)-jy^3=$$
$$=x^3-3xy^2-6x^2+6y^2+12x-8+j\left(3x^2y-y^3-12xy+12y\right).$$

Действительная часть: $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)=x^3-3xy^2-6x^2+6y^2+12x-8$.

Мнимая часть: $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)=3x^2y-y^3-12xy+12y$.

Определяем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x^3-3xy^2-6x^2+6y^2+12x-8\right)'_x=3x^2-3y^2-12x+12,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^3-3xy^2-6x^2+6y^2+12x-8\right)'_y=-6xy+12y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\left(3x^2y-y^3-12xy+12y\right)'_x=6xy-12y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\left(3x^2y-y^3-12xy+12y\right)'_y=3x^2-3y^2-12x+12.$$

Условия Коши-Римана (4.15) выполняются: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y};\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Непрерывность частных производных очевидна. Следовательно, функция дифференцируема.

Найдем производную по формуле (4.16):

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2-3y^2-12x+12+i\left(6xy-12y\right).$$

б) Найдем действительную и мнимую части функции. Учитывая, что $z=x+iy$ и применяя формулу Эйлера (4.5), получим $e^{-2z}=e^{-2x-2yi}=e^{-2x}\left(\cos\left(-2y\right)+i\sin\left(-2y\right)\right)$. Тогда:

$$f(z)=(z+i)\cdot e^{-2z}=(x+iy+i)\cdot e^{-2x}\left(\cos\left(-2y\right)+i\sin\left(-2y\right)\right)=$$
$$=e^{-2x}\left(x+i(y+1)\right)\cdot\left(\cos(2y)-i\sin(2y)\right)=$$
$$=e^{-2x}\left(x\cos(2y)+i(y+1)\cos(2y)-xi\sin(2y)-i^2(y+1)\sin(2y)\right)=$$
$$=e^{-2x}\left(x\cos(2y)+(y+1)\sin(2y)\right)+e^{-2x}\left((y+1)\cos(2y)-x\sin(2y)\right)i.$$
Действительная часть: $u(x,y)=\operatorname{Re}f(z)=e^{-2x}\left(x\cos(2y)+(y+1)\sin(2y)\right)$.

Мнимая часть: $v(x,y)=\operatorname{Im}f(z)=e^{-2x}\left((y+1)\cos(2y)-x\sin(2y)\right)$.

Определяем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(e^{-2x}\left(x\cos(2y)+(y+1)\sin(2y)\right)\right)'_x=-2e^{-2x}\left(x\cos(2y)+(y+1)\sin(2y)\right)+$$
$$+e^{-2x}\left(\cos(2y)\right)=e^{-2x}\left((1-2x)\cos(2y)+(-2y-2)\sin(2y)\right);$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(e^{-2x}\left(x\cos(2y)+(y+1)\sin(2y)\right)\right)'_y=e^{-2x}(-2x\sin(2y)+\sin(2y)+$$
$$+(y+1)\cdot 2\cdot\cos(2y))=e^{-2x}\left((2y+2)\cos(2y)+(1-2x)\sin(2y)\right);$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\left(e^{-2x}\left((y+1)\cos(2y)-x\sin(2y)\right)\right)'_x=-2e^{-2x}\left((y+1)\cos(2y)-x\sin(2y)\right)+$$
$$+e^{-2x}\left(-\sin(2y)\right)=-e^{-2x}\left((2y+2)\cos(2y)+(1-2x)\sin(2y)\right);$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\left(e^{-2x}\left((y+1)\cos(2y)-x\sin(2y)\right)\right)'_y=e^{-2x}(\cos(2y)-2(y+1)\sin(2y)-$$
$$-2x\cos(2y))=e^{-2x}\left((1-2x)\cos(2y)+(-2y-2)\sin(2y)\right).$$

Условия Коши-Римана (4.15) выполняются: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

Непрерывность частных производных очевидна. Следовательно, функция дифференцируема.

Найдем производную по формуле (4.16):

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-2x}\left((1-2x)\cos(2y)+(-2y-2)\sin(2y)\right)+$$
$$+i\left(-e^{-2x}\left((2y+2)\cos(2y)+(1-2x)\sin(2y)\right)\right)=$$
$$=e^{-2x}\left(\left((1-2x)\cos(2y)+(-2y-2)\sin(2y)\right)+i\left(-2\left((2y+2)\cos(2y)+(1-2x)\sin(2y)\right)\right)\right).$$

*Пример 3***.** Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_{|z+1|=2}\frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}dz$,, б) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{z^4+2z^2+3}{2z^6}dz$..

Решение. а) *1-ый способ*: Представим подынтегральную функцию в виде:

$$\frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}=\frac{\sin^2 z-3}{z(z+2\pi)}=\frac{\dfrac{\sin^2 z-3}{z+2\pi}}{z}.$$

Функция в числителе $f(z)=\dfrac{\sin^2 z-3}{z+2\pi}$ является аналитической в круге $|z+1|=2$. Применим интегральную формулу Коши: $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz.$

Найдем значение функции $f(z)=\dfrac{\sin^2 z-3}{z+2\pi}$ в точке $z_0=0$: $f(z_0)=f(0)=\dfrac{\sin^2 0-3}{0+2\pi}=-\dfrac{3}{2\pi}$. Подставляем в интегральную формулу Коши:

$-\dfrac{3}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z+1|=2}\dfrac{\left(\dfrac{\sin^2 z-3}{z+2\pi}\right)}{z}dz.$. Отсюда $\oint\limits_{|z+1|=2}\dfrac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}dz=-3i.$

2-ой способ: Рассмотрим подынтегральную функцию. В круге $|z+1|=2$ (рис. 4.6) эта функция имеет одну особую точку $z_0=0$. Эта точка является простым полюсом. Действительно,

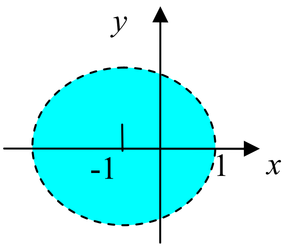


Рисунок 4.6

$$\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)f(z)\right)=\lim_{z\to 0}\left(z\frac{\sin^2 z-3}{z(z+2\pi)}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin^2 z-3}{z+2\pi}\right)=-\frac{3}{2\pi}.$$

Найдем вычет функции в простом полюсе:

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)f(z)\right)=\lim_{z\to 0}\left(z\frac{\sin^2 z-3}{z(z+2\pi)}\right)=-\frac{3}{2\pi}.$$

Применим основную теорему о вычетах:

$$\oint\limits_{|z+1|=2}\frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}dz=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_k)=2\pi i\cdot\operatorname{Res} f(z_0)=2\pi i\cdot\left(-\frac{3}{2\pi}\right)=-3i.$$

б) Рассмотрим подынтегральную функцию $f(z)=\dfrac{z^4+2z^2+3}{2z^6}$. В круге $|z|=\dfrac{1}{2}$ эта функция имеет одну особую точку $z_0=0$. Эта точка является полюсом порядка 6. Действительно,

$$\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^6 f(z)\right)=\lim_{z\to 0}\left(z^6\frac{z^4+2z^2+3}{2z^6}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^4+2z^2+3}{2}\right)=\frac{3}{2}.$$

Найдем вычет функции в полюсе порядка 6:

$$\operatorname{Res} f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right)=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz5}\left(z^6\,\frac{z^4+2z^2+3}{2z^6}\right)=$$

$$=\frac{1}{120}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^4+2z^2+3}{2}\right)^{(5)}=\frac{1}{120}\lim_{z\to 0}\left(4z^3+4z\right)^{(4)}=\frac{1}{120}\lim_{z\to 0}\left(12z^2+4\right)^{m}=$$

$$=\frac{1}{120}\lim_{z\to 0}(24z)''=\frac{1}{120}\lim_{z\to 0}(24)'=\frac{1}{120}\lim_{z\to 0}0=\frac{1}{120}\cdot 0=0.$$

Применим основную теорему о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{z^4+2z^2+3}{2z^6}dz=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_k)=2\pi i\cdot\operatorname{Res} f(z_0)=2\pi i\cdot 0=0.$$

Пример 4. Найти оригинал по данному изображению:

$$\text{а) } \frac{1}{p^2(p^2-9)};\ \text{б) } \frac{p+3}{p^3+2p^2+3p}.$$

Решение. а) *1-ый способ*: Представим данную дробь в виде суммы простейших, используя метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{p^2(p^2-9)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p}+\frac{C}{p-3}+\frac{D}{p+3}=$$

$$=\frac{A(p^2-9)+Bp(p^2-9)+Cp^2(p+3)+Dp^2(p-3)}{p^2(p^2-9)}=$$

$$=\frac{Ap^2-9A+Bp^3-9Bp+Cp^3+3Cp^2+Dp^3-3Dp^2}{p^2(p^2-9)}=$$

$$=\frac{(B+C+D)p^3+(A+3C-3D)p^2+(-9B)p+(-9A)}{p^2(p^2-9)}.$$

Приравняем числители:

$$1=(B+C+D)p^3+(A+3C-3D)p^2+(-9B)p+(-9A).$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}B+C+D=0;\\ A+3C-3D=0;\\ -9B=0;\\ -9A=1.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}A=-\dfrac{1}{9};\\ B=0;\\ C=\dfrac{1}{54};\\ D=-\dfrac{1}{54}.\end{cases}$$

Исходная дробь разложена в сумму простейших:

$$\frac{1}{p^2(p^2-9)}=\frac{-1/9}{p^2}+\frac{1/54}{p-3}+\frac{-1/54}{p+3}.$$

Используя таблицу изображений и оригиналов, найдем оригинал для каждого слагаемого и воспользуемся свойством линейности:

$$\frac{1}{p^2\left(p^2-9\right)}=\frac{-\frac{1}{9}}{p^2}+\frac{\frac{1}{54}}{p-3}+\frac{-\frac{1}{54}}{p+3}\div\frac{-1}{9}t+\frac{1}{54}e^{3t}-\frac{1}{54}e^{-3t}.$$

2-ой способ: Найдем оригинал с помощью вычетов. Особые точки: $p=0$ – полюс второго порядка, $p=3, p=-3$ – простые полюсы.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)\cdot e^{pt}dp=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(F(p)\cdot e^{pt};p_k)=$$

$$=\lim_{p\to0}\frac{1}{(2-1)!}\left(\frac{1}{p^2\left(p^2-9\right)}\cdot e^{pt}\cdot p^2\right)'_p+\lim_{p\to3}\left(\frac{1}{p^2\left(p^2-9\right)}\cdot e^{pt}\cdot(p-3)\right)+$$

$$+\lim_{p\to-3}\left(\frac{1}{p^2\left(p^2-9\right)}\cdot e^{pt}\cdot(p+3)\right)=\lim_{p\to0}\left(\frac{e^{pt}}{\left(p^2-9\right)}\right)'_p+\lim_{p\to3}\left(\frac{e^{pt}}{p^2\left(p+3\right)}\right)+$$

$$+\lim_{p\to-3}\left(\frac{e^{pt}}{p^2\left(p-3\right)}\right)=\lim_{p\to0}\left(\frac{te^{pt}(p^2-9)-2pe^{pt}}{\left(p^2-9\right)^2}\right)+\frac{e^{3t}}{54}-\frac{e^{-3t}}{54}=-\frac{t}{9}+\frac{e^{3t}}{54}-\frac{e^{-3t}}{54}.$$

б) Разложим знаменатель исходной дроби на множители:

$$p^3+2p^2+3p=p(p^2+2p+3).$$

Разложим дробь на сумму простейших:

$$\frac{p+3}{p(p^2+2p+3)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+3}=\frac{A(p^2+2p+3)+(Bp+C)p}{p(p^2+2p+3)}=$$

$$=\frac{Ap^2+2Ap+3A+Bp^2+Cp}{p(p^2+2p+3)}=\frac{(A+B)p^2+(2A+C)p+3A}{p(p^2+2p+3)}.$$

Получили: $p+3=(A+B)p^2+(2A+C)p+3A$.

Найдем A, B и C, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{cases}A+B=0;\\2A+C=1;\\3A=3.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1;\\B=-1;\\C=-1.\end{cases}$$

Таким образом, получили разложение:

$$\frac{p+3}{p(p^2+2p+3)} = \frac{1}{p} - \frac{p+1}{p^2+2p+3}.$$

Преобразуем вторую дробь, выделив в знаменателе полный квадрат:

$$\frac{1}{p} - \frac{p+1}{p^2+2p+3} = \frac{1}{p} - \frac{p+1}{(p+1)^2+2} = \frac{1}{p} - \frac{p-(-1)}{(p-(-1))^2+(\sqrt{2})^2}.$$

Используя таблицу изображений и оригиналов, найдем оригинал для каждого слагаемого и воспользуемся свойством линейности:

$$\frac{p+3}{p\left(p^2+2p+3\right)} = \frac{1}{p} - \frac{p-(-1)}{\left(p-(-1)\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} \div 1 - e^{-t}\cos\left(\sqrt{2t}\right).$$

Пример 5. Операционным методом решить задачу Коши:

а) $y'' - 2y' + y = e^{2t}(t+1), \quad y(0) = y'(0) = 0$;

б) $\begin{cases} \dot{x} = 2y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3, \end{cases} \quad x(0) = -1,\ y(0) = 0$.

Решение. а) Пусть $y(t) \div Y(p) = Y$. Тогда, пользуясь правилом дифференцирования изображений, получаем:

$$y'(t) \div pY - y(0) = pY;$$

$$y''(t) \div p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y.$$

Найдем изображение правой части. Для этого сначала найдем изображение $t + 1 \div \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$ и применим свойство смещения: $e^{2t}(t+1) \div \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{1}{p-2}$. Итак получили операторное уравнение:

$$p^2Y - 2pY + Y = \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{1}{(p-2)}.$$

Решая это уравнение, найдем $Y(p)$:

$$(p^2 - 2p + 1)Y = \frac{1 + p - 2}{(p-2)^2};$$

$$(p-1)^2 Y = \frac{p-1}{(p-2)^2};$$

$$Y = \frac{1}{(p-2)^2(p-1)}.$$

По найденному изображению найдем оригинал (подробно способ нахождения оригинала рассмотрен в предыдущем примере):

$$Y = \frac{1}{(p-2)^2(p-1)} = \frac{1}{(p-2)^2} - \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} \div e^{2t}t - e^{2t} + e^t = y(t).$$

б) Пусть $x(t) \div X(p) = X,\ y(t) \div Y(p) = Y$.

Тогда, пользуясь правилом дифференцирования изображений, получаем:

$$x'(t) \div pX - x(0) = pX + 1,\ y'(t) \div pY - y(0) = pY.$$

Найдем изображения правых частей: $2y + 1 \div 2Y + \frac{1}{p};\ 2x + 3 \div 2X + \frac{3}{p}$.

Итак, получили систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} pX+1=2Y+\dfrac{1}{p}, \\ pY=2X+\dfrac{3}{p}. \end{cases}$$

Запишем эту систему алгебраических уравнений в виде

$$\begin{cases} pX-2Y=\dfrac{1}{p}-1, \\ -2X+pY=\dfrac{3}{p}. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} p & -2 \\ -2 & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{p}-1 \\ \dfrac{3}{p} \end{pmatrix}.$$

и решим ее методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & -2 \\ -2 & p \end{vmatrix} = p^2-4=(p-2)(p+2),$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{p}-1 & -2 \\ \dfrac{3}{p} & p \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{p}-1\right)p-(-2)\frac{3}{p}=1-p+\frac{6}{p}=\frac{-p^2+p+6}{p}=-\frac{(p-3)(p+2)}{p},$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p & \dfrac{1}{p}-1 \\ -2 & \dfrac{3}{p} \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{p}\right)p-(-2)\left(\frac{1}{p}-1\right)=3+\frac{2}{p}-2=\frac{p+2}{p}.$$

$$X=\frac{\Delta_X}{\Delta}=-\frac{(p-3)(p+2)}{p(p-2)(p+2)}=-\frac{(p-3)}{p(p-2)};$$

$$Y=\frac{\Delta_Y}{\Delta}=\frac{p+2}{p(p-2)(p+2)}=\frac{1}{p(p-2)}.$$

По найденным изображениям найдем оригиналы, используя вычеты :

$$X=-\frac{(p-3)}{p(p-2)} \div \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(F(p)\cdot e^{pt};p_k\right)=l\lim_{p\to 0}\left(-\frac{p-3}{p(p-2)}\cdot e^{pt}\cdot p\right)+$$

$$+l\lim_{p\to 2}\left(-\frac{p-3}{p(p-2)}\cdot e^{pt}\cdot(p-2)\right)=l\lim_{p\to 0}\left(-\frac{(p-3)e^{pt}}{(p-2)}\right)+l\lim_{p\to 2}\left(-\frac{(p-3)e^{pt}}{p}\right)=$$

$$=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}=x(t);$$

$$Y=\frac{1}{p(p-2)} \div \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(F(p)\cdot e^{pt};p_k\right)=l\lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{p(p-2)}\cdot e^{pt}\cdot p\right)+$$

$$+\lim_{p\to 2}\left(\frac{1}{p(p-2)}\cdot e^{pt}\cdot(p-2)\right)=\lim_{p\to 0}\left(-\frac{e^{pt}}{(p-2)}\right)+\lim_{p\to 2}\left(-\frac{e^{pt}}{p}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t}=y(t).$$

Решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x(t)=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}e^{2t}; \\ y(t)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{2t}. \end{cases}$$

16.3. Задания на контрольную работу

Задание 1. Найти $z_1+z_2, z_1\cdot z_2, \dfrac{z_1}{z_2}, z_1{}^5$, если:

1.1. $z_1=1+i; z_2=i-2$.

1.2. $z_1=-1+i; z_2=7i+5$.

1.3. $z_1=-2+2i; z_2=5-3i$.

1.4. $z_1=-1-i; z_2=8+2i$.

1.5. $z_1=2-2i; z_2=4-3i$.

1.6. $z_1=3+3i; z_2=4-5i$.

1.7. $z_1=-2-2i; z_2=3i-1$.

1.8. $z_1=3-3i; z_2=3-i$.

1.9. $z_1=1-i; z_2=3-4i$.

1.10. $z_1=-3+3i; z_2=i-3$.

Задание 2. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)$ и найти её производную $f'(z)$:

2.1. $f(z)=(2z-2i)^2$.

2.2. $f(z)=3z\cdot e^{2z}$.

2.3. $f(z)=(3z+2)^2$.

2.4. $f(z)=(z+1)\cdot e^{-z}$.

2.5. $f(z)=(z+1)^3$.

2.6. $f(z)=(2z+i)\cdot e^{3z}$.

2.7. $f(z)=(3z-i)^3$.

2.8. $f(z)=(z-i)\cdot e^{iz}$.

2.9. $f(z)=(z+i)^3$.

2.10. $f(z)=(2z+1)\cdot e^{-z}$.

Задание 3. Вычислить интегралы:

3.1. а) $\displaystyle\oint_{|z|=1/2}\frac{dz}{z(z^2+1)}$,

б) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\cos z^2-1}{z^3}dz$.

3.2. а) $\displaystyle\oint_{|z-1-i|=5/4}\frac{2dz}{z^2(z-1)}$,

б) $\displaystyle\oint_{|z|=1/2}\frac{dz}{z(z^2+1)}$.

3.3. а) $\displaystyle\oint_{|z-i|=3/2}\frac{dz}{z(z^2+4)}$,

б) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z-\sin z}{2z^4}dz$.

3.4. а) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$,

б) $\displaystyle\oint_{|z|=1/2}\frac{2-z^2+3z^3}{4z^3}dz$.

3.5. а) $\oint\limits_{|z-3|=1/2} \dfrac{e^z dz}{\sin z}$,

б) $\oint\limits_{|z|=1/3} \dfrac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2}dz$.

3.6. а) $\oint\limits_{|z-3/2|=2} \dfrac{z(\sin z+2)}{\sin z}dz$,

б) $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{z^3-3z^2+1}{2z^4}dz$.

3.7. а) $\oint\limits_{|z-1|=3} \dfrac{ze^z}{\sin z}dz$,

б) $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{3z^4-2z^3+5}{z^3}dz$.

3.8. а) $\oint\limits_{|z-1/4|=1/3} \dfrac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z}dz$,

б) $\oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{e^{2x^2}-1}{z^3}dz$.

3.9. а) $\oint\limits_{|z-1/2|=1} \dfrac{iz(z-i)}{\sin \pi z}dz$,

б) $\oint\limits_{|z|=1/3} \dfrac{3-2z+4z^4}{z^3}dz$.

3.10. а) $\oint\limits_{|z-3|=1} \dfrac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}dz$,

б) $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{e^{1/z}+1}{z}dz$.

Задание 4. Найти оригинал по данному изображению

4.1. $\dfrac{2p}{(p^2+4p+8)^2}$.

4.2. $\dfrac{1}{p(p^2+1)^2}$.

4.3. $\dfrac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$.

4.4. $\dfrac{1}{p^3+p^2+p}$.

4.5. $\dfrac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

4.6. $\dfrac{1}{p(p^3+1)}$.

4.7. $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}$.

4.8. $\dfrac{1}{p^3(p^2-4)}$.

4.9. $\dfrac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$.

4.10. $\dfrac{1}{p^3-1}$.

Задание 5. Операционным методом решить задачу Коши:

5.1. а) $y''-2y'+y=e^t(1+t^2), \quad y(0)=y'(0)=0$,

б) $\begin{cases} \dot{x}=3y+2, \\ \dot{y}=x+2y, \end{cases} \quad x(0)=-1, y(0)=1$.

5.2. а) $y''+4y'+4y=t^3e^{2t}, \quad y(0)=1, y'(0)=2$,

б) $\begin{cases} \dot{x}=x+4y+1, \\ \dot{y}=2x+3y, \end{cases} \quad x(0)=0, y(0)=1$.

5.3. а) $y'' + 2y' + y = e^{-t}(1 + t^2), \quad y(0) = y'(0) = 0$,

б) $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3, \\ \dot{y} = x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = -1, y(0) = 0$.

5.4. а) $y'' + y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$,

б) $\begin{cases} \dot{x} = 3y + 2, \\ \dot{y} = x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = -1, y(0) = 1$.

5.5. а) $y'' + y' - 2y = -2(t + 1), \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$,

б) $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 3, \\ \dot{y} = x - y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1$.

5.6. а) $y'' - 2y' = e^{t}(t^2 + t - 3), \quad y(0) = 2, y'(0) = 2$,

б) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x + y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1$.

5.7. а) $y'' + y' + y = 7e^{2t}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 4$,

б) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 1$.

5.8. а) $y'' + y' - 2y = -2(t + 1), \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$,

б) $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + 1, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 2$.

5.9. а) $y'' + y = 6e^{-t}, \quad y(0) = 3, y'(0) = 1$,

б) $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1, \end{cases} \quad x(0) = -1, y(0) = 2$.

5.10. а) $y'' - y' = t^2, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$,

б) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 1, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 2$.

17. Уравнения математической физики

17.1. Краткие сведения из теории

Математическая физика – это теория математических моделей физических явлений. Особое место в математической физике занимают дифференциальные уравнения, поскольку исследования многих физических и технических задач сводятся к решению таких уравнений. Физические процессы, происходящие во времени и в пространстве, как правило, описываются при помощи функций нескольких переменных, поэтому возникает необходимость рассматривать уравнения в частных производных. Коренное отличие общего решения дифференциального уравнений в частных производных от общего решения обыкновенного дифференциального уравнения состоит в том, что в него входят не произвольные постоянные, а произвольные функции.

17.1.1. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

Будем рассматривать дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка относительно функции двух переменных $u=u(x,y)$:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

Дифференциальное уравнение с частными производными называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции и ее производных:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_1\frac{\partial u}{\partial x} + a_2\frac{\partial u}{\partial y} + a_0 u + b = 0, \quad (17.1)$$

где a_{ij}, a_i, b – функции, зависящие от x и y.

Запишем линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка в следующем виде:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \quad (17.2)$$

Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и в зависимости от того, какое значение он примет, уравнение (17.2) можно привести к одному из следующих *канонических видов*.

1. Если $\Delta>0$, то уравнение можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{x}^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{y}^2}=\Phi\left(\overline{x},\overline{y},u,\frac{\partial u}{\partial \overline{x}},\frac{\partial u}{\partial \overline{y}}\right), \qquad (17.3)$$

которое называется *уравнением эллиптического типа*.

2. Если $\Delta<0$, то уравнение можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{x}^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{y}^2}=\Phi\left(\overline{x},\overline{y},u,\frac{\partial u}{\partial \overline{x}},\frac{\partial u}{\partial \overline{y}}\right), \qquad (17.4)$$

которое называется *уравнением гиперболического типа*. Если положить

$$\overline{\overline{x}}=\frac{1}{2}(\overline{x}+\overline{y}), \quad \overline{\overline{y}}=\frac{1}{2}(\overline{x}-\overline{y}),$$

то уравнение (17.4) можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{\overline{x}}\partial \overline{\overline{y}}}=\Phi\left(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}},u,\frac{\partial u}{\partial \overline{\overline{x}}},\frac{\partial u}{\partial \overline{\overline{y}}}\right), \qquad (17.5)$$

3. Если $\Delta\equiv 0$, то уравнение можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{x}^2}=\Phi\left(\overline{x},\overline{y},u,\frac{\partial u}{\partial \overline{x}},\frac{\partial u}{\partial \overline{y}}\right), \qquad (17.6)$$

которое называется *уравнением параболического типа*.

Если определитель Δ в данной области принимает значение разных знаков, то уравнение (17.2) называется *уравнением смешанного типа*.

17.1.2. Начальные и краевые условия

При решении задач физики или других областей науки математическими методами необходимо, прежде всего, дать математическую постановку задачи: *а) написать уравнение, которому удовлетворяет искомая функция, описывающее исследуемое явление; б) написать дополнительные условия, которым должна удовлетворять искомая функция на границах области определения* (*дополнительные условия должны обеспечить существование и единственность решения*).

Дополнительные условия в большинстве случаев диктуются физическими свойствами системы, описываемой данным уравнением. Уравнения гиперболического и параболического типа чаще всего возникают при изучении нестационарных явлений, т.е. процессов, протекающих во времени; а уравнения эллиптического типа возникают обычно при исследовании стационарных явлений. Это обстоятельство в корне отличает дополнительные условия для первых двух уравнений от дополнительных условий для третьего.

Для уравнений, описывающих *нестационарные* явления, дополнительные условия разделяются на *начальные* и *краевые* условия.

Начальные условия состоят в задании при t=0 значений искомой функции $u(x,t)$ и ее производной (в гиперболическом случае) или только значений самой функции (в параболическом случае): $u(x,0) = f_1(x), \quad u'_t(x,0) = f_2(x)$.

Краевые условия состоят в задании значений искомой функции $u(x,t)$ на границах изменения координат (*граничные условия 1-го типа*):

$$u(0,t) = g_1(t),\ u(l,t) = g_2(t);$$

или значений ее производной (*граничные условия 2-го типа*)

$$u'_x(0,t) = h_1(t),\ u'_x(l,t) = h_2(t);$$

или задается линейная комбинация двух выше приведенных условий (*граничные условия 3-го типа*)

Если процесс протекает в *бесконечном* интервале изменения координаты x, то краевые условия отпадают и получается задача только с начальными условиями (*задача Коши*). Если ставится задача для конечного интервала, то должны быть заданы и начальные и краевые условия (*смешанная задача*).

Уравнения эллиптического типа обычно возникают при исследовании *стационарных* явлений. Для задач такого типа ставят только краевые условия. Это может быть *задача Дирихле*, когда заданы значения самой функции на границе рассматриваемой области.

17.1.3. Уравнение колебаний струны (волновое уравнение)

Уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа часто встречаются в физических задачах, связанных с процессами колебаний. Простейшее уравнение *гиперболического* типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{17.7}$$

называют *уравнением колебаний струны* или *одномерным волновым уравнением.*

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях бесконечной струны при начальных условиях: $u(0,x) = f(x)$, $u'_t(0,x) = g(x)$. Такая задача называется задачей Коши. Решить эту задачу можно *методом Даламбера*, суть которого в том, что после замены переменных уравнение приводится к такому виду, когда решение может быть найдено в виде суммы функций:

$$u(x,t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(x)dx\,. \tag{17.8}$$

17.1.4. Уравнение теплопроводности

Уравнения в частных производных второго порядка параболического типа часто встречаются в физических задачах, связанных с тепловыми процессами. В одномерном случае без потерь и источников тепла получим простейшее уравнение *параболического* типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (17.9)$$

которое называют *уравнением теплопроводности*.

Пусть задан тонкий стержень длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована и концы поддерживаются при нулевой температуре. Задача о распространении тепла в таком стержне может быть сформулирована следующим образом: найти решение однородного уравнения теплопроводности, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0) = f(x)$ и краевым условиям $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.

Для решения этой задачи воспользуемся методом разделения переменных (*методом Фурье*), то есть будем искать решение этого уравнения в виде: $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Подставив это выражение в исходное уравнение, учитывая его линейность и однородность, и, используя начальные условия, получим:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right), \qquad (17.10)$$

где

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx. \qquad (17.11)$$

17.1.5. Уравнение Лапласа

Уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа часто встречаются в стационарных физических задачах. Простейшее уравнение *эллиптического* типа:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad (17.12)$$

которое называют *уравнением Лапласа.* Это уравнение встречается в электростатике, магнитостатике, гидро- и аэродинамике, теории теплопроводности, теории упругости и в других науках.

Метод Фурье разделения переменных, который играет большую роль в задачах колебаний и теплопроводности, применим также к решению уравнения Лапласа и задачи Дирихле для таких простых областей, как круг. Решим задачу методом Фурье задачу Дирихле для круга. Радиус круга обозначим через R, центр поместим в начало координат. Очевидно, что целесообразно решать задачу в полярных координатах. Тогда задача формулируется так:

Найти решение $u=u(r,\varphi)$ уравнения Лапласа

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0 \qquad (17.13)$$

для $r<R$, принимающего на границе круга, т.е. при $r=R$, заданные значения $f(\varphi)$:

$$u\big|_{r=R}=f(\varphi).$$

Будем искать решение этого уравнения в виде: $u(r,\varphi)=R(r)\cdot\Phi(\varphi)$. Подставив это выражение в исходное уравнение, учитывая его линейность и однородность, и, используя начальные условия, получим *решение задачи Дирихле* в виде

$$u(r,\varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right), \qquad (17.14)$$

где коэффициенты A_0, A_n, B_n определяются по формулам

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi, \qquad A_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi. \qquad (17.15)$$

17.2. Решение типовых примеров и задач

*Пример 1***.** Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2x}\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad x>0, \quad y>0.$$

*Решение***.** Перепишем уравнение в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{1}{2x}\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Новое представление уравнения позволяет предположить, что с введением новой функции $v(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ мы сведем его к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции v, где y играет роль параметра

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{2x}v=0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{\partial v}{v}=\frac{\partial x}{2x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v|=\frac{1}{2}\ln|x|+\ln|C(y)|,$$

где $C(y)$ – произвольная функция y. После потенцирования находим

$$v=C(y)\sqrt{x}.$$

Но $\frac{\partial u}{\partial y}=v$, поэтому $\frac{\partial u}{\partial y}=C(y)\sqrt{x}$. Отсюда

$$u(x,y)=\sqrt{x}\int C(y)dy+f(x),$$

где $f(x)$ – произвольная функция x. Вводя обозначение $g(y)=\int C(y)dy$, получим общее решение исходного уравнения

$$u(x,y)=f(x)+\sqrt{x}\,g(y),$$

где $f(x)$ и $g(y)$ – произвольные функции x и y соответственно. ®

Пример 2. Определить типы уравнений:

а) $(2+3\sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5x\frac{\partial u}{\partial x}-7y\frac{\partial u}{\partial y}=0,$

б) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}++y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0,$

в) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0,$

г) $(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-5\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

Решение.

а) Здесь уравнение гиперболического типа (17.4) на всей плоскости xOy, так как для него

$$\Delta=\begin{vmatrix}2+3\sin^2 x & -3\cos x\\ -3\cos x & -4\end{vmatrix}=-17-3\sin^2 x<0.$$

б) Здесь уравнение является уравнением эллиптического типа (17.3) в любой его области, не содержащей осей координат (x=0*,* y=0), поскольку для него

$$\Delta=\begin{vmatrix}x^2 & 0\\ 0 & y^2\end{vmatrix}=x^2y^2>0,$$

если $x\neq 0$*,* $y\neq 0$.

в) Здесь уравнение является уравнением параболического типа (17.6) на всей плоскости xOy, поскольку

$$\Delta=\begin{vmatrix}x^2 & xy\\ xy & y^2\end{vmatrix}\equiv 0.$$

г) Здесь уравнение на всей плоскости xOy является уравнением смешанного типа, поскольку

$$\Delta=\begin{vmatrix}1-x^2 & -xy\\ -xy & 1+y^2\end{vmatrix}=1-x^2+y^2.$$

Полученное выражение может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Пример 3. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u(0,x)=\cos x$, $u_t'(0,x)=x$.

Решение. Используя формулу Даламбера (17.8), где $f(x)=\cos x,\ g(x)=x$, получим

$$u(x,t)=\frac{\cos(x+at)+\cos(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}xdx=$$

$$=\cos x\cos at+\frac{(x+at)^2-(x-at)^2}{2}=\cos x\cos at+xt.$$

Пример 4. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ методом Фурье, если начальные условия $u(0,x)=f(x)=\begin{cases}x,\ \text{при}\ 0<x\le\dfrac{l}{2},\\ l-x,\ \text{при}\ \dfrac{l}{2}\le x<l.\end{cases}$ и краевые условия $u(t,0)=u(t,l)=0$.

Решение. Найдем коэффициенты (17.11) разложения ряда (17.10):

$$C_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)dx=\frac{2}{l}\int\limits_0^{l/2}x\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)dx+\frac{2}{l}\int\limits_{l/2}^{l}(l-x)\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)dx=$$

$$=\frac{4l}{k^2\pi^2}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right).$$

Используя формулу (17.10), получим решение

$$u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\sin\frac{\pi k}{2}\cdot e^{-k^2\pi^2t/l^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)=$$

$$=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cdot e^{-(2n+1)^2\pi^2t/l^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{l}x\right).$$

Пример 5. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в круге $0\le r<1$, $0\le\varphi<2\pi$ (где r,φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения $u(1,\varphi)=\cos 9\varphi$.

Решение. Найдем коэффициенты (17.15) разложения ряда (17.14):

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos 9\varphi d\varphi = 0,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos 9\varphi \cos n\varphi d\varphi = 0$$

для всех $n \neq 9$;

для $n=9$ получаем

$$A_9 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\cos 9\varphi\right)^2 d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(1+\cos 18\varphi\right)d\varphi = 1.$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos 9\varphi \sin n\varphi d\varphi = 0.$$

Таким образом, решение (17.14) имеет вид

$$u(r,\varphi) = r^9 \cos 9\varphi.$$

17.3. Задания на контрольную работу

Задание 1. Найти общее решение уравнения

1.1. $u''_{xy} = 4yu'_x$.

1.2. $u''_{xy} = \dfrac{u'_y}{2\sqrt{x}}$.

1.3. $u''_{xy} = \dfrac{u'_x}{y^2}$.

1.4. $u''_{xy} = 6x^2u'_y$.

1.5. $u''_{xy} = -12y^3u'_x$.

1.6. $u''_{xy} = 2xu'_y$.

1.7. $u''_{xy} = \dfrac{2u'_x}{y}$.

1.8. $u''_{xy} = \dfrac{2u'_y}{x^2}$.

1.9. $u''_{xy} = 3y^2u'_x$.

1.10. $u''_{xy} = 8x^3u'_y$.

Задание 2. Определить тип уравнения

2.1.
$u''_{xx} + 4u''_{xy} + 4u''_{yy} - u'_x - 2u'_y = 0$.

2.2.
$u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy} + 2u'_x - 2u'_y = 0$.

2.3.
Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования..

2.4
$u''_{xx} - 6u''_{xy} + 9u''_{yy} - 2u'_x + 6u'_y = 0$.

2.5.
Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования..

2.6.
$u''_{xx} - 4u''_{xy} + 4u''_{yy} + 3u'_x - 6u'_y = 0$.

2.7.
$9u''_{xx} + 6u''_{xy} + u''_{yy} - 9u'_x - 3u'_y = 0$.

2.8.
$u''_{xx} + 8u''_{xy} + 16u''_{yy} - u'_x - 4u'_y = 0$.

2.9.
$u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy} + 4u'_x - 4u'_y = 0$.

2.10.
$16u''_{xx} + 8u''_{xy} + u''_{yy} - 8u'_x - 2u'_y = 0$.

Задание 3. Решить задачу для волнового уравнения методом Даламбера

3.1. $u''_{tt} = 64u''_{xx}$,
$u(x,0) = 2\sin \pi x, \quad u'_t(x,0) = 8\pi \sin \pi x$.

3.2. $u''_{tt} = 9u''_{xx}$,
$u(x,0) = 7 - 5x, \quad u'_t(x,0) = 12\pi \sin \pi x$.

3.3. $u''_{tt} = 36u''_{xx}$,
$u(x,0) = x(2 - x), \quad u'_t(x,0) = e^{-x}$.

3.4. $u''_{tt} = 4u''_{xx}$,
$u(x,0) = 4\sin 2\pi x, u'_t(x,0) = 12\pi \cos 2\pi x$

3.5. $u''_{tt} = 25u''_{xx}$,
$u(x,0) = e^x, \quad u'_t(x,0) = 4x$.

3.6. $u''_{tt} = 49u''_{xx}$,
$u(x,0) = x^2, \quad u'_t(x,0) = \sin 8x$.

3.7. $u''_{tt} = 81u''_{xx}$,
$u(x,0) = 4x + 5, \quad u'_t(x,0) = \cos 8x$.

3.8. $u''_{tt} = 100u''_{xx}$,
$u(x,0) = 4\cos 2\pi x, \quad u'_t(x,0) = 2\pi \cos \pi x$

3.9. $u''_{tt} = 121u''_{xx}$,
$u(x,0) = 5 + 2x, \quad u'_t(x,0) = 12e^x$.

3.10. $u''_{tt} = 144u''_{xx}$,
$u(x,0) = 6\cos 4\pi x, \quad u'_t(x,0) = 12\pi \sin 4\pi x$

Задание 4. Решить задачу для уравнения теплопроводности методом Фурье

4.1. $u'_t = u''_{xx}, \quad 0 < x < 2, 0 < t < \infty,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 < x \le 2, \end{cases} \quad u(0,t) = u(2,t) = 0.$$

4.2. $u'_t = 25u''_{xx}, \quad 0 < x < 5, 0 < t < \infty,$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2/5, & 0 \le x \le 5/2, \\ 5 - x, & 5/2 < x \le 5, \end{cases} \quad u(0,t) = u(5,t) = 0.$$

4.3. $u'_t = 16u''_{xx}, \quad 0 < x < 4, 0 < t < \infty,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/2, & 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, & 2 < x \le 4, \end{cases} \quad u(0,t) = u(4,t) = 0.$$

4.4. $u'_t = 4u''_{xx}, \quad 0 < x < 5, 0 < t < \infty,$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2/5, & 0 \le x \le 5/2, \\ 5 - x, & 5/2 < x \le 5, \end{cases} \quad u(0,t) = u(5,t) = 0.$$

4.5. $u'_t = u''_{xx}, \quad 0 < x < 3, 0 < t < \infty,$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2/3, & 0 \le x \le 3/2, \\ 3 - x, & 3/2 < x \le 3, \end{cases} \quad u(0,t) = u(3,t) = 0.$$

4.6. $u'_t = 25u''_{xx}, \quad 0 < x < 8, 0 < t < \infty,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/4, & 0 \le x \le 4, \\ 8 - x, & 4 < x \le 8, \end{cases} \quad u(0,t) = u(8,t) = 0.$$

4.7. $u'_t = 9u''_{xx}, \quad 0 < x < 2, 0 < t < \infty,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 < x \le 2, \end{cases} \quad u(0,t) = u(2,t) = 0.$$

4.8. $u'_t = 16u''_{xx}, \quad 0 < x < 3, 0 < t < \infty,$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x \le 1/2, \\ 1 - x, & 1/2 < x \le 3, \end{cases} \quad u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

4.9. $u'_t = 4u''_{xx}, \quad 0 < x < 4, 0 < t < \infty,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/2, & 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, & 2 < x \le 4, \end{cases} \quad u(0,t) = u(4,t) = 0.$$

4.10. $u'_t = 9u''_{xx}, \quad 0 < x < 10, 0 < t < \infty,$

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2/5, & 0 \le x \le 5, \\ 10 - x, & 5 < x \le 10, \end{cases} \quad u(0,t) = u(10,t) = 0.$$

Задание 5. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в круге $0\le r<1$, $0\le\varphi<2\pi$ (где r,φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующие значения:

5.1. $u(1,\varphi) = 2\sin 8\varphi$.

5.2. $u(1,\varphi) = 3\cos 7\varphi$.

5.3. $u(1,\varphi) = 4\sin 6\varphi$.

5.4. $u(1,\varphi) = 5\cos 5\varphi$.

5.5. $u(1,\varphi) = 6\sin 4\varphi$.

5.6. $u(1,\varphi) = 7\cos 3\varphi$.

5.7. $u(1,\varphi) = 8\sin 2\varphi$.

5.8. $u(1,\varphi) = 9\cos 2\varphi$.

5.9. $u(1,\varphi) = 10\sin 3\varphi$.

5.10. $u(1,\varphi) = 11\cos 4\varphi$.

18. Ряды

18.1. Числовые ряды

18.1.1. Краткие сведения из теории

Числовым рядом называется выражение
$U_1 + U_2 + ... + U_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$, где $U_1, U_2, ..., U_n$ – числовая последовательность,

U_n – общий член ряда.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ называется *сходящимся*, если существует $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, где S_n – частичная сумма, S – сумма ряда.

Необходимый признак сходимости знакоположительных рядов:

если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится, то предел его общего члена при $n\to\infty$ равен нулю: $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.

Обратное утверждение неверно. Если этот предел не равен *0*, то ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

1. Признак сравнения.

Если даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \quad (18.1); \qquad \sum_{n=1}^{\infty} V_n \quad (18.2),$$

общие члены, которых удовлетворяют соотношению $U_n \le V_n$, то из сходимости ряда (18.2) следует сходимость ряда (18.1) (если сходится ряд с большими членами, то ряд с меньшими членами сходится и подавно) и из расходимости ряда (18.1) следует расходимость ряда (18.2) (если расходится ряд с меньшими членами, то ряд с большими членами расходится и подавно).

На практике используется *предельный признак сравнения.*

Если существует $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n}$ конечный, отличный от нуля, то оба ряда ведут себя одинаково: либо сходятся, либо расходятся одновременно.

В качестве известного, образцового ряда берут *ряд Дирихле*

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

который при $p \le 1$ – расходится, а при $p > 1$ – сходится. Общий член ряда Дирихле является алгебраическим выражением, поэтому с помощью предельного признака сравнения предпочтительнее исследовать ряды, общий член которых является алгебраическим выражением.

2. Признак Даламбера.

Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = q$, то при $q < 1$ ряд сходится, при $q > 1$ – расходится, при $q = 1$ – неопределенность.

3. Радикальный признак.

Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = q$, то при $q < 1$ ряд сходится, при $q > 1$ – расходится, при $q = 1$ – неопределенность.

4. Интегральный признак сходимости.

Если существует функция *f(x),* для которой $f(n)=U_n$, где U_n – общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, то данный ряд и интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница).

Если члены знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n$ удовлетворяют условиям

$$|U_1| > |U_2| > \cdots > |U_n|, \text{ или } \lim_{n\to\infty} = |U_n| = 0,$$

то ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена U_1, то есть $0 < S < U_1$.

Если в знакочередующемся ряде ограничить сумму n членами, то ошибка, совершаемая при замене суммы ряда S на частичную сумму S_n, не превосходит абсолютной величины первого из отброшенных членов.

Сходимость знакочередующегося ряда по признаку Лейбница называют *условной*, а ряд *условносходящимся*..

Если сходится ряд, составленный из абсолютных значений членов знакочередующегося ряда (знакоположительный ряд), то такой знакочередующийся ряд называют *абсолютносходящимся*.

Всякий абсолютносходящийся ряд является условносходящимся.

18.1.2. Исследование числовых рядов

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{3}{25}+\frac{7}{32}+\frac{11}{39}+\frac{15}{46}+\cdots$$

Решение: Для исследования любого числового ряда по любому из признаков сходимости необходимо иметь аналитическое выражение (формулу)общего члена ряда U_n. В нашем случае видна закономерность: величина числителя увеличивается на 4 в каждом последующем члене ряда. Подбираем общую формулу для числителя: $4n-1$. При $n=1;\ 2;\ 3;\ldots$ эта формула удовлетворяет числители заданного ряда. Величина знаменателя увеличивается на 7 в каждом последующем члене ряда и его общий член $7n+18$.

Общий член числового ряда $U_n=\dfrac{4n-1}{7n+18}$.

Исследуем ряд по необходимому признаку:

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{7n+18}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(4-\frac{1}{n}\right)}{n\left(7+\frac{18}{n}\right)}=\frac{4}{7}\neq 0.$$

Общий член U_n не стремится к нулю при $n\to\infty$ значит, по необходимому признаку ряд расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[4]{3n^7-2n+4}}{\sqrt[3]{2n^7+3n^2-1}}$.

Решение: Проверим выполнение необходимого признака.

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{3n^7-2n+4}}{\sqrt[3]{2n^7+3n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^7\left(3-\frac{2}{n^6}+\frac{4}{n^7}\right)}}{\sqrt[3]{n^7\left(2+\frac{3}{n^5}-\frac{1}{n^7}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^7}\sqrt[4]{3-\frac{2}{n^6}+\frac{4}{n^7}}}{\sqrt[3]{n^7}\sqrt[3]{2+\frac{3}{n^5}-\frac{1}{n^7}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{7}{4}}\cdot n^{-\frac{7}{3}}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{3-\frac{2}{n^6}+\frac{4}{n^7}}}{\sqrt[3]{2+\frac{3}{n^5}-\frac{1}{n^7}}}=\lim_{n\to\infty}n^{\left(\frac{7}{4}-\frac{7}{3}\right)}\cdot\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{2}}\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{7}{12}}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[12]{n^7}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{\infty}=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{2}}\cdot 0=0\ .$$

Необходимый признак выполняется, следует продолжить исследования по достаточным признакам. Применим достаточный предельный признак сравнения. В качестве известного (образцового) ряда возьмем ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[4]{3n^7-2n+4}}{\sqrt[3]{2n^7+3n^2-1}}}{\dfrac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{3n^7-2n+4}\cdot n^p}{\sqrt[3]{2n^7+3n^2-1}}.$$

Согласно предельного признака сравнения этот предел должен быть равен числу, отличному от нуля. Вместе с тем, при $n \to \infty$ и числитель и знаменатель стремятся к ∞. Имеет место неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Что бы этот предел был равен числу отличному от нуля необходимо, чтобы и числитель и знаменатель стремились к бесконечности (увеличивались) с одинаковой интенсивностью. Это возможно при условии, что наибольшие степени алгебраических выражений числителя и знаменателя равны, т.е. $\frac{7}{4} + p = \frac{7}{3}$, откуда $\mathrm{p} = \frac{7}{3} - \frac{7}{4} = \frac{7}{12}$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{3n^7-2n+4}\cdot n^p}{\sqrt[3]{2n^7+3n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{3n^7-2n+4}\cdot \sqrt[12]{n^7}}{\sqrt[3]{2n^7+3n^2-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^7}\sqrt[4]{3-\dfrac{2}{n^6}+\dfrac{4}{n^7}}\cdot \sqrt[12]{n^7}}{\sqrt[3]{n^7}\sqrt[3]{2+\dfrac{3}{n^5}-\dfrac{1}{n^7}}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[12]{n^{28}}}{\sqrt[12]{n^{28}}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{2}} \neq 0.$$

Предельный признак сравнения выполняется при условии, что в ряде Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\quad p = \frac{7}{12} < 1$. Ряд Дирихле расходится, значит и исследуемый ряд то же расходится.

Пример 3. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} arctg \frac{\sqrt[3]{8n^2-3}}{\sqrt{7n^5+2n^3-4}}$.

Решение: Исследуем ряд по необходимому признаку.

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} arctg \frac{\sqrt[3]{8n^2-3}}{\sqrt{7n^5+2n^3-4}} = arctg \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8n^2-3}}{\sqrt{7n^5+2n^3-4}} =$$

$$= arctg\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2\left(8-\frac{3}{n^2}\right)}}{\sqrt{n^5\left(7+\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n^5}\right)}} = arctg\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{8-\frac{3}{n^2}}}{\sqrt{n^5}\sqrt{7+\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n^5}}} =$$

$$= arctg\left(\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{2}{3}}\cdot n^{-\frac{5}{2}}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8-\frac{3}{n^2}}}{\sqrt{7+\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n^5}}}\right) = arctg\left(\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{7}}\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{11}{6}}\right) =$$

$$= arctg\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n^{11}}}\right) = arctg\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot 0\right) = arctg\ 0 = 0.$$

Необходимый признак выполняется. Продолжим исследования по достаточному предельному признаку сравнения. Обратим внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^2-3}}{\sqrt{7n^5+2n^3-4}} = 0$.

Этот предел вычислен при исследовании ряда по необходимому признаку.

Напомним следствие первого замечательного предела: $\lim\limits_{W\to 0}\frac{arctgW}{W} = 1.$

В нашем случае: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{arctgW_n}{W_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{arctg\frac{\sqrt[3]{8n^2-3}}{\sqrt{7n^5+2n^3-4}}}{\frac{\sqrt[3]{8n^2-3}}{\sqrt{7n^5+2n^3-4}}} = 1.$

Здесь выполняются все условия достаточного предельного признака сравнения. Остается только исследовать поведение ряда с общим членом $W_n = \frac{\sqrt[3]{8n^2-3}}{\sqrt{7n^5-2n^3-4}}$.

Второй раз используем достаточный предельный признак сравнения с применением ряда Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, аналогично примеру 2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{8n^2-3}}{\sqrt{7n^5+2n^3-4}}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^2-3}\cdot n^p}{\sqrt{7n^5+2n^3-4}} = \bullet\Big|\bullet\ \frac{2}{3}+p=\frac{5}{2}, p=\frac{5}{2}-\frac{2}{3}=$$

$$=\frac{11}{6}\Big|^{\bullet}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^2-3}\cdot\sqrt[6]{n^{11}}}{\sqrt{7n^5+2n^3-4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sqrt[3]{8-\frac{3}{n^2}}\cdot\sqrt[6]{n^{11}}}{\sqrt{n^5}\cdot\sqrt{7+\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n^5}}}=\frac{2}{\sqrt{7}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n^{15}}}{\sqrt[6]{n^{15}}}=\frac{2}{\sqrt{7}}\neq 0.$$

Предельный признак сравнения выполняется при условии, что в ряде Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p=\frac{11}{6}>1.$ Ряд Дирихле сходится, все остальные ряды, в том числе и исходный ведут себя одинаково, т.е. сходятся.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{71^n\left(4n^5-2n^3+3\right)}{(2n-1)!}$.

Решение: Проверка выполнения необходимого признака потребует громоздких вычислений (применение формулы Стирлинга). Практически при наличии в общем члене факториала можно сразу применить признак Даламбера.

$$U_n=\frac{71^n\left(4n^5-2n^3+3\right)}{(2n-1)!};\ U_{n+1}=\frac{71^{n+1}\left(4(n+1)^5-2(n+1)^3+3\right)}{(2(n+1)-1)!}=$$

$$=\frac{71^{n+1}\left(4(n+1)^5-2(n+1)^3+3\right)}{(2n+1)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{71^{n+1}\left(4(n+1)^5-2(n+1)^3+3\right)}{(2n+1)!}}{\dfrac{71^n\left(4n^5-2n^3+3\right)}{(2n-1)!}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{71^{n+1}\left(4\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^5-2\left(n^{5/3}\left(\frac{1}{n^{2/3}}+\frac{1}{n^{5/3}}\right)\right)^3+3\right)(2n-1)!)}{71^n n^5\left(4-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^5}\right)(2n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{71^n\cdot 71}{71^n}\lim_{n\to\infty}\frac{n^5\left(4\left(1+\frac{1}{n}\right)^5-2\left(\frac{1}{n^{2/3}}+\frac{1}{n^{5/3}}\right)^3+\frac{3}{n^5}\right)}{n^5\left(4-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^5}\right)}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}=$$

$$= 71\,\frac{4\left(1+\dfrac{1}{\infty}\right)^{5}-2\left(\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{1}{\infty}\right)^{3}+\dfrac{3}{\infty}}{4-\dfrac{2}{\infty}+\dfrac{3}{\infty}}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n-1)!\cdot 2n(2n+1)} =$$

$$= 71\,\frac{4-2\cdot 0+3\cdot 0}{4-2\cdot 0+3\cdot 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{71}{\infty} = 0 < 1$$

Ряд сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+4}\right)^{n^2}$.

Решение: По необходимому признаку получаем:

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+4}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n\left(1-\frac{2}{3n}\right)}{3n\left(1+\frac{4}{3n}\right)}\right)^{n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{3n}{2}\right)}\right)^{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{4}}\right)^{n^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{3n}{2}\right)}\right)^{-\frac{3}{2}n\cdot\left(-\frac{2}{3}n\right)}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{4}}\right)^{\frac{3}{4}n\cdot\frac{4}{3}n}}=\frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{3n}{2}\right)}\right)^{-\frac{3n}{2}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}n\right)}}{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{4}}\right)^{\frac{3n}{4}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{3}n}}=\frac{e^{-\infty}}{e^{\infty}}=\frac{1}{e^{\infty}}=0.$$

Необходимый признак выполняется. Необходимо продолжить исследования по достаточным признакам. Из общего члена ряда легко извлечь корень n-ой степени, поэтому применим радикальный признак Коши.

$$\sqrt[n]{U_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{3n-2}{3n+4}\right)^{n^2}}=\left(\frac{3n-2}{3n+4}\right)^{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+4}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4-6}{3n+4}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-6}{3n+4}\right)^{n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n+4}{-6}}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n+4}{-6}}\right)^{\left(\frac{3n+4}{-6}\right)\left(\frac{-6}{3n+4}\right)n}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n+4}{-6}}\right)^{\frac{3n+4}{-6}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-6n}{3n+4}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-6n}{n\left(3+\frac{4}{n}\right)}\right)}=e^{-\frac{6}{3+\frac{4}{\infty}}}=e^{-\frac{6}{3}}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}<1.$$

Ряд сходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$.

Решение: Необходимый признак:

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'_n}{\left(n^3\right)'_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n^3}=\frac{1}{3\cdot\infty}=0.$$

Применим интегральный признак:

$$\int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx=\int_2^{\infty}x^{-3}\ln x dx=\left|\begin{matrix}U=\ln x; & dU=\frac{1}{x}dx;\\ dV=x^{-3}dx; & V=-\frac{1}{2x^2};\end{matrix}\right|=\left(-\frac{\ln x}{2x^2}\right)\Bigg|_2^{\infty}+\int_2^{\infty}\frac{dx}{2x^3}=\left(-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}\right)\Bigg|_2^{\infty}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}\right)\Bigg|_2^{b}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln b}{2b^2}-\frac{1}{4b^2}+\frac{\ln 2}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 4}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{(\ln b)'_b}{\left(b^2\right)'_b}-\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^2}+$$

$$+\left(\frac{\ln 2}{8}+\frac{1}{16}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{\frac{1}{b}}{2b}-\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^2}+\left(\frac{\ln 2}{8}+\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{16}(2\ln 2+1).$$

Несобственный интеграл сходится, значит и ряд сходится.

Пример 7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt[3]{3n^2-4n+7}}{\sqrt[6]{2n^5+3n^2-9}}$$

Решение: Сходимость знакочередующегося ряда определяется по признаку Лейбница.

$$\lim_{n\to\infty}|U_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{3n^2-4n+7}}{\sqrt[6]{2n^5+3n^2-9}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sqrt[3]{3-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}}{\sqrt[6]{n^5}\sqrt[6]{2+\frac{3}{n^3}-\frac{9}{n^5}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{2}{3}}\cdot n^{-\frac{5}{6}}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{3-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}}{\sqrt[6]{2+\frac{3}{n^3}-\frac{9}{n^5}}}=\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{1}{6}}\frac{\sqrt[3]{3-\frac{4}{\infty}+\frac{7}{\infty^2}}}{\sqrt[6]{2+\frac{3}{\infty^3}-\frac{9}{\infty^5}}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{2}}\cdot\frac{1}{\infty}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{2}}\cdot 0=0$$

Признак Лейбница выполняется, ряд сходится условно.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость по предельному признаку сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_n|}{|V_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{3n^2-4n+7}}{\sqrt[6]{2n^5+3n^2-9}}}{\dfrac{1}{n^p}}=\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{\sqrt[3]{3n^2-4n+7\cdot n^p}}{\sqrt[6]{2n^5+3n^2-9}}=^{\bullet}\Big|_{\bullet}\frac{2}{3}+p=\frac{5}{6},p=\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=$$

$$=\frac{1}{6}{}_{\bullet}\Big|^{\bullet}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{3n^2-4n+7}\cdot\sqrt[6]{n}}{\sqrt[6]{2n^5+3n^2-9}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n}\cdot\sqrt[3]{n^2}\cdot\sqrt[3]{3-\dfrac{4}{n}+\dfrac{7}{n^2}}}{\sqrt[6]{n^5}\cdot\sqrt[6]{2+\dfrac{3}{n^3}-\dfrac{9}{n^5}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{6}}\cdot n^{\frac{2}{3}}\cdot n^{-\frac{5}{6}}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{3-\dfrac{4}{n}+\dfrac{7}{n^2}}}{\sqrt[6]{2+\dfrac{3}{n^3}-\dfrac{9}{n^5}}}=\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}}\right)\frac{\sqrt[3]{3-\dfrac{4}{\infty}+\dfrac{7}{\infty^2}}}{\sqrt[6]{2+\dfrac{3}{\infty^3}-\dfrac{9}{\infty^5}}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{2}}\neq 0.$$

Выполнение условий предельного признака сравнения происходит при сравнении с расходящимся рядом Дирихле ($p=\frac{1}{6}<1$) значит, знакочередующийся ряд абсолютно расходится, но является условно сходящимся.

Замечание. Исследование знакочередующегося ряда, содержащего в общем члене факториал, по признаку Лейбница усложнено вычислением предела факториала (нужно использовать формулу Стирлинга). В этом случае можно сразу исследовать ряд на абсолютную сходимость и, если она имеет место, то исследование завершается, т.к. абсолютно сходящийся ряд сходится условно и подавно.

18.2. Функциональные ряды

18.2.1. Краткие сведения из теории

Область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$, где $U_n(x)$, n=1,2,3… - функции одной переменой, есть совокупность значений переменной x, при которых образующиеся при этом числовые ряды, сходятся. Сумма ряда в области сходимости является некоторой функцией от x: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$, для x из области сходимости.

Область сходимости определяется решением неравенства на основе достаточных признаков Даламбера или радикального признака:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|<1; \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|}<1.$$

Принадлежность концов интервала к области сходимости определяется на основе исследования числовых рядов, получающихся после подстановки значений этих концов в функциональный ряд.

В частном случае, если функциональный ряд представляет собой

степенной ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, область сходимости по приведенным формулам определяется:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right|=|x-x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1,\ \textit{или}\ \ |x-x_0|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|}=|x-x_0|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1,\ \textit{или}\ \ |x-x_0|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Здесь $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, где R – радиус сходимости.

Интервал сходимости получается в результате решения неравенства:

$|x-x_0|<R,\qquad x_0-R<x<x_0+R.$

Если функция $f(x)$ в точке a непрерывна вместе со своими производными, то в окрестности точки $x=a$ справедлива формула - *ряд Тейлора*:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=$$

$$=f(a)+f^{/}(a)(x-a)+\frac{f^{//}(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{///}(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots.$$

При $a=0$ ряд Тейлора преобразуется в *ряд Маклорена :*

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+f^{/}(0)x+\frac{f^{//}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{///}(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad .$$

Таблица рядов Маклорена для некоторых функций.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < \infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (-\infty < x < \infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty < x < \infty);$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n \qquad (-1 < x \le 1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \qquad (-1 < x \le 1);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 < x \le 1);$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (-\infty < x < \infty);$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

В скобках указаны интервалы сходимости рядов.

Разложение функций в ряд Тейлора позволяет с любой степенью точности приближенно вычислить значение функции в точке, пределы, определенный интеграл, найти частное решение дифференциального уравнения (задачу Коши) и другие.

18.2.2 Решение типовых примеров с использованием функциональных рядов

Пример 8. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(3n-2)5^n}$.

Решение: Для определения области сходимости функционального ряда используем признак Даламбера числового ряда, при этом предел вычисляется от выражений функционального ряда взятых по модулю: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|<1.$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^{n+1}(3n-2)5^n}{(3(n+1)-2)5^{n+1}(x+2)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^n}{5^{n+1}}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n-2}{3n+1}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^{n+1}}{(x+2)^n}\right|=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^n(x+2)}{(x+2)^n}\right|=\frac{1}{5}|x+2|<1.$$

$|x+2|<5;\qquad -5<x+2<5;\qquad -5-2<x<5-2;\qquad -7<x<3.$

Тот же результат можно получить по приведенной ранее формуле для радиуса сходимости (но только для этого ряда).

$$a_n=\frac{1}{(3n-2)5^n};\qquad a_{n+1}=\frac{1}{[3(n+1)-2]5^{n+1}}=\frac{1}{(3n+1)5^{n+1}}.$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3n+1)5^{n+1}}{(3n-2)5^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}\right|\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot 5}{5^n}=5.$$

$|x+2|<5;\quad -7<x<3.$

Исследуем ряд на концах найденного интервала сходимости (подставляем значение концов интервала в функциональный ряд).

$$x=-7;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-7+2)^n}{(3n-2)5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{(3n-2)5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n-2}.$$

Этот знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty}|U_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n-2}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Значит конец интервала (точка) $x=-7$ входит в область сходимости ряда.

$$x=3;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+2)^n}{(3n-2)5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}.$$

Данный числовой ряд с положительными членами расходится по признаку сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{\frac{1}{3n-2}}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{3n-2}=\left|\ p=1\ \right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}=\frac{1}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1}{3}\neq 0.$$

(ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ при $p=1$ расходится).

Значит конец интервала $x=3$ не входит в область сходимости ряда.

Окончательный ответ: $-7 \le x < 3$.

Пример 9. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3-2n+3}{\sqrt{2n^3+n^2-3}\left(3x^2+10x+9\right)^n}$

Решение: Методика решения как в примере 8.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{4(n+1)^3-2(n+1)+3}{\sqrt{2(n+1)^3+(n+1)^2-3}\left(3x^2+10x+9\right)^{n+1}}}{\dfrac{4n^3-2n+3}{\sqrt{2n^3+n^2-3}\left(3x^2+10x+9\right)^n}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(4(n+1)^3-2(n+1)+3\right)\sqrt{2n^3+n^2-3}\left(3x^2+10x+9\right)^n}{\left(4n^3-2n+3\right)\sqrt{2(n+1)^3+(n+1)^2-3}\left(3x^2+10x+9\right)^{n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4(n+1)^3-2(n+1)+3}{4n^3-2n+3}\right| \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{2n^3+n^2-3}}{\sqrt{2(n+1)^3+(n+1)^2-3}}\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(3x^2+10x+9\right)^n}{\left(3x^2+10x+9\right)^n\left(3x^2+10x+9\right)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3\left(4\left(1+\frac{1}{n}\right)^3-2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(4-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n^3}\sqrt{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^3}}}{\sqrt{n^3}\sqrt{2\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)^2+\frac{3}{n^3}}}\right| \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left|3x^2+10x+9\right|} =$$

$$= \frac{4\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^3-2\left(\frac{1}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^3}\right)+\frac{3}{\infty^3}}{4-\frac{2}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}} \cdot \frac{\sqrt{2+\frac{1}{\infty}-\frac{3}{\infty^3}}}{\sqrt{2\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt{\infty}}+\frac{1}{\sqrt{\infty^3}}\right)^2+\frac{3}{\infty^3}}} \cdot \frac{1}{\left|3x^2+10x+9\right|} =$$

$$= \frac{1}{\left|3x^2+10x+9\right|} < 1.$$

Трехчлен $3x^2+10x+9$ имеет дискриминант $D = 100 - 4\cdot 3\cdot 9 = 100 - 108 = -8 < 0$.

Т.к. коэффициент при x^2 равен $3>0$,то этот трехчлен при любом x положительный, значит модуль можно опустить и остается решить неравенство: $\frac{1}{3x^2+10x+9}<1$.

$$\frac{1}{3x^2+10x+9}-1<0;\ \frac{1-3x^2-10x-9}{3x^2+10x+9}<0;\ \frac{-3x^2-10x-8}{3x^2+10x+9}<0;\ \frac{3x^2+10x+8}{3x^2+10x+9}>0.$$

Т.к. знаменатель при любом x положительный, остается решить неравенство: $3x^2+10x+8>0.$; $3(x+2)\left(x+\frac{4}{3}\right)>0$. Методом интервалов рис.18.1:

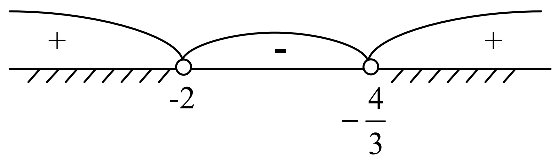


Рис.18.1

Получаем два интервала сходимости: $x<-2;\quad x>-\frac{4}{3}$.

Исследуем поведение функционального ряда на концах интервала сходимости.

При подстановке в функциональный ряд значений обоих концов интервалов образуется один и тот же числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^3-2n+3}{\sqrt{2n^3+n^2-3}}$.

Действительно: $(3x^2+10x+9)\Big|_{x=-2}=3(-2)^2+10(-2)+9=1;$

$$\left(3x^2+10x+9\right)\Big|_{x=-\frac{4}{3}}=3\left(-\frac{4}{3}\right)^2+10\left(-\frac{4}{3}\right)+9=1.$$

Этот числовой ряд расходится по необходимому признаку:

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-2n+3}{\sqrt{2n^3+n^2-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(4-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\sqrt{\frac{2}{n^3}+\frac{2}{n^4}-\frac{3}{n^6}}}=\frac{4-\frac{2}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}}{\sqrt{\frac{2}{\infty^3}+\frac{2}{\infty^4}-\frac{3}{\infty^6}}}=\frac{4}{0}=\infty.$$

Значит, концы интервалов не входят в интервалы сходимости.

Окончательно область сходимости исследуемого ряда: $x\in(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{4}{3};+\infty\right)$.

Пример 10. Найти область сходимости ряда

$$\sum\frac{2^n}{\sqrt[7]{4n^3-3}}\sin^{2n}x.$$

Решение: Область сходимости определяем по методике примера 8.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{2^{n+1}\sin^{2(n+1)}x}{\sqrt[7]{4(n+1)^3-3}}}{\dfrac{2^n\sin^{2n}x}{\sqrt[7]{4n^3-3}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\sin^{2n+2}x\cdot\sqrt[7]{4n^3-3}}{2^n\sin^{2n}x\cdot\sqrt[7]{4(n+1)^3-3}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2}{2^n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin^{2n}x\sin^2 x}{\sin^{2n}x}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt[7]{n^3}\sqrt[7]{4-\dfrac{3}{n^3}}}{\sqrt[7]{n^3}\sqrt[7]{4\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3-\dfrac{3}{n^3}}}\right| = 2\left|\sin^2 x\right| < 1.$$

$$\left|\sin^2 x\right| < \frac{1}{2}; \qquad \left|\sin x\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin x < \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Исследуем ряд на концах интервала сходимости.

Подставим значения обоих концов интервала в выражение $\sin^{2n}x$:

$$\sin^{2n}x = \left(\sin^2 x\right)^n\Big|_{x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi} = \left(\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

Это значит, на концах интервала сходимости исходный функциональный ряд становится одним и тем же числовым рядом.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt[7]{4n^3-3}}\cdot\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{4n^3-3}}.$$

Исследуем на сходимость этот ряд.

Необходимый признак $\lim\limits_{n\to\infty}U_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[7]{4n^3-3}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$ выполняется.

По признаку сравнения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt[7]{4n^3-3}}}{\dfrac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{\sqrt[7]{4n^3-3}} = \left|\, p = \frac{3}{7} \,\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[7]{n^3}}{\sqrt[7]{n^3}\sqrt[7]{4-\dfrac{3}{n^3}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[7]{4}} \neq 0.$$

Ряд расходится, т.к. ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p=\frac{3}{7}<1$ расходится. Значит концы интервала не входят в область сходимости.

Область сходимости ряда $-\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Аналитическое решение поясняется графиком (рис.18.2):

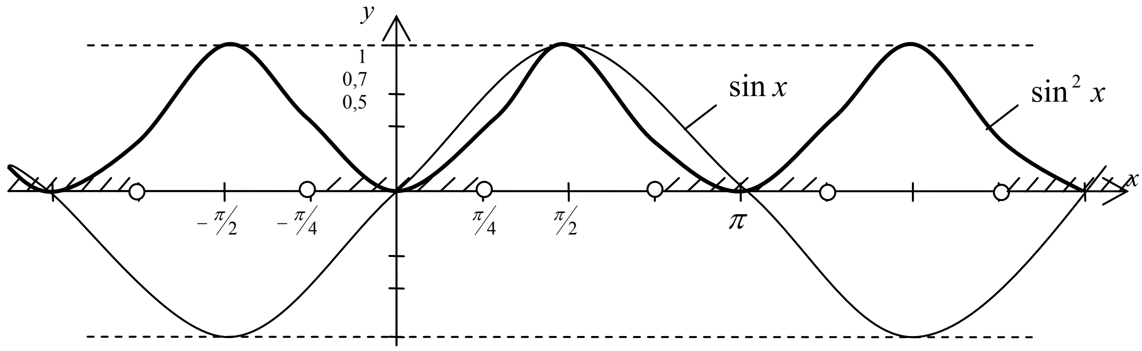


Рисунок 18.2

Замечание. Последний пример показывает, что для его решения требуется уметь решать тригонометрические неравенства. В заданиях на контрольные работы встретятся примеры, при решении которых потребуется так же решать логарифмические и показательные неравенства.

Пример 11. Вычислить интеграл

$\int_0^{0,5}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}dx$ с точностью ε=0,001.

Решение: Используем разложение косинуса в ряд Маклорена:

$$\cos U=1-\frac{U^2}{2!}+\frac{U^4}{4!}-\frac{U^6}{6!}+\frac{U8}{8!}-\cdots.$$

В нашем случае

$$U=\sqrt{x},$$

тогда

$$cos\sqrt{x}=1-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\sqrt{x}\right)^4}{4!}-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^6}{6!}+\frac{\left(\sqrt{x}\right)^8}{8!}+\cdots=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\frac{x^4}{8!}-\cdots.$$

$$1-\cos\sqrt{x}=1-1+\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^3}{6!}-\frac{x^4}{8!}+\cdots.=\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^3}{6!}-\frac{x^4}{8!}+\cdots.$$

$$\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{2!}-\frac{x}{4!}+\frac{x^2}{6!}-\frac{x^3}{8!}+\cdots.$$

$$\int_0^{0,5}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}dx=\int_0^{0,5}\left(\frac{1}{2!}-\frac{x}{4!}+\frac{x^2}{6!}-\frac{x^3}{8!}+\cdots\right)dx=\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{2\cdot 4!}+\frac{x^3}{3\cdot 6!}-\frac{x^4}{4\cdot 8!}+\cdots\right)\Bigg|_0^{0,5}=$$

$$=\frac{0,5}{2!}-\frac{0,5^2}{2\cdot 4!}+\frac{0,5^3}{3\cdot 6!}-\frac{0,5^4}{4\cdot 8!}+\cdots=0,25-0,0052+0,000058-\cdots\approx 0,25-0,0052=$$
$$=0,2448$$

Для обеспечения заданной точности $\varepsilon=0,001$ достаточно взять два первых члена ряда. Третий член ряда по абсолютной величине меньше $\varepsilon=0,001$, и, начиная с этого члена и далее, ряд можно отбросить. Этот расчет основан на свойстве знакочередующегося ряда: при замене суммы ряда частичной суммой происходит ошибка, не превышающая по абсолютной величине значения первого из отброшенных членов.

Замечание. Если при вычислениях степенной ряд окажется знакопостоянным, то обеспечение заданной точности вычислений нужно производить по оценке остаточного члена в форме Лагранжа: $R_n(x)=\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$, который позволит выбрать необходимое число членов ряда n.

Пример 12. С помощью рядов решить дифференциальное уравнение:

$$y''+xy'+y=0;\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

Решение: Решение ДУ находится в виде ряда Тейлора (Маклорена):

$$y(x)=y(a)+\frac{y'(a)}{1!}(x-a)+\frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots,$$

где точка $x=a$ определяется из начальных условий (в приведенном примере $a=0$).

Значения функции и её производных для ряда Тейлора находятся из начальных условий непосредственно для первых членов и для остальных членов ряда путем последовательного дифференцирования исходного ДУ, разрешенного относительно старшей производной и вычисленной в точке $x=a$. Для тех значений x, для которых получившийся ряд сходится, он представляет решение ДУ.

$y(a)=y(0)=0;$

$y'(a)=y'(0)=1;$

$y''=-xy'-y;$ $\qquad y''(0)=0;$

$y'''=-(x'y'+xy'')-y'=-2y'-xy'';$ $\qquad y'''(0)=-2;$

$y^{(4)}=-2y''-y''-xy'''=-3y''-xy''';$ $\qquad y^{(4)}(0)=0;$

$$y^{(5)} = -3y''' - y''' - xy^{(4)} = -4y''' - xy^{(4)}; \qquad y^{(5)}(0) = 2\cdot 4,$$
$$y^{(6)} = -4y^{(4)} - y^{(4)} - xy^{(5)} = -5y^{(4)} - xy^{(5)}; \qquad y^{(6)}(0) = 0,$$
$$y^{(7)} = -5y^{(5)} - y^{(5)} - xy^{(6)} = -6y^{(5)} - xy^{(6)}; \qquad y^{(7)}(0) = -2\cdot 4\cdot 6.$$

Видна закономерность:

$$y^{(n)} = -(n-1)y^{(n-2)} - xy^{(n-1)};$$
$$y^{(2n)}(0) = 0; \qquad y^{(2n+1)}(0) = (-1)^n 2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot 2n.$$

Подставим все значения коэффициентов в ряд:

$$y(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{2\cdot 4}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{7!}x^7 +$$
$$+\dots+(-1)^n \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot 2n}{(2n+1)!}x^{(2n+1)} + \dots$$

Т.к. четные члены ряда стали равными нулю (выбыли из ряда), нумерацию членов ряда *n=0,1,2,…* заменим на новую *k=0,1,2,…*

Выполним преобразования:

$$y(x) = x - \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{2\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7 +$$
$$+\dots+(-1)^k \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot 2k}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot 2k(2k+1)}x^{2k+1} + \dots$$
$$y(x) = x - \frac{x^3}{1\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2k+1)} + \dots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)}.$$

Определим радиус сходимости этого ряда:

$$a_k = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2k+1)}; \quad a_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2k+1)(2k+3)}.$$
$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2k+1)(2k+3)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2k+1)}\right| = \lim_{k\to\infty}(2k+3) = \infty$$

Полученное решение ДУ справедливо для всех x.

Замечание. При решении ДУ с помощью рядов не всегда удается получить закономерность изменения коэффициентов ряда Тейлора. И тогда вывести формулу общего члена ряда разложения, а, значит, и представить точное решение ДУ не представляется возможным. В этом случае нужно представить приближенное решение ДУ в виде первых пяти-шести членов разложения функции.

18.3. Ряды Фурье и интегралы Фурье

18.3.1. Краткие сведения из теории

Если на интервале $[-\pi,\pi]$ функция *f(t)* удовлетворяет условию Дирихле(функция непрерывна с конечным числом экстремумов или имеет конечное число точек разрыва первого рода), то *ряд Фурье* этой функции сходится в точках непрерывности к самой функции *f(t),* а в точках разрыва первого рода - к полусумме левого и правого пределов функции *f(t*).

Ряд Фурье имеет вид:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt), \qquad \text{где } n=1,2,3,\ldots$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\ ; \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt; \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ntdt\,.$$

Если функция *f(t)* периодична с периодом 2π, удовлетворяет условию Дирихле на этом периоде, то ряд Фурье данной функции сходится к ней для любого *t*. То же самое относится и к случаям, если функция *f(t)*.периодична с периодом *T* или 2*l*. Соответствующие формулы имеют вид:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2\pi}{T}nt+b_n\sin\frac{2\pi}{T}nt),$$

где $a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt$; $a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos\frac{2\pi}{T}ntdt$; $b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin\frac{2\pi}{T}ntdt$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{\pi}{l}nt+b_n\sin\frac{\pi}{l}nt),$$

где $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)dt$; $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}ntdt$; $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi}{l}ntdt$.

Если функция *f(t)* четная, то $b_n=0$; если *f(t)* нечетная, то $a_0=a_n=0$

и ряд Фурье упрощается.

Если *f(t)* задана на полуинтервале, то ее можно разложить в ряд Фурье по косинусам или синусам, продлив функцию соответственно четным или нечетным образом на весь период.

Интегралом Фурье представляется функция $f(t)$ непериодическая, к которой предъявляются два условия:

1) должна быть кусочно-гладкая, т.е. должна быть на некотором интервале непрерывной и иметь непрерывную производную во всех точках этого интервала , за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых функция имеет разрыв 1 рода (это аналог условия Дирихле);

2) должна быть абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т.е. должен быть сходящимся $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(t\right) \right| dt = A \neq \infty$. В электротехнике это означает одиночный импульс тока или напряжения, имеющий начало и конец.

Тогда функция $f(t)$ представляется несколькими видами интеграла Фурье:

а) $$f(t) = \int\limits_{0}^{\infty} \left[A(\omega)\cos\ \omega t + B(\omega)\sin\ \omega t \right]\, d\omega,$$

где $$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau,\ B(\omega)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau.$$

Здесь $f(\tau)$ и $f(t)$ – одна и та же функция с аргументами τ и t.

В частных случаях $f(t)$ может быть четной и нечетной.

Если $f(t)$ – чётная, то $B(\omega) = 0,$ и тогда

$$f(t) = \int\limits_{0}^{\infty} A(\omega)\cos\omega t d\omega, \quad \text{где} \quad A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

Иногда вводят функцию $F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0.}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau,$ тогда

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} F(\omega)\cos\omega t d\omega.$$

В этом случае функцию $F(\omega)$ называют *косинус- преобразованием Фурье.*

Если $f(t)$ – -нечетная, то $A(\omega) = 0$ и тогда

$$f(t) = \int\limits_{0}^{\infty} B(\omega)\sin\omega t d\omega; \qquad B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau.$$

Если ввести функцию

$\Phi(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} f(\tau)\sin\omega\tau d\tau$ - *синус-преобразование Фурье*, то $\quad f(t)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\Phi(\omega)\sin\omega t d\omega.$.

b) Второй вид интеграла Фурье :

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\ \cos\omega(t-\tau)d\tau\ .$$

c) Третий вид интеграла Фурье – в комплексной форме – здесь не рассматривается.

Представить функцию $f(t)$ интегралом Фурье значит:

Вид a) – найти функции $A(\omega)$ и $B(\omega)$ или $F(\omega)$ или $\Phi(\omega)$ и подставить в соответствующую формулу интеграла Фурье.

Вид b) -– посчитать внутренний интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$ и подставить в формулу интеграла Фурье.

18.3.2. Решение типовых примеров с использованием рядов и интеграла Фурье

*Пример 13***.** Разложить функцию $f(t)=\dfrac{t}{2}$ в ряд Фурье на интервале *(-π, π)*.

Решение. Продолжим функцию периодическим образом с периодом 2π (рисунок 18.3).

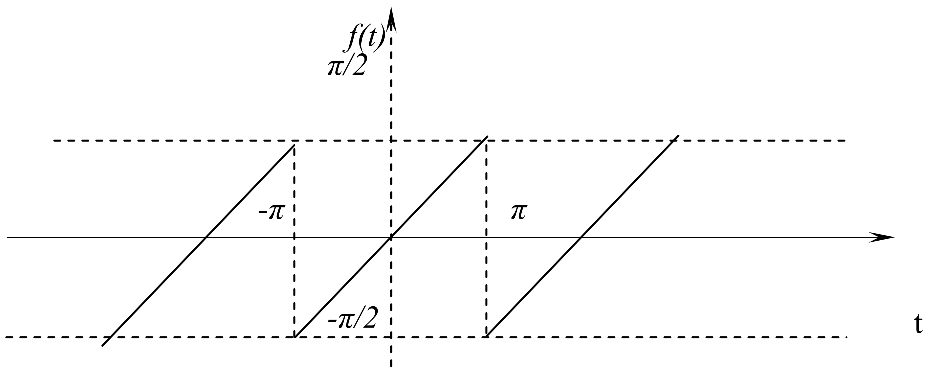


Рисунок 18.3

Функция $f(t)=\dfrac{t}{2}$ нечетная, поэтому коэффициенты $a_0=a_n=0$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{t}{2}\sin ntdt = \left|\begin{matrix} U = t; & dV = \sin ntdt \\ dU = dt; & V = -\frac{1}{n}\cos nt \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{t}{n}\cos nt\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos ntdt\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin nt\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Ряд Фурье:

$$\frac{t}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nt = \frac{2\sin t}{1} - \frac{2\sin 2t}{2} + \frac{2\sin 3t}{3} - \frac{2\sin 4t}{4} + \ldots.$$

Пример 14 **.** Разложить в ряд Фурье функцию $f(t) = \left(\frac{t^2}{3} - 1\right)$ на интервале (π, π).

Решение. Продолжим функцию периодическим образом с периодом 2π (рис. 18.4).

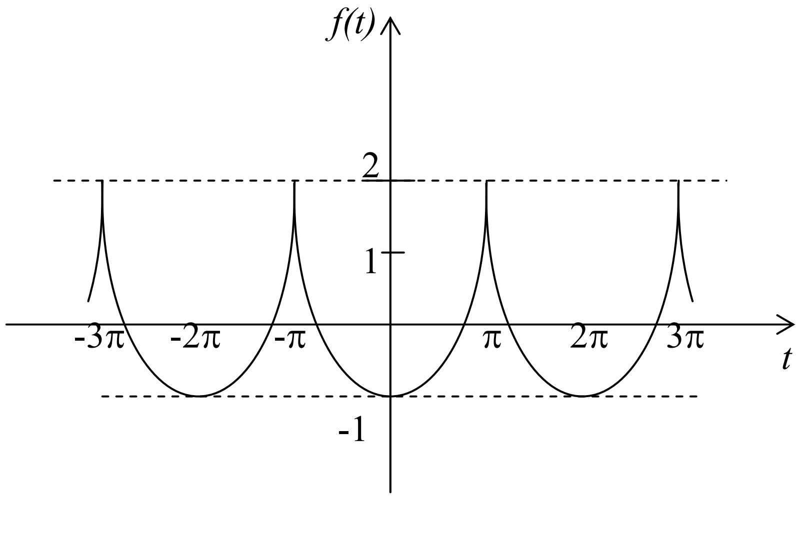


Рисунок 18.4

Функция $f(t) = \frac{t^2}{3} - 1$ – четная, поэтому коэффициент $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{3} - 1\right)dt = \frac{2}{\pi}\left(\frac{t^3}{9} - t\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{9} - \pi\right) = 2\left(\frac{\pi^2}{9} - 1\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{3}-1\right)\cos ntdt = \left|\begin{array}{ll} U = \dfrac{t^2}{3}-1; & dV = \cos ntdt \\ dU = \dfrac{2}{3}tdt; & V = \dfrac{1}{n}\sin nt \end{array}\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{t^2}{3}-1\right)\frac{1}{n}\sin nt\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{3n}\int_0^{\pi} t\sin ntdt\right) = \left|\begin{array}{ll} U = t; & dV = \sin nt \\ dU = dt; & V = -\dfrac{1}{n}\cos nt \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{4}{3n\pi}\left(-\frac{t}{n}\cos nt\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos ntdt\right) = \frac{4\pi}{3n^2\pi}\cos n\pi - \frac{4}{3\pi n^3}\sin nt\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3n^2}(-1)^n.$$

Ряд Фурье:

$$\frac{t^2}{3}-1 = \frac{\pi^2}{9}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3n^2}(-1)^n\cos nt = \frac{\pi^2}{9}-1-\frac{4}{3}\left(\frac{\cos t}{1^2}-\frac{\cos 2t}{2^2}+\frac{\cos 3t}{3^2}-\ldots\right)$$

*Пример 15***.** Разложить в ряд Фурье функцию $f(t) = \begin{cases} t, -\pi \le t \le 0 \\ 2t, 0 < t \le \pi \end{cases}$.

Решение. Продолжим функцию периодическим способом с периодом 2π (рисунок 18.5)

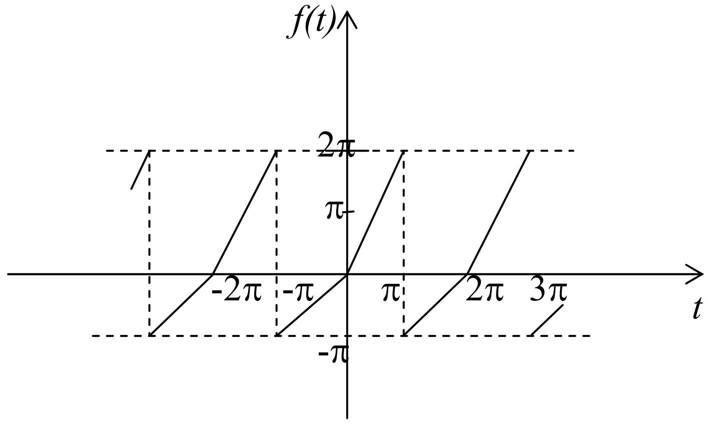


Рисунок 18.5

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} tdt + \int_0^{\pi} 2tdt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{t^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + t^2\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} t\cos ntdt+\int_{0}^{\pi} 2t\cos ntdt\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix} U=t; & dV=\cos ntdt \\ dU=dt; & V=\dfrac{1}{n}\sin nt \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin nt\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n^2}\cos nt\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2t}{n}\sin nt\Big|_{0}^{\pi}+\frac{2}{n^2}\cos nt\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}\cos n\pi\right)+\left(\frac{2}{n^2}\cos n\pi-\frac{2}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\left(1-(-1)^n\right)+\frac{2}{n^2}\left((-1)^n\right)-1\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n-2+2(-1)^n\right)=\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi\ n^2}(1-(-1)^n-2+2(-1)^n)=\frac{1}{\pi\ n^2}((-1)^n-1)=$$

$$=\begin{cases} 0, n=2k \\ -\dfrac{2}{\pi n^2}; n=2k+1 \end{cases} \quad ;\ a_{2k+1}=-\frac{2}{\pi(2k+1)^2}\ k=0,1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} t\sin ntdt+\int_{0}^{\pi} 2t\sin ntdt\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix} U=t; & dV=\sin ntdt \\ dU=dt; & V=\dfrac{1}{n}\cos nt \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cos nt\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n^2}\sin nt\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2t}{n}\cos nt\Big|_{0}^{\pi}+\frac{2}{n^2}\sin nt\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos n\pi-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi\right)=\frac{3}{n}(-1)^{n+1}.$$

Ряд Фурье:

$$f(t)=\frac{\pi}{4}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[-\frac{2}{\pi(2k+1)^2}\cos(2k+1)t\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}(-1)^{n+1}\sin nt=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2}+\frac{\cos 3t}{3^2}+\frac{\cos 5t}{5^2}+\ldots\right)+3\left(\frac{\sin t}{1}-\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 3t}{3}-\ldots\right).$$

Пример 16. Разложить функцию $f(t)=t$ на интервале $(0;\pi)$: а) в ряд косинусов, б) в ряд синусов.

Решение. а) Чтобы в разложении были только косинусы, необходимо иметь четную функцию, поэтому продолжим функцию $f(t)=t$ на интервале $(0;\pi)$ четным, периодическим образом (рисунок 18.6).

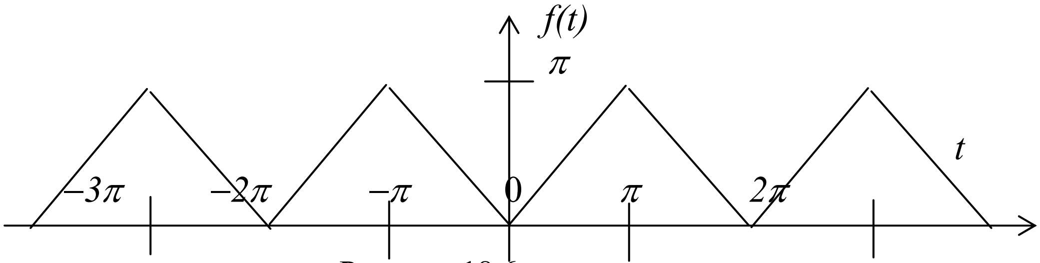


Рисунок 18.6

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi tdt=\frac{2}{\pi}\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{1}{\pi}\left(\pi^2-0\right)=\frac{\pi^2}{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)d\cos ntdt=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos ntdt=\left|\begin{matrix} U=t; & dV=\cos ntdt \\ dU=dt; & V=\dfrac{1}{n}\sin nt \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nt\right]\Bigg|_0^\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{1}{n}\sin nt\,dt=\frac{2}{\pi n^2}\cos nt\Bigg|_0^\pi=\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos n\pi-\cos nt0\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & n=2k-1,\ k=1,2,3,... \\ 0, & n=2k\end{cases}$$

$$b_n=0$$

$$f(t)=t=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\right)\cos(2k-1)t=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2}+\frac{\cos 3t}{3^2}+\frac{\cos 5t}{5^2}+...\right).$$

Чтобы разложить ту же функцию $f(t)=t$ на интервале $(0,\pi)$ в ряд синусов, нужно продолжить эту функцию нечетным, периодическим образом (рисунок 18.7.).

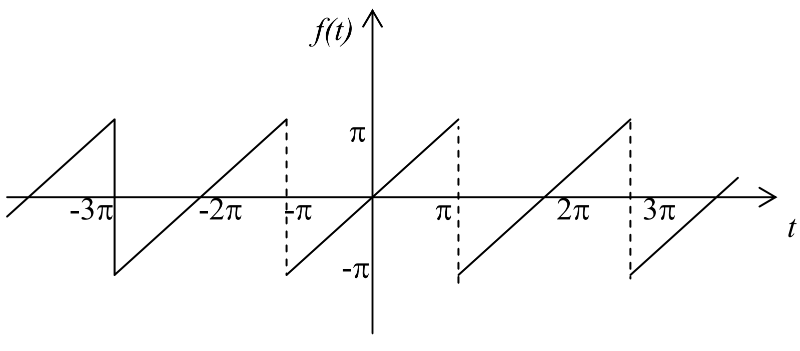


Рисунок 18.7

$\grave{a}_0 = \grave{a}_n = 0.$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin\ n\ t\ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin\ n\ t\ dt = \frac{2}{\pi}(-\frac{t}{n}\cos nt + \frac{1}{n^2}\sin nt)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\pi\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

$$f(t) = t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\ nt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin\ nt = 2(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \frac{\sin 4t}{4} + ...).$$

Еще раз обратим внимание на то, что указанные в примерах функции раскладываются в соответствующий ряд Фурье только в указанных интервалах. За пределами интервалов этого разложения нет.

Если интервалы заданы в виде $\left(-T/_2, T/_2\right)$ или $(-l, l)$, то разложение в ряд Фурье производят по приведенным выше формулам.

Пример 17. Найти косинус-преобразование Фурье и написать интеграл Фурье для функции: $f(t) = \begin{cases} \cos\ 2t, & |t| \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0\ , & |t| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Решение. Построим график функции (рисунок 18.8.)

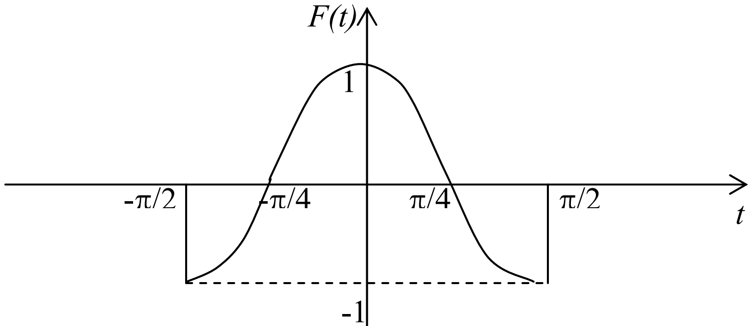


Рисунок 18.8

Проверим функцию *f(t)* на абсолютную интегрируемость:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2t dt = \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\sin\pi - \sin\left(-\pi\right)\right) = 0.$$

Несобственный интеграл существует, значит *f(t)* абсолютно интегрируема на всей числовой оси.

Функция *f(t)* четная. Найдем косинус-преобразование :

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau d\tau = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi/2}\cos 2\tau\cos\omega\tau d\tau + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\pi/2}^{\infty} 0\cdot\cos\omega\tau d\tau =$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left[\cos\ \tau(2-\omega)+\cos\ \tau(2+\omega)\right]d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\frac{1}{2-\omega}\sin\tau(2-\omega)+\frac{1}{2+\omega}\sin\tau(2+\omega)\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2-\omega}\sin(\pi-\frac{\pi\omega}{2})+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2+\omega}\sin(\pi+\frac{\pi\omega}{2})=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2-\omega}\sin\frac{\pi\omega}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2+\omega}\sin\frac{\pi\omega}{2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\frac{\pi\omega}{2}\left(\frac{1}{2-\omega}-\frac{1}{2+\omega}\right)=\frac{2\omega\sin\frac{\pi\omega}{2}}{\sqrt{2\pi}(4-\omega^2)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\omega}{4-\omega^2}\cdot\sin\frac{\pi\omega}{2}.$$

Интеграл Фурье для функции:

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F(\omega)\cos\omega t d\omega=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\omega}{4-\omega^2}\ \sin\frac{\pi\omega}{2}\cos\omega t d\alpha\omega=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega}{4-\omega^2}\ \sin\frac{\pi\omega}{2}\cos\omega t d\omega\ .$$

18.4. Задания на контрольную работу

Задание 1. Исследовать на сходимость числовые ряды (для знакочередующихся рядов провести исследование на абсолютную и условную сходимость).

1.

а) $\frac{1}{3}+\frac{3}{6}+\frac{5}{9}+\frac{7}{12}+\dots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n-1}}{\sqrt{n^5+2n^2-3}}.$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3-n}{2^n(n+1)!}.$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{n^2}.$

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln^3 n}}{n}.$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt[3]{6n^2-7n+2}}{\sqrt[4]{2n^5+3n^2-4}}.$

2.

а) $\frac{2}{6}+\frac{6}{9}+\frac{10}{12}+\frac{14}{15}+\dots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{9n-4}}{\sqrt[3]{5n^5+9n-7}}.$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(4n^2-1)}{(n+1)!}.$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n-3}{7n+1}\right)^{n^2}.$

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\ln^2 n}}{n}$.

е) $\sum(-1)^{n+1}\frac{3n^2-4n+5}{\sqrt{6n^5+7n^3-8}}$.

3.

а) $\frac{6}{2}+\frac{8}{7}+\frac{10}{12}+\frac{12}{17}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{(2n+1)\sqrt{n+3}}$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}(4n^4+2n^2-1)}{(3n)!}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+8}\right)^{n^2}$.

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\ln^2 n}}{n}$.

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt[3]{3n^8+6n^5-2}}{4n^3-2n^2+5}$

4.

а) $\frac{1}{10}+\frac{7}{14}+\frac{13}{18}+\frac{20}{22}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^5+4}}$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n^2-2n+1)3^n}{(3n-1)!}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n+7}{9n-3}\right)^{n}$.

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^9 n}$.

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n^2-n+7}{\sqrt[3]{n^7+2n^3-9n}}$.

5.

а) $\frac{6}{4}+\frac{9}{10}+\frac{12}{16}+\frac{15}{22}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^5+4}\cdot(n-1)}$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!(2n^3-1)}{10^n}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-3}{5n+1}\right)^{n^2}$.

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{\ln^6 n}}{n}$.

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt[3]{8n^5-2n^2+3}}{7n^3+8n-5}$.

6.

а) $\frac{6}{9}+\frac{9}{11}+\frac{12}{13}+\frac{15}{15}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n^{10}+1}}{(5n^3+4n)\sqrt{n}}$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)!11^n}{(3n+1)!(6n^3+n)}$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+12}{4n+9}\right)^{n^2}$.

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln^4 n}}$.

е)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt[3]{4n^2-3n+6}}{\sqrt{3n^3+2n^2-7}}.$$

7.

а) $\frac{2}{8}+\frac{5}{10}+\frac{8}{12}+\frac{11}{14}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{9n+1}}{\sqrt{n^5+n^3}}.$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(6n)!(3n^5-n^3)}{21^n}.$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+2}{6n-9}\right)^{n^2}.$

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\ln^7 n}}{n}.$

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{3n^3+4n^2-5}}{\sqrt[3]{5n^5-3n+7}}.$

8.

а) $\frac{2}{14}+\frac{11}{19}+\frac{20}{24}+\frac{29}{29}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+4}{(2n+1)\sqrt{n^3+1}}.$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(3n-1)!}{(3n+1)!(2n^4-3n^2)}.$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n-2}{7n+3}\right)^{n^2}.$

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{\ln^7 n}}{n}.$

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{7n^3+9n-6}}{3n^4+5n^2+7}$

9.

а) $\frac{3}{9}+\frac{11}{16}+\frac{19}{23}+\frac{27}{30}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4n^2}{\sqrt{n^9+36}}.$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{41^n(5n^7+n^2-1)}{(4n-3)!}.$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8n-2}{8n+3}\right)^{n^2}.$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^4(n+1)}.$

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{7n^5-3n+8}}{2n^4+9n^3-2n^2}.$

10.

а) $\frac{1}{7}+\frac{4}{11}+\frac{7}{15}+\frac{10}{19}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+2}{\sqrt[3]{n^9+3n^2}}.$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)!5^n}{(3n)!(2n^5-3n+1)}.$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+9}{5n-9}\right)^{n^2}.$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^4(n+1)}{n+1}.$

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4n^3+6n-8}{\sqrt[3]{3n^{10}-2n^3+n^2}}.$

Задание 2. Найти область сходимости рядов:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^4+1)^2}(x-3)^n$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n(x^2-6x+13)^n}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3}{2n+3}(x+3)^{2n}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n^2}\sin^{3n}x$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)5^n}(x-4)^n$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n 3^{\frac{n}{x-1}}$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}\left(x^2-4x+6\right)^n$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(n+3)^2 2^{n-1}}(x+7)^n$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}8^n n^2\sin^{3n}x$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}(x-2)^{2n}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n(x^2-5x+10)^n}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{n+8}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}\sin^{2n}(2x)$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(x+e)}{n+e}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(2n-1)4^n}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n^2+1)}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$. б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\operatorname{tg}^{2n}x$.

Задание 3. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

1. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$. 2. $\int_0^{0,1}\sin(100x^2)dx$.

3. $\int_0^{0,1}\frac{1-e^{-2x}}{x}dx$. 4. $\int_0^{1}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx$.

5. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$. 6. $\int_0^{0,2}\sin(25x^2)dx$.

7. $\int_0^{0,5}\cos(4x^2)dx$. 8. $\int_0^{0,2}\frac{1-e^{-x}}{x}dx$.

9. $\int\limits_0^{0,4} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}dx$.

10. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$.

Задание 4. С помощью рядов решить дифференциальное уравнение. Представить решение в виде пяти членов ряда.

1. $y''-2x\sqrt{y}=0,$ $y(0)=4, y'(0)=2.$

2. $y''-(3x+2)\sqrt{y}=0,$ $y(0)=4, y'(0)=1.$

3. $y'-y^3=x^2,$ $y(1)=1$.

4. $y''-2(y')^3-(3x+2)y=0,$ $y(0)=1, y'(0)=2.$

5. $y''=\frac{x^2+4}{y},$ $y(0)=1, y'(0)=2.$

6. $y'=x^2y+y^3$, $y(0)=2$.

7. $y''=(y')^2+xy$, $y(0)=4$, $y'(0)=-2$.

8. $y''=4x^2-\frac{2}{\sqrt{y}},$ $y(0)=4, y'(0)=1.$

9. $y''=(2x-1)y-1,$ $y(0)=2, y'(0)=-2.$

10. $y'=x-\frac{1}{y},$ $y(0)=2.$

Задание 5. Разложить в ряд Фурье функции *f(x)*, заданные на интервале.

1. $f(x)=|x+2|$; $(-\pi;\pi)$.

2. $f(x)=x^2+1$; $(-\pi;\pi)$.

3. $f(x)=e^{ax}$; $(-l;l)$.

4. $f(x)=5x-1$; $(-5;5)$.

5. $f(x)=3-|x|$; $(-5;5)$.

6. $f(x)=x-|x|$; $(-1;1)$.

7. $f(x)=|1-x|$; $(-\pi;\pi)$.

8. $f(x)=3-x$; $(-\pi;\pi)$.

9. $f(x)=x-1$; $(-1;1)$.

10. $f(x)=x^2+2$; $(-2;2)$.

Задание 6. Представить интегралом Фурье.

1. $f(x)=\begin{cases} x^2, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} |x+2|, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & |x|\le \pi, \\ 0, & |x|>\pi. \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} 3-|x|, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} |x|, & |x|\le 2, \\ 0, & |x|>2. \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} e^{-3x}, & 0\le x\le 10, \\ 0, & x>10, x<0. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi-x}{2}, & |x|\le \pi, \\ 0, & |x|>\pi. \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} 1-|x|, & 0\le x\le 1, \\ 0, & x>1, x<0. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} |1-x|, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} x-1, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$

19. Линейное программирование

19.1. Введение в математическое программирование

В своей деятельности человеку приходится иметь дело с многовариантными задачами. Из различных вариантов приходится отыскивать наилучшие. При этом нужно учитывать ограничения, накладываемые на природные, экономические и технологические возможности. Решение таких задач «на глазок» связано с большим риском громадных потерь. В этих случаях возникает необходимость применить математические методы и вычислительную технику.

Математическое программирование – область математики, изучающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, то есть задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Функцию, экстремальное значение которой нужно найти в условиях ограниченных возможностей, называют *целевой*.

Ограниченные возможности формализуются в виде *системы ограничений*.

Все это составляет *математическую модель математического программирования,* которая включает в себя:.

1. Совокупность неизвестных величин $X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n\right)$, действуя на которые систему можно совершенствовать. Это план задачи.

2. Целевая функция $F = f\left(X\right) = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$.

Экстремальное значение $\left(\min, \max\right)$ целевой функции позволяет выбрать наилучший вариант решения задачи. Целевой функцией может быть прибыль, расходы, объем продукции, отходы, затраты производства, время технологического процесса и т.д..

3. Система ограничений (условий), налагаемых на неизвестные величины. Такими ограничениями могут быть: материальные, финансовые и трудовые ресурсы, возможности технического, технологического и, вообще, научного потенциала. Математические ограничения выражаются уравнениями и неравенствами.

Задача математического программирования формулируется так: найти такие значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (оптимальный план $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$), которые обеспечивают экстремальное значение $\max\left(\min\right)$ целевой функции

$$\max(\min) F = f\left(X\right) = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \qquad (19.1)$$

при ограничениях (условиях)

$$g_i\left(X\right) = g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n\right) \{\le, =, \ge\} b_i, \quad i = 1, \ldots, m \qquad (19.2)$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,...,n. \qquad (19.3)$$

В зависимости от вида функций цели и ограничений задачи математического программирования делятся на линейные и нелинейные.

Если функции f и g_i являются линейными, то задача (19.1)-(19.3) относится к *линейному программированию*. Если хотя бы одна из функций f или g_i нелинейная, задача относится к *нелинейному программированию*.

Если задача линейного программирования допускает разбиение процесса ее решения на отдельные этапы (шаги), то задача относится к *динамическому программированию*.

Если параметры, входящие в функции (19.1), (19.2), являются случайными, то *программирование стохастическое*. Оно занимается исследованием случайных процессов.

Если при решении задачи выбор оптимального решения производится в условиях риска или неопределенности, то задача относится к *теории игр*.

19.2. Краткие сведения из теории линейного программирования

В общем виде *задача линейного программирования* может быть сформулирована следующим образом:

найти такие значения переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, которые доставляют максимум (минимум) целевой функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \qquad (19.4)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \{\leq, =, \geq\} b_i, \quad (i = 1,...,m), \qquad (19.5)$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,...,n, \qquad (19.6)$$

где c_j, a_{ij}, b_i ($i = 1,2,...,m$; $j = 1,2,...,n$) – заданные числа.

Задача линейного программирования называется *канонической*, если ограничения задачи (19.5) состоят из системы уравнений и условий неотрицательности всех *n* переменных.

Если в ограничениях (19.5) находятся неравенства– задача называется ***симметричной***.

Задачу на $\max F$ можно преобразовать в задачу на $\min F$ умножением целевой функции на -1.

Алгоритм составления модели задачи линейного программирования, заданной в текстовой форме:

1. ввести обозначения для неизвестных задачи;
2. проанализировать и зафиксировать ограничения для них;
3. составить систему ограничений задачи;
4. составить целевую функцию и установить вид экстремума.

Рассмотрим два метода решения задач линейного программирования: геометрический метод и аналитический метод, который называется симплекс-метод.

19.2.1 . Геометрический метод решения задачи линейного программирования

Геометрический метод решения задач математического программирования применяется для решения задач, имеющих две переменные x_1 и x_2 как в целевой функции, так и в функциях системы ограничений. Этот метод дает возможность наглядно представить структуру математической модели, выявить ее особенности, приводит к идее решения самой задачи, делает геометрически наглядными способы решения и их практическую реализацию, открывает пути исследования сложных задач.

Для этого нужно представить геометрическую интерпретацию математической модели задачи рассматриваемого программирования, то есть представить элементы этой модели в виде геометрических фигур.

В математической модели присутствуют функции двух переменных: $f = f(x_1,x_2)-$ целевая функция и $g_i(X)=g_i(x_1,x_2),\ i=1,...,m$ – функции в системе ограничений. Каждая из этих функций геометрически представляется в виде поверхности: линейные функции–плоскостями, функции второго порядка– кривыми поверхностями второго порядка и т.д..

Обычно все построения и решение задач математического программирования геометрическим способом производят на плоскости. Приводится достаточно несложный план решения задачи, но при этом отсутствует объяснение этого плана. Представление этих задач в трехмерном пространстве приводит к четкому пониманию сущности решения, но при этом нужно произвести непростые построения.

В пособии приведены обе геометрические модели. Они дополняют друг друга. Точнее, трехмерная модель объясняет сущность решения задачи, которую практически нужно решить на плоскости.

Решение задач математического программиорвания геометрическим методом в трехмерном пространстве является новацией авторов раздела.

Рассмотрим решение задачи линейного программирования геометрическим методом на следующей модели:

$$\max(\min)F = c_1x_1 + c_2x_2 \quad , \tag{19.7}$$

$$\text{При условии} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \le b_4, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 \le b_5, \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{19.8}$$

Найти такие решения (x_1, x_2), которые обеспечивали бы максимальное (минимальное) значение целевой функции (19.7) при соблюдении условий ограничительной системы неравенств (19.8).

Представим геометрическую интерпретацию данной модели. Целевая функция (19.7) есть плоскость, проходящая через начало координат. При пересечении с координатной плоскостью $F = 0$ она образует прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$

Ограничительная система неравенств (19.8) представляет собой объемное тело, ограниченное боковой поверхностью прямой призмы, в сечении которой плоскостью $F = 0$ находится пятиугольник ABCDE. Эти геометрические фигуры представлены на рисунок 19.1.

Если плоскость (19.7) не вызывает сомнения, то тело ограниченное боковой поверхностью прямой призмы (19.8) требует пояснений.

Если каждое неравенство, входящее в (19.8), преобразовать в равенство, то геометрически оно представляется вертикальной плоскостью (параллельной координате F), т.к. в уравнении отсутствует переменная F. При пересечении с координатной плоскостью $F = 0$ имеем прямую, аналитическое выражение которой совпадает с аналитическим выражением для нашей вертикальной плоскости.

При возвращении к неравенству меняется и геометрическое представление. Рассмотренная ранее вертикальная плоскость делит трехмерное пространство на два полупространства. Одно из них есть геометрическое место (множество) точек, каждая из которых своими координатами удовлетворяет неравенству, а точки другого полупространства– не удовлетворяют.

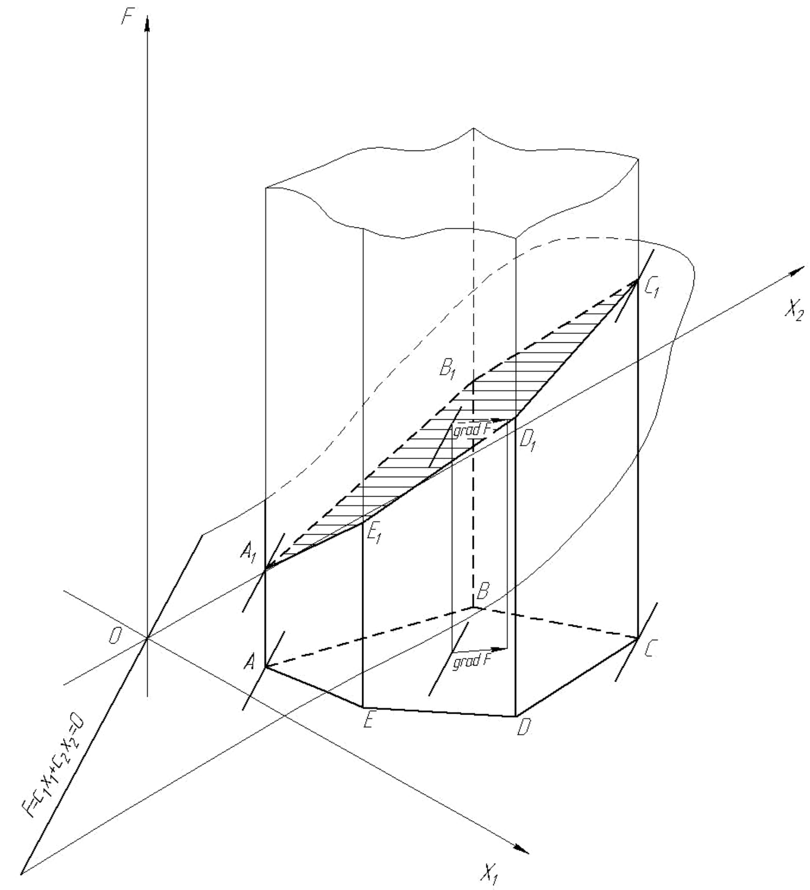


Рисунок 19.1

Исследуя, таким образом, каждое неравенство (19.8) приходим к выводу, что система неравенств образует бесконечное тело, ограниченное боковой поверхностью прямой призмы, в сечении которой плоскостью $F=0$ лежит пятиугольник ABCDE.

При пересечении тела, ограниченного боковой поверхностью призмы, наклонной плоскостью $F=c_1x_1+c_2x_2$ получается наклонный пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$. Иными словами, плоскость *F,*ограниченная пятиугольником $A_1B_1C_1D_1E_1$ есть геометрическое место точек одновременно принадлежащих и плоскости $F=c_1x_1+c_2x_2$, т.е. целевой функции и рассмотренному выше телу, т.е. системе ограничений (19.8).

Задача линейного программирования– отыскание решения (x_1,x_2), которые обеспечивали бы $\max(\min)F$ (19.7) при соблюдении ограничений (19.8) в геометрической интерпретации будет сформулирована так: найти такие точки (множество точек) на плоскости x_1Ox_2, которые обеспечивали бы $\max(\min)F$ на наклонной плоскости, и одновременно принадлежали бы телу, ограниченному боковой поверхностью призмы. На рис.19.1 это точки A и C.

В точке A имеем минимум целевой функции : $\min F(x_{1A},x_{2A})=A_1A$.

В точке С имеем максимум целевой функции : $\max F(x_{1C}, x_{2C}) = C_1C$.

На рис.19.1 наглядно видно решение рассматриваемой задачи. Но решать ее подобным образом (строить геометрические тела в трехмерном пространстве) достаточно не просто. Реально задачу линейного программирования геометрическим методом решают на плоскости x_1Ox_2.

Прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, проведенная на плоскости x_1Ox_2 одновременно является линией уровня плоскости $F = c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, т.к. все точки на этой линии имеют равные аппликаты в данном случае равные нулю. Одновременно эта линия показывает значение целевой функции равной нулю. Изменение местоположения линии уровня показывает изменение значения целевой функции.

Нас интересует увеличение значения F до максимально возможной величины, т.е. перемещение линии уровня по наклонной плоскости подальше от начала координат. Из теории скалярного поля известно, что если $F = F(x_1, x_2)$– скалярная функция, как в нашем случае, то градиент скалярного поля F $\overline{grad}\ F = \frac{\partial F}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\bar{j}$ или $\overline{grad}\ F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right)$ укажет направление наинтенсивнейшего изменения (наибольшего возрастании) этой функции в точке, где он определен. Вектор $\overline{grad}\ F$ всегда перпендикулярен линиям уровня.

В нашем случае: $F = c_1x_1 + c_2x_2$; $\overline{grad}\ F = \frac{\partial F}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\bar{j} = c_1\bar{i} + c_2\bar{j}$.

Вектор $\overline{grad}\,F$ стационарен, т.е. он не изменяется ни по модулю, ни по направлению в любой точке плоскости. Это важное обстоятельство показывает, что увеличение целевой функции происходит только в одном направлении. С другой стороны это значит: чтобы увеличить значение целевой функции от $F = 0$ и более линию уровня– прямую $F = 0$ нужно перемещать по плоскости параллельно самой себе в направлении $\overline{grad}\ F$.

На рис. 19.1 показан процесс перемещения прямой $F = 0$ параллельно самой себе по плоскости в направлении $\overline{grad}\,F$. При пересечении с боковой поверхностью прямой призмы в точке A_1 эта прямая покажет значение целевой функции $\min F = A_1A$, а двигаясь дальше при пересечении с поверхностью призмы в точке C_1– $\max F = C_1C$.

Если теперь всю эту задачу и динамику исследования спроектировать на плоскость x_1Ox_2, то получим необходимый метод решения.

Система ограничений (19.8) будет иметь такое же аналитическое выражение как и прежде, но геометрически будет выражаться многоугольником ABCDE (рис.19.1 и 19.2).

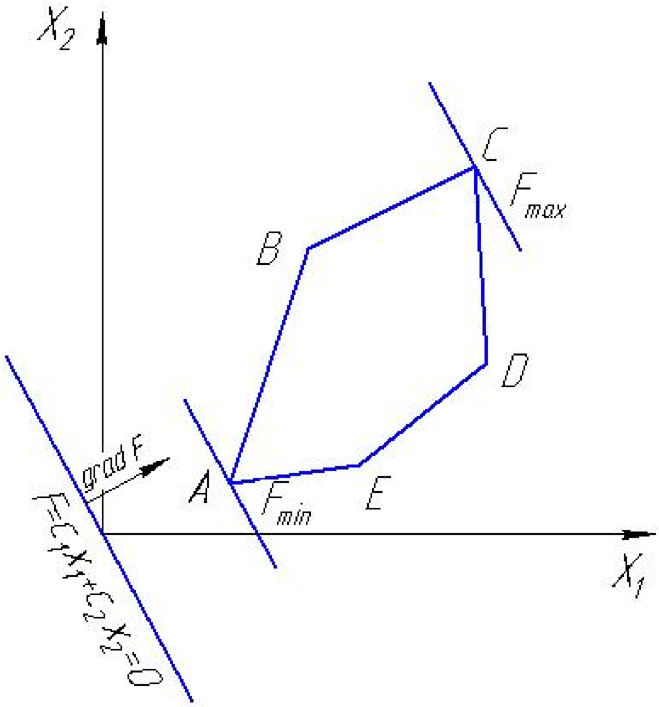


Рисунок 19.2

Вектор $\overline{grad}\ F = \frac{\partial F}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\bar{j}$ остается неизменным.

Параллельное перемещение прямых– линий уровня по плоскости F проектируется в такое же параллельное перемещение прямой $F = 0$ но теперь уже на плоскости x_1Ox_2 в направлении вектора $\overline{grad}\,F$. Пересечение этих прямых с проекцией многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$, каковым является многоугольник ABCDE, в точках A и C даст решение задачи. Подставив координаты x_1, x_2 этих точек в формулу целевой функции, определяют $\min F$ и $\max F$.

Сформулируем *алгоритм геометрического метода* решения задачи линейного программирования (рис.19.2).

1. Строим область допустимых решений для системы ограничений задачи:

a) Строим прямые линии, полученные из системы ограничений (19.8) путем замены неравенств равенствами;

b) Находим полуплоскости, определяемые системой ограничений (19.8);

с) Строим многоугольник решений системы ограничений (19.8).

2. Строим вектор градиента целевой функции $\overline{grad}\ F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right)$ (он указывает направление возрастания целевой функции). Вектор $\overline{grad}\ F$ – свободный вектор, т.е. его можно построить в любой точке, в том числе и в начале координат.

3. Проводим линию уровня $F_0 = 0$ перпендикулярно вектору $\overline{grad}\ F$.

4. Перемещаем линию уровня параллельно самой себе в направлении вектора $\overline{grad}\ F$.

Перемещение линии уровня производится до тех пор, пока она не коснется с областью допустимых решений. Точки касания определяют решение задачи, т.к. являются точками экстремума.

5. Находим координаты указанных точек экстремума и вычисляем значение целевой функции в них.

Система ограничений (19.8)– область допустимых решений задачи линейного программирования может быть представлена не только многоугольником решений. На рисунке 19.3. представлены возможные варианты этой области: выпуклый многоугольник (а, б), неограниченная выпуклая многоугольная область (в), единственная точка (г), прямая линия (д), отрезок прямой (е), луч (ж), пустое множество (з).

В результате и решения задачи линейного программирования имеют разные варианты.

Если окажется, что линия уровня параллельна одной из сторон области допустимых решений (рисунок 19.3,б), то экстремум F достигается во всех точках этой стороны, а задача будет иметь бесконечное множество решений. Говорят, что такая задача имеет *альтернативный оптимум*, и ее решение находят по формуле

$$x^* = (1-t)x_1 + t \cdot x_2,$$

где $0 \le t \le 1$, x_1, x_2 – оптимальные решения в угловых точках.

Если область допустимых решений неограниченна по направлению вектора $\overline{grad}\ F$ (рисунок 19.3,в), то целевая функция F неограниченна сверху в этой области и принимает $\max F = +\infty$.

Если область допустимых решений неограниченна в направлении противоположном вектору $\overline{grad}\ F$, то $\min F = -\infty$.

Если область допустимых решений– пустое множество (рисунок 19.3, з), то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

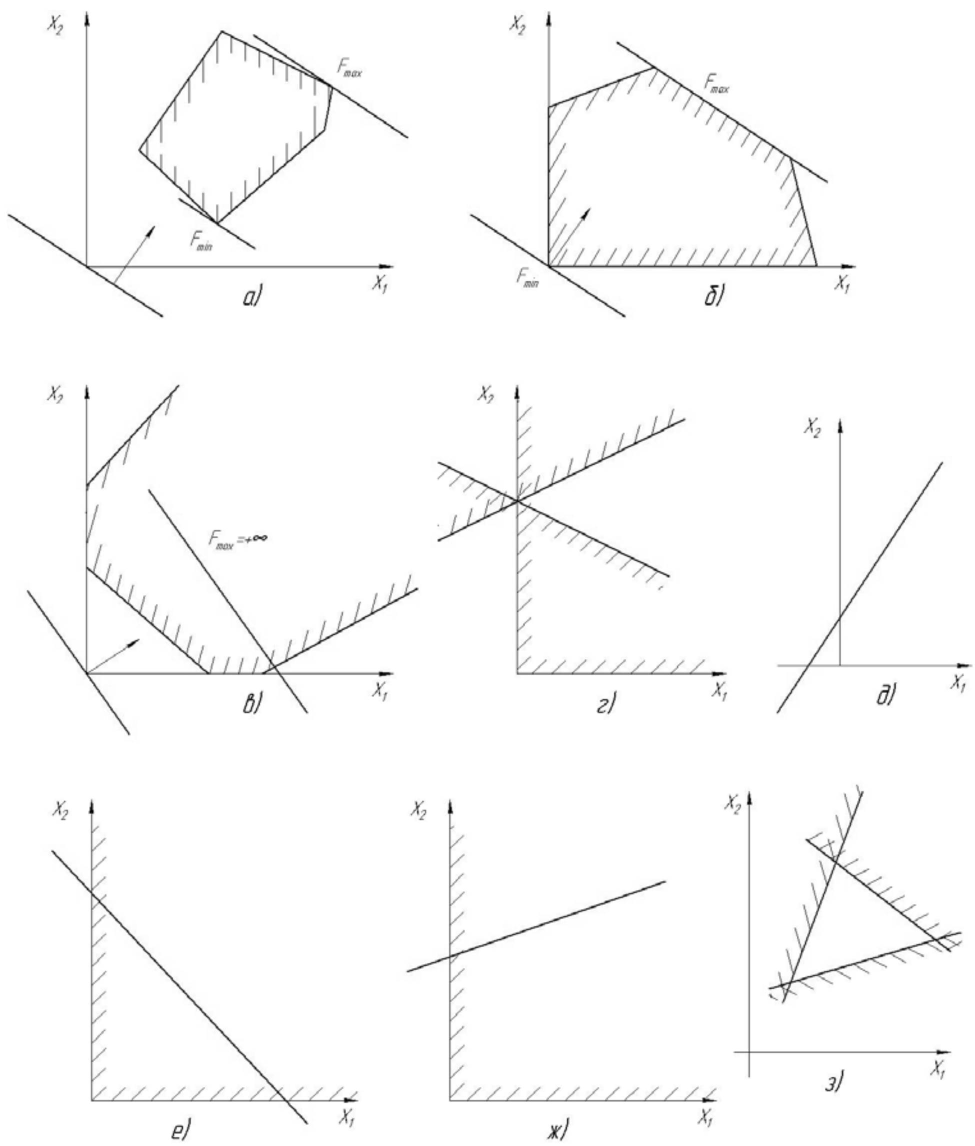


Рисунок 19.3

Пример 1. Найти такие значения неизвестных, которые доставляют максимум функции

$$F = -x_1 + x_2 \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решить задачу линейного программирования геометрическим методом.

*Решение***.**

1. Находим допустимую область.

Каждому неравенству модели соответствует полуплоскость. Для графического изображения полуплоскостей строим их граничные прямые по двум произвольно выбранным точкам. Для этого задаем одну из переменных произвольно, а другую вычисляем из соответствующего уравнения.

Уравнения граничных прямых:

1) $2x_1 - x_2 = -2$; (l_1)
если $x_1 = 0$, то $x_2 = 2$;
если $x_2 = 0$, то $x_1 = -1$.

2) $x_1 - 2x_2 = 2$; (l_2)
если $x_1 = 0$, то $x_2 = -1$;
если $x_2 = 0$, то $x_1 = 2$.

3) $x_1 + x_2 = 5$; (l_3)
если $x_1 = 0$, то $x_2 = 5$;
если $x_2 = 0$, то $x_1 = 5$.

Строим прямые по найденным точкам в выбранной системе координат (рисунок 19.4). Масштабы на осях выбираем, исходя из удобства построения.

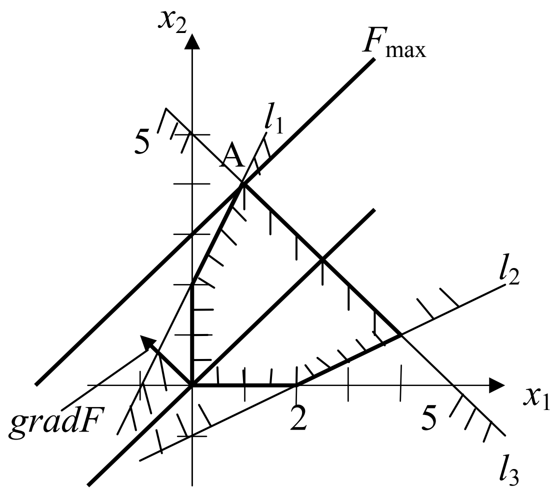


Рисунок 19.4

Чтобы определить полуплоскость, соответствующую каждому неравенству, подставим в это неравенство пробную точку, например, точку (0;0). Получим:

$$\begin{cases} 2\cdot 0 - 0 \ge -2, \\ 0 - 2\cdot 0 \le 2, \\ 0 + 0 \le 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \ge -2, \\ 0 \le 2, \\ 0 \le 5. \end{cases}$$

Все неравенства верны. Это означает, что каждому неравенству соответствует полуплоскость, содержащая точку (0;0). На чертеже эти полуплоскости отмечены штриховками.

Общая часть всех полуплоскостей, с учетом условий неотрицательности $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$, образует замкнутый выпуклый многоугольник. В данной задаче это пятиугольник, отмеченный на чертеже штриховкой по краям.

Множество внутренних и граничных точек многоугольника соответствует множеству всех допустимых планов. Опорные планы находятся в вершинах многоугольника, среди них содержится оптимальный.

Для нахождения оптимального плана обратимся к целевой функции

$$F = -x_1 + x_2.$$

На графике целевая функция изображается с помощью линий уровня: $F = C\ (const)$.

Придавая постоянной C различные значения, получим множество линий уровня $-x_1 + x_2 = C$

Это семейство параллельных прямых, перпендикулярных к вектору $\overline{gradF} = (-1;1)$. Координаты вектора равны коэффициентам при неизвестных в целевой функции F.

Построим нормальный вектор $\overline{gradF}$, и перпендикулярно к нему через точку (0;0) проведем прямую. Уравнение этой прямой :

$$-x_1 + x_2 = 0.$$

Если эту прямую перемещать параллельно самой себе в направлении вектора $\overline{gradF}$, то получим множество линий уровня, на которых значение целевой функции F возрастает.

Своего максимального значения F достигает на прямой, проходящей через точку А. Значение функции F, вычисленное в точке А, будет наибольшем для данной области, т.к. при дальнейшем перемещении линии уровня не будут иметь общих точек с областью допустимых планов.

Замечание. Для построения вектора $\overline{gradF}$ описанным выше способом нужно, чтобы по осям координат Оx_1 и Оx_2 был выбран одинаковый масштаб. Если это условие не соблюдено, то нужно взять, одну из линий уровня целевой функции F ,например $-x_1 + x_2 = 0$ и построить ее по двум выбранным точкам, например (0;0) и (2; 2). Далее следует провести линию уровня через эти точки и перпендикулярно к ней построить вектор $gradF$. Линию уровня перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора $gradF$ до тех пор, пока позволяет область допустимых планов, т.е. до точки А.

Найдем координаты точки А, заметив, что она лежит на пересечении прямых (l_1) и (l_3). Решим систему уравнений:

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 = -2 \\ x_1 + x_2 = 5\end{cases}, \qquad \begin{cases}x_1 = 1 \\ x_2 = 4\end{cases}.$$

Координаты точки А (1;4) соответствуют оптимальному плану. Подставляя найденные значения x_1 и x_2 в целевую функцию, получим максимальное значение целевой функции:

$F_{\max} = -1 + 4 = 3$.

Итак, $F_{\max} = 3$ при $x_1 = 1$; $x_2 = 4$.

19.2.2. Симплекс-метод

Симплекс-метод (аналитический метод) – самый общий метод решения задач линейного программирования. Его еще называют «*методом последовательного улучшения плана*». При его использовании задача линейного программирования должна быть приведена к каноническому виду. Если условие (19.5) является системой неравенств со знаком ≤ (симметричная задача), то для приведения задачи к каноническому виду (знак ≤ преобразовать в знак =) в левых частях каждого неравенства необходимо добавить по дополнительной положительной переменной $x_{n+1},..., x_{n+m}$.

Тогда задача (19.4) – (19.6) примет следующий вид: требуется найти такие значения переменных $x_1, x_2,..., x_n$, которые доставляют максимум (минимум) целевой функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,, \qquad (19.9)$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \qquad (19.10)$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0,..., \; x_{n+m} \geq 0. \qquad (19.11)$$

Сущность симплекс-метода заключается в следующем.

Известно, что неотрицательные решения системы уравнений-ограничений образуют выпуклое множество, причем допустимые базисные решения являются его угловыми точками, или опорными планами.

Симплекс-метод осуществляет целенаправленный перебор опорных планов так, что на каждом следующем опорном плане значение целевой функции F улучшается. Если оптимальный план существует, то он будет достигнут.

Алгоритм симплекс-метода

1. Математическая модель задачи (19.9) -(19.11) должна быть канонической. Если она неканоническая, то ее надо привести к каноническому виду.

2. Составить симплекс-таблицу и выписать начальный план.

Все строки первой таблицы, за исключением последней заполняются по данным системы ограничений (19.10) (это расширенная матрица системы ограничений (19.10)). При необходимости некоторые уравнения системы ограничений следует умножить на (–1) (чтобы все свободные члены уравнений были неотрицательными).

Последнюю строку, которую назовем *индексной*, заполняем коэффициентами целевой функции (19.9), представленной в виде уравнения

$$F - c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n = c_0 \text{ или } F - \sum_{j=1}^{n} c_jx_j = c_0 .$$

Заполним первую симплекс-таблицу (таблица 19.1).

Таблица 19.1

Базисные неизвестные	x_1	x_2	x_3	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	x_{n+3}	…	x_{n+m}	Свободные члены
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}	1	0	0	…	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}	0	1	0	…	0	b_2
x_{n+3}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{3n}	0	0	1	…	0	b_3
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	….
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mn}	0	0	0	…	1	b_m
F	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	…	$-c_n$	0	0	0	…	0	c_0

Допустимое (все члены решения положительные) *базисное* (свободные члены равны нулю) *решение системы* (19.10) является начальным опорным планом: $(0,0,0,\ldots,0,b_1,b_2,b_3,\ldots,b_m)$.

3. Проверить полученный план на оптимальность по индексной строке.

Если все $c_j \geq 0$, то план оптимальный и $F = c_0$.

4. Если хотя бы одна $c_j \leq 0$, то либо устанавливают неразрешимость задачи, либо переходят к новому опорному плану. Здесь возможны случаи:

а) если хотя бы одна $c_j \leq 0$, но при соответствующей переменной x_j нет ни одного положительного коэффициента a_{ij}

($i = 1, 2, \ldots, m$), то целевая функция неограниченна в области допустимых решений и решение прекращается;

b) если хотя бы одна оценка отрицательна, а при соответствующей переменной x_j есть хотя бы один положительный коэффициент, то переходят к следующему опорному решению;

5. Если условие оптимальности не выполнено, то план улучшаем.

Для этого выбираем разрешающий столбец и строку:

a) *разрешающий столбец* определяется наименьшим значением из отрицательных чисел $\left(-c_j\right)$, то есть $\min\left(-c_j\right)$ и если в столбце есть хотя бы один положительный элемент;

b) *разрешающую строку* принимают ту, которой соответствует минимальное отношение свободных членов b_i к положительным элементам разрешающего столбца.

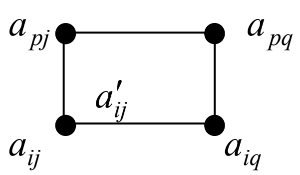
c) Элемент, стоящий на пересечении разрешающей строки и столбца, называется *разрешающим элементом*.

6. Строим вторую симплекс-таблицу.

Для этого:

a) Элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент;

b) Остальные элементы находим по правилу «прямоугольника»: пусть разрешающим элементом является элемент a_{pq}; тогда справедлива формула



$$a'_{ij} = \frac{a_{pq}a_{ij} - a_{pj}a_{iq}}{a_{pq}}. \qquad (19.12)$$

где a_{pq}, a_{ij}, a_{iq}, a_{pj} - элементы предыдущего шага, a'_{ij} - элемент нового шага, $a_{pq}a_{ij}$ – главная диагональ.

Таким образом, получается новое опорное решение, которое проверяется на оптимальность.

Если применить эту формулу к элементам разрешающего столбца, то получим нулевые значения всех элементов этого столбца кроме разрешающего элемента, который в новой таблице примет значение равное 1.

7. Записываем новый план и проверяем его на оптимальность. Если план не оптимален и необходимо перейти к новому опорному плану, то возвращаемся к пункту 5. Процесс решения задачи заканчиваем в случае получения оптимального плана, то есть выполнения пункта 3.

*Замечание***.** Если на каком либо шаге окажется, что хотя бы одна нулевая оценка свободной переменной $c_j = 0$, при всех остальных $c_j > 0$, то имеем *альтернативный оптимум*. Это случай, когда при разных оптимальных решениях значение целевой функции при этом не изменится.

Критерием альтернативного оптимума при решении задач симплекс-методом является равенство нулю хотя бы одной оценки свободной переменной ($c_j = 0$).

Если только одна оценка свободной переменной равна нулю, то решение находится по формуле, $x_{опт} = (1-t)x_{1опт} + t \cdot x_{2опт}$ где $0 \le t \le 1$, $x_{1опт}$, $x_{2опт}$ - произвольные оптимальные решения.

Если S свободных переменных имеют нулевые оценки, то оптимальное решение определяется по формуле

$$x_{опт} = \sum_{i=1}^{s} t_i x_i, \quad \text{где } \sum_{i=1}^{s} t_i = 1,\ t_i \ge 0.$$

Пример 2. Найти такие значения неизвестных, которые доставляют максимум функции

$$F = -x_1 + x_2 \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решить задачу линейного программирования симплекс–методом.

Решение.

Приведем задачу к каноническому виду:

$$F = -x_1 + x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0, \\ x_4 \ge 0,\ \ x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Составим симплекс-таблицу 1-го шага (таблица 19.2).

Таблица19.2

Базисные неизвестные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены b
x_3	-2	1	1	0	0	2
x_4	1	-2	0	1	0	2
x_5	1	1	0	0	1	5
F	1	-1	0	0	0	0

При этом начальный опорный план (допустимое базисное решение) является $x^* = (0,0,2,2,5)$; $F(x^*) = 0$.

В индексной строке c_j имеется отрицательная оценка, значит, найденное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

В качестве разрешающего столбца берем столбец при x_2, т.к. он содержит отрицательный элемент в индексной строке. Для выбора разрешающей строки рассмотрим отношения и выберем минимальное среди них

$$\min\left\{\frac{2}{1}, \frac{5}{1}\right\} = \min\{2,5\} = 2\,.$$

Выбираем строку при x_3 (минимальное отношение). Разрешающий элемент равен 1 (элемент, стоящий на пересечении строки при x_3 и столбца при x_2).

Вводим в столбец базисных переменных x_2 и выводим x_3. Составляем симплекс-таблицу 2-го шага (табл. 19.3). Разрешающую строку делим на разрешающий элемент, остальные строки пересчитываем по правилу прямоугольника (19.12):

$$a'_{41} = \frac{1\cdot 1-(-2)\cdot(-2)}{1} = -3,\; a'_{42} = \frac{1\cdot 1-1\cdot 1}{1} = 0,\; a'_{43} = \frac{1\cdot 0-(-2)\cdot 1}{1} = 2,$$

$$a'_{44} = \frac{1\cdot 1-(-2)\cdot 0}{1} = 1,\; a'_{45} = \frac{1\cdot 0-(-2)\cdot 0}{1} = 0\;, b_4 = \frac{1\cdot 2-(-2)\cdot 2}{1} = 6,$$

$$a'_{51} = \frac{1\cdot 1-(-2)\cdot 1}{1} = 3,\; a'_{52} = \frac{1\cdot 1-1\cdot 1}{1} = 0,\; a'_{53} = \frac{0\cdot 1-1\cdot 1}{1} = -1,$$

$$a'_{54} = \frac{0\cdot 1-1\cdot 0}{1} = 0,\; a'_{55} = \frac{1\cdot 1-1\cdot 0}{1} = 1\;, b_5 = \frac{5\cdot 1-1\cdot 2}{1} = 3,$$

$$c_1 = \frac{1\cdot 1-(-2)\cdot(-1)}{1} = -1,\; c_2 = \frac{-1\cdot 1-1\cdot(-1)}{1} = 0,\; c_3 = \frac{0\cdot 1-(-1)\cdot 1}{1} = 1,$$

$$c_4 = \frac{0\cdot 1-(-1)\cdot 0}{1} = 0,\; c_5 = \frac{0\cdot 1-(-1)\cdot 0}{1} = 0\;, c_0 = \frac{0\cdot 1-(-1)\cdot 2}{1} = 2.$$

Заполняем симплекс-таблицу 19.3

Таблица 19.3

Базисные неизвестные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены b
x_2	-2	1	1	0	0	2
x_4	-3	0	2	1	0	6
x_5	3	0	-1	0	1	3
F	-1	0	1	0	0	2

Опорным решением является $x^* = (0, 2, 0, 6, 3)$; $F(x^*) = 2$.

При этом в последней строке имеется отрицательный элемент $c_1 = -1$, поэтому полученное решение можно улучшить.

Разрешающим столбцом является столбец с переменной x_1. За разрешающую строку возьмем строку при x_5 (т.к. в разрешающем столбце только один положительный коэффициент). Разрешающим элементом является $a_{51} = 3$.

Вводим в столбец базисных переменных x_1 и выводим x_5. Составляем симплекс-таблицу 3-го шага (таблица 19.4). Выполняем перерасчет всех элементов таблицы. Разрешающую строку (третью) делим на разрешающий элемент 3, остальные строки пересчитываем по правилу прямоугольника (19.12):

$$a'_{21} = \frac{-2\cdot 3 - 3\cdot(-2)}{3} = 0,\ a'_{22} = \frac{1\cdot 3 - 0\cdot(-2)}{3} = 1,$$

$$a'_{23} = \frac{1\cdot 3 - (-1)\cdot(-2)}{3} = \frac{1}{3},$$

$$a'_{24} = \frac{0\cdot 3 - 0\cdot(-2)}{3} = 0,\ a'_{25} = \frac{0\cdot 3 - 1\cdot(-2)}{3} = \frac{2}{3}\ ,b_2 = \frac{2\cdot 3 - (-2)\cdot 3}{3} = 4,$$

$$a'_{41} = \frac{(-3)\cdot 3 - 3\cdot(-3)}{3} = 0,\ a'_{42} = \frac{0\cdot 3 - 0\cdot(-3)}{3} = 0,$$

$$a'_{43} = \frac{2\cdot 3 - (-1)\cdot(-3)}{3} = 1,$$

$$a'_{44} = \frac{1\cdot 3 - (-3)\cdot 0}{3} = 1,\ a'_{45} = \frac{0\cdot 3 - (-3)\cdot 1}{3} = 1\ ,b_4 = \frac{6\cdot 3 - (-3)\cdot 3}{3} = 9,$$

$$c_1 = \frac{-1\cdot 3 - 3\cdot(-1)}{3} = 0,\ c_2 = \frac{0\cdot 3 - (-1)\cdot 0}{3} = 0,\ c_3 = \frac{1\cdot 3 - (-1)\cdot(-1)}{3} = \frac{2}{3},$$

$$c_4 = \frac{0\cdot 3 - (-1)\cdot 0}{3} = 0,\ c_5 = \frac{0\cdot 3 - (-1)\cdot 1}{3} = \frac{1}{3}\ ,c_0 = \frac{2\cdot 3 - (-1)\cdot 3}{3} = 3.$$

Таблица 19.4

Базисные неизвестные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены b
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	4
x_4	0	0	1	1	0	9
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
F	0	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3

Опорным решением является $x^* = (1,4,0,9,0)$; $F(x^*) = 3$.

Все оценки свободных переменных $c_j \geq 0$, следовательно, найденное опорное решение $x^*_{\text{опт}} = (1,4,0,9,0)$ является оптимальным, при этом $F(x^*) = 3$. Это решение совпало с решением, найденным в примере 1 графическим методом.

Замечание. При решении задач симплекс-методом количество симплекс-таблиц может быть различным. В рассмотренном решении оно равно трем.

19.3. Решение типовых задач и примеров

Задача. Для производства различных изделий А и В используются три вида сырья. На изготовление единицы изделия А требуется затратить сырья первого вида $a_1 = 12$ кг, сырья второго вида $a_2 = 4$ кг, сырья третьего вида $a_3 = 3$кг. На изготовление единицы изделия В требуется затратить сырья первого вида $b_1 = 3$ кг, сырья второго вида $b_2 = 5$ кг, сырья третьего вида $b_3 = 14$ кг.

Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве $p_1 = 264$ кг, сырьем второго вида в количестве $p_2 = 136$ кг, сырьем третьего вида в количестве $p_3 = 266$кг.

Прибыль от реализации единицы готового изделия А составит $\alpha = 6$руб., а изделия В: $\beta = 4$ руб.

Составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Решить задачу симплексным методом путем преобразования симплекс – таблиц и графическим методом.

Решение задачи симплексным методом

Оформим данные задачи в виде таблицы.

Вид сырья	Вид изделия		Запасы сырья
	A	B	
Первое	12	3	264
Второе	4	5	136
Третье	3	14	266
Доход. тыс.руб	6	4	

Обозначим: x_1 (ед) – количество изделий A;

x_2 (ед) – количество изделий B;

F (тыс.руб) – прибыль от реализации всей продукции.

Совокупность неизвестных (x_1, x_2) называется планом производства. Очевидно, должны соблюдаться условия неотрицательности:

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$$

Составим ограничения по сырью каждого вида. На изготовление x_1 единиц изделий A расходуется $12x_1$ (кг.) сырья первого вида, на изготовление x_2 единиц изделий B расходуется $3x_2$ (кг.) сырья первого вида. Полный расход сырья первого вида составит $(12x_1 + 3x_2)$ кг, и не должен превышать запасов этого сырья в количестве 264кг, т.е. $12x_1 + 3x_2 \leq 264$.

Аналогично для сырья второго вида $4x_1 + 5x_2 \leq 136$ и для сырья третьего вида $3x_1 + 14x_2 \leq 266$.

По условию задачи прибыль от реализации единицы изделия A составляет 6 тыс.руб., следовательно, прибыть от реализации всех x_1 единиц изделий A составит $6x_1$ тыс.руб., прибыль от реализации x_2 единиц изделий B составит $4x_2$ тыс.руб.

Общая прибыль от реализации всех изделий $F = 6x_1 + 4x_2$ тыс. руб.

F называется целевой функцией задачи. Ее значение должно быть максимальным, т.е. $F = 6x_1 + 4x_2 \to \max$.

Составим математическую модель задачи симметричного вида:

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 \leq 264, \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 136, \\ 3x_1 + 14x_2 \leq 266. \end{cases} \qquad (19.13)$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0.$$

$$F = 6x_1 + 4x_2 \to \max.$$

Приведем математическую модель (19.13) к каноническому виду. Это достигается введением в каждое неравенство дополнительных неотрицательных переменных: $x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$. Их экономический смысл – недоиспользованное сырье каждого вида.

Получим:

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 + x_3 = 264, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 136, \\ 3x_1 + 14x_2 + x_5 = 266. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0.$$

$$F - 6x_1 - 4x_2 = 0 \to \max .$$

Составим симплекс-таблицу 1-го шага (таблица 19.5).

Таблица 19.5

Базисные неизвестные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены b
x_3	12	3	1	0	0	264
x_4	4	5	0	1	0	136
x_5	3	14	0	0	1	266
F	-6	-4	0	0	0	0

При этом опорным решением является $x^* = (0, 0, 264, 136, 266)$; $F(x^*) = 0$.

В последней строке c_j имеются две отрицательные оценки, значит, найденное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

В качестве разрешающего столбца берем столбец при x_1, т.к. он содержит минимальный отрицательный элемент в индексной строке. Для выбора разрешающей строки рассмотрим отношения и выберем минимальное среди них

$$\min\left\{\frac{264}{12}; \frac{136}{4}; \frac{266}{3}\right\} = \min\{22; 34; 88{,}67\} = 22,$$

что указывает на первую строку. Разрешающий элемент равен 12 (элемент, стоящий на пересечении строки при x_3 и столбца при x_1).

Вводим в столбец базисных переменных x_1 и выводим x_3.

Составляем симплекс-таблицу 2-го шага (таблица 19.7). Разрешающую строку делим на разрешающий элемент, остальные строки пересчитываем по правилу прямоугольника (19.12).

Например, вычислим элемент, соответствующий элементу 266 таблицы 19.5. Для его нахождения в таблице 19.5 мысленно строим прямоугольник, у которого на концах одной диагонали стоят число 266 и разрешающий элемент, а на другой– числа 264 и 3 (таблица 19.5). Диагональ, содержащая разрешающий элемент, считается главной, а другая побочной. Из произведения элементов по главной диагонали вычитаем произведение элементов побочной диагонали и эта разность делится на разрешающий элемент:

$$\frac{266 \cdot 12 - 264 \cdot 3}{12} = 200$$

Полученное число вписываем в таблицу 19.7 на то место, где стояло число 266 в таблице 19.5.

Таблица 19.6

Базисные неизвестные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены
x_3	12	3	1	0	0	264
x_4	4	5	0	1	0	136
x_5	3	14	0	0	1	266
F	-6	-4	0	0	0	0

Подсчитаем, какое число будет стоять в таблице 19.7 вместо числа «-4» в F –строке таблицы 19.5. В таблице 19.6 показан прямоугольник, который мы должны мысленно выделить в таблице 19.5. Главная диагональ прямоугольника содержит рассматриваемый элемент «-4» и разрешающий элемент 12, а побочная диагональ – элементы 3 и «-6». В результате вычислений получим число, которое вписываем в F –строку таблицы 19.7 вместо «-4» из таблицы 19.5:

$$\frac{-4 \cdot 12 - 3 \cdot (-6)}{12} = \frac{-48 + 18}{12} = \frac{-30}{12} = \frac{-5}{2}.$$

Таблица 19.7

Базисные неизвестные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены b
x_1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	0	0	22
x_4	0	4	$-\frac{1}{3}$	1	0	48
x_5	0	$\frac{53}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	200
F	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	132

При этом опорным решением является $x^* = (22, 0, 0, 48, 200)$; $F(x^*) = 132$.

В последней строке c_j имеется отрицательная оценка, значит, найденное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

Разрешающим столбцом является столбец с переменной x_2. Для выбора разрешающей строки рассмотрим отношения и выберем минимальное среди них: $\min\left\{\frac{22}{1/4}; \frac{48}{4}; \frac{200}{53/4}\right\} = \min\{88; 12; 15{,}09\} = 12$, что указывает на вторую строку. На пересечении разрешающего столбца при x_2 и разрешающей строки при x_4 расположен разрешающий элемент 4.

Переходим к заполнению симплекс-таблицы по правилам алгоритма симплекс-метода. Получаем таблицу 19.8.

Таблица19.8

Базисные неизвестные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Свободные члены b
x_1	1	0	$\frac{5}{48}$	$-\frac{1}{16}$	0	19
x_2	0	1	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	0	12
x_5	0	0	$\frac{41}{48}$	$-\frac{53}{16}$	1	41
F	0	0	$\frac{7}{24}$	$\frac{5}{8}$	0	162

Этой таблице соответствует опорное решение: $x^* = (19,12,0,0,41)$.

Оно является оптимальным, т.к. все коэффициенты F –строки в таблице 19.8 неотрицательны. Максимальное значение целевой функции

$$F(x^*) = 162$$

Оно достигается при $x_1 = 19$; $x_2 = 12$. Дополнительные переменные при этом равны: $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 41$. Это означает, что сырье первого и второго видов используется полностью, а сырье третьего вида остается не использованным в количестве 41 кг.

Ответ. Нужно изготовить 19 изделий А и 12 изделий В, чтобы получить максимальную прибыль в размере 162 тыс.руб.

Решение задачи геометрическим методом.

Вернемся к исходной математической модели (19.13) в симметричном виде:

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 \le 264, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 136, \\ 3x_1 + 14x_2 \le 266. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$$F = 6x_1 + 4x_2 \to \max .$$

Каждому неравенству модели соответствует полуплоскость. Для графического изображения полуплоскостей строим их граничные прямые по двум произвольно выбранным точкам. Для этого задаем одну из переменных произвольно, а другую вычисляем из соответствующего уравнения.

Уравнения граничных прямых:

1) $12x_1 + 3x_2 = 264$ (l_1);
если $x_1 = 0$, то $x_2 = 88$;
если $x_2 = 0$, то $x_1 = 22$.

2) $4x_1 + 5x_2 = 136$ (l_2);
если $x_1 = 0$, то $x_2 = 27{,}2$;
если $x_2 = 0$, то $x_1 = 34$.

3) $3x_1 + 14x_2 = 266$ (l_3);
если $x_1 = 0$, то $x_2 = 19$;
если $x_2 = 0$, то $x_1 \approx 88{,}7$.

Строим прямые по найденным точкам в выбранной системе координат (рисунок 19.6). Масштабы на осях выбираем, исходя из удобств построения. (Чертеж должен быть достаточно крупным, рекомендуем выполнять его на отдельной странице).

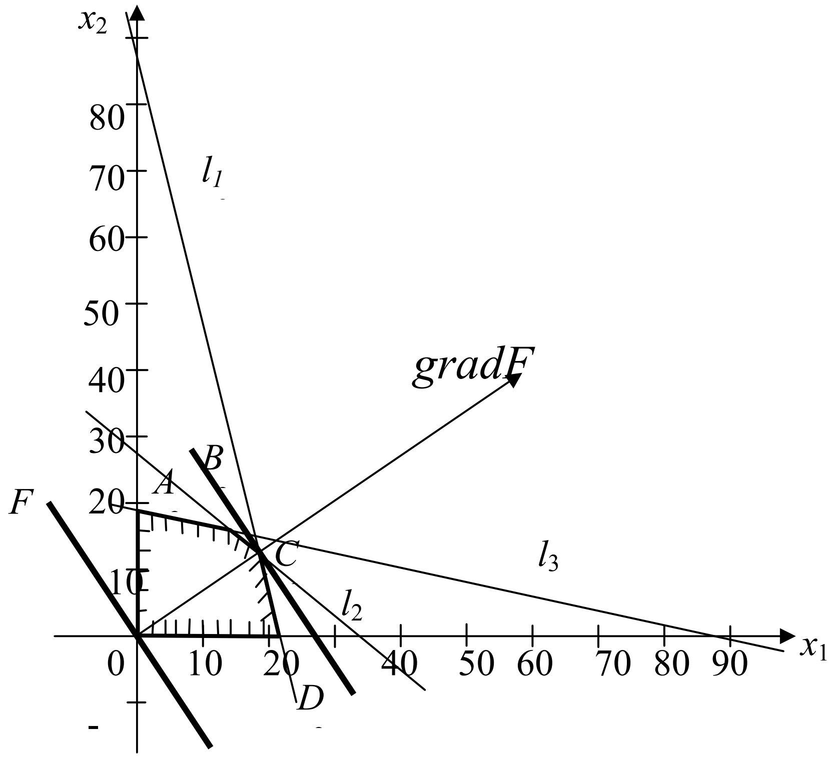


Рисунок 19.6

Чтобы определить полуплоскость, соответствующую каждому неравенству, подставим в это неравенство пробную точку (0;0). Получим:

$$\begin{cases} 12\cdot 0+3\cdot 0\le 264, \\ 4\cdot 0+5\cdot 0\le 136, \\ 3\cdot 0+14\cdot 0\le 266. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<264, \\ 0<136, \\ 0<266. \end{cases}$$

Все неравенства верны. Это означает, что каждому неравенству соответствует полуплоскость, содержащая точку (0;0). На чертеже эти полуплоскости отмечены штриховкой.

Общая часть всех полуплоскостей, с учетом условий неотрицательности $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$, образует замкнутый выпуклый многоугольник OABCD, отмеченный на чертеже штриховкой по краям.

Множество внутренних и граничных точек многоугольника соответствует множеству всех допустимых планов. Опорные планы находятся в вершинах многоугольника, среди них содержится оптимальный.

Для нахождения оптимального плана обратимся к целевой функции

$$F = 6x_1 + 4x_2.$$

На графике целевая функция изображается с помощью линий уровня:

$$F = 6x_1 + 4x_2 = C \text{ (const).} \qquad (19.14)$$

Построим нормальный вектор $gradF$, и перпендикулярно к нему через точку (0;0) проведем прямую. Уравнение этой прямой :

$$6x_1 + 4x_2 = 0.$$

Равенство (19.14) описывает семейство параллельных прямых, перпендикулярных к вектору $gradF = (6; 4)$. Координаты вектора равны коэффициентам при неизвестных в целевой функции F.

Если эту прямую перемещать параллельно самой себе в направлении вектора $gradF$, то получим множество линий уровня, на которых значение целевой функции F возрастает.

Своего максимального значения F достигает на прямой, проходящей через точку С. Значение функции F, вычисленное в точке С, будет наибольшем для данной задачи, т.к. при дальнейшем перемещении линии уровня не будут иметь общих точек с областью допустимых планов

Найдем координаты точки С, заметив, что она лежит на пересечении прямых (l_1) и (l_2). Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 = 264, \\ 4x_1 + 5x_2 = 136. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{264 - 12x_1}{3} = 88 - 4x_1, \\ 4x_1 + 5(88 - 4x_1) = 136. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 88 - 4x_1, \\ -16x_1 = -304. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 19, \\ x_2 = 12. \end{cases}$$

Координаты точки С (19; 12) соответствуют оптимальному плану. Подставляя найденные значения x_1 и x_2 в целевую функцию, получим максимальное значение целевой функции:

$$F_{\max} = 6 \cdot 19 + 4 \cdot 12 = 162.$$

19.4. Задания на контрольную работу

Задача. Предприятию нужно перевести со склада по железной дороге изделия трех различных видов: Изделий I –го вида не более p_1, изделий II-го вида не более p_2, изделий III-го вида не более p_3.

Подразделение железной дороги может для этой перевозки выделить специально оборудованные вагоны двух типов А и В. Для полной загрузки вагона следует помещать в него изделия всех трех видов. При этом в вагон типа А входят a_1 изделий I-го вида, a_2 изделий II-го вида, a_3 изделий III-го вида; в вагон типа В входят b_1

изделий I-го вида, b_2 изделий II-го вида, b_3 изделий III-го вида. Экономия от перевозки груза в вагоне типа А составляет α руб., в вагоне типа В – β руб.

Сколько вагонов каждого типа следует выделить для перевозки, чтобы суммарная экономия от перевозки груза была наибольшей?

Задачу решить симплекс и геометрическим методом.

Вариант	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	p_1	p_2	p_3	α	β
1	3	7	27	1	5	10	51	175	486	45	20
2	5	2	15	3	3	7	90	72	240	93	56
3	5	5	3	3	6	9	225	270	324	53	40
4	4	6	4	5	5	12	90	120	232	70	80
5	1	5	3	4	2	5	640	800	860	20	13
6	7	1	17	11	5	4	369	135	510	35	29
7	1	23	1	3	13	8	86	690	216	26	15
8	3	17	5	4	4	11	113	323	275	48	23
9	3	2	7	5	1	23	169	80	621	93	54
10	3	7	5	4	5	11	85	168	198	60	70

20. Транспортная задача

20.1. Краткие сведения из теории

Транспортная задача – одна из наиболее распространенных задач линейного программирования, имеющая обширные практические приложения и не только к проблемам транспорта. Ее цель – разработка наиболее рациональных путей и способов перевозок однородного или взаимозаменяемого продукта из пунктов производства в пункты потребления, устранение чрезмерно дальних, встречных и повторных перевозок.

20.1.1. Математическая постановка задачи

Классическая транспортная задача линейного программирования формулируется следующим образом.

Имеется m пунктов отправления: $A_1, A_2, ..., A_m$, в которых сосредоточены запасы какого-то однородного груза (товара) в количестве соответственно $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц. Кроме того, имеется n пунктов назначения: $B_1, B_2, ..., B_n$, подавших заявки на соответственно на $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц товара.

Предполагается, что сумма всех заявок равна сумме всех запасов:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы товара от каждого пункта отправления A_i до каждого пункта назначения B_j. Стоимость перевозок задана матрицей C:

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ .... & .... & \cdots & .... \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Требуется составить такой план перевозок, при котором весь груз был бы вывезен, все заявки были выполнены, и при этом общая стоимость всех перевозок была минимальна.

При такой постановке задачи показателем эффективности плана перевозок является стоимость, потому поставленную задачу называют транспортной задачей по критерию стоимости.

Дадим задаче математическую формулировку. Обозначим через x_{ij} – количество груза, отправляемого от i –го поставщика к j-му потребителю. Неотрицательные переменные $x_{11}, x_{12}, ..., x_{mn}$ должны удовлетворять условиям:

1. Суммарное количество груза, направляемое из каждого пункта отправления во все пункты назначения, должно быть равно запасу груза в данном пункте.
2. Суммарное количество груза, доставляемое в каждый пункт назначения изо всех пунктов отправления, должно быть равно заявке, поданной данным пунктом.
3. Суммарная стоимость всех перевозок должна быть минимальной.

И тогда под планом задачи подразумевается матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Допустимый план, имеющий не более $m+n-1$ отличных от нуля компонентов x_{ij}, называется *базисным*, или *опорным*.

Тогда математическая постановка транспортной задачи состоит в нахождении неотрицательной матрицы *X*, удовлетворяющую условиям

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, (j = 1, ..., n),$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (i = 1, ..., m),$$

$$x_{ij} \geq 0, (i = 1, ..., m; j = 1, ..., n),$$

и доставляющую минимум целевой функции

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

Различают задачи с закрытой моделью, когда $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ и открытой моделью, когда $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, то есть баланс между запасами и потребностями отсутствует.

Необходимым и достаточным условием разрешимости транспортной задачи является равенство суммарных запасов суммарным потребностям, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \qquad (20.1)$$

Прежде чем приступить к решению транспортной задачи, необходимо проверить условие (20.1). Если выполняется условие (20.1), то задача называется *закрытой*. Если же задача с неправильным балансом (открытая), то:

1. при $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (спрос меньше предложения) необходимо ввести «фиктивного» потребителя груза: $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и соответствующие тарифы от любого поставщика до «фиктивного» потребителя принимаются равными нулю: $c_{i,n+1} = 0$.

2. при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ (спрос больше предложения) необходимо ввести «фиктивного» поставщика груза: $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и стоимость перевозок от «фиктивного» поставщика до всех потребителей равна нулю: $c_{m+1,j} = 0$. Этим задача открытого типа сводится к транспортной задаче закрытого типа.

Решение транспортной задачи разбивается на два этапа:

1. Определение начального допустимого базисного решения (первого опорного плана)– первоначальный план распределения поставок.
2. Построение последовательных итераций (шагов), улучшающих опорные планы (каждый новый план не должен увеличивать суммарные затраты). Шаги второго этапа проводятся до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

20.1.2. Построение первоначального плана

Начальный и последующие планы заносятся в распределительную таблицу, в которой заранее записываются исходные данные задачи. Таблица с внесенными пунктами отправления A_i, их запасами a_i, пунктами назначения B_j, их запросами b_j и тарифами c_{ij} $(i = 1,2,...,m;\, j = 1,2,...,n)$ имеет вид таблицы 20.1.

Таблица 20.1

Поставщики	Потребители						Запасы
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Тарифы c_{ij} записаны в верхнем правом углу, а величины поставок x_{ij} в середине клетки. При этом клетки, в которые поместим грузы, называются *занятыми*, им соответствуют базисные переменные опорного решения. Остальные клетки *незанятые*, или *пустые*, им соответствуют свободные переменные.

Рассмотрим два метода построения первого опорного плана.

Метод *северо–западного угла*. В этом методе первой заполняется клетка с номером (1,1) максимально возможной поставкой. При этом, если закрывается строка, то следующей заполняется клетка с номером (2,1); если же закрывается столбец, то следующей заполняется клетка (1,2) и т.д.. И так каждый раз загружается клетка, соседняя по строке или столбцу. Последней будет заполнена клетка с номером (m,n). В результате заполненные клетки расположатся как бы по диагонали (1,1)– (m,n).

Недостатком этого метода является то, что при заполнении он игнорирует значения стоимости c_{ij}, поэтому построенный исходный опорный план, как правило, оказывается весьма далеким от оптимального.

Другим способом нахождения первоначального опорного плана является *метод наименьшей стоимости*. Согласно этому методу, грузы распределяются в первую очередь в те клетки, в которых находится минимальный тариф перевозок c_{ij}. В клетке (i, j) этого тарифа (в середине) записывается максимально возможная поставка с учетом ограничений этой строки и этого столбца: $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$. Этой поставкой либо обеспечивается потребность одного потребителя, и тогда этот потребитель (столбец) исключается из дальнейшего рассмотрения, либо от одного поставщика забирается весь груз, и тогда этот поставщик (строка) исключается из дальнейшего рассмотрения. Поэтому, не принимая более во внимание i–ую строку (или j–ый столбец), снова ищем клетку с наименьшей стоимостью перевозок и заполняем ее с учетом изменившихся потребностей. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока все запасы не будут исчерпаны, а все потребности– удовлетворены.

Если имеются два или более одинаковых наименьших тарифов, то заполняемая клетка берется произвольно среди них.

Пример 1. Найти опорный план методом северо-западного угла. Исходные данные приведены в таблице 20.2.

Таблица 20.2

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
Потребности	120	50	190	110	470

Решение. Составим опорный план методом северо-западного угла. Здесь число пунктов отправления (поставщиков) m=3, а число пунктов назначения (потребителей) n=4. Следовательно, опорный план задачи должен содержать $4+3-1=6$ заполненных клеток.

Заполнение таблицы начнем с клетки с номером (1,1), т.е. постараемся удовлетворить потребности первого потребителя за счет запасов первого поставщика. Так как запасы поставщика A_1 больше, чем потребности пункта B_1, то $x_{11} = \min(160{,}120) = 120$, записываем это значение в клетке с номером (1,1) таблицы 20.3 и исключаем из рассмотрения столбец B_1, считая при этом запасы пункта A_1 равными 40 (где $160-120=40$).

Рассмотрим первые из оставшихся пунктов отправления A_1 и назначения B_2. Запасы пункта A_1 меньше потребностей пункта B_2. Тогда весь остаток запасов пункта A_1 отправляем в пункт B_2, то есть записываем значение 40 в клетку с номером (1,2) таблицы 20.3 и исключаем из рассмотрения строку A_1, считая при этом потребности пункта B_1 равными 10 (где $50-40=10$). Снова рассмотрим первых из оставшихся пунктов поставщиков A_2 и потребителей B_2 (так как не хватает в этот пункт 10ед.). Запасы пункта A_2 (равные 140) больше потребностей пункта B_2 (потребность составляет 10), то берем минимальное значение ($\min(140,10)=10$) и ставим его в клетку с номером (2,2) таблицы 20.3, исключая из рассмотрения столбец B_2, т.к. все потребности этого потребителя удовлетворены. Тогда запасы пункта A_2 равны $140-10=130$. Смотрим ближайшего потребителя и это B_3. Запасы пункта A_2 меньше потребностей пункта B_3, то $x_{23}=\min(130,190)=130$ и исключим из рассмотрения строку A_2. Значение $x_{23}=130$ запишем в соответствующую клетку таблицы 20.3 и считаем потребности пункта B_3 равными 60 (это $190-130=60$).

Таблица 20.3

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7 120	8 40	1	2	160
A_2	4	5 10	9 130	8	140
A_3	9	2	3 60	6 110	170
Потребности	120	50	190	110	470

Теперь перейдем к заполнению клетки для неизвестного x_{33}. Здесь запасы A_3 равны 170, а потребности B_3 – 60. Вычисляем $x_{33}=\min(170,60)=60$ и исключаем из рассмотрения столбец B_3. Значение $x_{33}=60$ запишем в соответствующую клетку таблицы 20.3 и считаем остаток запасов пункта A_3 $170-60=110$. Что и совпадает с потребностью пункта B_4. Пишем это значение в оставшуюся единственную клетку с номером (3,4) таблицы 20.3.

В результате получаем опорный план:

$$X = \begin{pmatrix} 120 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 130 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 110 \end{pmatrix}.$$

Согласно данному плану перевозок, общая стоимость перевозок всего груза составляет

$$F = 120 \cdot 7 + 40 \cdot 8 + 10 \cdot 5 + 130 \cdot 9 + 60 \cdot 3 + 110 \cdot 6 = 3220.$$

Пример 2. Найти опорный план методом наименьшей стоимости. Исходные данные приведены в таблице 20.2.

Решение. Составим опорный план методом наименьшей стоимости. Минимальный тариф, равный 1, находится в клетке с номером (1,3). Находим $x_{13} = \min(160,190) = 160$, запишем это значение в соответствующую клетку таблицы 2.4 и исключим из дальнейшего рассмотрения строку A_1. Считаем потребности потребителя B_3 $190 - 160 = 30$.

В оставшейся части таблицы с двумя строками A_2 и A_3 и четырьмя столбцами B_1, B_2, B_3 и B_4 клетка с наименьшим значением стоимости равна 2 и находится на пересечении строки A_3 и столбца B_2. Находим $x_{32} = \min(50,170) = 50$ и вносим это значение в соответствующую клетку таблицы 20.4. исключаем из дальнейшего рассмотрения столбец B_2 (т.к. потребности его полностью удовлетворены), а запасы пункта A_3 будут равны: $170 - 50 = 120$.

Таблица 20.4

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1 160	2	160
A_2	4 120	5	9	8 20	140
A_3	9	2 50	3 30	6 90	170
Потребности	120	50	190	110	470

После этого рассматриваем оставшуюся часть таблицы с двумя строками A_2 и A_3 и тремя столбцами B_1, B_3 и B_4. В ней находим минимальный тариф равный 3, который находится на пересечении строки A_3 и столбца B_3. Столбец B_3 уже заполнен и не хватает $190 - 160 = 30$, а запасы в A_3 равны $170 - 50 = 120$, следовательно, находим $x_{33} = \min(120,30) = 30$ и заполняем эту клетку. Тогда остаток запасов в пункте A_3 равен $120 - 30 = 90$ ед. и исключаем из дальнейшего рассмотрения столбец B_3.

Теперь рассмотрим оставшуюся часть таблицы с двумя строками A_2 и A_3 и двумя столбцами B_1 и B_4. В этой оставшейся части таблицы находим минимальный тариф равный 4, который находится на пересечении строки A_2 и столбца B_1. Находим $x_{21} = \min(140,120) = 120$ и записываем это значение в соответствующую клетку таблицы 4. Столбец B_1 исключаем из рассмотрения, и находим остаток запасов в пункте A_2: $140 - 120 = 20$.

Нам остается рассмотреть клетки с номерами (2,4) и (3,4). Так как остаток запасов в пункте A_2 составляет 20ед., то вносим это значение в клетку с номером (2,4), а остаток запасов в пункте A_3 равен 90 и это значение записываем в клетку с номером (3,4) таблицы 20.4. В результате получим опорный план:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{pmatrix}.$$

При данном плане общая стоимость перевозок всего груза составляет

$$F = 160 \cdot 1 + 120 \cdot 4 + 20 \cdot 8 + 50 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 90 \cdot 6 = 1530.$$

Что составляет меньшую сумму, чем при составлении плана методом северо-западного угла (см. пример 1).

20.1.3. Определение оптимального плана транспортной задачи

Для определения оптимального плана транспортной задачи разработано несколько методов. Однако наиболее часто используется метод *потенциалов*.

Если опорное решение транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система $m+n$ действительных чисел α_i $(i = 1,2,...,m)$ и $\beta_j (j = 1,2,...,n)$, удовлетворяющих условиям

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij} \text{ – для заполненных клеток} \qquad (20.2)$$

и

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - \alpha_i - \beta_j \geq 0 \text{ – для пустых клеток.} \qquad (20.3)$$

Числа α_i и β_j называют *потенциалами*, где α_i – потенциалы поставщиков (строк), β_j – потенциалы потребителей (столбцов), а Δ_{ij} – *оценка свободных клеток.*

Для определения оптимальности первоначального плана необходимо составить систему уравнений из условия (20.2) для заполненных клеток и решить ее.

Так как число заполненных клеток равно $m+n-1$, то система из условия (20.2) с $m+n$ неизвестными содержит $m+n-1$ уравнений. Поскольку число неизвестных превышает на единицу число уравнений, одно из неизвестных можно принять равным произвольному числу, например $\alpha_1 = 0$ и найти последовательно из уравнений условия (20.2) значения остальных неизвестных потенциалов.

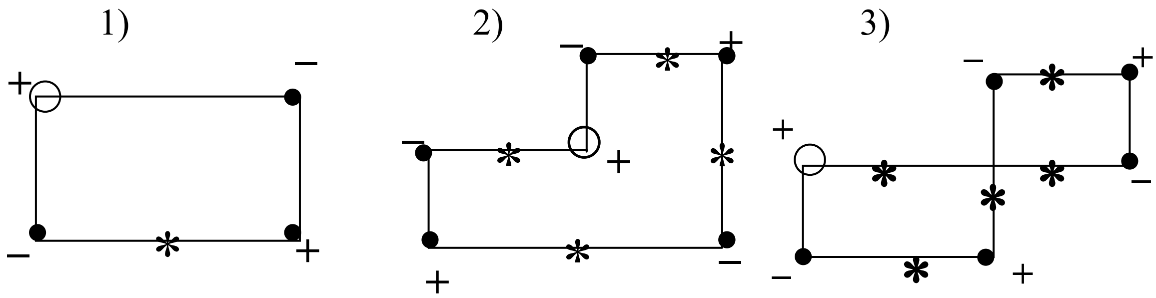
После того как все потенциалы найдены, для каждой из пустых клеток проверяют выполнение условий оптимальности (20.3).

Если хотя бы одна из оценок $\Delta_{ij} < 0$, то план не является оптимальным и его можно улучшить методом перераспределения поставок по циклу. Отметим клетку с наименьшей отрицательной оценкой и построим цикл с начальной вершиной в этой клетке.

Циклом с начальной вершиной в данной клетке называется многоугольник, у которого:

1. все стороны лежат в строках и столбцах;
2. все углы прямые;
3. все вершины, кроме начальной, лежат в заполненных клетках, а начальная вершина – в свободной неоптимальной клетке»
4. на сторонах цикла могут быть занятые клетки, но они не являются вершинами цикла;

Циклы пересчета могут иметь следующую форму:



Примем некоторые обозначения: о – свободная клетка (начало цикла), • – занятая клетка (вершина цикла), а возможные места расположения занятых клеток обозначим *.

Число вершин цикла обязательно четно. «Неоптимальная» клетка может находиться в любой вершине цикла (на примерах рассмотрены один из вариантов).

По циклу будем перемещать *поставку*. Для нахождения величины этой поставки сначала проставим знаки в вершинах цикла: в «неоптимальную» клетку ставим знак «+» (плюс) (всегда), а далее, совершая обход по циклу, чередуем знаки «–» (минус) и «+» (плюс) в вершинах цикла. Найдем наименьшую из величин поставок в отрицательных вершинах. Эту величину прибавим к вершинам со знаком «+» (плюс) и вычтем из вершин со знаком «–»

(минус).Произведен сдвиг по циклу. В результате сдвига по циклу приходим к новому опорному плану.

Полученный опорный план проверяем на оптимальность (при помощи равенств (20.2) и (20.3)). Улучшение новых планов проводим до тех пор, пока очередной план не станет оптимальным. Для него все оценки свободных клеток должны быть неотрицательными, то есть $\Delta_{ij} \geq 0$.

Из изложенного выше следует, что *процесс нахождения решения транспортной задачи методом потенциалов включает следующие этапы:*

1. Находим первоначальный опорный план. При этом число заполненных клеток должно быть равным $m+n-1$. Определяем стоимость перевозок для данного плана.
2. Находим потенциалы α_i и β_j соответственно поставщиков и потребителей из условия (20.2).
3. Поверяем план на оптимальность. Для каждой свободной клетки находим ее оценку Δ_{ij} из условия (20.3). Если нет отрицательных оценок, то получен оптимальный план транспортной задачи; если же такие оценки имеются, то переходим к новому опорному плану.
4. Для свободной клетки с наибольшей по модулю отрицательной оценкой($\Delta_{ij} < 0$) строим цикл (вариант цикла единственный) и проводим сдвиг по этому циклу.
5. Полученный опорный план проверяем на оптимальность, т.е. повторяем все действия, начиная с этапа 2.

Замечание. Количество таблиц при решении транспортной задачи может оказаться любым. Это зависит от того, на сколько первый опорный план окажется близким к оптимальному. Может случится, что первая же таблица будет соответствовать оптимальному плану. Это устанавливается методом потенциалов.

Транспортная задача всегда имеет оптимальное решение (один или несколько опорных оптимальных планов).

20.2. Решение типовой задачи

Задача. Имеется три пункта поставки однородного груза A_1, A_2, A_3 и пять пунктов потребления груза B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. На пунктах A_1, A_2, A_3 находится груз соответственно в количестве 280, 220 и 300 тонн. В пункты B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 требуется доставить соответственно 190, 140, 180, 120, 170 тонн груза. Затраты на перевозку 1т. груза между пунктами поставки и пунктами потребления приведены в матрице С (в тыс.руб.) Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками, чтобы общие затраты по перевозкам груза были минимальными.

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 3 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 15 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix}.$$

Решение. Данные задачи запишем в виде таблицы 20.5.

Таблица 20.5

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	3	9	15	35	280
A_2	3	10	12	20	46	220
A_3	15	11	16	19	48	300
Потребности	190	140	180	120	170	

Проверяем задача закрытая или открытая. Для этого найдем сумму запасов – $280 + 220 + 300 = 800$ и сумму потребностей $190+140+180+120+170=800$. Так как эти значения равны, то мы имеем задачу закрытого типа. Теперь начнем ее решать согласно описанному ранее алгоритму.

1. Составим первоначальный опорный план методом наименьшей стоимости перевозок и результат запишем в таблице 20.6

Таблица 20.6

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	3 140	– 9 140	15	+ 35	280
A_2	3 190	10	12 30	20	46	220
A_3	15	11	16 + 10	19 120	48 170 –	300
Потребности	190	140	180	120	170	

Проверим, число заполненных клеток должно быть равно $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$. Это условие выполняется.

Найдем стоимость перевозок доля данного опорного плана.

$$F = 140\cdot 3 + 140\cdot 9 + 190\cdot 3 + 30\cdot 12 + 10\cdot 16 + 120\cdot 19 + 170\cdot 48 = 13210.$$

2. Находим потенциалы α_i, $(i = 1,2,...,m)$ и β_j, $(j = 1,2,..,n)$ соответственно поставщиков и потребителей из условий (20.2).

Составляем для заполненных клеток.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_2 = 3, \\ \alpha_1 + \beta_3 = 9, \\ \alpha_2 + \beta_1 = 3, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 12, \\ \alpha_3 + \beta_3 = 16, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 19, \\ \alpha_3 + \beta_5 = 48. \end{cases}$$

Значение одного из потенциалов выбираем произвольно. Например, $\alpha_1 = 0$. Тогда значения остальных потенциалов легко найдутся из указанной системы:

$\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 7$,

$\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 9$, $\beta_4 = 12$, $\beta_5 = 41$.

3. Проверим план на оптимальность. Оптимальный план должен удовлетворять условию (20.3).

Проверяем все оценки стоимости для пустых клеток :

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - \alpha_i - \beta_j \ge 0.$$

клетка (1;1) $\quad \Delta_{11} = c_{11} - \alpha_1 - \beta_1 = 7 - 0 - 0 = 7 > 0$,

клетка (1;4) $\quad \Delta_{14} = 15 - 0 - 0 = 15 > 0$,

клетка (1;5) $\quad \Delta_{15} = 35 - 0 - 41 = -6 < 0$,

клетка (2;2) $\quad \Delta_{22} = 10 - 3 - 3 = 4 > 0$,

клетка (2;4) $\quad \Delta_{24} = 20 - 3 - 12 = 5 > 0$,

клетка (2;5) $\quad \Delta_{25} = 46 - 3 - 41 = 2 > 0$,

клетка (3;1) $\quad \Delta_{31} = 15 - 7 - 0 = 8 > 0$,

клетка (3;2) $\quad \Delta_{32} = 11 - 7 - 3 = 1 > 0$.

Как показывают вычисления, для клетки (1;5) условие оптимальности не выполняется, следовательно, план не оптимален и его нужно улучшать.

4. Строим цикл для клетки (1;5).

В нашей задаче цикл, составленный в клетке (1;5), отмечен пунктиром в таблице 20.6. В него входят клетки (1;5), (1;3), (3;3), (3;5).

Наименьшая из поставок, отмеченных знаком «–», равна 140: $\min(140;170) = 140$. Перемещаем ее по циклу. При этом прибавляем по 140 единиц к поставкам, находящимся в вершинах со знаком «+», вычитаем по 140 единиц из поставок, находящихся в вершинах со знаком «–». В результате всех этих перемещений приходим к новому плану, указанному в таблице 20.7.

Таблица 20.7

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	– 3 140	9	15	35 + 140	280
A_2	3 190	10	12 30	20	46	220
A_3	15	11 +	16 150	19 120	48 30	300 –
Потребности	190	140	180	120	170	

Этот план является опорным, т.к. удовлетворяет всем признакам опорного плана:

1) соблюдены балансы по всем строкам и столбца;
2) число заполненных клеток равно 7;

Стоимость перевозок, соответствующая полученному опорному плану, уменьшается:

$$F = 140\cdot 3 + 140\cdot 35 + 190\cdot 3 + 30\cdot 12 + 150\cdot 16 + 120\cdot 19 + 30\cdot 48 = 12370.$$

т.е. новый опорный план лучше (дешевле) предыдущего.

5. Выясним, оптимален ли полученный план, с помощью метода потенциалов, повторяя весь ход рассуждений, начиная с пункта 3.

Вычисляем новые потенциалы поставщиков и потребителей с помощью системы уравнений, составленной для заполненных клеток таблицы 20.7:

Составляем для заполненных клеток.

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_2 = 3, \\ \alpha_1+\beta_5 = 35, \\ \alpha_2+\beta_1 = 3, \\ \alpha_2+\beta_3 = 12, \\ \alpha_3+\beta_3 = 16, \\ \alpha_3+\beta_4 = 19, \\ \alpha_3+\beta_5 = 48. \end{cases}$$

Полагая $\alpha_1 = 0$, поучим:

$\alpha_2 = 9, \ \ \alpha_3 = 13,$

$\beta_1 = -6, \ \ \beta_2 = 3, \ \ \beta_3 = 3, \ \ \beta_4 = 6, \ \ \beta_5 = 35.$

Проверяем на оптимальность пустые клетки:

клетка (1;1) $\Delta_{11} = 7 - 0 + 6 = 13 > 0$,

клетка (1;3) $\Delta_{13} = 9 - 0 - 3 = 6 > 0$,

клетка (1;4) $\Delta_{14} = 15 - 0 - 6 = 9 > 0$,

клетка (2;2) $\Delta_{22} = 10 - 9 - 3 = -2 < 0$,

клетка (2;4) $\Delta_{24} = 20 - 9 - 6 = 5 > 0$,

клетка (2;5) $\Delta_{25} = 46 - 9 - 35 = 2 > 0$,

клетка (3;1) $\Delta_{31} = 15 - 13 + 6 = 8 > 0$,

клетка (3;2) $\Delta_{32} = 11 - 13 - 3 = -5 < 0$.

Как показывают вычисления, для клеток (2;2) и (3;2) условие оптимальности не выполняется, следовательно, план не оптимален и его нужно улучшать. Повторяем все действия, начиная с этапа 3.

6. Так как условие оптимальности не выполняется для двух клеток, то выбираем наименьшую отрицательную оценку $\min(\Delta_{22};\Delta_{32}) = \min(-2;-5) = -5$. Строим цикл для клетки (3;2).

В нашей задаче цикл, составленный в клетке (3;2), отмечен пунктиром в таблице 20.7. В него входят клетки (1;2), (1;5), (3;2), (3;5).

Наименьшая из поставок, отмеченных знаком «–», равна 30: $\min(140;30) = 30$. Перемещаем ее по циклу. При этом прибавляем по 30 единиц к поставкам, находящимся в вершинах со знаком «+», вычитаем по 30 единиц из поставок, находящихся в вершинах со знаком «–». В результате всех этих перемещений приходим к новому плану, указанному в таблице 20.8.

Таблица 20.8

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	3 110	9	15	35 170	280
A_2	3 190	10	12 30	20	46	220
A_3	15	11 30	16 150	19 120	48	300
Потребности	190	140	180	120	170	

Этот план является опорным, т.к. удовлетворяет всем признакам оптимальности.

Стоимость перевозок, соответствующая полученному опорному плану, уменьшается:

$$F = 110 \cdot 3 + 170 \cdot 35 + 190 \cdot 3 + 30 \cdot 12 + 30 \cdot 11 + 150 \cdot 16 + 120 \cdot 19 = 12220$$

т.е. новый опорный план лучше (дешевле) предыдущего.

7. Выясним, оптимален ли полученный план, с помощью метода потенциалов, повторяя весь ход рассуждений, начиная с пункта 3.

Вычисляем новые потенциалы поставщиков и потребителей с помощью системы уравнений, составленной для заполненных клеток таблицы 20.8

Составляем для заполненных клеток.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_2 = 3, \\ \alpha_1 + \beta_5 = 35, \\ \alpha_2 + \beta_1 = 3, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 12, \\ \alpha_3 + \beta_2 = 11, \\ \alpha_3 + \beta_3 = 16, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 19. \end{cases}$$

Полагая $\alpha_1 = 0$, поучим: $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 8$,
$\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 8$, $\beta_4 = 11$, $\beta_5 = 35$.

Проверяем на оптимальность пустые клетки:

клетка (1;1) $\Delta_{11} = 7 - 0 + 1 = 8 > 0$,
клетка (1;3) $\Delta_{13} = 9 - 0 - 8 = 1 > 0$,
клетка (1;4) $\Delta_{14} = 15 - 0 - 11 = 4 > 0$,
клетка (2;2) $\Delta_{22} = 10 - 4 - 3 = 3 > 0$,
клетка (2;4) $\Delta_{24} = 20 - 4 - 11 = 5 > 0$,
клетка (2;5) $\Delta_{25} = 46 - 4 - 35 = 7 > 0$,
клетка (3;1) $\Delta_{31} = 15 - 8 + 1 = 8 > 0$,
клетка (3;5) $\Delta_{32} = 48 - 8 - 35 = 5 > 0$.

Все клетки оптимальны, значит, полученный в таблице 20.8, план оптимален.

Ответ. Оптимальный план перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 110 & 0 & 0 & 170 \\ 190 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 150 & 120 & 0 \end{pmatrix}.$$

Расходы по его осуществлению минимальны и составляют $F = 12220$.

20.3. Задание на контрольную работу

Задание. Имеется три пункта поставки однородного груза A_1, A_2, A_3 и пять пунктов потребления груза B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. На пунктах A_1, A_2, A_3 находится груз соответственно в количестве a_1, a_2, a_3 тонн. В пункты B_1, B_2, B_3, B_4 требуется доставить соответственно b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 тонн груза. Затраты на перевозку 1т. груза между пунктами поставки и пунктами потребления приведены в матрице С (в тыс.руб.) Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками, чтобы общие затраты по перевозкам груза были минимальными.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix}.$$

1. $$\begin{matrix} a_1 = 300, \\ a_2 = 280, \\ a_3 = 220, \end{matrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 12 & 21 & 9 & 10 & 16 \\ 13 & 15 & 11 & 13 & 21 \\ 19 & 26 & 12 & 17 & 20 \end{pmatrix},$$
$$b_1 = 180,\ b_2 = 140,\ b_3 = 190,\ b_4 = 120,\quad b_5 = 170.$$

2. $$\begin{matrix} a_1 = 150, \\ a_2 = 250, \\ a_3 = 200, \end{matrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 4 & 9 & 4 \\ 17 & 10 & 9 & 11 & 5 \\ 15 & 11 & 6 & 13 & 8 \end{pmatrix},$$
$$b_1 = 180,\ b_2 = 120,\ b_3 = 90,\ b_4 = 105,\quad b_5 = 105.$$

3. $$\begin{matrix} a_1 = 300, \\ a_2 = 300, \\ a_3 = 250, \end{matrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 21 & 24 & 21 & 16 & 25 \\ 30 & 16 & 17 & 20 & 30 \\ 7 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{pmatrix},$$
$$b_1 = 150,\ b_2 = 140,\ b_3 = 115,\ b_4 = 225,\quad b_5 = 220.$$

4. $$\begin{matrix} a_1 = 250, \\ a_2 = 300, \\ a_3 = 250, \end{matrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 8 & 20 & 7 & 11 & 16 \\ 4 & 14 & 12 & 15 & 17 \\ 15 & 22 & 11 & 12 & 19 \end{pmatrix},$$
$$b_1 = 220,\ b_2 = 130,\ b_3 = 150,\ b_4 = 140,\quad b_5 = 160.$$

$$5.\quad \begin{array}{l} a_1 = 250, \\ a_2 = 200, \\ a_3 = 150, \end{array} \qquad C = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 21 & 10 & 15 \\ 13 & 4 & 15 & 13 & 21 \\ 19 & 16 & 26 & 17 & 20 \end{pmatrix},$$

$b_1 = 180,\ b_2 = 120,\ b_3 = 90,\ b_4 = 105,\quad b_5 = 105.$

$$6.\quad \begin{array}{l} a_1 = 350, \\ a_2 = 300, \\ a_3 = 250, \end{array} \qquad C = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 21 & 10 & 15 \\ 13 & 4 & 15 & 13 & 21 \\ 19 & 16 & 26 & 16 & 20 \end{pmatrix},$$

$b_1 = 300,\ b_2 = 220,\ b_3 = 115,\ b_4 = 132,\quad b_5 = 133.$

$$7.\quad \begin{array}{l} a_1 = 150, \\ a_2 = 200, \\ a_3 = 100, \end{array} \qquad C = \begin{pmatrix} 15 & 23 & 28 & 19 & 17 \\ 17 & 13 & 14 & 12 & 20 \\ 13 & 21 & 24 & 16 & 12 \end{pmatrix},$$

$b_1 = 90,\ b_2 = 150,\ b_3 = 75,\ b_4 = 60,\quad b_5 = 75.$

$$8.\quad \begin{array}{l} a_1 = 230, \\ a_2 = 450, \\ a_3 = 320, \end{array} \qquad C = \begin{pmatrix} 19 & 27 & 32 & 10 & 11 \\ 39 & 21 & 12 & 21 & 41 \\ 15 & 14 & 25 & 27 & 20 \end{pmatrix},$$

$b_1 = 225,\ b_2 = 220,\ b_3 = 170,\ b_4 = 210,\quad b_5 = 175.$

$$9.\quad \begin{array}{l} a_1 = 270, \\ a_2 = 450, \\ a_3 = 330, \end{array} \qquad C = \begin{pmatrix} 37 & 30 & 15 & 19 & 37 \\ 16 & 19 & 13 & 19 & 21 \\ 10 & 20 & 19 & 29 & 26 \end{pmatrix},$$

$b_1 = 190,\ b_2 = 210,\ b_3 = 200,\ b_4 = 230,\quad b_5 = 220.$

$$10.\quad \begin{array}{l} a_1 = 330, \\ a_2 = 270, \\ a_3 = 350, \end{array} \qquad C = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 24 & 50 & 42 \\ 13 & 22 & 49 & 66 & 32 \\ 26 & 27 & 35 & 67 & 63 \end{pmatrix},$$

$b_1 = 220,\ b_2 = 170,\ b_3 = 210,\ b_4 = 150,\quad b_5 = 200.$

21. Нелинейное программирование

21.1. Краткие сведения из теории

Нелинейное программирование является одним из видов математического программирования, рассмотренного во введении. Сформулированная задача математического программирования целиком и полностью относится к нелинейному программированию с учетом того, что в математической модели хотя бы одна из функций f или g_i (19.1;19.2) должны быть нелинейными.

Для задач нелинейного программирования нет единого метода их решения. Существуют специальные, конкретные методы решения в зависимости от конкретных видов целевой функции и функций системы ограничений.

Некоторые уже известные методы представлены ниже.

21.1.1. Геометрический метод решения задачи нелинейного программирования

Геометрический метод применяется при условии, когда количество неизвестных величин в математической модели (19.1; 19.2) равно двум.

Рассмотрим группу задач, в которых система ограничений есть система линейных неравенств, геометрическая модель которых представляет собой объемное тело, ограниченное боковой поверхностью прямой призмы, в сечении которой плоскостью $F=0$ находится треугольник, четырехугольник или вообще многоугольник (см. 19.2).

Целевая функция представляет собой различные квадратичные функции (тогда программирование называется *квадратичным*), геометрическая модель которых представляет собой поверхности второго порядка.

Пример 1. Найти такие значения переменных x_1, x_2, которые доставляют максимум (минимум) целевой функции

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1, \tag{21.1}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{21.2}$$

Геометрическая модель системы ограничений в данном случае есть тело, ограниченное боковой поверхностью прямой призмы, в сечении которой плоскостью $F=0$ находится четырехугольник OABC (рисунок 21.1).

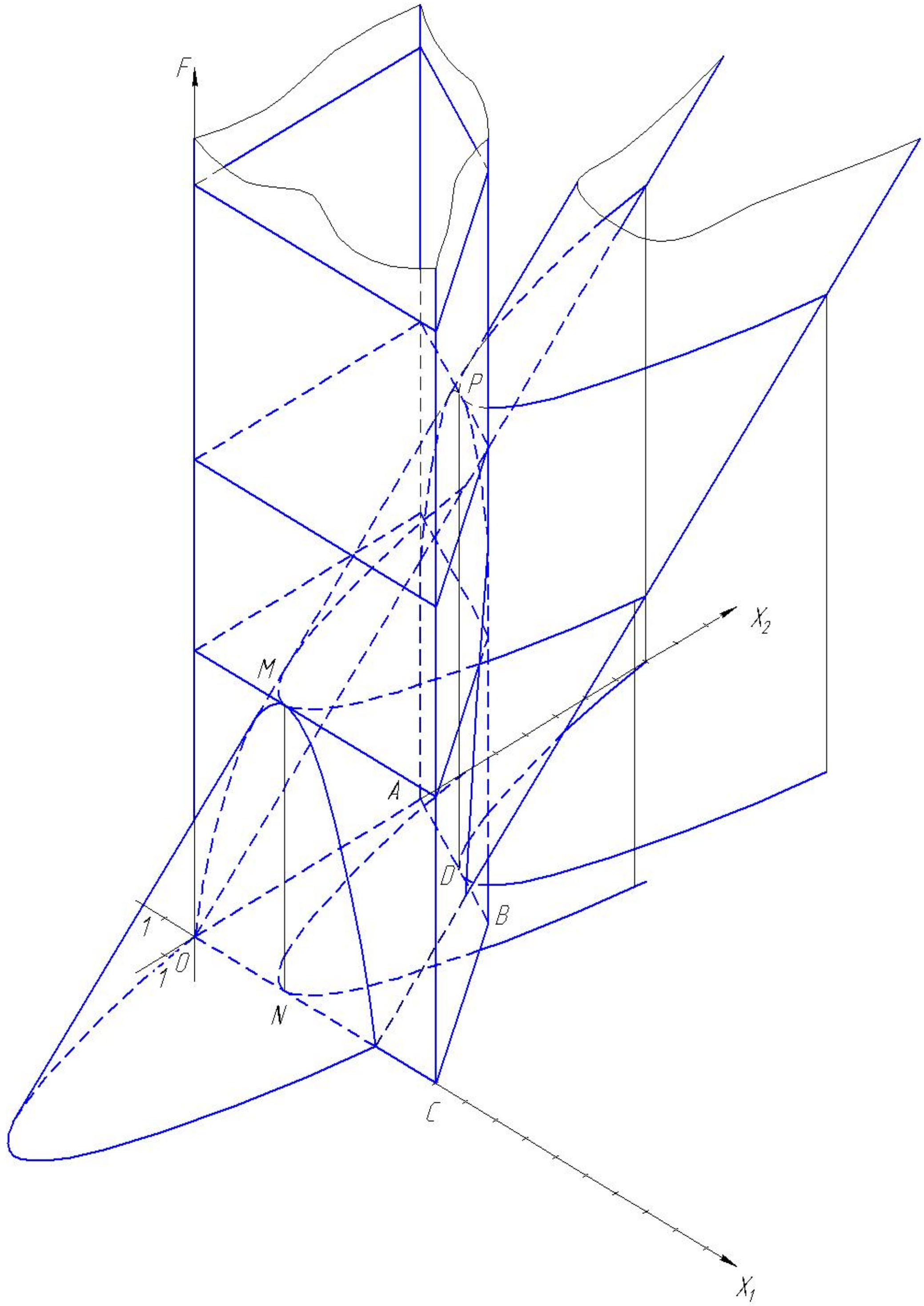


Рисунок 21.1

Геометрическая модель целевой функции $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1$, есть наклонный параболический цилиндр. Чтобы построить этот цилиндр надо проанализировать его сечения координатными плоскостями.

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = x_2 - (x_1 - 3)^2 + 9.$$

При сечении плоскостью $x_2 = 0$ имеем параболу $F = -(x_1 - 3)^2 + 9$.

При сечении плоскостью $F = 0$ имеем параболу $x_2 = (x_1 - 3)^2 - 9$.

При сечении плоскостью $x_1 = 3$ имеем прямую $F = x_2 + 9$.

На рис. 21.1 достаточно хорошо видно, что при пересечении наклонного параболического цилиндра (целевой функции F) с «призматическим» телом (системой ограничений) можно выделить две точки M и P. Они характерны тем, что $\mathrm{MN} = \min F$ и $\mathrm{PD} = \max F$.

Это качественное решение задачи.

Если параболический цилиндр рассекать координатными плоскостями параллельными плоскости $F = 0$, то в сечении имеем линии уровня– параболы, параллельные друг другу. Они отличаются только тем, что находятся на разных уровнях F, которые в свою очередь указывают на значение целевой функции F. Сравнивая уровни F точек M и P для соответствующих парабол, можно сделать указанный выше вывод.

Напомним, градиент функции нескольких переменных в какой-либо точке указывает направление наиинтенсивнейшего изменения (наибольшего возрастания) функции в этой точке и всегда направлен перпендикулярно линиям уровня. В нашем случае:

$$\overline{grad}\ F = \frac{\partial F}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\bar{j} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_2 - (x_1 - 3)^2 + 9\right)\bar{i} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2 - (x_1 - 3)^2 + 9\right)\bar{j} =$$

$$= -2(x_1 - 3)\bar{i} + \bar{j}.$$

Видно, что вектор $\overline{grad}\,F$ находится в плоскости x_1Ox_2 (параллельных плоскостях). Он меняется и по величине и по направлению в зависимости от изменения x_1. Но есть точка x_1, в котором вектор $\overline{grad}\ F$ становится стационарным, т.е. указывает одно и то же направление и величину. Это точка $x_1 = 3$,при которой $\overline{grad}\ F = \bar{j}$.

Воспользуемся этим обстоятельством для нашей целевой функции F (наклонного параболического цилиндра) и ее линий уровня.

При $F = C = const$–общее уравнение линий уровня.

$x_2 - (x_1 - 3)^2 + 9 = C$– общее уравнение парабол-линий уровня нашей функции.

Видно, что все линии уровня- параболы имеют общее свойство: вершины парабол лежат в плоскости $x_1 = 3$.

Перемещая вершины парабол (и сами параболы) вдоль плоскости $x_1 = 3$ по направлению оси Ox_2 (на это указывает вектор

$\overline{grad}\ F = \bar{j}$), мы имеем увеличение целевой функции от $F = 0$ - $\min F$ в точке М до $\max F$ в точке Р.

Таким образом, решение задачи есть две точки N и D.

Подставив координаты точек $N(x_{1N}, x_{2N})$ и $D(x_{1D}, x_{2D})$ в формулу для F, находим $\min F$ и $\max F$.

Но решение задачи геометрическим методом в объемном (3-х мерном) пространстве весьма осложнено построениями. Необходимо, как и прежде, перейти на плоскость, т.е. объемную задачу и ее решение спроектировать на плоскость x_1Ox_2.

Прямая призма – модель системы ограничений- проектируется в область допустимых значений(x_1, x_2) виде четырехугольника OABC (рис. 21.2). Параболы- линии уровня параболического цилиндра- проектируются сами на себя, т.к. все они лежат в плоскостях параллельных плоскости x_1Ox_2.

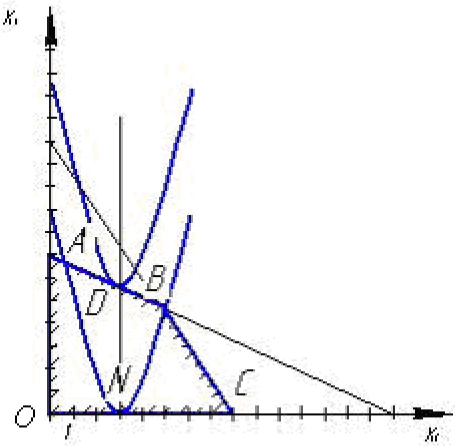


Рисунок 21.2

Перемещение парабол с целью увеличения целевой функции F производится в том же направлении $\overline{grad}\ F = \bar{j}$, т.е. в направлении оси Ox_2, вдоль прямой $x_1 = 3$ (см. рис.21.2). Решение заключается в нахождении точек N и D, которые являются точками парабол и граничными точками области допустимых значений одновременно, т.е. это точки касания парабол и граничных прямых четырехугольника OABC.

Алгоритм геометрического метода решения задачи.

1. Построить область допустимых решений (рис. 21.2).

2. Построить линию уровня целевой функции F (рис. 21.1), приравнивая ее к нулю.

3. Перемещая линию уровня по направлению оси Ox_2 вдоль прямой $x_1 = 3$ найти граничные точки (точки касания) линий уровня с границей области допустимых значений.

4. Определить координаты точек, найденных в п.3, которые и будут решением задачи.

5. Найденные координаты точек подставить в формулу (21.1) для F и вычислить $\min F$ и $\max F$.

Пример 2. Найти такие значения переменных x_1, x_2, при которых обеспечивается максимум (минимум) целевой функции

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2, \tag{21.3}$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \le -7, \\ 3x_1 + x_2 \ge 15, \\ 4x_1 + 7x_2 \le 71, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{21.4}$$

Геометрическая модель системы ограничений в этом примере является тело, ограниченное боковой поверхностью прямой призмы, в сечении которой плоскостью $F = 0$ находится треугольник ABC (рисунок 21.3).

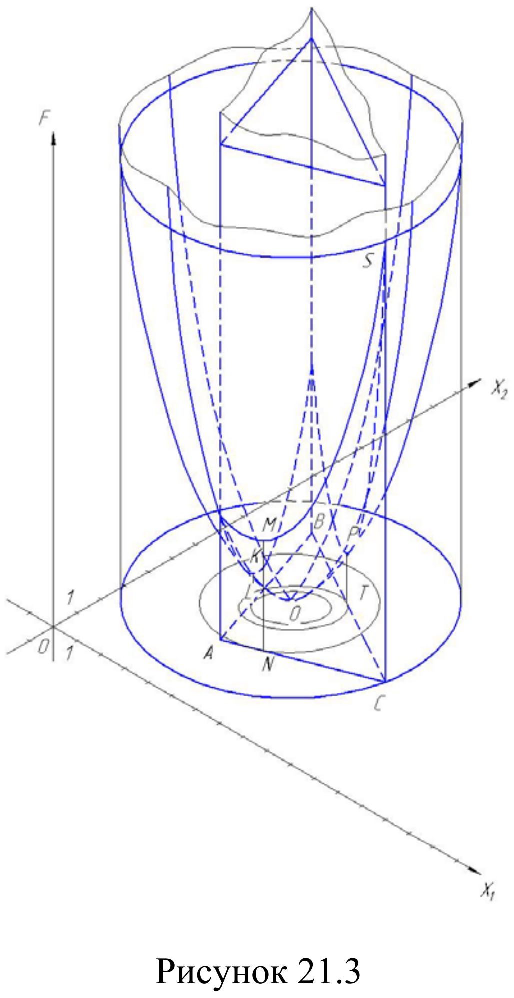


Рисунок 21.3

Геометрическая модель целевой функции $F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2$ представляет собой параболоид вращения, вершина которого находится на плоскости x_1Ox_2 и смещена на 4 единицы по оси Ox_1 и на 6 единиц по оси Ox_2.

Пересечение этих геометрических моделей (рис.21.3) наглядно показывает решение данной задачи квадратического программирования.

В точке О (4,6) имеем $\min F = 0$.

В точке С имеем $\max F = SC$. Для вычисления $\max F$ необходимо найти координаты точки С и подставить их в формулу (21.3) для целевой функции F.

Таким образом, решение задачи есть координаты точек О и С. Но объемное представление и решение, как это уже показано ранее, достаточно не простое.

Спроектируем решение задачи на плоскость x_1Ox_2 и сформулируем ее алгоритм .

Модель системы ограничений, как и прежде, проектируется в область допустимых значений x_1, x_2 в виде треугольника АВС (рис.21.4).Линии уровня целевой функции- окружности с радиусом $\sqrt{F}$ (пересечение поверхности параболоида вращения с плоскостями $F = const$ параллельными координатной плоскости $F = 0$)- проектируются сами на себя. Градиент функции F $\overline{grad}F = 2(x_1 - 4)\bar{i} + 2(x_2 - 6)\bar{j}$- вектор в плоскостях параллельных плоскости $F = 0$- указывает направление увеличения целевой функции F. Он всегда перпендикулярен линиям уровня (окружностям) и в данном случае направлен по радиусу от центра. Радиус этих окружностей равен $\sqrt{F}$. Значит, проводя из точки О окружности разных радиусов, можно определить $\min F = 0$ (радиус равен нулю) и $\max F$ в точке С, т.к. радиус ОС будет самым максимальным в условиях касания области допустимых решений с максимально возможной линией уровня.

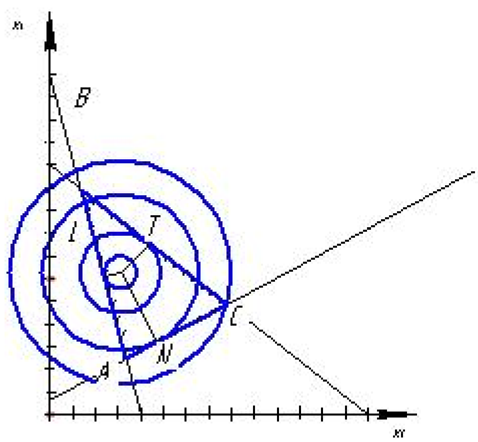


Рисунок 21.4

Алгоритм решения задачи.

1. Построить область допустимых решений (рис. 21.4).

2. Построим точку О (4,6)- центр окружностей и с помощью циркуля проведем семейство окружностей с разными радиусами.

3. Точка О есть окружность с радиусом равным нулю или $F=0$ и является решением условия $\min F=0$.

4. Найдем такую точку, которая одновременно принадлежала бы области допустимых значений и лежала бы на окружности с наибольшим радиусом. Это точка касания указанной окружности с многоугольником допустимых решений. Заметим, что в общем случае касание может произойти как в одной вершине многоугольника, так и с одной из его сторон.

В нашем случае это произошло в точке С.

5. Определить координаты точек, найденных в п.3 и 4, представить их как решение задачи квадратичного программирования, подставить их в формулу (21.3) для F и вычислить $\min F$ и $\max F$.

Пример 3. Найти значения переменных x_1, x_2, при которых целевая функция F принимает максимальное и минимальное значение, если

$$F = x_1^2 + (x_2-5)^2, \tag{21.5}$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \le -7, \\ 3x_1 + x_2 \ge 15, \\ 4x_1 + 7x_2 \le 7{,}1, \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{21.6}$$

В этом примере граничные условия (21.6) повторяют граничные условия (21.4) предыдущего примера и ,значит, их геометрические модели совпадают.

Геометрическая модель целевой функции $F = x_1^2 + (x_2-5)^2$ представляет собой такой же параболоид вращения, как и в примере 2, но вершина его смещена только по оси Ox_2 на 5 единиц. В результате вершина параболоида находится за пределами треугольника АВС (рисунок 21.5).

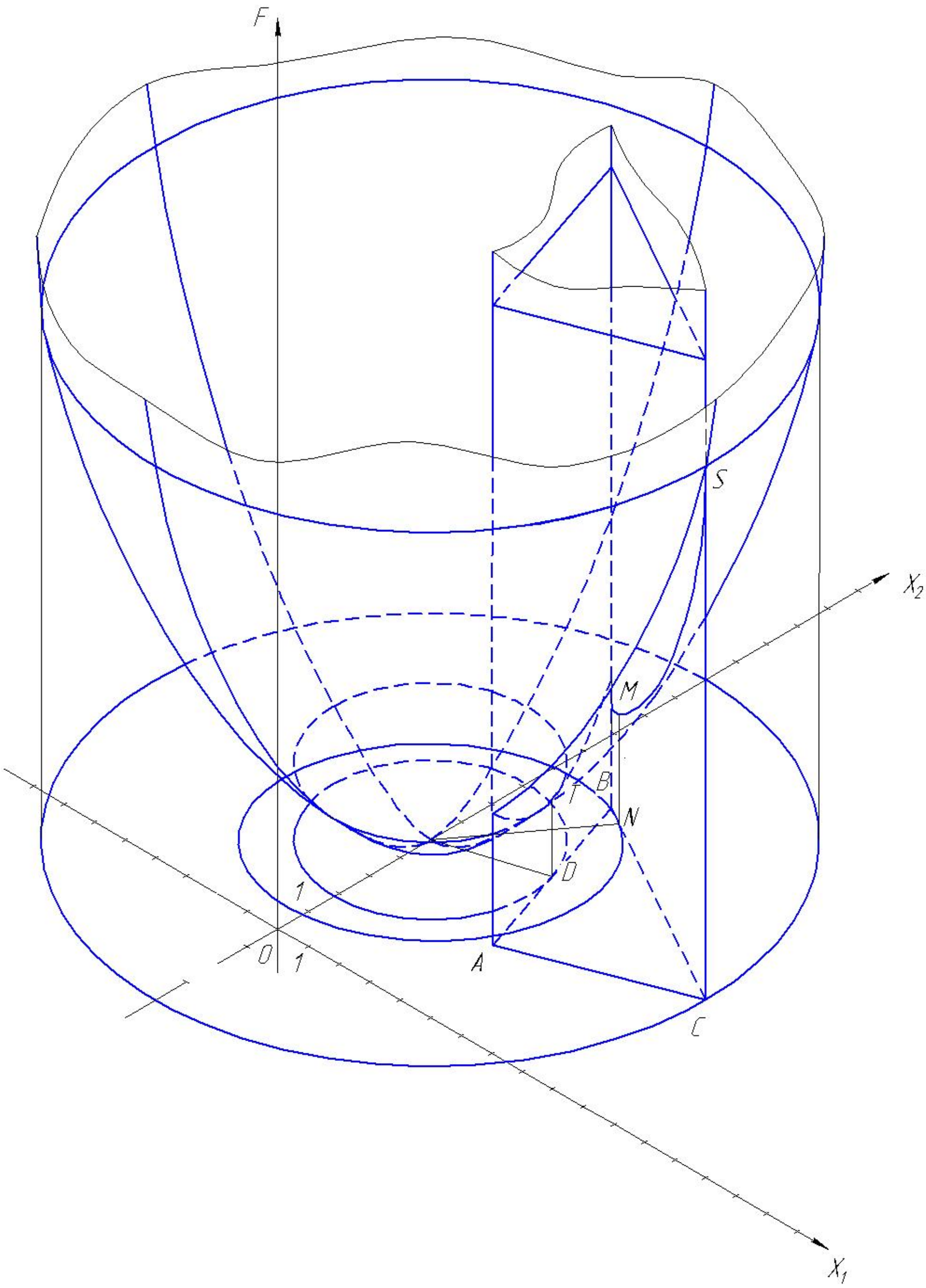


Рисунок 21.5

Решение задачи в трехмерном пространстве простое. Это точка D, в которой $\min F = \mathrm{TD}$ и точка C, в которой $\max F = \mathrm{SC}$.

Проектируя данное решение на плоскость (рисунок 21.6), сформулируем *алгоритм* решения задачи .

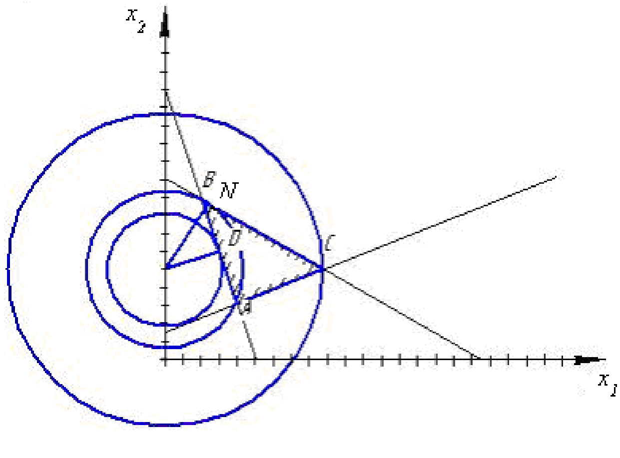


Рисунок 21.6

1. Построить область допустимых решений (рисунок 21.6).
2. С центром в точке (0;5) построить семейство окружностей и найти такие точки, которые были бы общими и для окружностей с минимальным и максимально возможными радиусами и для треугольника допустимых решений. В нашем случае это точки касания C и D.
3. Определить координаты найденных точек. Эти координаты и есть решения задачи.
4. Определить $\min F$ и $\max F$. Для чего подставить значения координат точек решения задачи в формулу (21.5) целевой функции. В нашем случае $\min F = F(x_{1D}, x_{2D})$, $\max F = F(x_{1C}, x_{2C})$

21.1.2 Метод множителей Лагранжа

Если в исходной модели математического программирования (19.1)-(19.3) в системе ограничений (19.2) содержатся только равенства, и отсутствует условие (19.3) и $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = 1,2,...,m$ – функции непрерывные вместе со своими частными производными, тогда задача (19.1)–(19.3) примет вид:

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max , \tag{21.7}$$

при условии системы ограничений

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, \quad i = 1,2,...,m. \tag{21.8}$$

В курсе математического анализа задачу (21.7)–(21.8) называют задачей на условный экстремум, так как поведение независимых переменных ограничено определенными условиями (21.8).

Эту задачу можно решить *методом множителей Лагранжа*.

Метод множителей Лагранжа основывается на следующей теореме:

*Теорема***.** Пусть точка M_0 является точкой условного экстремума функции $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при выполнении условий (21.8) (уравнений связи). Тогда существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ что в точке M_0 будут выполняться условия

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_j} + ... + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_j} = 0, \; j = 1,2,...,n.$$

Функцией Лагранжа для данной функции $F = f(M)$ называется функция вида

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)). \quad (21.9)$$

Из теоремы следует, что если точка M_0 является точкой условного экстремума функции $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то она является стационарной точкой для функции Лагранжа, то есть должны выполняться следующие равенства

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, & j = 1, 2, .., n, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, & i = 1, 2, ..., m. \end{cases} \quad (21.10)$$

Для отыскания точек условного экстремума следует рассмотреть систему $n + m$ уравнений (21.10) относительно неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m$ и решить ее. Всякое решение системы уравнений (21.10) определяет точку $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, которая является подозрительной точкой на локальный условный экстремум. Следовательно, решив систему уравнений (21.10), получим все точки, в которых целевая функция (21.7) может иметь экстремальное значение.

Описанный здесь метод множителей Лагранжа требует нескольких разъяснений и уточнений.

Система ограничений (21.8) очень часто в литературе рассматривается как система уравнений. Если взять (21.8) как систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), являющуюся совместной и определенной, т.е. имеющую одно единственной решение, то задача условного экстремума прозвучит так: найти такую точку $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, которая обеспечивает экстремум функции $F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min)$ при условии конкретной точки $X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$. Конечно, такая задача не имеет смысла (требуется найти точку, которая уже дана).

Поэтому система ограничений (21.8) должна пониматься не как система, а как совокупность функций $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, \quad i = 1,2,...,m$.

Система $(n+m)$ уравнений (21.10) с $(n+m)$ неизвестными требует уточнений.

Предположим, что функция $F = f(M)$ квадратичная, а функции $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i$, $i = 1,2,...,m$ - линейные (типичный случай квадратичного программирования).

Система (21.10) предполагает наличие частных производных, приравненных к нулю: $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,2,..,n, \ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, i = 1,2,...,m$.

При дифференцировании вторая степень снижается на единицу. Иными словами, система (21.10) становится линейной.

Если СЛАУ совместная и определенная- решение одно единственное, точка экстремума одна.

Если СЛАУ совместная и неопределенная- решение составляет бесконечное множество точек. Тогда бесконечное множество экстремумов целевой функции- абсурд.

Вместе с тем, в задачах с условным экстремумом квадратичных функций (это будет показано ниже) встречаются два, три, т.е. ограниченное число условных экстремумов. Это требует от СЛАУ ограниченное число решений (>1), что также является невозможным. Для этого в системе уравнений (21.10) должно быть хотя бы одно квадратичное, кубическое и т.д. уравнение.

Чтобы избежать такого казуса с функцией Лагранжа и системой (21.10), предлагается их несколько упростить.

В функции Лагранжа (21.9) изъять обозначение $\sum_{j=1}^{m}$.

Тогда

$$L_i(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_i) = f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \lambda_i(b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots x_n)), \ i = 1,2,\ldots m \qquad (21.11)$$

Формируется функция Лагранжа для одного любого (или каждого) из *m* условий совокупности функций- ограничений (21.8). Всего таких функций будет *m*.

Система уравнений (21.10) для каждой из функций Лагранжа принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial L_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, .., n, \\ \frac{\partial Li}{\partial \lambda_i} = 0. \end{cases} \qquad (21.12)$$

Эта система имеет $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_i$. Например, если $f(x_1, x_2, ..., x_n)$- квадратичная функция, то (21.12) есть СЛАУ. Совместная и определенная СЛАУ дает в решении точку $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, подозрительную на локальный условный экстремум. Перебрав индекс i от 1 до m, получим m вариантов функции Лагранжа (21.11) и m систем уравнений (21.12).

Иными словами, производится исследование на условный экстремум для каждого из m условий (21.8).

Лучше несколько раз решать простую задачу, чем один раз сложную.

Но не каждое условие (21.8) дает решение на условный экстремум. Чтобы избежать ненужных излишних вычислений можно воспользоваться геометрическим методом решения задачи квадратичного программирования, который поможет убрать те из условий (21.8), в которых условного экстремума или нет или он не востребован. Геометрически это выражается в ситуации, когда проекция лини уровня не имеет касания с прямой, отражающей одно из условий (21.8). Тогда именно это условие становится лишним в исследованиях. Когда указанное касание имеет место, то условие ограничения, соответствующее этой прямой, можно включить в список исследований.. Но среди этих условных экстремумов могут оказаться такие, которые не востребованы самой задачей математического программирования

Замечание. Касание линии уровня с прямой не нужно путать с касанием этой линии с концом отрезка или с вершиной многоугольника.

Приведем несколько примеров.

На рисунке 21.1, где пример 1 решается геометрическим методом, в трехмерном пространстве отчетливо видно, что $\min F = \mathrm{MN}$, $\max F = \mathrm{PD}$, то есть точки N и D являются решением задачи. На рисунке 21.2 этот же пример 1 решается в двухмерном пространстве (на плоскости). Для отыскания точек N и D нужно было найти точки касания проекций линий уровня поверхности F (парабол) с границей области допустимых значений (четырехугольник OABC).

Если вернуться к рисунку 21.1, то найденные точки N и D можно прокомментировать следующим образом. Точка N является экстремальной точкой (max) для функции $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1$ при условии $x_2 = 0$. Действительно, если поверхность F рассечь плоскостью $x_2 = 0$, то в сечении линия пересечения (парабола) достигает максимума в точке N(3,0) и этот максимум равен отрезку MN. В данном случае конкретно для функции F и условия $x_2 = 0$ имеет место условный максимум. Но для задачи квадратического программирования это будет минимум целевой функции $\min F$.

Рассуждая аналогичным образом, точка D (точка касания параболы $F = const$ и отрезка AB) есть точка условного максимума функции F при условии $x_1 + 2x_2 = 15$. Или при пересечении поверхности F плоскостью $x_1 + 2x_2 = 15$ образуется линия пересечения (то же парабола), которая достигает максимума в точке D (координаты надо еще определить) и этот максимум равен отрезку PD. В данном случае условный максимум функции F совпадает с максимумом целевой функции $\max F$.

Этот пример показывает, что общепринятая постановка задачи математического программирования, связанная с экстремумами целевой функции $\min F$ и $\max F$ не всегда корректна. Здесь более уместна постановка задачи на отыскание точек, обеспечивающих наименьшее и наибольшее значение целевой функции F при заданных ограничениях, а не $\min F$ и $\max F$.

Таким образом, обе точки N и D, лежащих на соответствующих двух прямых (OC и AB), то есть принадлежащих своим соответствующим условиям ограничения, могут быть подвергнуты аналитическим исследованиям с помощью метода множителей Лагранжа.

Остальные прямые и соответствующие им условия (OA: $x_1 = 0$ и BC: $3x_1 + 2x_2 = 24$), как не имеющие точек касания с параболами-линиями уровня F, а значит не имеющие условных экстремумов функции F, принимать участие в исследованиях с помощью метода множителей Лагранжа не должны.

На рисунке 21.3 геометрическим методом в трехмерном пространстве решен пример 2 квадратичного программирования. На рис.21.4 геометрическое решение той же задачи на плоскости. Решение задачи есть точка O, где $\min F = 0$ и точка C, где $\max F = SC$.

Обе точки не являются условными экстремумами, т.к. не являются точками касания проекций линий уровня и прямых- условий ограничения. Точки O и C находятся геометрически, а $\min F$ и $\max F$ определяется как задача на определение наибольшего и наименьшего значения функции. Исследовать точки O и C методом множителей Лагранжа нет никакого смысла.

Проводя из точки O окружности разных радиусов с целью отыскания $\max F$ (напомним, что радиус окружностей равен $\sqrt{F}$), мы имеем три точки касания L, T, N проекцией линий уровня поверхности F (окружностей) с границами области допустимых решений (стороны AB, BC, CA и соответствующие им условия ограничения $3x_1 + x_2 = 15$, $4x_1 + 7x_2 = 71$, $2x_1 - 5x_2 = -7$). Эти точки касания являются условными экстремумами функции F. В сечении поверхности F плоскостью $3x_1 + x_2 = 15$ имеем параболу, которая в точке L имеет минимум F равный отрезку KL. При пересечении плоскости $4x_1 + 7x_2 = 71$ той же поверхности F имеем в точке T

$\min F$, равный отрезку PT. При сечении поверхности F плоскостью $2x_1 - 5x_2 = -7$ имеем в точке N $\min F$, равный отрезку MN.

Но значения всех трех условных экстремумов функции F находятся между наименьшим $\min F = 0$ и наибольшим $\max F = \mathrm{SC}$ значениями целевой функции. Поэтому применение метода множителей Лагранжа в данном примере приведет к решению, которое не будет востребовано в данной задаче. Таким образом, здесь остается только геометрический метод решения задачи квадратичного программирования. Аналитический метод, пожалуй, можно свести к задаче определения наибольшего и наименьшего значения функции F в точках O,A, B, C без применения метода множителей Лагранжа.

На рис. 21.5, 21.6 решен пример 3. Результаты решения: точка D обеспечивает $\min F = \mathrm{TD}$, точка C дает $\max F = \mathrm{SC}$. В сечении поверхности F плоскостью $3x_1 + x_2 = 15$, на которой лежит отрезок AB, имеем параболу, которая в точке D принимает минимальное значение $\min F$ равное отрезку TD. Этот условный минимум совпадает с минимумом целевой функции нашей задачи.

Обратим внимание, что точка D на рисунке 21.6 была найдена в результате касания окружности с центром (0,5) (проекция линии уровня поверхности F) с прямой AB (геометрическая интерпретация одного из ограничений задачи квадратичного программирования). Это дает нам основание включить точку D в аналитическое исследование с помощью множителей Лагранжа.

На рисунке 21.5, 21.6 можно наблюдать точку N (точку касания окружности с центром (0,5) и прямой BC) и условный экстремум $\min F = \mathrm{MN}$. Но не смотря на это, включать точку N в исследования с помощью метода множителей Лагранжа нет смысла, т.к. это решение не будет востребовано: $TD < MN < SC$

Система (21.12) является *необходимым условием* существования локального условного экстремума, но не достаточным

Каждое решение, подозрительное на экстремум, надо проверить с помощью *достаточного условия условного экстремума*. Его сущность приведена ниже.

Пусть $M^*\left(x_1^*, x_2^*\right)$ и λ_i^* –решение системы (21.12).

Вычислить определитель:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} g_j\left(M^*\right) & \frac{\partial}{\partial x_2} g_j\left(M^*\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_j\left(M^*\right) & \frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}} L_j\left(M^*, \lambda_j^*\right) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} L_j\left(M^*, \lambda_j^*\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} g_j\left(M^*\right) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} L_j\left(M^*, \lambda_j^*\right) & \frac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}} L_j\left(M^*, \lambda_j^*\right) \end{vmatrix}. \qquad (21.13)$$

Если $\Delta < 0$, то функция $f(x_1, x_2)$ имеет в точке $M^*(x_1^*, x_2^*)$ условный максимум, при условии $g_j(x_1, x_2)$. Если $\Delta > 0$ – условный минимум.

Замечание. Если модель (21.7), (21.8) имеет две переменные x_1 и x_2 , то задачу отыскания точек, подозрительных на условный экстремум можно решить проще. В каждом из условий (21.8) определяют любую переменную, выраженную через другую переменную, и подставляют в целевую функцию F (21.7), преобразуя ее в функцию одной переменной. Дальнейшие исследования этой функции на экстремум приводят к желаемым точкам.

21.2. Решение типовых задач и примеров

Задача 1. Найти значения переменных x_1, x_2, при которых обеспечивается максимум (минимум) целевой функции F при заданных ограничительных условиях.

Задачу решить методами: графическим и методом множителей Лагранжа.

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \ ,$$

при условии

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Графический метод решения.

Строим область допустимых решений, определяемую соотношениями неравенств задачи (рисунок 21.2). Такой областью является четырехугольник OABC.

Проекции линий уровня определяются формулой для целевой функции F: $x_2 - x_1^2 + 6x_1 = x_2 - (x_1 - 3)^2 + 9 = C = const$, где С-произвольное постоянное число. Геометрически получаем семейство парабол, которые в зависимости от значения числа С перемещается параллельно друг другу по прямой $x_1 = 3$ в направлении оси Ox_2. Чем больше С, тем выше размещена парабола, тем больше значение целевой функции F и наоборот.

Строим эти линии (параболы) так, чтобы они касались четырехугольника OABC. В нашем случае получились две точки касания: точка N – точка касания параболы с отрезком ОС и точка D –точка касания параболы с отрезком АВ. Тогда нижняя парабола (точка N) обеспечит $\min F$, верхняя (точка D) – $\max F$.

Осталось только найти эти точки.

Точка N- вершина параболы, касающаяся прямой $x_2 = 0$.

Для определения точки касания надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_2 - (x_1 - 3)^2 + 9 = C, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Но значение C неизвестно. $x_2 = 0$ - уравнение касательной к параболе с угловым коэффициентом равным нулю.

Если $x_2 = (x_1 - 3)^2 + C - 9$ - парабола, то $x_2^{/} = 2(x_1 - 3)$ - угловой коэффициент всех касательных к параболе в том числе и касательной $x_2 = 0$, т.е. $2(x_1 - 3) = 0$, откуда $x_1 = 3$.

Координаты точки N: $x_{1\mathrm{N}} = 3,\ x_{2\mathrm{N}} = 0$.

Подставляя эти значения в формулу для F, имеем

$$\min F = 0 - 3^2 + 6 \cdot 3 = 9.$$

Точка D- точка касания параболы $x_2 - (x_1 - 3)^2 + 9 = C$ с отрезком AB, уравнение которого $x_1 + 2x_2 = 15$.

Как уже было определено, угловой коэффициент всех касательных к параболе равен $x_2^{/} = 2(x_1 - 3)$.

Определим угловой коэффициент прямой AB- k_{AB}

$$x_1 - 2x_2 = 15; \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{15}{2}; \quad k_{\mathrm{AB}} = -\frac{1}{2}.$$

Тогда $x_2^{/} = 2(x_1 - 3) = -\frac{1}{2}$; откуда $x_1 = 2{,}75$.

При этом $x_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2{,}75 + \frac{15}{2} = 6{,}125$.

Координаты точки D: $x_{1\mathrm{D}} = 2{,}75;\ x_{2\mathrm{D}} = 6{,}125$.

Целевая функция в точке D имеет значение

$$\max F = 6{,}125 - 2{,}75^2 + 6 \cdot 2{,}75 = 15{,}0625.$$

Решение задачи: при $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ имеем $\min F = 9$, при $x_1 = 2{,}75$, $x_2 = 6{,}125$ имеем $\max F = 15{,}0625$.

Решение задачи методом множителей Лагранжа.

Геометрический метод подсказывает: точки N и D подозрительны на условный экстремум. Последовательно проверим каждую точку.

Для точки N задача условного экстремума формулируется так.

Найти экстремум функции $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1$ при условии $x_2 = 0$.

Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_2 - x_1^2 + 6x_1 + \lambda_1(0 - x_2).$$

Находим частные производные $\frac{\partial L}{\partial x_i}, i = 1{,}2,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}$, приравниваем их к нулю и решаем полученную систему уравнений.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_2 - x_1^2 + 6x_1 - \lambda_1 x_2\right) = -2x_1 + 6 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2 - x_1^2 + 6x_1 - \lambda_1 x_2\right) = 1 - \lambda_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left(x_2 - x_1^2 + 6x_1 - \lambda_1 x_2\right) = -x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ \lambda_1 = 1, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Проверим подозрительную на экстремум точку N (3,0), $\lambda_1 = 1$ с помощью достаточного условия условного экстремума. Для этого вычислим необходимые частные производные в этой точке и подставим их в определитель третьего порядка.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g_1(\mathrm{N}) = \frac{\partial}{\partial x_1} x_2 \Big|_{\mathrm{N}} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x_2} g_1(\mathrm{N}) = \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 \Big|_{\mathrm{N}} = 1.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} L(\mathrm{N}, \lambda_1) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(x_2 - x_1^2 + 6x_1 - \lambda_1 x_2\right)\Big|_{\mathrm{N},\lambda_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-2x_1 + 6\right)\Big|_{\mathrm{N},\lambda_1} = -2.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} L(\mathrm{N}, \lambda_1) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(x_2 - x_1^2 + 6x_1 - \lambda_1 x_2\right)\Big|_{\mathrm{N},\lambda_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(1 - \lambda_1\right)\Big|_{\mathrm{N},\lambda_1} = 0.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} L(\mathrm{N}, \lambda_1) = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(x_2 - x_1^2 + 6x_1 - \lambda_1 x_2\right)\Big|_{\mathrm{N},\lambda_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(1 - \lambda_1\right)\Big|_{\mathrm{N},\lambda_1} = 0.$$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0.$$

Функция $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1$ в точке N (3,0) имеет условный максимум, при условии $x_2 = 0$, но для задачи квадратичного программирования это будет $\min F$. Найдем его:

$$\min F = 0 - 3^2 + 6 \cdot 3 = 9.$$

Для точки D задача условного экстремума формулируется так.

Найти экстремум функции $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1$ при условии $x_1 + 2x_2 = 15$.

Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_2) = x_2 - x_1^2 + 6x_1 + \lambda_2\left(15 - x_1 - 2x_2\right).$$

Находим частные производные $\frac{\partial L}{\partial x_i}, i = 1{,}2,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}$, приравниваем их к нулю и решаем полученную систему уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big(x_2 - x_1^2 + 6x_1 + \lambda_2\left(15 - x_1 - 2x_2\right)\Big) = -2x_1 + 6 - \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Big(x_2 - x_1^2 + 6x_1 + \lambda_2\left(15 - x_1 - 2x_2\right)\Big) = 1 - 2\lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \dfrac{\partial}{\partial \lambda_2}\Big(x_2 - x_1^2 + 6x_1 + \lambda_2\left(15 - x_1 - 2x_2\right)\Big) = 15 - x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -2x_1 + 6 - 0,5 = 0, \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2} = 0,5, \\ 15 - 2,75 - 2x_2 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2,75, \\ \lambda_2 = 0,5, \\ x_2 = 6,125. \end{cases}$$

С помощью достаточного условия условного экстремума проверим точку D (2,75;6,125), $\lambda_2 = 0,5$.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g_2(D) = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 + 2x_2)\Big|_{\mathrm{D}} = 1; \quad \frac{\partial}{\partial x_2} g_2(D) = \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 + 2x_2)\Big|_{\mathrm{D}} = 2.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} L(D, \lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Big(x_2 - x_1^2 + 6x_1 + \lambda_2\left(15 - x_1 - 2x_2\right)\Big)\Big|_{\mathrm{D},\lambda_2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-2x_1 + 6 - \lambda_2\right)\Big|_{\mathrm{D},\lambda_2} = -2.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} L(D, \lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\Big(x_2 - x_1^2 + 6x_1 + \lambda_2\left(15 - x_1 - 2x_2\right)\Big)\Big|_{\mathrm{D},\lambda_2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(1 - 2\lambda_2\right)\Big|_{\mathrm{D},\lambda_2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} L(D, \lambda_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big(x_2 - x_1^2 + 6x_1 + \lambda_2(15 - x_1 - 2x_2)\Big)\Big|_{\mathrm{D},\lambda_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(1 - 2\lambda_2)\Big|_{\mathrm{D},\lambda_2} = 0.$$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \cdot$$

Функция $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1$ в точке D (2,75; 6,125) имеет условный максимум, при условии $x_1 + 2x_2 = 15$, $\max F = 6,125 - 2,75^2 + 6 \cdot 2,75 = 15,0625.$

Решения задачи двумя методами совпали.

Задача 2. Найти значения переменных x_1, x_2, при которых обеспечивается максимум (минимум) целевой функции F при заданных ограничительных условиях.

Задачу решить двумя методами: графическим и методом множителей Лагранжа.

$$F = (x_1 - 15)^2 + (x_2 - 22)^2,$$

при условиях

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \le 84, \\ 2x_1 - x_2 \ge -4, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 8, \\ 7x_1 + 6x_2 \ge 42, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение.

Графический метод решения задачи.

Строим область допустимых решений, определяемую системой неравенств в условии задачи. Такой областью будет четырехугольник ABCD (рисунок 21.7).

Геометрическая модель проекций линий уровня поверхности F на плоскость x_1Ox_2 являются окружности с центром в точке O (15; 22) и радиусом $\sqrt{F}$, которые описываются уравнением: $(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 22)^2 = \left(\sqrt{F}\right)^2$

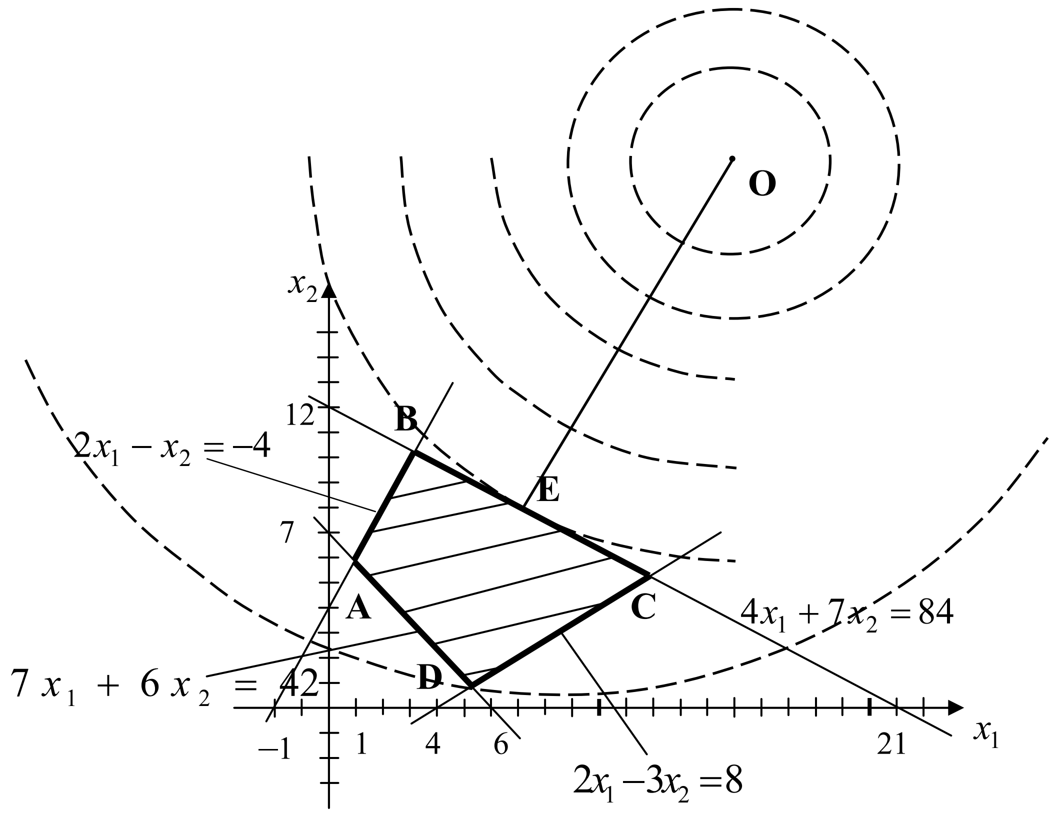


Рисунок 21.7

По величине радиуса можно сразу определить значение целевой функции F.

Из всего семейства окружностей с центром в точке О (15;22) выбираем две.

Первая окружность с самым малым радиусом касается четырехугольника ABCD на прямой BC в точке E. Это значит: в точке E обеспечивается *min F* при соблюдении условий ограничений.

Вторая окружность с наибольшим радиусом касается четырехугольника ABCD в вершине D. Это значит: в точке *D* обеспечивается *maxF* при соблюдении условий ограничений.

Значит, координаты точек E и D есть решение задачи. Осталось только их определить.

Уравнение BC: $4x_1 + 7x_2 = 84$.

Радиус OE перпендикулярен касательной BC. Тогда уравнение OE как уравнение прямой проходящей через точку О (15;22) перпендикулярно прямой BC имеет вид:

$$\frac{x_1 - 15}{4} = \frac{x_2 - 22}{7} \Rightarrow 7(x_1 - 15) = 4(x_2 - 22) \Rightarrow 7x_1 - 4x_2 - 17 = 0.$$

Точка E является точкой пересечения прямых BC и OE.

Она находится решением системы уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 = 84, \\ 7x_1 - 4x_2 = 17. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7, \\ x_2 = 8. \end{cases}$$

Точка E (7;8) найдена, при этом $\min F = (7 - 15)^2 + (8 - 22)^2 = 260$. Точка D является точкой пересечения прямых DC: ($2x_1 - 3x_2 = 8$) и AD: ($7x_1 + 6x_2 = 42$). Найдем координаты точки D в результате решения системы:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 8, \\ 7x_1 + 6x_2 = 42. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{58}{11}, \\ x_2 = \dfrac{28}{33}. \end{cases}$$

Точка D$\left(\frac{58}{11};\frac{28}{33}\right)$ определяет $\max F = \left(\frac{58}{11} - 15\right)^2 + \left(\frac{28}{33} - 22\right)^2 = 542.$

Решение задачи методом множителей Лагранжа.

Точка D обеспечивает $\max F$ не являясь условным экстремумом (отсутствует касание окружности с прямой). В этой точке имеет место наибольшее значение функции на границе условий. Поэтому проверить эту точку методом множителей Лагранжа нельзя.

Точка E обеспечивает $\min F$ и является подозрительной на условный экстремум функции F (здесь имеет место касание окружности с прямой BC).

Для точки E задача условного экстремума формулируется следующим образом: найти экстремум функции $F=(x_1-15)^2+(x_2-22)^2$ при условии $4x_1+7x_2=84$.

Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x_1,x_2,\lambda)=(x_1-15)^2+(x_2-22)^2+\lambda(84-4x_1-7x_2).$$

Находим частные производные $\frac{\partial L}{\partial x_i}, i=1,2,$ $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$, приравниваем их к нулю и решаем полученную систему уравнений.

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left((x_1-15)^2+(x_2-22)^2+\lambda(84-4x_1-7x_2)\right)=2(x_1-15)-4\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left((x_1-15)^2+(x_2-22)^2+\lambda(84-4x_1-7x_2)\right)=2(x_2-22)-7\lambda=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=\frac{\partial}{\partial \lambda}\left((x_1-15)^2+(x_2-22)^2+\lambda(84-4x_1-7x_2)\right)=84-4x_1-7x_2=0.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}2x_1-30=4\lambda,\\ 2x_2-44=7\lambda,\\ 4x_1+7x_2=84.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}14x_1-210=28\lambda,\\ 8x_2-176=28\lambda.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}14x_1-210=8x_2-176,\\ 4x_1+7x_2=84.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7x_1-4x_2=17,\\ 4x_1+7x_2=84.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=7,\\ x_2=8,\\ \lambda=-4.\end{cases}$$

С помощью достаточного условия условного экстремума проверим является ли подозрительная на условный экстремум точка E (7;8), $\lambda=-4$ таковой.

$$\frac{\partial}{\partial x_1}g(\mathrm{E})=\frac{\partial}{\partial x_1}(4x_1+7x_2)\Big|_{\mathrm{E}}=4;\quad \frac{\partial}{\partial x_2}g(\mathrm{E})=\frac{\partial}{\partial x_2}(4x_1+7x_2)\Big|_{\mathrm{E}}=7.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}L(\mathrm{E},\lambda)=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left((x_1-15)^2+(x_2-22)^2+\lambda(84-4x_1-7x_2)\right)\Big|_{\mathrm{E},\lambda}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(2(x_1-15)-4\lambda\right)\Big|_{\mathrm{E},\lambda}=2.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}L(\mathrm{E},\lambda)=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left((x_1-15)^2+(x_2-22)^2+\lambda(84-4x_1-7x_2)\right)\Big|_{\mathrm{E},\lambda}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(2(x_2-22)-7\lambda\right)\Big|_{\mathrm{E},\lambda}=0.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} L(\mathrm{E},\lambda) = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\left(x_1-15\right)^2+\left(x_2-22\right)^2+\lambda\left(84-4x_1-7x_2\right)\right)\Bigg|_{\mathrm{E},\lambda} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(2\left(x_2-22\right)-7\lambda\right)\Bigg|_{\mathrm{E},\lambda} = 2.$$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 130 > 0\,.$$

Функция $F = \left(x_1 - 15\right)^2 + \left(x_2 - 22\right)^2$ в точке Е (7;8) имеет условный минимум, при условии $4x_1 + 7x_2 = 84$ и этот *min F*=260 является *min F* задачи математического программирования.

Решения задачи с помощью двух методов совпали.

21.3. Задания на контрольную работу

Найти значения переменных x_1, x_2, при которых обеспечивается максимум (минимум) целевой функции *F* при заданных ограничительных условиях.

Задачу решить двумя методами: графическим и методом множителей Лагранжа.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \ge 14 \\ x_1 - 4x_2 \ge -17 \\ 6x_1 - 7x_2 \le 11 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\qquad f(x) = -{x_1}^2 + 6x_1 + x_2$

2. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 4 \\ 5x_1 - 2x_2 \ge 7 \\ 4x_1 + x_2 \le 29 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\qquad f(x) = \left(x_1 + 7\right)^2 + \left(x_2 - 8\right)^2$

3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge -3 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\qquad f(x) = {x_2}^2 - 6x_2 - x_1$

4. $\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 \le 40 \\ 12x_1 + 5x_2 \ge 28 \\ 2x_1 - 11x_2 \ge -90 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\quad f(x) = (x_1 - 21)^2 + (x_2 + 3)^2$

5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge -1 \\ 7x_1 - 2x_2 \ge 17 \\ x_1 + 2x_2 \le 23 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\quad f(x) = x_2 - x_1^2 + 10x_1$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 - 4x_2 \ge -28 \\ 7x_1 + 2x_2 \le 44 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\quad f(x) = (x_1 + 4)^2 + (x_2 + 9)^2$

7. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \ge 24 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ 3x_1 - 10x_2 \ge -60 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\quad f(x) = x_2 - x_1^2 + 8x_1$

8. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \ge -11 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 41 \\ x_1 + 4x_2 \ge 17 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\quad f(x) = (x_1 + 3)^2 + (x_2 + 29)^2$

9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 12 \\ 3x_1 - 7x_2 \ge -33 \\ 9x_1 - 2x_2 \le 72 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\quad f(x) = x_1 - x_2^2 + 12x_2$

10. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 \le 2 \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 28 \\ 2x_1 + 9x_2 \le 100 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\quad f(x) = (x_1 - 15)^2 + (x_2 + 5)^2$

22. Динамическое программирование

22.1 Краткие сведения из теории

Динамическое программирование – метод нахождения оптимальных решений в задачах с многошаговой (многоэтапной) структурой.

Многие экономические процессы расчленяются на этапы естественным образом. Это все процессы планирования и управления, развивающиеся во времени. Естественным этапом (шагом) в них может быть год, квартал, месяц, декада, неделя и т.д. Но метод динамического программирования может применяться в задачах, где время вообще не фигурирует. Например, в задаче нахождения оптимального режима ведения поезда, которая рассмотрена ниже. Разделение на этапы в таких задачах искусственное.

“Динамика” динамического программирования заключена в методе решения.

Общий подход к данному методу можно выразить формулой: лучше много раз решать сравнительно простую задачу на каждом этапе, чем один раз сложную.

Но оптимизация управления на каждом этапе в отдельности не обеспечивает оптимизации процесса в целом. Здесь нужно как-то учитывать одновременно и принимаемое решение на данном этапе и его последствия.

Динамическое программирование основывается на использовании принципа оптимальности, разработанного Р.Беллманом.

Принцип Беллмана: каково бы ни было начальное состояние системы на каждом этапе и управление, выбранное на этом этапе, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного этапа.

Этот принцип можно выразить рекуррентной формулой – *уравнением Беллмана*:

$$F_i(s) = \min\left\{\left[\tilde{N}_{s,k} + F_{i-1}(k)\right]; \left[\tilde{N}_{s,l} + F_{i-1}(l)\right]\right\}.$$

Здесь $F_i(s)$ – целевая функция (стоимость, затраты, расстояние и т.д.), на i-том этапе, начиная с которого до конца процесса осталось i этапов;

s – одно из начальных состояний системы на i-том этапе;

k, l – конечные состояния, системы на i-том этапе, или начальные состояния системы на (i-1) этапе;

$C_{s,k}$, $C_{s,l}$ – решения (тариф, затраты, расстояние и т.д.), принимаемые на i-том этапе и переводящие систему из начального состояния s в конечное состояние k или l на данном этапе;

$F_{i-1}(k), F_{i-1}(l)$ – целевые функции на (i-1) этапе, соответствующие начальному состоянию системы k или l на этом этапе.

Согласно принципа оптимальности независимо от принятых решений $C_{s,k}$ или $C_{s,l}$ на i-м этапе последующие управления должны быть оптимальными относительно состояний k или l, к которым придет система в конце данного этапа, т.е. целевые функции на последующем (i-1)-м этапе $F_{i-1}(k)$ и $F_{i-1}(l)$ должны быть минимальными.

Т.к. буквой F в рекуррентной формуле обозначаются целевые функции всех этапов, то принцип оптимальности обязывает их быть оптимальными всюду. Для обеспечения оптимальности целевой функции $F_i(s)$ на i-м этапе в условиях s-го начального состояния ее необходимо минимизировать. Это значит из двух сумм в фигурных скобках выбрать наименьшую.

Уравнение Беллмана показывает, что оптимальная целевая функция $F_i(s)$ на i–м этапе зависит не только от принятого решения $C_{s,k}$ или $C_{s,l}$ на этом этапе, но и от последствий данного решения ($F_{i-1}(k)$ или $F_{i-1}(l)$).

Но на данном i-том этапе существует не одно начальное состояние s, а несколько. Поэтому определяют оптимальные целевые функции F_i для каждого начального состояния системы на i-м этапе, каждая из которых определит свое оптимальное решение C для своего начального состояния. Так получают набор оптимальных решений для i-го этапа, который называют *условно-оптимальными решениями* (условными, т.к. каждое оптимальное решение зависит от условия – того или иного начального состояния i-го этапа).

Условно-оптимальные целевые функции остальных этапов определяются аналогично. Понятно, что количество условно-оптимальных решений на каждом этапе определяется количеством начальных состояний системы на этих этапах.

В условии задачи даны все оценки принимаемых решений от каждого начального состояния любого этапа к каждому конечному состоянию этого этапа. Но последствия того или иного решения на любом этапе неизвестны. Поэтому уравнение Беллмана спонтанно не применяют.

Среди всех этапов системы существует одни, который может планироваться без учета последствий. Это последний этап. Получается одна из особенностей динамического программирования – всю вычислительную процедуру нужно начинать от конца к началу.

Если на последнем этапе i=1 (до конца процесса остался один этап) имеется три начальных состояния системы P, M, N и одно конечное состояние W (оно же конечное состояние системы в целом), то при естественном отсутствии последствий уравнения Беллмана принимают вид:

$$F_1(P) = C_{P,W};\ F_1(M) = C_{M,W};\ F_1(N) = C_{N,W};$$

Данные решения известны по условию задачи, и они одновременно становятся условно-оптимальными целевыми функциями последнего этапа i=1.

На предпоследнем этапе i=2 (до конца процесса остается два этапа) составляют условно-оптимальные решения для каждого начального состояния этого этапа на основе уравнения Беллмана. Например, если на этапе i=2 одно из начальных состояний системы будет s, то для этого состояния уравнения Беллмана примет вид:

$$F_2(s) = \min\{[\tilde{N}_{s,P} + F_1(P)];[\tilde{N}_{s,M} + F_1(M)];[\tilde{N}_{s,N} + F_1(N)]\}.$$

Решения $C_{s,\mathrm{P}}; C_{s,\mathrm{M}}; C_{s,\mathrm{N}}$ известны по условию задачи, условно-оптимальные целевые функции этапа i=1 определены в исследовании последнего этапа. Условно-оптимальная целевая функция этапа i=2 для начального условия s определяется по минимуму из трех сумм, стоящих в фигурных скобках. Здесь же определяется условно-оптимальное решение для начального состояния s этапа i=2.

Двигаясь от конца к началу, проводя аналогичные исследования, находят условно-оптимальные решения для каждого начального состояния системы на каждом этапе.

Дойдя до начального, исходного этапа (если всех этапов n, то $i = n$, т.е. до конца процесса остается n этапов) видно, что для этапа $i = n$ начальных состояний одно. Оно совпадает с начальным состоянием всей системы. Значит, условно-оптимальных решений будет одно и оно становится безусловно-оптимальным. Остается только найти его по уравнению Беллмана.

Если начальное состояние системы и ее начального этапа ($i = n$) является А, конечные состояния этапа $i = n$ (начальные состояния этапа $i = n - 1$) является B, C, D, то уравнение Беллмана имеет вид:

$$F_n(A) = \min\{[\tilde{N}_{A,B} + F_{n-1}(B)];[\tilde{N}_{A,C} + F_{n-1}(C)];[\tilde{N}_{A,D} + F_{n-1}(D)]\}$$

Решения $\tilde{N}_{A,B}$, $\tilde{N}_{A,C}$, $\tilde{N}_{A,D}$ известны по условию задачи, условно-оптимальные целевые функции $F_{n-1}(B)$, $F_{n-1}(C)$, $F_{n-1}(D)$ определены исследованиями этапа $i = n - 1$.

Находя минимум из трех сумм, определяют безусловно оптимальную целевую функцию этапа $i = n$, а значит и безусловно оптимальное решение этапа $i = n$. Это будет одно из трех решений $C_{\mathrm{A,B}}$, $C_{\mathrm{A,C}}$ или $C_{\mathrm{A,D}}$. Это решение позволяет однозначно определить начальное состояние следующего $i = n - 1$ этапа, для которого ранее определены условно-оптимальные решения. Выбрав одно из них для получившегося однозначного начального состояния превращаем это условно-оптимальное решение в безусловно-оптимальное.

Двигаясь, таким образом, от начала к концу находят безусловно-оптимальные решения последовательно для каждого этапа, т.к. переходя к очередному последующему этапу будет определяться одно единственное его начальное состояние, для которого оптимальная целевая функция, а значит и оптимальное решение уже определены исследованиями при движении от конца к началу.

Совокупность безусловно-оптимальных решений всех этапов составляет оптимальное управление всей системы, а уравнение Беллмана на начальном этапе $i = n$ представляет результирующие оптимальное значение целевой функции задачи динамического программирования .

22.2. Решение типовой задачи

*Задача***.** Определить режим ведения поезда на каждом отрезке пути, который обеспечил бы минимальные приведенные расходы на передвижение по участку в целом.

*Решение***.** Расходы на передвижение по каждому отрезку пути зависят от длины отрезка, скорости поезда, сопротивления движению, а последнее – от профиля пути. Расстояние между отрезками пути и профиль железной дороги величины постоянные. Расходы на передвижение зависят в основном от скорости движения поезда, т.е. от режима ведения поезда. С другой стороны, целесообразно разбить весь участок пути на отрезки (этапы) с постоянным уклоном, т.к. на каждом таком этапе при выбранном режиме ведения поезда затраты на передвижение практически не меняются.

Пусть таких этапов будет пять (диаграмма на рисунке 22.1). Обозначим их индексом i и пронумеруем в обратном порядке: последний этап i=1, а начальный этап i=5.

Заблаговременно в тяговых расчетах по каждому этапу определяют расходы на передвижение в зависимости от скорости движения. На диаграмму наносят скорости движения в конце (начале) каждого этапа (на вертикальные прямые, разделяющие этапы) и соответствующие им расходы на передвижение от этапа к этапу (расходы показаны на линиях, соединяющих точки-скорости движения в начале и в конце этапа).

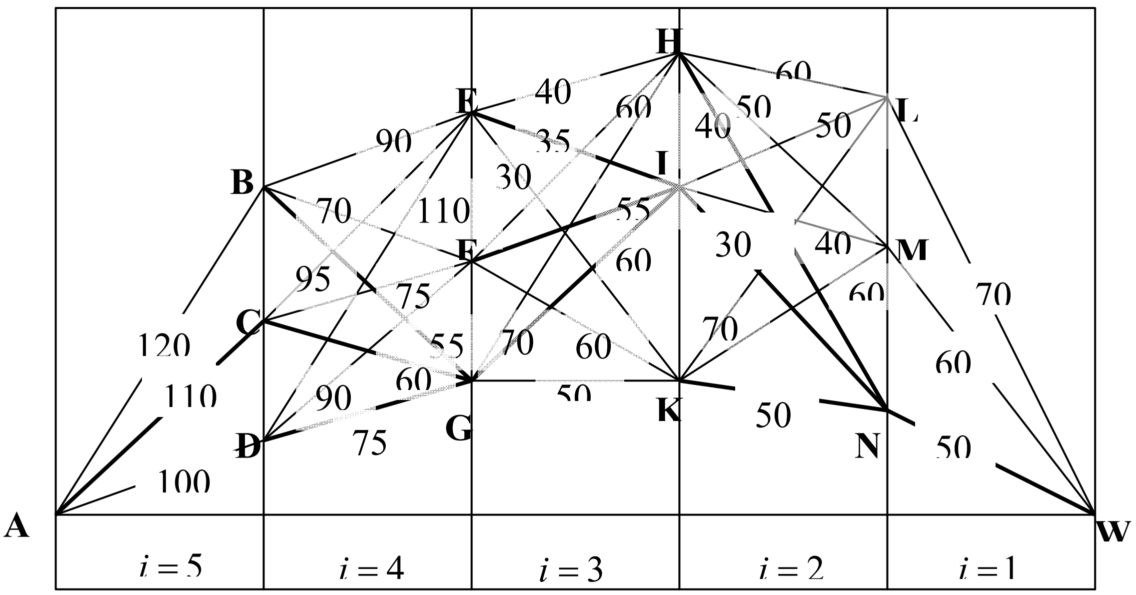


Рисунок 22.1

Скорости движения в начале и конце каждого этапа обозначают латинскими буквами A, B, C, D, E, …., L, M, N, W. Не трудно видеть, что для режима ведения поезда, как исследуемой системы, эти буквы обозначают начальные и конечные состояния системы на соответствующих этапах.

Расходы на передвижение на каждом этапе, показанные в цифрах на диаграмме, обозначают не только сами расходы на передвижение, но и соответствующие принятые решения на режим движения. Например, $C_{\text{B,E}} = 90$ обозначает, что на этапе i=4 принимая решение двигаться со скоростью B в начале и со скоростью E в конце этапа, расход на передвижение составит 90 единиц. Для этапа i=3 $C_{\text{F,K}} = 60$ показывает: решение двигаться в начале этапа со скоростью F и в конце этапа со скоростью K обеспечит расход на передвижении в 60 единиц.

В соответствии с идеей динамического программирования, в основе которой лежит принцип оптимальности Беллмана, решение начинают с последнего этапа i=1. Составляют для него три уравнения Беллмана в соответствии с начальными условиями L, M, N.

$$i = 1.\quad F_1(\text{L}) = C_{\text{L,W}} = 70,\quad F_1(\text{M}) = C_{\text{M,W}} = 60,\quad F_1(\text{N}) = C_{\text{N,W}} = 50$$

Имеем три условно-оптимальных решения и соответствующие им три целевых функций на этапе i=1.

Составляют уравнения Беллмана на предпоследнем этапе i=2 в соответствии с начальными условиями H, I, K этого этапа

$$i = 2,\ F_2(H) = \min\{[\tilde{N}_{H,L} + F_1(L)];[\tilde{N}_{H,M} + F_1(M)];[\tilde{N}_{H,N} + F_1(N)]\} =$$

$$= \min\{[60 + 70];[50 + 60];[40 + 50]\} = \min\{130;110;90\} = 90$$

На этапе $i=2$ в начальном состоянии H условно-оптимальное решение на движение можно сформулировать так: нужно двигаться со скоростью H в начале и со скоростью N в конце этапа $(C_{\mathrm{H,N}})$, при этом расходы на передвижение с учетом оптимального решения на последнем этапе составят 90 единиц.

Условно-оптимальное решение $(C_{\mathrm{H,N}})$.

Соответствующая целевая функция $F_2(\mathrm{H})=90$.

$$F_2(\mathrm{I})=\min\{[C_{\mathrm{I,L}}+F_1(\mathrm{L})];[C_{\mathrm{I,M}}+F_1(\mathrm{M})];[C_{\mathrm{I,N}}+F_1(\mathrm{N})]\}=$$
$$=\min\{[50+70];[40+60];[30+50]\}=\min\{120;100;80\}=80$$

Условно-оптимальное решение– $C_{\mathrm{I,N}}$, $F_2(\mathrm{I})=80$.

$$F_2(\mathrm{K})=\min\{[C_{\mathrm{K,L}}+F_1(\mathrm{L})];[C_{\mathrm{K,M}}+F_1(\mathrm{M})];[C_{\mathrm{K,N}}+F_1(\mathrm{N})]\}=$$
$$=\min\{[70+70];[60+60];[50+50]\}=\min\{140;120;100\}=100$$

Условно-оптимальное решение– $C_{\mathrm{K,N}}$, $F_2(\mathrm{K})=100$.

Этап $i=3$

$$F_3(\mathrm{E})=\min\{[C_{\mathrm{E,H}}+F_2(\mathrm{H})];[C_{\mathrm{E,I}}+F_2(\mathrm{I})];[C_{\mathrm{E,K}}+F_2(\mathrm{K})]\}=$$
$$=\min\{[40+90];[35+80];[30+100]\}=\min\{130;115;130\}=115$$

Условно-оптимальное решение– $C_{\mathrm{E,I}}$, $F_3(\mathrm{E})=115$.

$$F_3(\mathrm{F})=\min\{[C_{\mathrm{F,H}}+F_2(\mathrm{H})];[C_{\mathrm{F,I}}+F_2(\mathrm{I})];[C_{\mathrm{F,K}}+F_2(\mathrm{K})]\}=$$
$$=\min\{[60+90];[55+80];[60+100]\}=\min\{150;135;160\}=135$$

Условно-оптимальное решение– $C_{\mathrm{F,I}}$, $F_3(\mathrm{F})=135$

$$F_3(\mathrm{G})=\min\{[C_{\mathrm{G,H}}+F_2(\mathrm{H})];[C_{\mathrm{G,I}}+F_2(\mathrm{I})];[C_{\mathrm{G,K}}+F_2(\mathrm{K})]\}=$$
$$=\min\{[70+90];[60+80];[50+100]\}=\min\{160;140;150\}=140$$

Условно-оптимальное решение– $C_{\mathrm{G,I}}$, $F_3(\mathrm{G})=140$

Этап $i=4$

$$F_4(\mathrm{B})=\min\{[C_{\mathrm{B,E}}+F_3(\mathrm{E})];[C_{\mathrm{B,F}}+F_3(\mathrm{F})];[C_{\mathrm{B,G}}+F_3(\mathrm{G})]\}=$$
$$=\min\{[90+115];[70+135];[55+140]\}=\min\{205;205;195\}=195$$

Условно-оптимальное решение– $C_{\mathrm{B,G}}$, $F_4(\mathrm{B})=195$.

$$F_4(\mathrm{C})=\min\{[C_{\mathrm{C,E}}+F_3(\mathrm{E})];[C_{\mathrm{C,F}}+F_3(\mathrm{F})];[C_{\mathrm{C,G}}+F_3(\mathrm{G})]\}=$$
$$=\min\{[95+115];[75+135];[60+140]\}=\min\{210;210;200\}=200$$

Условно-оптимальное решение– $C_{\mathrm{C,G}}$, $F_4(\mathrm{C})=200$.

$$F_4(\mathrm{D})=\min\{[C_{\mathrm{D,E}}+F_3(\mathrm{E})];[C_{\mathrm{D,F}}+F_3(\mathrm{F})];[C_{\mathrm{D,G}}+F_3(\mathrm{G})]\}=$$
$$=\min\{[110+115];[90+135];[75+140]\}=\min\{225;225;215\}=215$$

Условно-оптимальное решение– $C_{\mathrm{D,G}}$, $F_4(\mathrm{D})=215$.

На исходном этапе $i=5$ начальное состояние одно, равное A. Поэтому уравнение Беллмана одно и решение из условно-оптимальных переходит в безусловно-оптимальное, т.к. выбора в условиях (начальных состояний) нет.

$$F_5(\mathrm{A}) = \min\{[C_{\mathrm{A,B}} + F_4(\mathrm{B})];[C_{\mathrm{A,C}} + F_4(\mathrm{C})];[C_{\mathrm{A,D}} + F_4(\mathrm{D})]\} =$$

$$= \min\{[120 + 195];[110 + 200];[100 + 215]\} = \min\{315; 310; 315\} = 310$$

Оптимальное решение – $C_{\mathrm{A,C}}$, $F_5(\mathrm{A}) = 310$

Двигаясь по этапам от начала к концу, составляем оптимальный режим движения поезда.

На первом этапе $(C_{\mathrm{A,C}})$ начиная с начальной скоростью А надо двигаться со скоростью С в конце этапа;

на втором этапе для начальной скорости С есть оптимальный режим $C_{\mathrm{C,G}}$, т.е. надо двигаться с начальной скоростью С и конечной G;

на третьем этапе $(C_{\mathrm{G,I}})$ – начальная скорость G, конечная – I;

на четвертом этапе $(C_{\mathrm{I,N}})$ – начальная скорость I, конечная – N;

на последнем этапе $(C_{\mathrm{N,W}})$ – начальная скорость N, конечная – W.

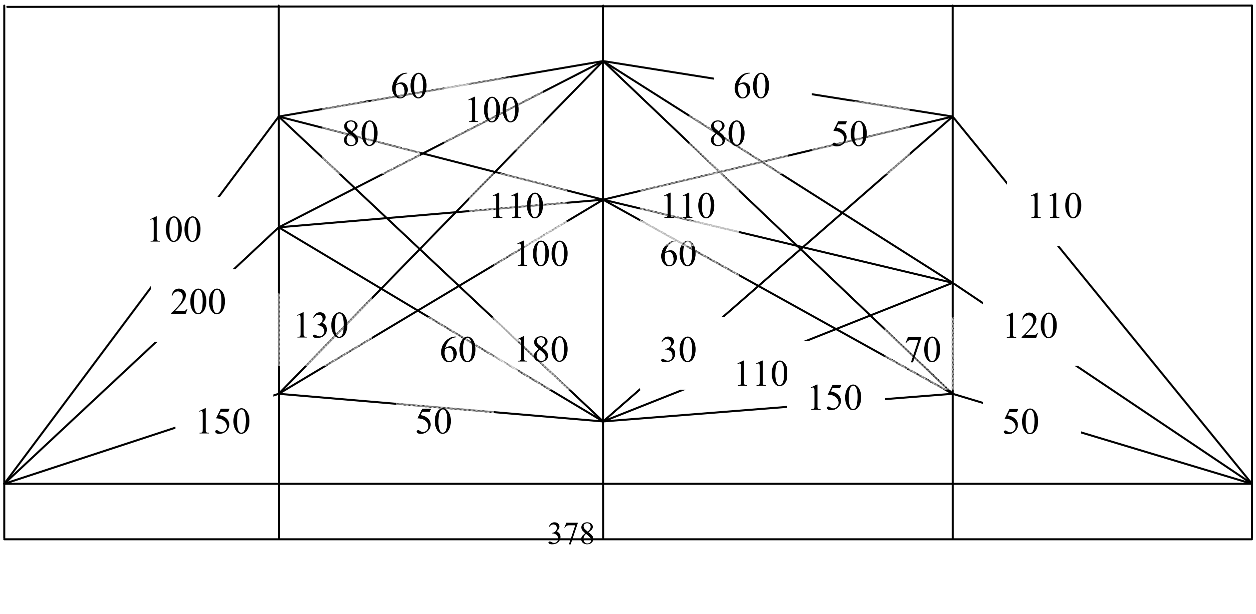
Сокращенно по этапам скоростной оптимальный режим ведения поезда выглядит так: A, C, G, I, N, W, при этом минимальные расходы на передвижение составят 310 единиц.

22.3.Задание на контрольную работу

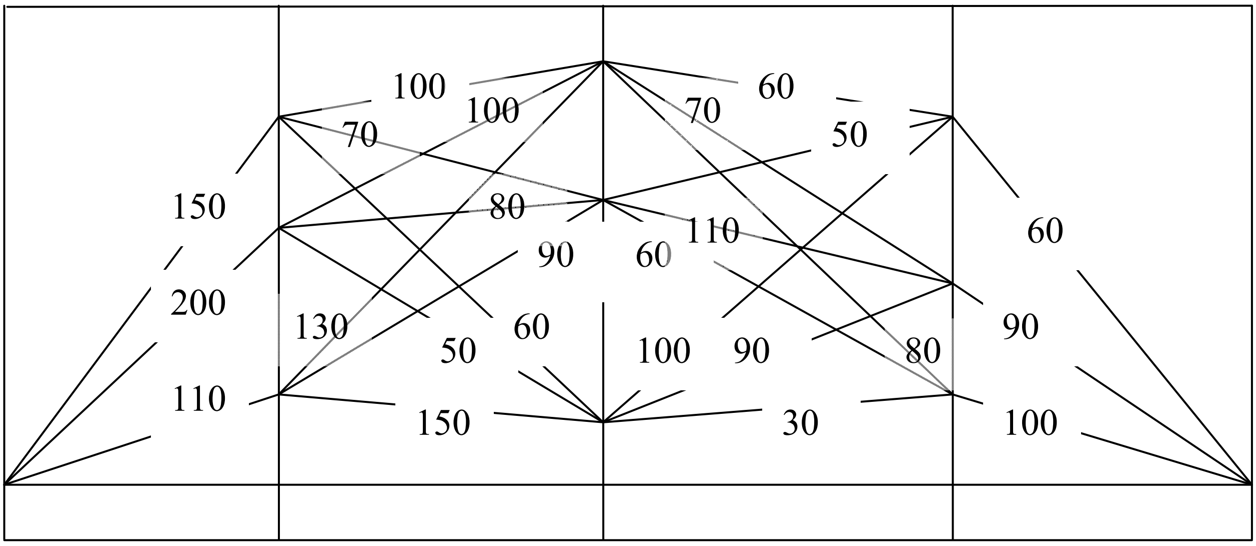
Задача. Определить режим ведения поезда на любом отрезке пути, который обеспечил бы минимальные приведенные расходы на передвижение по участку железной дороги в целом.

Результаты тяговых расчетов по определению расходов на передвижение по каждому отрезку пути в зависимости от режима ведения поезда приведены в цифрах на диаграммах каждого варианта контрольного задания. Начальные и конечные скорости движения на каждом отрезке пути выбрать произвольно (в виде латинских букв).

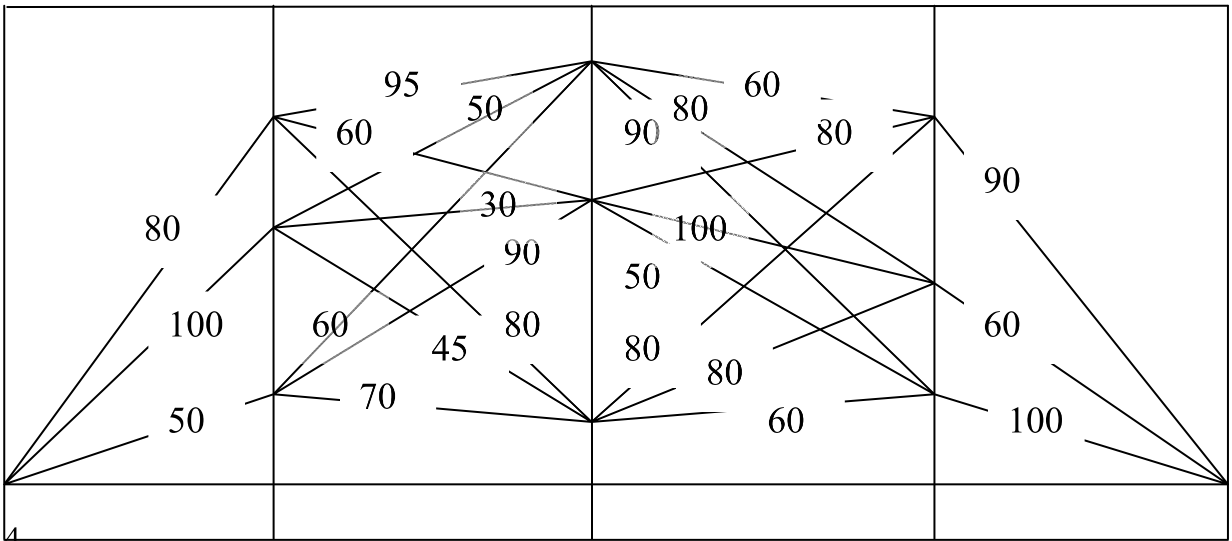
1.



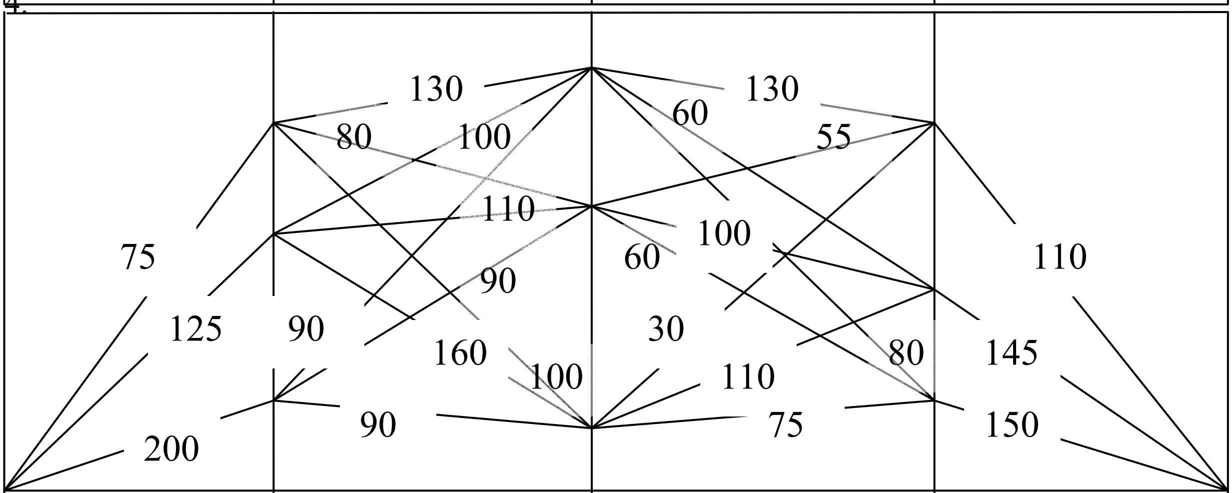
2.


100
60
100
70
70
50
150
80
110
60
90
60
200
130
60
90
50
100
90
80
110
150
30
100

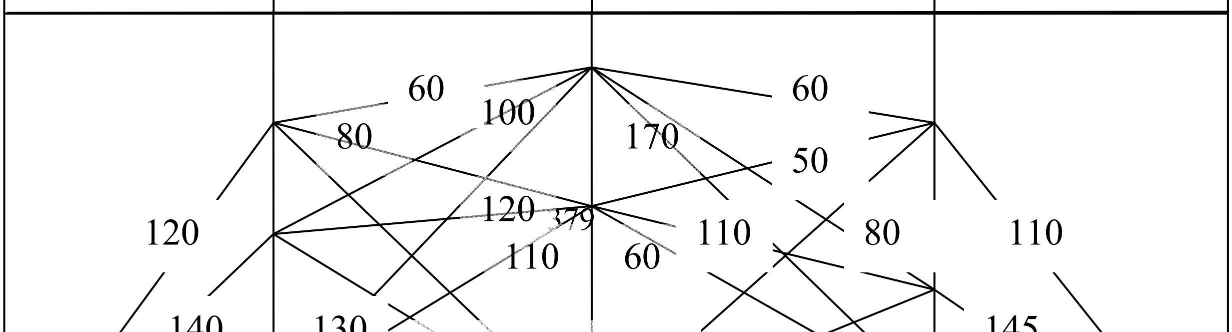
3.


95
60
50
80
60
90
80
90
30
80
100
90
50
100
60
80
60
45
80
80
70
50
60
100

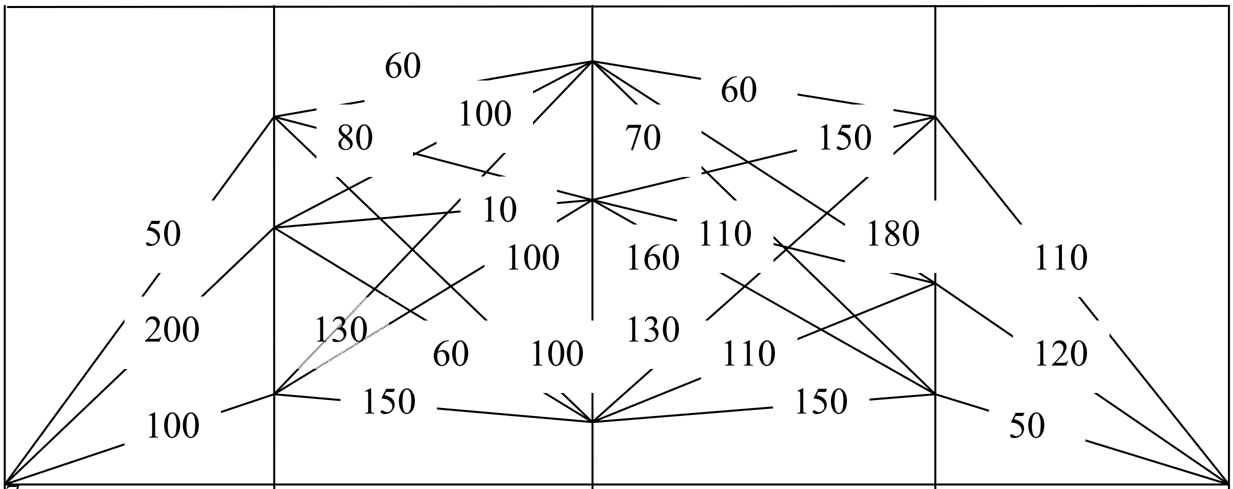
4.


130
130
60
80
100
55
110
100
75
60
110
90
125
90
30
160
80
145
100
110
90
75
150
200

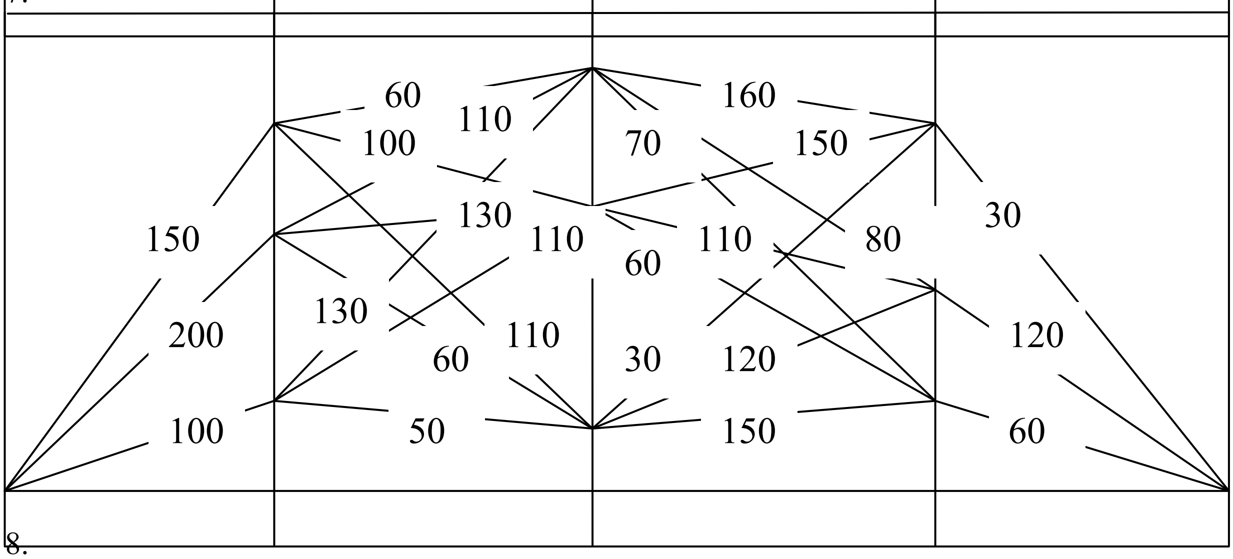
5.


60
60
100
80
170
50
120
120
110
80
110
110
60
140
130
145

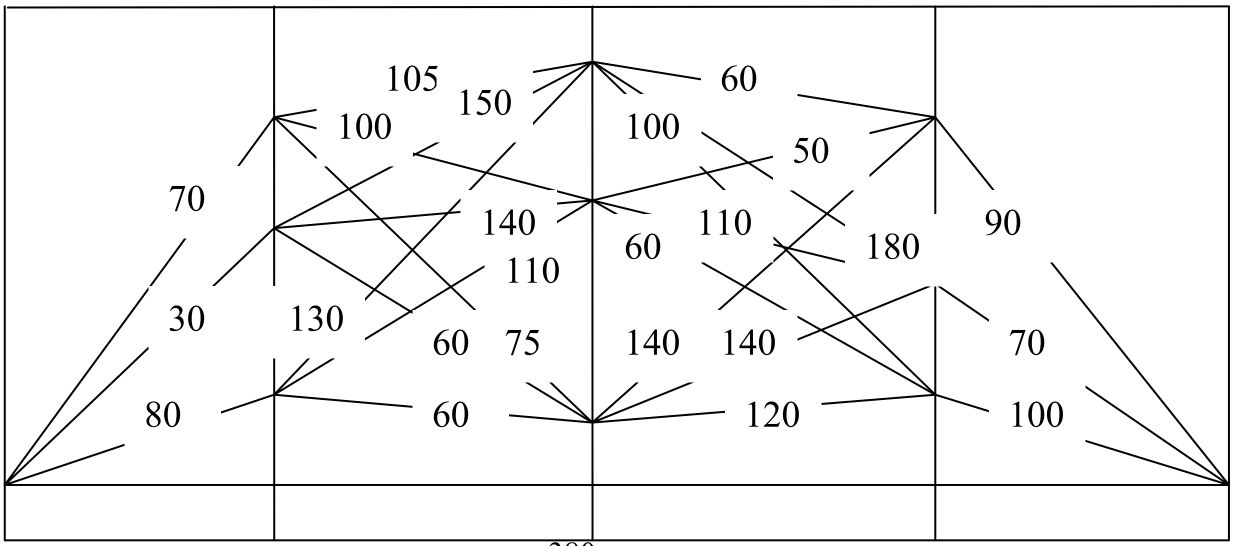
6.


60
60
100
80
70
150
10
50
110
180
110
100
160
200
130
130
60
100
110
120
150
150
100
50

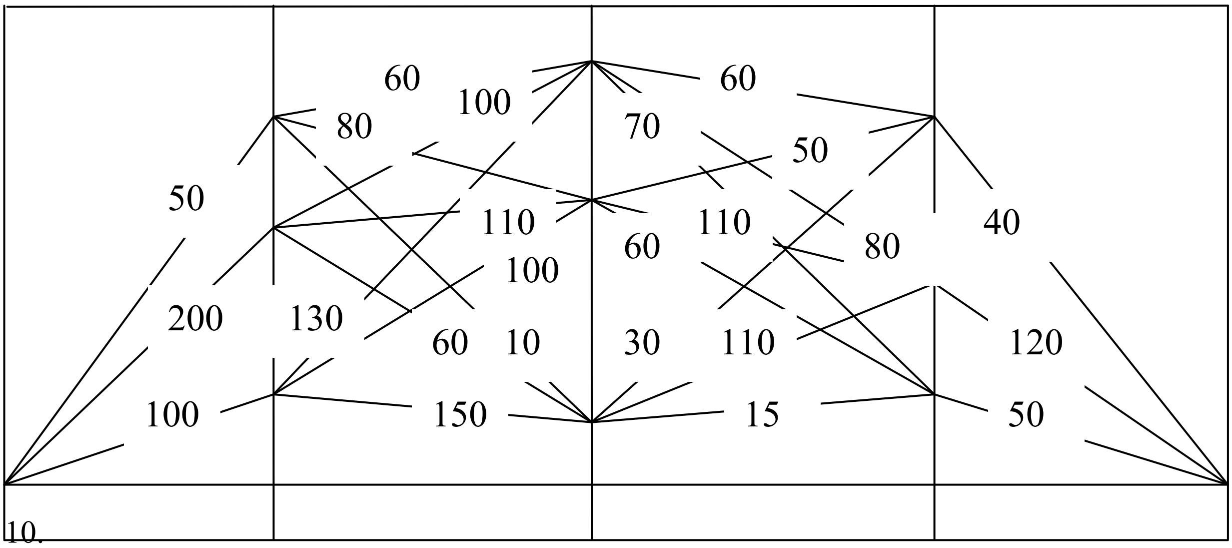
7.


60
160
110
100
70
150
130
150
110
110
80
30
60
200
130
110
120
60
30
120
100
50
150
60

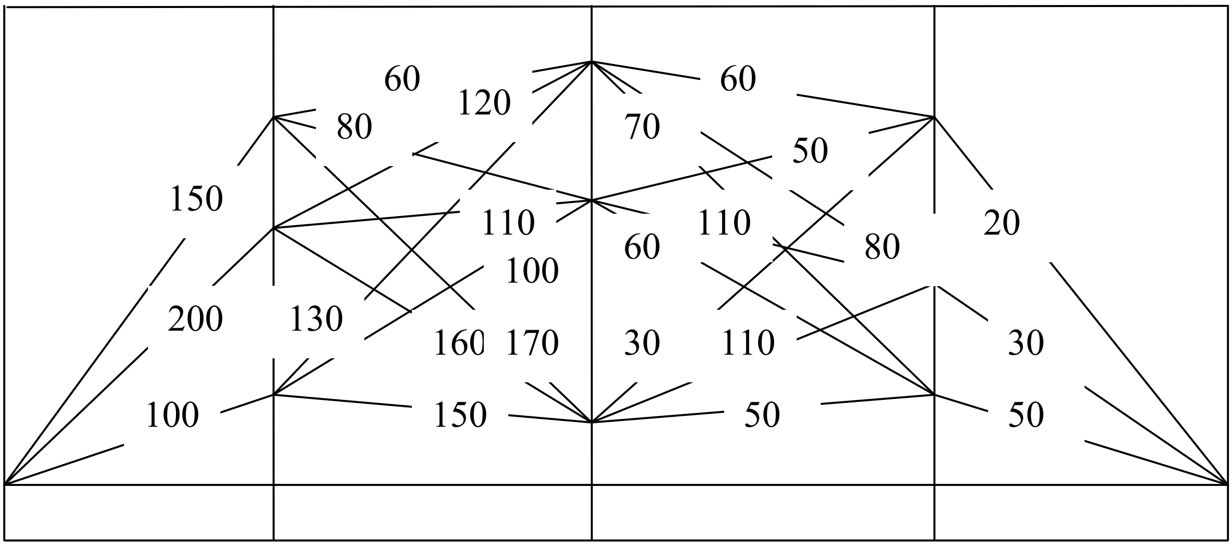
8.


105
60
150
100
100
50
70
140
110
90
60
180
110
30
130
60
75
140
140
70
80
60
120
100

9.


60
100
60
80
70
50
50
110
110
40
60
80
100
200
130
60
10
30
110
120
100
150
15
50

10.


60
120
60
80
70
50
150
110
110
20
60
80
100
200
130
160
170
30
110
30
100
150
50
50

23. Случайные процессы. Элементы теории игр

23.1. Краткие сведения из теории

Марковские случайные процессы.

В общем виде *случайный*, или *стохастический*, процесс определяется просто как некая упорядоченная совокупность случайных величин. Большинство случайных процессов представлено в виде математических моделей: простое случайное блуждание, рекуррентные события, цепи Маркова, Пуассоновский процесс, процессы восстановления, Броуновское движение (или процесс Винера). Модель простого случайного блуждания используется для описания движения «дырок» в молекулярных структурах кристаллов. Первые три процесса являются дискретными во времени, другие же модели, описывают процессы, проистекающие во времени непрерывно.

Цепью Маркова называют последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из k несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$, если условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s-м испытании наступит A_j ($j = 1, 2, \ldots, k$) зависит только от того, каким было событие, произошедшее в ($s - 1$)-м испытании и не зависит от результатов предшествующих событий. Заметим, что независимые испытания являются частным случаем цепей Маркова. Далее будем использовать терминологию, применяемую при изучении цепей Маркова.

Рассмотрим некую систему S. Говорят, что в системе происходит случайный процесс, если она под влиянием случайных факторов переходит из одного состояния в другое. *Цепью Маркова с дискретным временем* называют цепь, изменение состояний которой происходит в определенные фиксированные моменты времени. *Цепью Маркова с непрерывным временем* называют цепь, изменение состояний которой происходит в любые случайные возможные моменты времени.

Однородной называют цепь Маркова, если условная вероятность не зависит от номера испытания. *Переходной вероятностью* p_{ij} называют условную вероятность того, что из состояния i (в котором система оказалась в результате некоторого, безразлично какого номера испытания) в итоге следующего испытания перейдет в состояние j. *Матрицей перехода системы* называют матрицу, которая содержит все переходные вероятности этой системы:

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix},$$

причем $\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$.

Пусть в результате n шагов вероятность перехода системы из состояния i в состояние j равна $P_{ij}(n)$. Введем в рассмотрение промежуточное состояние r, в которое переходит система за m шагов с вероятностью P_{jr} (m), после чего за оставшиеся $(n–m)$ из промежуточного состояния r она перейдет в конечное состояние j с вероятностью $P_{rj}(n–m)$. По формуле полной вероятности,

$$P_{jr}(m) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m) P_{rj}(n-m).$$

Эту формулу называют *равенством Маркова*.

Основные понятия теории игр

В лекциях по теории оптимизации рассматривались такие задачи принятия решений, когда выбор решения осуществлялся одним лицом. В подобных задачах рационального ведения хозяйства решение выбирается при предположении о том, что известны целевая функция, различные способы действия и ограничения.

В данной случае рассматриваются задачи принятия решений в ситуациях с *несколькими* участниками, когда значение целевой функции для каждого из субъектов зависит и от решений, принимаемых всеми остальными участниками. Предметом теории игр являются такие ситуации, в которых важную роль играют конфликты и совместные действия.

Одна из характерных черт всякого общественного, социально-экономического явления состоит в множественности, многосторонности интересов и наличии сторон, выражающих эти интересы. Классическими примерами здесь являются ситуации, где, с одной стороны, имеется один покупатель, с другой – продавец (ситуация монополия-монопсония), когда на рынок выходят несколько производителей, обладающих достаточной силой для воздействия на цену товара (ситуация олигополии, в том числе дуополии, если число таких участников равно двум). Более сложные ситуации подобного рода возникают, если имеется объединения или коалиции лиц, участвующих в столкновении интересов, например, в случае , когда ставки заработной платы определяются союзами или объединениями рабочих и предпринимателей, при анализе результатов голосования в парламенте и т.п.

Конфликт может возникнуть из различия целей, которые отражают не только несовпадающие интересы различных сторон, но и многосторонние интересы одного и того же лица. Например, разработчик экономической политики обычно преследует разнообразные цели, согласуя противоречивые требования, предъявляемые к ситуации (рост объемов производства, повышение доходов, снижение экологической нагрузки и т.п.) Конфликт может проявляться не только в результате сознательных действий различных участников, но и как результат действия тех или иных «стихийных сил» (случай так называемых «игр с природой»). Множество подобных примеров можно встретить в биологии, социологии, психологии, политологии, военном деле и т.д.

И, наконец, примерами игр являются обычные игры: салонные, спортивные, карточные и др. Именно с анализа подобных игр начиналась математическая теория игр; они и по сей день служат прекрасным материалом для иллюстрации положений и выводов этой теории.

В итоге, всякая претендующая на адекватность математическая модель социально-экономического явления должна отражать присущие ему черты *конфликта*, т.е. описывать:

a) множество заинтересованных сторон (мы будем называть их *игроками;* в литературе по теории игр они именуются также субъектами, лицами, сторонами, участниками). В случае, если число игроков конечно, они различаются по своим номерам (1-й игрок и 2-й игрок в игре в орлянку или в случае двуполий) или по присваиваемым им именам (например Продавец и Покупатель в ситуации монополия-монопсония);

b) возможные действия каждой из сторон, именуемые также *стратегиями* или *ходами*;

c) интересы сторон, представленные *функциями выигрыша* (*платежа*) для каждого из игроков.

В теории игр предполагается, что функции выигрыша и множество стратегий, доступных каждому из игроков, общеизвестны, т.е. каждый игрок знает свою функцию выигрыша и набор имеющихся в его распоряжении стратегий, а также функции выигрыша и стратегии всех остальных игроков, и в соответствии с этой информацией организует свое поведение.

Формализация содержательного описания конфликта представляет собой его математическую модель, которую называют *игрой*.

Теория игр впервые была систематически изложена Дж. фон Нейманом и О. Монгенштерном в 1944 г., хотя отдельные результаты были опубликованы еще в 20-х годах. Нейман и Моргенштерн написали оригинальную книгу, которая содержала главным образом экономические примеры, поскольку экономическому конфликту легче придать численную форму. Во время второй мировой войны и сразу после нее теорией игр серьезно заинтересовались военные, которые увидели в ней аппарат для исследования стратегических решений. Затем главное внимание снова стало уделятся экономическим проблемам. Сейчас ведется большая работа, направленная на расширение сферы применения теории игр.

Теория игр

В теории матричных игр рассматриваются вопросы поведения и вырабатываются оптимальные правила (стратегии) поведения для каждого из участников конфликтной или состязательной ситуации. В матричных играх источником неопределенности является отсутствие информации о действиях противника, о его стратегии. Для решения задач теории матричных игр недостаточно аппарата классической оптимизации функций. За последние годы были развиты новые математические методы теории игр – методы нахождения оптимальных минимаксных решений.

Изучение методов теории игр и их применение в народнохозяйственной деятельности оказывает большую помощь в практической деятельности людей: в совершенствовании подготовки и принятия решений, в управлении сложными системами.

Классификация игр

Различные виды игр можно классифицировать, основываясь на том или ином принципе: по числу игроков, по числу стратегий, по свойствам функций выигрыша, по возможности предварительных переговоров и взаимодействия между игроками в ходе игры.

В зависимости от *числа игроков* различают с *двумя*, *тремя* и более участниками. Весь материал, представленный в теории оптимизации, можно рассматривать как теорию игр с одним игроком. В принципе возможны игры с *бесконечным* числом игроков.

Согласно другому принципу классификации – *по количеству стратегий* – различают конечные и бесконечные игры. В *конечных* играх игроки располагают конечным числом возможных стратегий, например, и игре в орлянку игроки имеют по два возможных хода – они могут выбрать «орел» или «решку».

Сами стратегии в конечных играх нередко называются *чистыми* стратегиями смысл этого названия будет ясен далее. Соответственно, в *бесконечных* играх игроки имеют бесконечное число возможных стратегий – так, в ситуации Продавец – Покупатель каждый из игроков может назвать любую устраивающую его цену и количество продаваемого (покупаемого) товара.

Третий способ классификации игр – по *свойствам функций* выигрыша (платежных функций). Важным случаем в теории игр является ситуация, когда выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, т.е. налицо прямой конфликт между игроками. Подобные игры называются *играми с нулевой суммой*, или *антагонистическими* играми. Игры в орлянку или в очко – типичные примеры антагонистических игр. Прямой противоположностью играм такого типа являются игры *с постоянной разностью*, в которых игроки и выигрывают, и проигрывают одновременно, так что им выгодно действовать сообща . Между этими крайними случаями имеется множество игр *с ненулевой суммой*, где имеются и конфликты, и согласованные действия игроков.

В зависимости *от возможности предварительных переговоров* между игроками различают кооперативные и некооперативные игры. Игра называется *кооперативной*, если до начала игроки образуют коалиции и принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях. Игра, в которой игроки не могут координировать свои стратегии подобным образом, называется *некооперативной*. Очевидно, что все антагонистические игры могут служить примером некооперативных игр. Примером кооперативной игры может служить ситуация образований коалиций в парламенте для принятия путем голосования решения, так или иначе затрагивающего интересы участников голосования.

Формальное представление игр

Дадим формальное описание перечисленных элементов конфликта. Множество всех игроков, обозначаемое I, в случае конечного их числа может задаваться простым перечислением игроков. Например, $I = \{1,2\}$ при игре в орлянку, $I = \{Ïðîäàâåö\ ,\ Ïîêóïàòåëü\}$ в ситуации монополия-монопсония, $I = \{1,2,\ldots,n\}$ в случае анализа результатов голосования в парламенте.

Множество стратегий игрока i обозначим через X_i. При игре в орлянку каждый игрок располагает двумя стратегиями: $X_i = \{Îðåë\ ,\ Ðåøêà\}$; каждый участник голосования имеет выбор на множестве стратегий $\{Çà, Ïðîòèâ\}$. В случае взаимодействия на рынке, как Продавец, так и Покупатель могут назначить некоторую неотрицательную цену на продаваемый (покупаемый) товар, то множество стратегий каждого из них $X_i : P_i > 0$.

В каждой партии игрок выбирает некоторую свою стратегию, $x_i \in X_i$ в результате чего складывается набор стратегий $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, называемый *ситуацией*. Так, ситуацию в Парламенте описывает список $\{Çà, Çà, Ïðîòèâ\ ,\ Çà\ldots\}$, полученный в итоге проведенного голосования.

Заинтересованность игроков в ситуациях проявляется в том, что каждому игроку i в каждой ситуации x приписывается число, выражающее степень удовлетворения его интересов в данной ситуации. Это число называется *выигрышем* игрока i и обозначается через $h_i(x)$, а соответствие между набором ситуаций и выигрышем игрока i называется *функцией выигрыша (платежной функцией)* этого игрока H_i.

В случае конечной игры двух лиц функции выигрыша каждого из игроков удобно представлять в виде *матрицы выигрышей*, где строки представляют стратегии одного игрока, столбцы – стратегии другого игрока, а в клетках матрицы указываются выигрыши каждого из игроков в каждой из образующихся ситуаций. (Данная форма представления к конченых игр двух лиц объясняет общее для них название – *матричные игры*).

Например, в случае игры в орлянку каждый из игроков имеет по две стратегии, именуемые Орел и Решка. Если игроки выбирают одинаковые стратегии, т.е. в случаях, если оба говорят «Орел» или оба говорят «Решка», 1-й игрок выигрывает 1 рубль, а второй игрок проигрывает 1 рубль. В ситуациях, когда оба игрока выбирают различные стратегии, 1-й игрок проигрывает 1 рубль, а 2-й игрок соответственно этот 1 рубль выигрывает.

В итоге матрица выигрышей 1-го игрока H_1 выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{lll} & & \text{Стратегия 2-го игрока} \\ & & \begin{array}{cc}\text{Орел} & \text{Решка}\end{array} \\ \text{Стратегии 1-го игрока} & \begin{array}{l}\text{Орел} \\ \text{Решка}\end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Соответственно матрица выигрышей 2-го игрока H_2, имеет вид:

$$\begin{array}{lll} & & \text{Стратегия 2-го игрока} \\ & & \begin{array}{cc}\text{Орел} & \text{Решка}\end{array} \\ \text{Стратегии 1-го игрока} & \begin{array}{l}\text{Орел} \\ \text{Решка}\end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Для антагонистических игр, в которых выигрыш одного игрока равен проигрышу другого (игр с нулевой суммой), выполняется соотношение $H_1 = -H_2$. Игра в орлянку, очевидно, является примером такой игры.

Часто для наглядности матрицы выигрышей для обоих игроков совмещают в одну, которая дает полное представление о всей игре:

$$\begin{array}{lll} & & \text{Стратегия 2-го игрока} \\ & & \begin{array}{cc}\text{Орел} & \text{Решка}\end{array} \\ \text{Стратегии 1-го игрока} & \begin{array}{l}\text{Орел} \\ \text{Решка}\end{array} & \begin{pmatrix} (1;-1) & (-1;1) \\ (-1;1) & (1;-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

В каждой клетке этой матрицы слева указаны значения выигрыша 1-го игрока, справа – значения выигрыша 2-го игрока.

Рассмотрим пример задания матрицы выигрышей для игры с ненулевой суммой, называемой в литературе по теории игр *Дилемма Заключенного*. Содержание игры следующее: два преступника ожидают приговора суда за совершенное злодеяние. Адвокат конфиденциально стремится каждому из преступников облегчить его участь (или даже освободить!), если он сознается и даст показания против сообщника, которому грозит угодить в тюрьму за совершенное преступление на 10 лет. Если никто не сознается, то обоим угрожает заключение на определенный срок (скажем на 1 год) по обвинению в незначительном преступлении. Если сознаются оба преступника, то, с учетом чистосердечного признания, им грозит попасть в тюрьму на 5 лет. Каждый заключенный имеет на выбор 2 стратегии: не сознаваться или сознаваться, выдав при этом сообщника. В итоге можно получить следующую матрицу «выигрышей» для обоих игроков:

$$\begin{array}{lll} & & \text{Стратегия 2-го игрока} \\ & & \begin{array}{cc} \text{Сознаться} & \text{Не сознаться} \end{array} \\ \text{Стратегии 1-го игрока} & \begin{array}{l} \text{Сознаться} \\ \text{Не сознаться} \end{array} & \begin{pmatrix} (5;5) & (0;10) \\ (10;0) & (1;1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Приведем, наконец, пример записи функции выигрыша для бесконечной игры. В случае дуополии каждый из игроков может объявить цену p_i, по которой он хотел бы продать некоторое количество товара. При этом предполагается, что потребители приобретают товар у фирмы, объявившей меньшую цену, или распределяют свой спрос поровну между фирмами в случае, если они назначали одинаковую цену. Если функцию спроса в зависимости от цены товара обозначить как $d(p)$, то функция выигрыша 1-й фирмы $\Pi_1(p_1,p_2)$ будет иметь вид

$$\Pi_1(p1,p2) = \begin{cases} p_1 d(p_1), & если \quad p_1 < p_2, \\ p_1 \dfrac{d(p_1)}{2}, & если \quad p_1 = p_2, \\ 0, & если \quad p_1 > p_2. \end{cases}$$

Аналогично выглядит функция выигрыша 2-й фирмы $\Pi_2(p_1,p_2)$.

Игры с нулевой суммой (антагонистические игры).

Простейшим видом матричной игры является парная игра двух лиц I и II с нулевой суммой (сумма выигрышей сторон I и II равна нулю).

Пусть каждый из игроков располагает некоторой совокупностью согласованных с правилами игры способов поведения, отнесенных к одноразовой реализации игры. Эти способы поведения назовем стратегиями (или чистыми стратегиями). Перенумеруем стратегии первого игрока индексом $i = 1, 2, 3, \ldots, m$, второго – индексом $j = 1, 2, 3, \ldots, n$. Предположим, что если I игрок выбирает $i -$ю стратегию, а II – $j -$ю стратегию, то этим определяется результат игры, характеризующийся скалярной величиной a_{ij}, интерпретируемой как плата первому игроку вторым (если $a_{ij} < 0$, то игрок I платит игроку II сумму $|a_{ij}|$).

Следовательно, игра задается матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Строки матрицы соответствуют стратегиям i игрока I, столбцы – стратегиям j игрока II. Матрица называется матрицей игры или платежной матрицей. Элемент a_{ij} матрицы есть выигрыш первого игрока, если он выбрал стратегию i, а второй игрок выбрал стратегию j. Если игрок I выбирает стратегию i, то в наихудшем случае он получит выигрыш, равный $\min\limits_j a_{ij}$. Поэтому игрок I должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш α – нижняя цена игры.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0}$$

Стратегия i_0, обеспечивающая получение нижней цены игры, называется *максиминной*.

Игрок II при выборе некоторой стратегии j исходит из того, чтобы его проигрыш не превосходил максимального из значений j-го столбца матрицы, т.е. был меньше или равен $\max\limits_i a_{ij}$. Игрок II будет стремиться выбрать такую стратегию j, при которой его максимальный проигрыш β (верхняя цена игры) был бы минимален:

$$\alpha = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i_1 j_1}$$

Стратегия j_1, обеспечивающая получение верхней цены игры, называется *минимаксной*. При разумных действиях игроков выигрыш игрока I заключен между величинами α и β. Если $\alpha = \beta$, то полученная величина v называется значением (ценой) игры. Элемент $a_{i_0 j_0}$ называется *седловым элементом*, а пара (i_0, j_0) стратегий –

седловой точкой. Игры, имеющие цену, называются играми с седловой точкой. Седловая точка (i_0, j_0) определяет оптимальные стратегии игроков, являющиеся решением игры. Итак, если матрица игры имеет седловой элемент, то оптимальное решение игры определяется этим седловым элементом.

Решение игры в смешанной стратегии.

Рассмотрим вопрос о нахождении решений для игр, матрицы которых не содержат седлового элемента $(\alpha < \beta)$. Расширим понятие чистой стратегии и ведем понятие смешанной стратегии.

Смешанной стратегией игрока I будем называть неотрицательный вектор $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ такой, что $x_1 + \ldots + x_m = 1$. Здесь вектор $\overline{x}$ представляет собой набор вероятностей $(x_1, \ldots, x_m)$, с которыми игрок применяет свои первоначальные стратегии. Аналогично смешанной стратегией игрока II будем называть неотрицательный вектор $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $y_1 + \ldots + y_n = 1$.

При таком решении чистые стратегии игроков могут пониматься как $x^i = (0, \ldots, x_i = 1, 0, \ldots 0)$ – i-я чистая стратегия игрока I, $y^j = (0, \ldots, y_j = 1, 0, \ldots 0)$ – j-я чистая стратегия игрока II.

Под платежной функцией будет пониматься

$$E(x, y) = \sum a_{ij} x_i y_j ,$$

так что

$$E(x^i, y^j) = E(i, j) = a_{ij} .$$

Положим

$$Y = \{\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \geq 0 : \quad y_1 + \ldots + y_n = 1\}$$
$$X = \{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \geq 0 : \quad x_1 + \ldots + x_m = 1\}.$$

Одна из естественных постановок игры диктуется следующими рассуждениями. Если игрок I выбирает стратегию $\overline{x} \in X$, то он гарантирует себе выигрыш $\min\limits_{\overline{y} \in Y} E(\overline{x}, \overline{y})$, а поэтому может обеспечить и $\max\limits_{\overline{x} \in X} \min\limits_{\overline{y} \in Y} E(\overline{x}, \overline{y}) = v_1$.

Аналогичный подход с позиций игрока II приводит к $\min\limits_{\overline{y} \in Y} \max\limits_{\overline{x} \in X} E(\overline{x}, \overline{y}) = v_2$.

Цель игры можно теперь поставить в соответствии с задачей обеспечения игроками выигрыша, не меньшего v_1, и проигрыша, не большего v_2, соответственно. Так сформулированные цели игроков непротиворечивы.

Смешанные стратегии $\overline{x^*}$ и $\overline{y^*}$, для которых выполняются неравенства $E(\overline{x}, \overline{y^*}) \leq E(\overline{x^*}, \overline{y^*}) \leq E(\overline{x^*}, \overline{y})$ для всех смешанных стратегий $\overline{x}$ и $\overline{y}$, называются оптимальными смешанными стратегиями, а число $E\left(\overline{x^*}, \overline{y^*}\right)$ называется ценой (значением) игры для игрока I. Совокупность оптимальных стратегий $\left(\overline{x^*}, \overline{y^*}\right)$ называется оптимальным решением или просто решением игры. Для оптимальных смешанных стратегий $\left(\overline{x^*}, \overline{y^*}\right)$ имеет место равенство $v_1 = v_2$.

Теорема о минимаксе (фундаментальная теорема Неймана):

каждая конечная матричная игра с нулевой суммой имеет, по крайней мере, одно решение, возможно в области смешанных стратегий, причем цена игры v удовлетворяет условию

$$\alpha \le v \le \beta .$$

Мы не будем останавливаться на строгом доказательстве этой теоремы.

Элементы теории статистических решений.

В рассмотренных выше матричных играх предполагалось, что в них принимают участие два игрока, интересы которых противоположны. Поэтому действия каждого игрока направлены на увеличение выигрыша (уменьшение проигрыша). Однако, в некоторых задачах, приводимым к игровым, имеется неопределенность, вызванная отсутствием об условиях, в которых осуществляется действие (погода, покупательский спрос и т.д.) Эти условия зависят не только от сознательных действий другого игрока, но и от объективной действительности. Такие игры называются *играми с природой*. Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, покупательский спрос) действует случайно.

Принятие решений в условиях неопределенности и риска являются разделом, наиболее тесно связанным с исследованием операций, как по своему духу, так и по постановкам вопросов.

Основной задачей теории статистических решений является основной выбор решений в *условиях неопределенности*, когда каждое действие приводит к одному из множества частных исходов, вероятности которых неизвестны или даже не имеют смысла. В условиях неопределенности человек или автомат, выбирающий то или иное решение, не располагает полной информацией о всех факторах, учет которых оказывает случайное влияние на этот выбор. В некоторых задачах состояние природы может быть задано распределением вероятностей. В этом случае принято говорить о выборе решений *в условиях* риска. Здесь каждый шаг решения приводит к одному из множества возможных частных исходов, каждый из которых имеет известную вероятность появления.

Теория статистических решений (игр с природой) тесно связана с теорией стратегических игр. Имеется ряд критериев, которые используются при выборе оптимальной стратегии. Рассмотрим некоторые из них.

1. *Критерий Вальде.* Рекомендуется применять максимальную стратегию. Она достигается из условия

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

и совпадает с нижней ценой игры (т.е. гарантирует выигрыш, не менее, указанного числа). Критерий является пессимистическим, считается, что природа будет действовать наихудшим для человека образом.

2. *Критерий максимума.* Он выбирается из условия

$$\max_i \max_j a_{ij}$$

Критерий является оптимистическим, считается, что природа будет благосклонна к человеку.

3. *Критерий Гурвица.* Критерий рекомендует стратегию, определяемую по формуле

$$\max\{\alpha \min a_{ij} + (1-\alpha)\max a_{ij}\},$$

где α – степень оптимизма – изменяется в диапазоне $[0.1]$.

Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего для человека поведения природы. При $\alpha = 1$ критерий превращается в критерий Вальде, при $\alpha = 0$ – в критерий максимума. На α оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем хуже последствия ошибочных решений, больше желания застраховаться, тем α ближе к единице.

4. *Критерий Сэвиджа. С*уть критерия состоит в выборе такой стратегии, что бы не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. Находится матрица рисков, элементы которой показывают какой убыток понесет человек (фирма), если для каждого состояния природы он не выберет наилучшей стратегии.

Элемент матрицы рисков (r_{ij}) находится по формуле

$$r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij}$$

где $\max a_{ij}$ — максимальный элемент в столбце исходной матрицы.

Оптимальная стратегия находится из выражения

$$\min\{\max(\max a_{ij} - a_{ij})\}.$$

23.2. Решение типовых задач

Пример 1. Задана матрица $P_1 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.перехода системы из состояния $i(i = 1,2)$ в состояние $j(j = 1,2)$ за один шаг. Найти матрицу P_3 перехода системы из состояния *i* в состояние *j* за два шага.

*Решение***.** Чтобы найти матрицу P_2 перехода системы за два шага нужно матрицу P_1 умножить саму на себя.

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,73 & 0,27 \\ 0,24 & 0,76 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Определить нижнюю и верхнюю цены для игр, заданных матрицами платежей $A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

*Решение***.** Для матриц A_1 и A_2 соответственно имеем :

$$\alpha_1 = \max\{3;4;2\} = 4, \qquad \beta_1 = \min\{8;5;7;8\} = 5,$$

$$\alpha_2 = \max\{1;3;0\} = 3, \qquad \beta_2 = \min\{4;5;3;6\} = 3.$$

Задача 3. Найти оптимальные стратегии и цену игры

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Решение***.** Найдем наилучшую стратегию игры первого игрока при первой стратегии $a_1 = \min\limits_j a_{1ij} = \min(2,5,2) = 2$ и при второй стратегии $a_2 = \min\limits_j a_{2j} = \min(1,9,5) = 1$, тогда $\alpha = \max\limits_i a_i = \max(2,1) = 2$ – гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе первый игрок.(нижняя цена игры (максимин)).

Аналогично находим наилучшую стратегию второго игрока (по столбцам) для первой стратегии $b_1 = \max\limits_i a_{ij} = \max(2,1) = 2$, для второй – $b_2 = \max\limits_i a_{ij} = \max(5,9) = 9$, для третьей – $b_3 = \max\limits_i a_{ij} = \max(2,5) = 5$, тогда, если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то он гарантирован, что в любом случае проиграет не больше $\beta = \min\limits_j b_j = \min(2,9,5) = 2$.

Оптимальная стратегия первого игрока будет первая, второго первая. Так как $\alpha = \beta = 2$, то это число и есть цена игры. Таким образом данная задача – игра с седловой точкой.

Рассмотрим задачу без седловой точки.

Задача 4. Найти оптимальные стратегии и цену игры $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим нижнюю и верхнюю цены игры, заданной матрицей А: $\alpha = \max\{1;0\} = 1, \beta = \min\{2;5\} = 2$, т.е. матрица А не имеет седлового элемента. Обозначим через $\bar{x} = (x_1, x_2)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2)$ соответственно смешанные стратегии игроков I и II. Тогда оптимальные смешанные стратегии игроков I и II и цена игры v определяются следующими двумя системами уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 = v \\ x_1 + 5x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y_1 + y_2 = v \\ 5y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

Следовательно, оптимальные смешанные стратегии и цена игры соответственно равны: $\bar{x} = \left(\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right)$, $\bar{y} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $v = \frac{5}{3}$.

Задача 5. Железная дорога разработала несколько планов летних расписаний по перевозке на пригородных электричках с учетом конъюнктивы перевозок и спроса пассажиров. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели прибыли представлены в таблице. Определить: а) оптимальный план летнего расписания и цену игры; б) какой стратегии следует придерживаться ЖД, если наиболее вероятной является ситуация: C_1 – c_1%, C_2 – c_2%, C_3 – c_3%.

c_1=30%; c_2=50%;c_3=20%;

План расписаний	Величина прибыли в зависимости от спроса, млн.руб.		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	1	1	3
$П_2$	2	2	1
$П_3$	1	3	1

Решение. а) Составим матрицу игры $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислим нижнюю и верхнюю цены игры, заданной матрицей А: $\alpha = \max\{1;1;1\} = 1, \beta = \min\{2;3;3\} = 2$, т.е. матрица А не имеет седлового элемента. Обозначим через $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ соответственно смешанные стратегии игроков I и II. Тогда оптимальные смешанные стратегии игроков I и II и цена игры v определяются следующими двумя системами уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = v \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = v \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = v \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 = v \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 = v \\ 3y_1 + y_2 + y_3 = v \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

Следовательно, оптимальные смешанные стратегии и цена игры соответственно равны: $\bar{x} = \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, $\bar{y} = \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};0\right)$, $v = \frac{5}{3}$.

б) Определим три стратегии с учетом заданных вероятностей ситуаций: для плана $П_1$: $0{,}3 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 3 = 1{,}4$,

для плана $П_2$: $0{,}3 \cdot 2 + 0{,}5 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 1 = 1{,}8$,

для плана $П_3$: $0{,}3 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 1 = 2$.

Согласно формулы оптимальной стратегии $\alpha = \max\{1{,}4;1{,}8;2\} = 2$ железной дороге выгоднее составить расписание $П_3$.

Задача 6. По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, магазин по продажи одежды может реализовать в условиях теплой погоды 700 блузок и 300 свитеров, а при прохладной погоде – 400 блузок и 500 свитеров. Затраты магазина в течении июля-августа на единицу продукции составили: блузки – 70 ден. ед., свитера – 85 ден. ед. Цена реализации составляет 115 и 95 ден. ед. соответственно. В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию магазина при закупки товара, обеспечивающую ему максимальный доход от реализации продукции. Задачу решить с использованием критериев «природы», приняв степень оптимизма равным 0,5.

Решение. Магазин располагает двумя стратегиями:
A_1 – в этом сезоне будет теплая погода,
A_2 – погода будет прохладная.

Если магазин примет стратегию A_1 и в действительности будет теплая погода (стратегия природы B_1), то закупленная продукция (700 блузок и 300 свитеров) будет полностью реализована и доход составит

$$700 \cdot (115 - 70) + 300 \cdot (95 - 85) = 34500 \text{ ден. ед.}$$

В условиях, если погода будет прохладной (стратегия природы B_2), то закупленные свитера будут проданы полностью, а блузки только в количестве 400 и часть останется нереализованной. Доход составит

$$400 \cdot (115 - 70) + 300 \cdot (95 - 85) - (115 - 70)(700 - 400) = 13500 \text{ ден. ед.}$$

Рассуждая аналогичным образом, если магазин примет стратегию A_2 и в действительности погода будет прохладной, то доход составит

$$400 \cdot (115-70) + 500 \cdot (95-85) = 23000 \text{ ден. ед.}$$

Если погода будет теплая, то доход составит

$$400 \cdot (115-70) + 300 \cdot (95-85) - (95-85)(500-300) = 19000 \text{ ден. ед.}$$

Рассматривая магазин и погоду в качестве двух игроков, получим платежную матрицу

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 34500 & 13500 \\ 23000 & 19000 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$\alpha = \max(13500, 19000) = 19000 \text{ ден. ед.}$$

$$\beta = \min(34500, 19000) = 19000 \text{ ден. ед.}$$

Цена игры равна 19000 ден. ед.

Оптимальный план закупки товара составит 400 блузок и 500 свитеров, тогда при любой погоде доход составит 19000 ден. ед.

В условиях неопределенности, если не предоставляется возможности магазину использовать смешанную стратегию (договоры с другими организациями), для определения оптимальной стратегии магазина используем критерии природы.

1. Критерий Вальде:

$$\max(\min a_{ij}) = \max(13500, 19000) = 19000 \text{ ден. ед.}$$

магазину целесообразно использовать стратегию A_2.

2. Критерий максимума:

$$\max(\max a_{ij}) = \max(34500, 23000) = 34500 \text{ ден. ед.}$$

целесообразно использовать стратегию A_1.

3. Критерий Гурвица: для определения примем степень оптимизма равным 0,5, тогда для стратегии магазина

$$\alpha \min a_{ij} + (1-\alpha)\max a_{ij} = 0{,}5 \cdot 13500 + 0{,}5 \cdot 34500 = 24000 \text{ ден. ед.};$$

для стратегии A_2

$$\alpha \min a_{ij} + (1-\alpha)\max a_{ij} = 0{,}5 \cdot 19000 + 0{,}5 \cdot 23000 = 21000 \text{ ден. ед.},$$

магазину целесообразно использовать стратегию A_1.

4. Критерий Сэвиджа. Максимальный элемент в первом столбце –34500, во втором столбце – 19000.

Элементы матрицы рисков находятся из выражения

$$r_{ij} = \max(a_{ij} - a_{ij}),$$

откуда $r_{11} = 34500 - 34500 = 0$, $r_{12} = 19000 - 13500 = 5500$, $r_{21} = 34500 - 23000 = 11500$, $r_{22} = 19000 - 19000 = 0$.

Матрица рисков имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 5500 \\ 11500 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\min\{\max(\max a_{ij} - a_{ij})\} = \min(11500{,}5500) = 5500 \text{ ден. ед.},$$

целесообразно использовать стратегию A_1.

Следовательно, магазину целесообразно применять стратегию A_1.

23.3. Задание на контрольную работу

Задача 1. Задана матрица P_1 перехода системы из состояния $i(i = 1{,}2)$ в состояние $j(j = 1{,}2)$ за один шаг. Найти матрицу P_3 перехода системы из состояния *i* в состояние *j* за три шага.

1. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

2. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

3. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

4. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

5. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

6. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

7. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

8. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

9. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

10. $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

Задача 2. Найти оптимальные стратегии и цену игры

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 5 & 9 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 7 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 9 & 5 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 9 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

10. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Железная дорога разработала несколько планов летних расписаний по перевозке на пригородных электричках с учетом конъюнктивы перевозок и спроса пассажиров. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели прибыли представлены в таблице. Определить: а) оптимальный план летнего расписания и цену игры; б) какой стратегии следует придерживаться ЖД, если наиболее вероятной является ситуация: C_1 – c_1%, C_2 – c_2%, C_3 – c_3%.

1. c_1=20%; c_2=40%;c_3=40%;

План расписаний	Величина прибыли в зависимости от спроса, млн.руб.		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	2	1	2
$П_2$	3	1	1
$П_3$	1	3	1

2. c_1=30%; c_2=40%;c_3=30%;

План расписаний	Величина прибыли в зависимости от спроса, млн.руб.		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	3	1	2
$П_2$	3	2	1
$П_3$	2	3	1

3. c_1=10%; c_2=50%;c_3=40%;

План расписаний	Величина прибыли в зависимости от спроса, млн.руб.		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	4	1	2
$П_2$	3	2	1
$П_3$	1	3	3

4. c_1=30%; c_2=30%;c_3=40%;

План расписаний	Величина прибыли в зависимости от спроса, млн.руб.		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	3	1	2
$П_2$	4	3	1
$П_3$	2	3	2

5. c_1=40%; c_2=40%;c_3=20%;

План расписаний	Величина прибыли в зависимости от спроса, млн.руб.		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	3	2	3
$П_2$	3	1	1
$П_3$	1	3	1

6. c_1=40%; c_2=30%;c_3=30%;

План расписаний	Величина прибыли в зависимости от спроса, млн.руб.		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	3	1	2
$П_2$	3	2	1
$П_3$	2	3	3

7. c_1=10%; c_2=40%;c_3=50%;

План расписаний	Величина прибыли в зависимости от спроса, млн.руб.		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	4	1	2
$П_2$	2	2	1
$П_3$	1	3	3

8. c_1=35%; c_2=30%;c_3=35%;

План расписаний	Величина прибыли в зависимости от спроса, млн.руб.		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	3	1	2
$П_2$	4	3	1
$П_3$	3	2	2

9. c_1=25%; c_2=35%;c_3=40%;

План расписаний	Величина прибыли в зависимости от спроса, млн.руб.		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	2	1	3
$П_2$	3	1	1
$П_3$	2	3	1

10. c_1=30%; c_2=35%;c_3=35%;

План расписаний	Величина прибыли в зависимости от спроса, млн.руб.		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	3	3	2
$П_2$	3	2	1
$П_3$	2	3	1

Задача 4.

1. Фирма производит пользующиеся спросом брюки и юбки, реализация которых зависит от сезона года. Затраты фирмы в течении июля-августа на единицу продукции составили: брюки — 19 ден.ед., юбки — 8 ден.ед. Цена реализации составляет 40 и 20 ден.ед. соответственно. По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды 700 брюк и 2021 юбок, а при прохладной погоде — 1100 брюк и 780 юбок. В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции. Задачу решить с использованием критериев «природы», приняв степень оптимизма равным 0,5.

2. По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фабрика, производящая обувь, может реализовать в условиях теплой погоды 1017 туфель и 3096 босоножек, а при прохладной погоде – 1275 туфель и 803 босоножек. Затраты фабрики в течении июля-августа на единицу продукции составили: туфли – 73 ден.ед., босоножки – 52 ден.ед. Цена реализации составляет 120 и 82 ден.ед. соответственно. В связи с возможными изменениями погоды

определить стратегию фабрики в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции. Задачу решить с использованием критериев «природы», приняв степень оптимизма равным 0,5.

3. Фирма «Здоровье» – производитель медикаментов. Известно, что пик спроса на сердечно-сосудистые препараты приходится на летний период, на антиинфекционные препараты – на осенний период. Затраты на 1 усл.ед продукции за август-сентябрь составили: на сердечно-сосудистые препараты – 45 р., на антиинфекционные препараты – 25 р. По данным наблюдений, фирмой установлено, что она может реализовать в течении рассматриваемых двух месяцев в условиях теплой погоды 3500 усл.ед. на сердечно-сосудистые препараты и 1250 усл.ед. на антиинфекционные препараты, в условиях холодной погоды 7250 усл.ед. на сердечно-сосудистые препараты и 2750 усл.ед. на антиинфекционные препараты. Определить стратегию фирмы в выпуске продукции, в связи с возможными изменениями в погоде, обеспечивающую максимальный доход фирмы. Цена за реализацию 1 усл.ед. составляет 90 р. за на сердечно-сосудистые препараты и 50 р. на антиинфекционные препараты.

4. Фирма производит пользующиеся спросом пальто и плащи, реализация которых зависит от сезона года. Затраты фирмы в течении августа-октябрь на единицу продукции составили: пальто – 21 ден.ед., плащи – 18 ден.ед. Цена реализации составляет 56 и 32 ден.ед. соответственно. По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды 3800 пальто и 5023 плащей, а при прохладной погоде – 4221 пальто и 3508 плащей. В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции. Задачу решить с использованием критериев «природы», приняв степень оптимизма равным 0,5.

5. По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, строительная компания, производящая и, может реализовать в условиях теплой погоды 3600 и 60960, а при прохладной погоде – 4200 панелей и 30550 кирпича. Затраты фабрики в течении июля-августа на единицу продукции составили: панели – 73 ден.ед., кирпич – 5 ден.ед. Цена реализации составляет 110 и 12 ден.ед. соответственно. В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию строительная компания в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции. Задачу решить с использованием критериев «природы», приняв степень оптимизма равным 0,5.

6. Фирма «Фармация» – производитель медикаментов. Известно, что пик спроса на антидепрессивные препараты

приходится на весенний период, на антиинфекционные препараты – на осенний период. Затраты на 1 усл.ед продукции за август-сентябрь составили: на антидепрессивные препараты – 65 р., на антиинфекционные препараты – 25 р. По данным наблюдений, фирмой установлено, что в течении рассматриваемых двух месяцев она может реализовать в условиях теплой погоды 3100 усл.ед. на антидепрессивные препараты и 1150 усл.ед. на антиинфекционные препараты, в условиях холодной погоды 6890 усл.ед. на антидепрессивные препараты и 2530 усл.ед. на антиинфекционные препараты. Определить стратегию фирмы в выпуске продукции, в связи с возможными изменениями в погоде, обеспечивающую максимальный доход фирмы. Цена за реализацию 1 усл.ед. составляет 130 р. за на антидепрессивные препараты и 55 р. на антиинфекционные препараты.

7. По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фабрика, производящая ткань, может реализовать в условиях теплой погоды 1000 и 3090 рулонов легкой ткани, а при прохладной погоде – 1400 рулонов тяжелой ткани и 800 рулонов легкой ткани. Затраты фабрики в течении июля-августа на единицу продукции составили: рулоны тяжелой ткани – 70 ден.ед., рулоны легкой ткани – 50 ден.ед. Цена реализации составляет 120 и 80 ден.ед. соответственно. В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фабрики в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции. Задачу решить с использованием критериев «природы», приняв степень оптимизма равным 0,5.

8. Фирма производит пользующиеся спросом зонты от дождя и солнца, реализация которых зависит от сезона года. Затраты фирмы в течении июля-августа на единицу продукции составили: зонты от дождя – 18 ден.ед., зонты от солнца – 10 ден.ед. Цена реализации составляет 38 и 27 ден.ед. соответственно. По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях солнечной погоды 566 зонтов от дождя и 1022 зонтов от солнца, а при дождливой погоде – 1100 зонтов от дождя и 380 зонтов от солнца. В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции. Задачу решить с использованием критериев «природы», приняв степень оптимизма равным 0,5.

9. Фирма производит пользующиеся спросом осеннюю и зимнюю обувь, реализация которых зависит от сезона года. Затраты фирмы в течении октябрь-ноябрь на единицу продукции составили: осеннюю – 195 ден.ед., зимнюю обувь – 258 ден.ед. Цена реализации составляет 362 и 450 ден.ед. соответственно. По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях прохладной погоды 1700 пар зимней обуви и 2021, а при холодной погоде – 2500 пар зимней обуви и 1580 пар осенней обуви. В связи с

возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции. Задачу решить с использованием критериев «природы», приняв степень оптимизма равным 0,5.

10. Фирма «Медсервис» – производитель медикаментов. Известно, что пик спроса на анальгетики приходится на летний период, на противокашлевые препараты – на осенний период. Затраты на 1 усл.ед продукции за август-сентябрь составили: анальгетики – 50 р., противокашлевые препараты – 35 р. По данным наблюдений фирмой установлено, что она может реализовать в течении рассматриваемых двух месяцев в условиях теплой погоды 4010 усл.ед. анальгетиков и 2350 усл.ед. противокашлевых препаратов, в условиях холодной погоды 2750 усл.ед. анальгетиков и 5100 усл.ед. противокашлевых препаратов. Определить стратегию фирмы в выпуске продукции, в связи с возможными изменениями в погоде, обеспечивающую максимальный доход фирмы. Цена за реализацию 1 усл.ед. составляет 100 р. за анальгетики и 70 р. за противокашлевые препараты.

24. Теория вероятностей

24.1. Краткие сведения из теории

24.1.1. Основные положения

Теория вероятностей – наука, изучающая закономерности в случайных событиях (явлениях),т.е. таких событиях, которые могут произойти или не произойти в неизменных условиях. Теория вероятностей исследует не все случайные события, а только те, которые обладают двумя признаками: массовостью и устойчивостью. Эти признаки неразрывно связаны друг с другом. Массовость предполагает наличие большого количества однородных опытов. Устойчивость проявляется в стабильности частоты (частости) случайного события в этом большом количестве однородных опытов.

Устанавливаемые теорией вероятностей закономерности не обязательно отражают причинно-следственные связи процессов и явлений. Поэтому теоретико-вероятностными выводами нельзя подменять исследования конкретных наук.

Из достаточно большого количества понятий и определений в теории вероятностей, которые должен изучить студент по рекомендованным учебникам и учебным пособиям, остановимся на важнейшем – *вероятность случайного события – как мера возможности наступления события.*

Если A –случайное событие, то $p(A)$ –вероятность случайного события. Для достоверного события $p(A)=1$, для невозможного события $p(A)=0$. Это значит $0\le p(A)\le 1$.

Общей формулы определения вероятности случайного события нет, но в зависимости от условий существует три способа ее вычисления.

Способ 1 – классическая формула определения вероятности

$$p(A)=\frac{m}{n}. \qquad (24.1)$$

Формула (24.1) применяется для узкого круга задач, когда количество всех возможных попарно несовместных, равновозможных событий ограничено (их можно посчитать). Формулу применяют «априори» (до опыта).

В формуле (24.1):

N – общее число всех случаев (исходов),

M – число случаев (исходов), благоприятных событию A.

Например, в партии из n=50 изделий имеется m=7 бракованных. Вероятность случайно выбрать бракованное изделие $p(A)=\frac{7}{50}$.

Применение формулы (24.1) достаточно часто связано с использованием *комбинаторики* – раздела дискретной математики, изучающего различные комбинации групп элементов конечного множества.

Перечислим основные типы комбинаций.

Перестановки P_m – всевозможные множества, содержащие m различных элементов. Иными словами – это всевозможные группы из m элементов, отличающиеся друг от друга порядком элементов (элементы «переставляются»).

Количество перестановок равно:

$$P_m=m!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(m-1)\cdot m. \qquad (24.2)$$

Размещения A_m^n –всевозможные подмножества, содержащие n элементов, составленные из m элементов основного множества ($n\leq m$).

Количество размещений равно:

$$A_m^n=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdots(m-n+1)=\frac{m!}{(m-n)!}. \qquad (24.3)$$

Сочетания C_m^n неупорядоченные подмножества, содержащие по n элементов, составленные из m элементов основного множества. Иными словами – это группы, содержащие n элементов из m элементов основного множества, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом.

Количество сочетаний равно:

$$C_m^n=\frac{A_m^n}{P_n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}. \qquad (24.4)$$

Способ 2 – статистический. Вероятность определяется «апостериори» (после опыта), как среднее значение частоты события за большое количество опытов.

Способ 3 – геометрический, являющийся геометрической интерпретацией способа 1. При этом в формулу (24.1) подставляются линейные, плоскостные или объемные величины в зависимости от геометрической модели решаемой задачи.

24.1.2. Алгебра случайных событий и их вероятностей

Событие $C=A+B$ называется *суммой событий* A и B , если оно заключается в том, что происходит или событие A ,или событие B , или оба вместе.

Событие $D=AB$ называется *произведением событий* A и B ,если оно заключается в том, что происходит и событие A и событие B одновременно.

Алгебра вероятностей случайных событий:

$P(A+B)=P(A)+P(B)$-для несовместных событий;

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$-в общем случае;

$P(AB)=P(A)P(B)$-для независимых событий;

$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)$-для зависимых событий, где условная вероятность $P(B/A)$-есть вероятность события B при условии, что A произошло; $P(A/B)$-есть вероятность события A при условии, что B произошло.

$P(A)=1-P(\overline{A})$, или $p=1-q$, где $P(A)=p$-вероятность события A, $P(\overline{A})=q$-вероятность противоположного события $\overline{A}$.

Если событие A происходит при условии, что имеет место одно из попарнонесовместных событий H_1, $H_2, \dots, H_n$, называемых гипотезами и образующих полную группу событий (одно, любое из событий обязательно произойдет), то вероятность события A определяется по формуле *полной вероятности:*

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+\dots+P(H_n)P(A/H_n)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i). \quad (24.5)$$

Если в перечисленных условиях событие A произошло, то по формуле *Байеса* можно уточнить вероятность той или иной гипотезы:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}. \quad (24.6)$$

24.1.3. Последовательные испытания

Если при проведении n независимых испытаний событие A может появиться с одной и той же вероятностью p и не появиться с вероятностью q , то вероятность того , что событие A из n испытаний появится ровно k раз определяется по формуле *Бернулли:*

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}. \quad (24.7)$$

Вероятность того, что в n испытаниях схемы Бернулли событие A появится от k_1 до k_2 раз $(0 \le k_1 \le k_2 \le n)$, обозначим через $P_n(k_1 \le k \le k_2)$,тогда

$$P_n(k_1 \le k \le k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k)=\sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Наивероятнейшее число k_0 появления события A в n испытаниях определяется неравенством:

$$np-q \le k_0 \le np+q.$$

Формула Бернулли применяется при малых $n \le 30$ и больших $p \ge 0,1$.

При условии $n \ge 30, p \ge 0,1$, (точнее $npq \ge 15$) применяется *локальная формула Муавра-Лапласа* (при больших n формулу Бернулли использовать практически невозможно).

$$P_n(k)=\frac{\varphi(t)}{\sqrt{npq}}, \quad \text{где} \quad \varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}, t=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}. \tag{24.8}$$

Функция $\varphi(t)$ – четная, т.е. $\varphi(t)=\varphi(-t)$, табулирована (см. приложение, таблица 1).

Для вычисления $P\{k_1 \le k \le k_2\}$ используют *интегральную формулу Муавра-Лапласа:*

$$P_n(k_1 \le k \le k_2)=\Phi(\gamma'')-\Phi(\gamma'),$$

где $\Phi(\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \gamma''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}, \gamma'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}.$ (24.9)

Функция $\Phi(\gamma)$ – нечетная, т.е. $\Phi(-\gamma)=-\Phi(\gamma)$, табулирована (см. приложение, табл.2).

При условии $n>30$, $p<0{,}1$ (точнее $np \le 10$) применяется *формула Пуассона* (формула малых вероятностей):

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda=np. \tag{24.10}$$

Функция $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ табулирована (см. приложение, таблица 4).

24.1.4. Случайные величины и их законы распределения

Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение заранее не известное. Обозначают случайные величины: X, Y, Z, V и др. Случайные величины бывают двух видов.

Дискретная случайная величина (ДСВ) – величина, которая принимает отдельные, изолированные друг от друга значения. Например, число выпавших очков игрального кубика.

Непрерывная случайная величина (НСВ) – величина, значения которой нельзя отделить друг от друга. Например, время наработки на отказ какого-либо устройства.

Случайные величины (СВ) характеризуются законом распределения, устанавливающим связь между возможными значениями СВ и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения может задаваться формулами, таблицами и графиками.

Существует три вида закона распределения СВ.

Для ДСВ – ряд распределения и функция распределения.

Для НСВ – функция распределения и плотность распределения.

Ряд распределения ДСВ – таблица, в которой перечислены все возможные значения ДСВ и соответствующие им вероятности.

Свойство ряда распределения – сумма всех вероятностей равна единице.

Функция распределения ДСВ и НСВ – вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше, чем x. Обозначается – $F(x)$.

$$F(x) = P\{X<x\}.$$

Плотность распределения НСВ – есть производная функции распределения в точке x. Обозначается – $f(x)$.

$$f(x)=F'(x)= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

Отметим два важных свойства плотности распределения.

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

2. Вероятность попадания НСВ X в интервал между a и b равна:

$$P\{a \le X \le b\} = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Остальные свойства всех видов законов распределения СВ нужно усвоить по рекомендованной литературе.

На практике для ДСВ в качестве закона распределения пользуются рядом распределения (соответствующие законы приведены ниже). Переход от ряда распределения к функции распределения рассмотрен также ниже. Для НСВ в качестве закона распределения пользуются плотностью распределения, а переход к функции распределения можно произвести по формуле:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

24.1.5. Числовые характеристики СВ

Законы распределения СВ полностью характеризуют их, но на практике они громоздки и очень часто информативно избыточны. Нужно иметь существенную, но краткую информацию об СВ. Для этого служат числовые характеристики СВ.

Из достаточно большого разнообразия числовых характеристик, которые изложены в литературе, отметим только три.

Математическое ожидание (МОЖ) есть неслучайная, детерминированная величина (число), определяемая по формулам:

Для ДСВ: $$m_x = M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i,$$

где x_i – значения СВ,

p_i –соответствующие этим значениям вероятности,

n – количество СВ.

Для НСВ: $$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

МОЖ есть вычисленное среднее значение СВ, вокруг которого разбросаны сами значения СВ. Единицы измерения МОЖ совпадают с единицами СВ.

Свойства МОЖ:

1. Если C – const, то $M[C] = C$, в частности $M[M[X]] = M[X]$.
2. $M[CX] = CM[X]$.
3. $M[X + C] = M[X] + C$, в частности $M[x - M[X]] = 0$.
4. $M[X \pm Y] = M[X] \pm M[Y]$.
5. $M[XY] = M[X]M[Y]$, если X, Y- независимые СВ.

Дисперсия СВ – есть детерминированная величина, равная математическому ожиданию квадрата случайного отклонения СВ от его МОЖ. и определяемая по формуле:
$$D[X] = M\left[(x - M[X])^2\right], \text{ или } D[X] = M\left[X^2\right] - M^2[X].$$

Для ДСВ: $D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^2 p_i$, или

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2[X].$$

Для НСВ: $D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx$, или

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - M^2[X].$$

Дисперсия СВ определяет разброс (рассеяние) значений СВ от МОЖ в среднем.

Свойства дисперсии СВ.

1. Если C – const, то $D[C] = 0$.
2. $D[CX] = C^2 D[X]$.
3. $D[X + C] = D[X]$.
4. $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$, если X, Y – независимые СВ.

Единицы измерения дисперсии СВ являются квадраты единиц измерения самой СВ (*кг*^{2},*А*^{2} и т.д.). Этот недостаток устраняет следующая числовая характеристика СВ.

Среднеквадратическое отклонение СВ (СКО) – детерминированная величина, определяемая по формуле: $\sigma_x = \sqrt{D[X]}$.

Свойства СКО:

1. $\sigma_x = 0$.

2. $\sigma_{cx} = |C|\sigma_x$.

3. $\sigma_{x+y} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$.

4. $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ – среднеквадратическое отклонение среднеарифметического ($\bar{x}$) в $\sqrt{n}$ раз меньше среднеквадратического отклонения СВ.

24.1.6. Частные законы распределения СВ

В зависимости от различных условий существует достаточно большое количество законов распределения СВ. Остановимся только на пяти из них(два для ДСВ и три для НСВ).

Если при n последовательных испытаний в условиях формулы Бернулли случайной величиной X является число наступления события A , то она распределена по *биномиальному* закону и имеет ряд распределения:

x_k	0	1	…	k	…	n
p_k	q^n	npq^{n-1}	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

Сумма вероятностей $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$ есть бином Ньютона, поэтому закон называется биномиальным.

Числовые характеристики СВ, распределенной по биномиальному закону:

$M[X] = np, D[X] = npq, \sigma_x = \sqrt{npq}$.

Если при n последовательных испытаний в условиях формулы Пуассона случайной величиной X является число наступления события A, то она распределена по закону *Пуассона* и имеет ряд распределения:

x_k	0	1	…	k	…
p_k	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	…	$\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	...

Здесь $\lambda = np$.

Не смотря на то, что $k \to \infty; \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$.

Числовые характеристики СВ, распределенной по закону Пуассона:

$$M[X]=D[X]=\lambda=np;\sigma_x=\sqrt{\lambda}=\sqrt{np}.$$

Распределением Пуассона описывается простейший поток случайных однородных событий.

Непрерывная СВ имеет *равномерное* распределение на отрезке $[a,b]$, если плотность вероятности этой СВ равна:

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ x\notin[a,b], \\ \dfrac{1}{b-a},\ x\in[a,b]. \end{cases}$$

Тогда

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a},\ a\le x\le b, \\ 1,\ x>b. \end{cases}\quad M[X]=\frac{a+b}{2},\ \ D[X]=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Такое распределение имеют ошибки измерения стрелочным прибором, когда за результат измерения берется ближайшее целое деление шкалы. Таким же образом распределены ошибки округления данных при расчете на калькуляторах и компьютерах.

Непрерывная СВ имеет *показательное* распределение, если

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x},\ x\ge 0. \end{cases}$$

Тогда $F(x)=\begin{cases} 0,\ x<0, \\ 1-e^{-\lambda x},\ x\ge 0. \end{cases}$

$$M[X]=\sigma_x=\frac{1}{\lambda},\qquad D[X]=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Показательное распределение имеет большое значение в теории Марковских процессов, теории массового обслуживания и теории надежности – существенных разделах прикладной теории вероятности.

Непрерывная СВ с математическим ожиданием m_x, среднеквадратическим отклонением σ имеет *нормальное* распределение, если

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}.$$

Тогда $F(x)=\dfrac{1}{2}+\Phi\left(\dfrac{x-m_x}{\sigma}\right)$, где $\Phi(\gamma)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\gamma}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – табулированная функция (приложение таблица 2).

Вероятность попадания СВ X в интервал (a,b) равна:

$$p\{a < X < b\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}dx = \Phi\left(\frac{b-m_x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m_x}{\sigma}\right).$$

Достаточно часто определяют вероятность попадания СВ X в интервал (a,b), который симметричен относительно МОЖ m_x, т.е. $a = m_x - \Delta, b = m_x + \Delta.$

$$\begin{aligned} p\{a < X < b\} &= p\{m_x - \Delta < X < m_x + \Delta\} = p\{|X - m_x| < \Delta\} = \\ &= \Phi\left(\frac{m_x + \Delta - m_x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m_x - \Delta - m_x}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma.}\right) \end{aligned} \tag{24.11}$$

Если $\Delta = 3\sigma$, то

$$p\{|X - m_x| < 3\sigma\} = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2\cdot 0,49855 \approx 0,9973.$$

Тогда $\{|X - m_x| > 3\sigma\} = 1 - 2\Phi(3) = 0,0027.$

Имеем «*правило* 3σ»: для нормально распределенной СВ только 3 значения СВ из 1000 могут « выйти» из интервала $(m_x - 3\sigma, m_x + 3\sigma)$.

СВ распределена по нормальному закону, если причиной «случайности» является результирующее воздействие большого количества различных, равноценных, случайных, независимых факторов, каждый из которых незначительно влияет на результат воздействия.

Примеры нормально распределенных СВ : ошибки измерения, ошибки артиллерийской и ракетной стрельбы, ошибки вывода космического аппарата в заданную точку пространства, «дробовой» эффект, «тепловой» шум и др.

24.1.7. Закон больших чисел

Под «законом» больших чисел понимают ряд математических теорем , доказывающих устойчивость массовых случайных явлений, относящихся к стремлению частоты случайного события к вероятности этого события, среднего арифметического значения к математическому ожиданию СВ, закона распределения суммы независимых СВ, имеющих одинаковые распределения, матожидания и дисперсии, к нормальному закону.

Доказательство этих теорем опирается на неравенство Чебышева, которое является для них леммой.

Первая форма неравенства Чебышева:

$$p(|X - m_x| \geq \alpha) \leq \frac{D[X]}{\alpha^2}.$$

Вероятность отклонения СВ от ее математического ожидания превзойдет по абсолютной величине положительное число ά не более отношения дисперсии СВ к квадрату ά.

Это форма вероятности больших отклонений.

Для оценки вероятности малых отклонений применяется вторая форма неравенства Чебышева:

$$p\left(\left|X - m_x\right| \le \beta\right) \le 1 - \frac{D[X]}{\beta^2};\ \beta > 0.$$

24.2. Решение типовых заданий

24.2.1. Задание 1

Три линии выпускают одно и то же изделие так, что на первой линии выпускается 65% общего объема выпуска, на второй – 20%, на третьей – 15%. Вероятность брака в изделии составляет: 0,0025 – для первой линии, 0,006 – для второй, 0,007 – для третьей. Все изделия поступают на склад готовой продукции.

Далее следуют 11 задач, каждое из которых будем решать отдельно. Каждый ответ нужно прокомментировать.

Предварительное замечание.

Условие задачи можно сформулировать следующим образом.

Имеются следующие гипотезы случайного события:

H_1 – изделие изготовлено на I линии;

H_2 – изделие изготовлено на II линии;

H_3 – изделие изготовлено на III линии.

Тогда вероятности гипотез равны:

$$p\left(H_1\right) = 0,65; p\left(H_2\right) = 0,2; p\left(H_3\right) = 0,15.$$

Случайное событие A –изготовлено бракованное изделие.

Вероятность брака в изделии, если известно, на какой линии оно изготовлено, есть условные вероятности:

$$p\left(A/H_1\right) = 0,0025; p\left(A/H_2\right) = 0,006; p\left(A/H_3\right) = 0,007.$$

Задача 1. Составлена партия из 12 изделий, в которой 8 изготовлено на I линии. Из этой партии отбирается произвольно 5 изделий. Какова вероятность p_1 того, что в числе отобранных окажется ровно 3 изделия, изготовленных на I линии?

Решение. Воспользуемся «классической» формулой определения вероятности: $p_1 = \frac{m}{n}$, где n – общее число всех исходов, m – число исходов, благоприятных требованиям к отбору.

$n = C_{12}^5$ – различные группы по 5 изделий, отличающиеся хотя бы одним любым изделием, сформированные из партии в 12 изделий, есть сочетания из 12 по 5.

$$m = C_8^3 C_4^2 .$$

Согласно условию задачи в партии из 5 отобранных изделий должно находиться 3 изделия, изготовленных на I линии. Всего изделий I линии равно 8. Количество вариантов отбора 3-х изделий из 8 равно количеству сочетаний из8 по 3, т. е. C_8^3. Остальные 2 изделия изготовлены на других линиях. Всего в партии из 12 изделий таких изделий будет 4 (12-8=4). На каждую группу изделий, содержащих 5 штук, из которых 3 конкретных изделия изготовлены на I линии, можно подобрать столько групп, содержащих по 2 изделия других линий, сколько находится сочетаний из 4 по 2. т.е. C_4^2. Т.о. число исходов, благоприятных требованиям к отбору равно произведению соответствующих сочетаний, т. е. $C_8^3 C_4^2$.

Тогда $p_1 = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_8^3 C_4^2}{C_{12}^5} = \dfrac{\dfrac{8!}{3!5!}\,\dfrac{4!}{2!2!}}{\dfrac{12!}{5!7!}} = \dfrac{8!4!5!7!}{3!5!2!2!12!} = \dfrac{14}{33} = 0,4242.$

Ответ: искомая вероятность $p_1 = 0,4242.$

Задача 2. Какова вероятность брака p_2 в изделии, взятого наугад со склада?

Решение. Гипотезы H_1, H_2, H_3 составляют полную группу несовместных событий, поэтому применима формула полной вероятности:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{3} p(H_i)\, p\left(A / H_i\right).$$

$$p_2 = p(A) = p(H_1)\, p\left(A / H_1\right) + p(H_2)\, p\left(A / H_2\right) + p(H_3)\, p\left(A / H_3\right) =$$

$$= 0,65 \cdot 0,0025 + 0,2 \cdot 0,006 + 0,15 \cdot 0,007 = 0,0038.$$

Ответ. Вероятность брака в наугад взятом изделии p_2=0,0038.

Задача 3. Отпущенное со склада изделие оказалось бракованным. Каковы вероятности p_3', p_3'', p_3''' того, что оно изготовлено на первой, второй, третьей линиях соответственно?

Решение. Вероятность того, что изделие изготовлено на I линии, если известно, что оно бракованное, есть условная вероятность $p_3' = p\left(H_1 / A\right)$. Аналогично $p_3'' = p\left(H_2 / A\right), p_3''' = p\left(H_3 / A\right)$. H_1, H_2, H_3 – полная группа несовместных гипотез. Значит, для решения задачи применима формула Байеса.

$$p_3^{'} = p\left(H_1/A\right) = \frac{p(H_1)\,p\left(A/H_1\right)}{p(H_1)\,p\left(A/H_1\right) + p(H_2)\,p\left(A/H_2\right) + p(H_3)\,p\left(A/H_3\right)} =$$

$$= \frac{p(H_1)\,p\left(A/H_1\right)}{p(A)} = \frac{0,65\cdot 0,0025}{0,0038} = 0,42.$$

$$p_3^{''} = p\left(H_2/A\right) = \frac{p(H_2)\,p\left(A/H_2\right)}{p(A)} = \frac{0,2\cdot 0,006}{0,0038} = 0,31.$$

$$p_3^{'''} = p\left(H_3/A\right) = \frac{p(H_3)\,p\left(A/H_3\right)}{p(A)} = \frac{0,15\cdot 0,007}{0,0038} = 0,27.$$

Ответ. Вероятность того, что бракованная деталь изготовлена на I линии $p_3^{'} = 0,42,$ на II линии $p_3^{''} = 0,31,$ на III линии $p_3^{'''} = 0,27.$

Задача 4. Со склада отобрано произвольно 7 изделий. Какова вероятность p_4 того, что среди них будет не менее пяти изделий, изготовленных на второй линии?

Решение. Обозначим через k число изделий, изготовленных на II линии из числа отобранных $n = 7$. Тогда p_4 есть вероятность неравенства $k \ge 5$ из 7, т.е. $p_4 = p_7(k \ge 5) = p_7(5) + p_7(6) + p_7(7)$.

Эти вероятности соответствуют схеме последовательных испытаний при $n = 7, p = p(H_2) = 0,2; q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$ и формуле Бернулли:

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

$$p_4 = p_7(5) + p_7(6) + p_7(7) = C_7^5 p^5 q^2 + C_7^6 p^6 q + C_7^7 p^7 q^0 =$$

$$= \frac{7!}{5!2!}0,2^5\cdot 0,8^2 + \frac{7!}{6!1!}0,2^6\cdot 0,8 + \frac{7!}{7!0!}0,2^7\cdot 0,8^0 = 0,0047.$$

Ответ. Искомая вероятность $p_4 = 0,0047.$

Задача 5. Какова вероятность p_5 того, что в партии из 150 изделий, отпущенных со склада, ровно 35 изготовлены на II линии?

Решение. В данном случае имеет место схема последовательных испытаний $p_5 = p_{150}(35)$ при условии:

$$n = 150, k = 35, p = p(H_2) = 0,2, q = 1 - p = 0,8, npq = 150\cdot 0,2\cdot 0,8 = 24 > 15.$$

При этих условиях формула Бернулли неэффективна. Вместо нее применяют локальную формулу Муавра-Лапласа:

$$p_n(k) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{npq}},\ \text{где}\ \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}, t = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Вычисляем: $npq = 150 \cdot 0,2 \cdot 0.8 = 24; t = \dfrac{35 - 150 \cdot 0,2}{\sqrt{24}} = 1,02.$

Функция $\varphi(t)$ – четная, т. е. $\varphi(t) = \varphi(-t)$.

По таблице 1 приложения определяем $\varphi(1,02) = 0,2371$.

$p_5 = p_{150}(35) = \dfrac{\varphi(t)}{\sqrt{npq}} = \dfrac{0,2371}{\sqrt{24}} = 0,048.$

Ответ: искомая вероятность $p_5 = 0,048$.

Задача 6. Какова вероятность p_6 того, что в партии из 1000 изделий, отпущенных со склада, количество изделий, изготовленных на второй линии, находится в пределах от 190 до 215?

Решение. Если количество изделий, изготовленных на второй линии, равно k и $190 \le k \le 215$, то $p_6 = p_{1000}(190 \le k \le 215)$.

Здесь применяем интегральную формулу Муавра-Лапласа:

$$p_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ где } \Phi(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

В нашем случае:

$n = 1000, k_1 = 190, k_2 = 215, p = p(H_2) = 0,2, q = 1 - p = 0,8; np = 1000 \cdot 0,2 = 200;$

$\sqrt{npq} = \sqrt{1000 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 12,6.$

$\gamma' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{190 - 200}{12,6} = -0,79; \gamma'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{215 - 200}{12,6} = 1,19.$

По таблице 2 приложения определяем значение функции $\Phi(\gamma)$.

$\Phi(\gamma') = \Phi(-0,79) = -0,2852; \Phi(\gamma'') = \Phi(1,19) = 0,3830.$

$p_6 = \Phi(\gamma'') - \Phi(\gamma') = \Phi(1,19) - \Phi(-0,79) = 0,3830 + 0,2852 = 0,6682.$

Ответ. Вероятность $p_6 = 0,6682$.

Задача 7. Какова вероятность p_7 того, что в партии из 1000 изделий число бракованных не превзойдет 3?

Решение. Вероятность брака в каждом из изделий, находящихся на складе, равна $p=p_2=0,0038$ (см. задачу 2). В соответствии со схемой последовательных испытаний $p_7=p_{1000}(k\le 3)$.

Событие $k\le 3$ –число бракованных изделий не превзойдет 3 – является событием, когда бракованных изделий нет совсем $k=0$,или только одно $k=1$,или два $k=2$,или три $k=3$, т.е. событие $k\le 3$ состоит из суммы несовместных событий $k=0, k=1, k=2, k=3$.

Поэтому $p_7 = p_{1000}(k \le 3) = p_{1000}(0) + p_{1000}(1) + p_{1000}(2) + p_{1000}(3)$.

При n=1000, p=0,0038, np=3,8<10 применяем формулу Пуассона:

$$p_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np.$$

Эти вероятности можно определить в приложении по таблице 4 значений функции Пуассона при λ=3,8.

$$p_{1000}(0)=0,6844;\ p_{1000}(1)=0,2589;\ p_{1000}(2)=0,0495;\ p_{1000}(3)=0,0064.$$

$$p_7=0,6844+0,2589+0,0495+0,0064=0,9992.$$

Ответ: с вероятностью p_7=0,9992 в партии из тысячи деталей будут не более трех бракованных.

Продолжение условия. Из изделий, имеющихся на складе, формируются две выборки по следующему правилу: сначала произвольно отбираются изделия по одному до тех пор, пока не появится изделие, изготовленное на первой линии, или количество отобранных деталей не достигнет четырех. Затем таким же образом формируется вторая выборка, но вместо изделий первой линии фигурируют изделия второй линии. Обозначим через X,Y,Z случайные величины, равные количеству изделий в первой и во второй выборках и суммарное количество в обеих.

Задача 8. Построить ряды распределения случайных величин X,Y,Z.

Решение 8.1. Построим ряд распределения случайной величины X.

По условию, X принимает значение $x_1=1$, если *первая* отобранная деталь изготовлена на I линии. СВ X принимает значение $x_2=2$, если при последовательном отборе деталей первая деталь изготовлена не на I линии, а вторая изготовлена на I линии. СВ X равна $x_3=3$, если последовательно первая и вторая отобранные детали изготовлены не на I линии, а третья изготовлена на I линии. Наконец, $x_4=4$, когда число отобранных деталей достигнет четырех.

Если x_1=1, то $p_1=p(H_1)=0,65.$

Если x_2=2, то

$$p_2=p\left(\overline{H_1}\right)p(H_1)=\left(1-p(H_1)\right)p(H_1)=(1-0,65)\cdot 0,65=0,227.$$

Если x_3=3, то

$$p_3=p\left(\overline{H_1}\right)p\left(\overline{H_1}\right)p(H_1)=\left(1-p(H_1)\right)^2 p(H_1)=(1-0,65)^2\,0,65=0,079.$$

События x=1, x=2, x=3, x=4 образуют полную группу событий.

Поэтому $p_1+p_2+p_3+p_4=1$. Тогда

$$p_4=1-(p_1+p_2+p_3)=1-(0,65+0,227+0,079)=0,044.$$

Ответ: случайная величина X имеет ряд распределения:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,65	0,227	0,079	0,044

Решение 8.2. Для случайной величины Y вычисления аналогичны, только событие H_1 меняется на событие H_2.

$$y_1 = 1; p_1 = p(H_2) = 0,2.$$

$$y_2 = 2; p_2 = p(\overline{H_2})\,p(H_2) = (1-0,2)\cdot 0,2 = 0,16.$$

$$y_3 = 3; p_3 = p(\overline{H_2})\,p(\overline{H_2})\,p(H_2) = (1-0,2)^2\cdot 0,2 = 0,128.$$

$$y_4 = 4; p_4 = 1-(p_1+p_2+p_3) = 1-(0,2+0,16+0,128) = 0,512.$$

Ответ: случайная величина Y имеет ряд распределения:

y_i	1	2	3	4
p_i	0,2	0,16	0,128	0,512

Решение 8.3. Построим ряд распределения случайной величины $Z=X+Y$. Случайная величина $Z=X+Y$ принимает все целые значения от $z=1+1=2$ до $z=4+4=8$,т.е. $z_1 = 2, z_2 = 3, z_3 = 4, z_4 = 5, z_5 = 6, z_6 = 7, z_7 = 8.$

Событие $z_1=2$ наступает, когда и $x=1$ и $y=1$. Значит : $p_1 = p(z_1 = 2) = p(x=1)\,p(y=1) = 0,65\cdot 0,2 = 0,13.$

Событие $z_2=3$ наступает, когда и $x=1$ и $y=2$, или $x=2$ и $y=1$. Значит:

$$p_2 = p(z_2=3) = p(x=1)\,p(y=2) + p(x=2)\,p(y=1) = 0,65\cdot 0,16 + 0,227\cdot 0,2 = \\ = 0,1494.$$

Событие $z_3=4$ наступает, когда и $x=1$ и $y=3$, или и $x=2$ и $y=2$, или и $x=3$ и $y=1$. Значит:

$$p_3 = p(z_3=4) = p(x=1)\,p(y=3) + p(x=2)\,p(y=2) + p(x=3)\,p(y=1) = \\ = 0,65\cdot 0,128 + 0,227\cdot 0,16 + 0,079\cdot 0,2 = 0,135.$$

Событие $z_4=5$ наступает, когда и $x=1$ и $y=4$, или и $x=2$ и $y=3$, или и $x=3$ и $y=2$, или и $x=4$ и $y=1$. Значит:

$$p_4 = p(z_4=5) = p(x=1)\,p(y=4) + p(x=2)\,p(y=3) + p(x=3)\,p(y=2) + \\ + p(x=4)\,p(y=1) = 0,65\cdot 0,512 + 0,227\cdot 0,128 + 0,079\cdot 0,16 + 0,044\cdot 0,2 = 0,383.$$

Событие z5=6 наступает, когда и x=2 и y=4, или x=3 и y=3, или x=4 и y=2. Значит:

$$p_5 = p(z_5=6) = p(x=2)\,p(y=4) + p(x=3)\,p(y=3) + p(x=4)\,p(y=2) = \\ = 0,227\cdot 0,512 + 0,079\cdot 0,128 + 0,044\cdot 0,16 = 0,133.$$

Событие $z_6=7$ наступает, когда и $x=3$ и y=4, или и $x=4$ и $y=3$. Значит:

$$p_6 = p(z_6 = 7) = p(x = 3)\,p(y = 4) + p(x = 4)\,p(y = 3) =$$
$$= 0{,}079 \cdot 0{,}512 + 0{,}044 \cdot 0{,}128 = 0{,}046.$$

Событие z_7=8 наступает, когда и x=4 и y=4. Значит:
$$p_7 = p(z_7 = 8) = p(x = 4) \cdot p(y = 4) = 0{,}044 \cdot 0{,}512 = 0{,}023.$$

Ответ: случайная величина Z имеет ряд распределения:

z_i	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0,13	0,149	0,135	0,383	0,133	0,046	0,023

Задача 9. Построить график функции распределения случайной величины Z.

Решение. Функция распределения $F(z)$ есть вероятность того, что данная СВ имеет значение меньше, чем z: $F(z) = p(Z < z)$.

Если $Z< z_1$,то $F(z_1) = p(Z < z_1) = 0$, т.к. событие $Z< z_1$ невозможное (СВ Z не имеет значений $< z_1$).

Если $Z< z_i$, то $F(z_i) = p(Z < z_i) = p(z_1) + p(z_2) + \cdots + p(z_{i-1})$, т.к. событие $Z<z_i$ является событием или z_1, или z_2, или … z_{i-1}, т.е. суммой несовместных событий.

Функция распределения $F(z_n)$ в точке z_n, где z_n – максимально возможное значение СВ Z ,согласно определения является:
$$F(z_n) = p(Z < z_n) = p(z_1) + p(z_2) + \cdots + p(z_{n-1}).$$

Обратим внимание, не смотря на то, что функция распределения определяется в точке z_n (последней точке значений СВ), само значение СВ $Z=z_n$ и вероятность появления этого значения здесь не учитываются. Значит, должна существовать еще одна точка функции распределения, которая учитывала бы данное обстоятельство.

Не трудно видеть, что в этой предполагаемой точке значение функции распределения становится максимальным и равным единице: $p(z_1) + p(z_2) + \cdots + p(z_n) = 1$ (свойство ряда распределения). Согласно определению обозначить функцию распределения в этом случае можно, как:
$$F(z_{n+1}) = p(Z < z_{n+1}) = p(z_1) + p(z_2) + \cdots + p(z_n) = 1,$$
а еще лучше
$$F(\infty) = p(Z < \infty) = p(z_1) + p(z_2) + \cdots + p(z_n) = 1.$$

Используя ряд распределения СВ Z , получаем следующие значения функции распределения:

$$F(z)=\begin{cases} 0; Z<2; \\ 0{,}13; Z<3; \\ 0{,}13+0{,}149=0{,}279; Z<4; \\ 0{,}13+0{,}149+0{,}135=0{,}414; Z<5; \\ 0{,}13+0{,}149+0{,}135+0{,}383=0{,}797; Z<6; \\ 0{,}13+0{,}149+0{,}135+0{,}383+0{,}133=0{,}93; Z<7; \\ 0{,}13+0.149+0{,}135+0.383+0.133+0{,}046=0{,}976; Z<8; \\ 1; Z<\infty. \end{cases}$$

Вычисления сводим в таблицу.

z	2	3	4	5	6	7	8	∞
F(z)	0	0,13	0,279	0,414	0,797	0,93	0,976	1

Ответ: функция *F(z)* распределения СВ *Z* имеет следующий график:

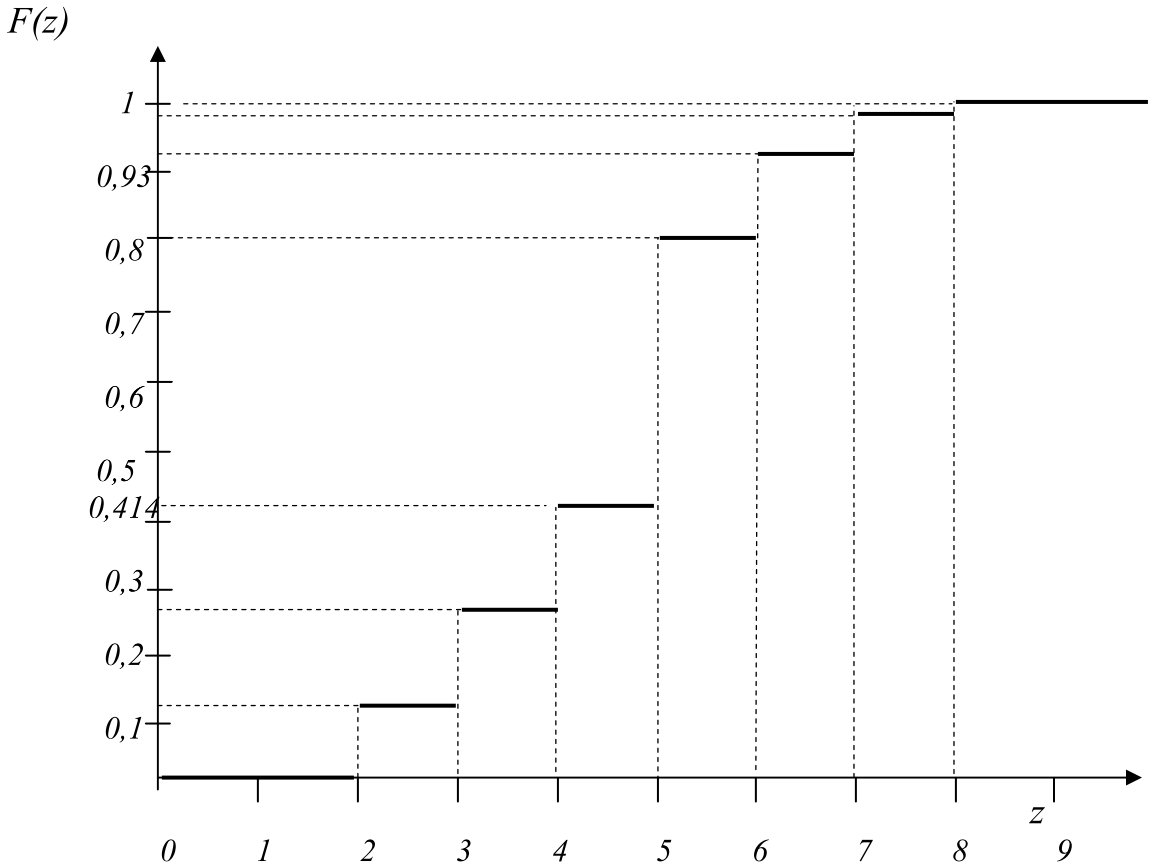


Рисунок 24.1

Задача 10. Вычислить математическое ожидание $M[Z]$, дисперсию $D[Z]$, и среднеквадратическое отклонение σ_z случайной величины *Z*.

Решение. По определению:

$$M[Z]=\sum_{i=1}^{n} z_i p_i; D[Z]=\sum_{i=1}^{n}(z_i - M[Z])^2 p_i =$$

$$=\sum_{i=1}^{n} z_i^2 p_i - M^2[Z]; \sigma_z = \sqrt{D[Z]}.$$

Промежуточные вычисления сведем в таблицу.

z_i	p_i	$z_i p_i$	z_i^2	$z_i^2 p_i$
2	0,13	0,26	4	0,52
3	0,149	0,447	9	1,341
4	0,135	0,54	16	2,16
5	0,383	1,915	25	9,575
6	0,133	0,798	36	4,788
7	0,046	0,322	49	2,254
8	0,023	0,184	64	1,472
$\sum$	1	4,466		22,11

$$M[Z]=4,466; D[Z]=22,11-4,466^2 = 2,165; \sigma_z = \sqrt{2,165} = 1,47.$$

Ответ. СВ *Z* имеет следующие числовые характеристики:

$M[Z]=4.466; D[Z]=2,165; \sigma_z = 1,47.$

Задача 11. Проверить справедливость неравенства Чебышева для СВ *Z* при значении $\beta = 1,5$.

Решение. Неравенство Чебышева по второй форме имеет вид:

$$p(|Z-M[Z]| \le \beta) \ge 1 - \frac{D[Z]}{\beta^2}.$$

Для СВ *Z* имеем:

$$p(|Z-4,466| \le 1,5) \ge 1 - \frac{2,165}{1,5^2} = 0,0377.$$

Неравенство $|Z-4,466| \le 1,5$ эквивалентно неравенству $-1,5 \le Z-4,466 \le 1,5$ или неравенству $4,466-1,5 \le Z \le 4,466+1,5$, т.е. $2,966 \le Z \le 5,966.$

В диапазон последнего неравенства попадают следующие значения СВ $Z : z_2 = 3, z_3 = 4, z_4 = 5$.

Вероятность попадания СВ *Z* в диапазон последнего неравенства есть сумма вероятностей перечисленных значений *Z*.

$$p(|Z-4,466| \le 1,5) = p(2,966 \le Z \le 5,966) = p(z_2) + p(z_3) + p(z_4) =$$

$$= 0,149 + 0,135 + 0,383 = 0,667.$$

Ответ. Полученное значение левой части неравенства Чебышева больше значения правой части: 0,667>0,0377. Неравенство выполняется.

24.2.2 Задание 2

Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} 0; x<0, \\ a\cdot\cos\dfrac{x}{2}; 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0; x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Задача 1. Найти значение a, при котором функция $f(x)$ является плотностью распределения.

Решение. Необходимо использовать свойство плотности распределения $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} f(x)dx=0+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\cdot\cos\frac{x}{2}dx+0=$$

$$=2a\cdot\sin\frac{x}{2}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2a\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0\right)=2a\frac{\sqrt{2}}{2}=1.$$

Откуда $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ. Функция $f(x)$ является плотностью распределения при

$$a=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 2. Найти функцию *F(x)* распределения случайной величины *X.*

Решение. Функция *F(x)* распределения и плотность распределения связаны соотношением: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

На интервале $-\infty < x \le 0, F\left(x\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$

На интервале $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2},$

$$F\left(x\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} f\left(x\right)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{x} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}2\sin\frac{x}{2}\Bigg|_{0}^{x} = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}.$$

На интервале $\dfrac{\pi}{2} \le x < \infty,$

$$F\left(x\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} f\left(x\right)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}dx + \int\limits_{\pi/2}^{x} 0dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\Bigg|_{0}^{\pi/2} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Ответ.

$$F\left(x\right) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Задача 3. Построить графики *F(x)* и *f(x)*.

Решение.

$$F\left(x\right) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{x}{2}, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

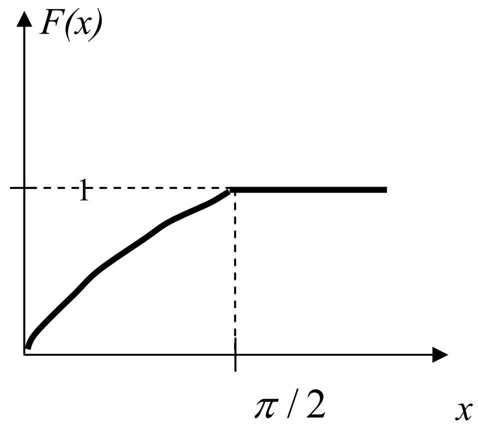


Рис. 24.2

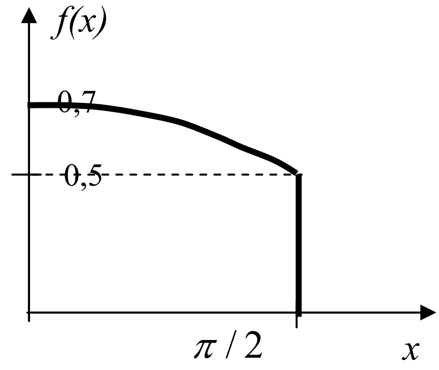


Рис. 24.3

Задача 4. Найти числовые характеристики СВ X: математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$, среднеквадратическое отклонение σ_x.

Решение.

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int_{0}^{\pi/2} x\cdot f(x)dx+\int_{\pi/2}^{\infty} x\cdot 0dx=\int_{0}^{\pi/2} x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c} u=x, du=dx, \\ dv=\cos\frac{x}{2}dx, v=2\sin\frac{x}{2}. \end{array}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2x\sin\frac{x}{2}\Big|_{0}^{\pi/2}-2\int_{0}^{\pi/2}\sin\frac{x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+4\cos\frac{x}{2}\Big|_{0}^{\pi/2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\pi\frac{\sqrt{2}}{2}+4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\right)=\frac{\pi}{2}+2\left(1-\sqrt{2}\right)\approx 0,74.$$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-M^2[X]=\int_{-\infty}^{0}x^2 0dx+\int_{0}^{\pi/2}x^2f(x)dx+\int_{\pi/2}^{\infty}x^2 0dx-M^2[X]=$$

$$=\int_{0}^{\pi/2}x^2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}dx-(0,74)^2=\left|\begin{array}{c} u=x^2, du=2xdx, \\ dv=\cos\frac{x}{2}dx, v=2\sin\frac{x}{2}. \end{array}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x^2 2\sin\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}2\sin\frac{x}{2}2xdx\right)-0,55=\left|\begin{array}{c}u=x,du=dx,\\ dv=\sin\frac{x}{2}dx,v=-2\cos\frac{x}{2}.\end{array}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi^2}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-4\left(-x2\cos\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}+2\int_0^{\pi/2}\cos\frac{x}{2}dx\right)\right)-0,55=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}-4\left(-\frac{\pi}{2}2\frac{\sqrt{2}}{2}+4\sin\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}\right)\right)-0,55=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}+2\pi\sqrt{2}-16\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-0,55\approx 0,19;\sigma_x=\sqrt{D[X]}=\sqrt{0,19}=0,44.$$

Ответ. $M[X]=0,74,\ D[X]=0,19,\ \sigma_x=0,44.$

Задача 5. Вычислить вероятность попадания СВ X в заданный интервал (*a,b*). *(a,b)*=$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. $p(a\le x\le b)=\int_a^b f(x)dx.$

$$p\left(\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{3}\right)=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}2\sin\frac{x}{2}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3}=\sqrt{2}\left(0,5-0,259\right)=0,34.$$

Ответ. Вероятность попадания СВ в интервал $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ равна 0,34.

24.3. Задания на контрольную работу «Теория вероятностей»

Контрольная работа состоит из 16 задач, разбитых на 2 задания.

Задание 1 посвящено исследованию дискретных случайных величин и состоит из 11 задач. Задание 2 посвящено исследованию непрерывных случайных величин и состоит из 5 задач.

В задании 1 условие конкретного варианта работы получается после подстановки в условие задачи числовых значений величин $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ из таблицы, приведенной после текста задания. Получившийся вариант каждого условия задачи записать полностью. После каждой задачи в конце решения следует записать ответ.

Задание 1.

Три параллельно работающие линии выпускают одно и то же изделие. На первой линии выпускается $10\alpha_1\%$ общего объема изделий, на второй -$10\alpha_2\%$. Вероятность брака в изделии составляет: β_1 – для первой линии, β_2 – для второй, β_3 – для третьей. Все изделия поступают на склад готовой продукции.

Задача 1. Составлена партия из одиннадцати изделий, в которой α_1 изготовлено на первой линии. Из этой партии отбирается произвольно 6 изделий. Какова вероятность p_1 того, что в числе отобранных окажется ровно 2 изделия, изготовленных на первой линии?

Задача 2. Какова вероятность p_2 брака в изделии, взятого наугад со склада?

Задача 3. Отпущенное со склада изделие оказалось бракованным. Каковы вероятности $p_3^{'}, p_3^{''}, p_3^{'''}$ того, что оно изготовлено на первой, второй, третьей линиях соответственно?

Задача 4. Со склада произвольно отобрано 6 изделий. Какова вероятность p_4 того, что среди них будет не менее трех, изготовленных на первой линии?

Задача 5. Какова вероятность p_5 того, что в партии из 100 изделий, отпущенных со склада, ровно $9\alpha_1$ изготовлены на первой линии?

Задача 6. Какова вероятность p_6 того, что в партии из 1000 изделий, отпущенных со склада, количество изделий, изготовленных на первой линии, находится в пределах $94\alpha_1 \cdots 105\alpha_1$?

Задача 7. Какова вероятность p_7 того, что в партии из 1000 изделий число бракованных не превзойдет двух ?

Продолжение условия.

Из изделий, имеющихся на складе, формируются две выборки по следующему правилу: сначала произвольно отбираются изделия по одному до тех пор, пока не появится изделие, изготовленное на первой линии, или количество отобранных деталей не достигнет четырех. Затем таким же образом формируется вторая выборка, но вместо изделий первой линии фигурируют изделия второй линии. Обозначим через X, Y, Z случайные величины, равные количеству изделий в первой и во второй выборках и суммарное количество в обеих.

Задача 8. Построить ряды распределения случайных величин X, Y, Z.

Задача 9. Построить график функции распределения случайной величины Z.

Задача 10. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение СВ Z.

Задача 11. Проверить справедливость неравенства Чебышева для случайной величины Z при значении $\beta = 2$.

Таблица значений исходных данных по вариантам.

Величина	α_1	α_2	β_1	β_2	β_3
Вариант					
1	4	2,5	0,001	0,0004	0,0003
2	5	1,5	0,003	0,0005	0,0001
3	6	1,5	0,002	0,0001	0,0005
4	4	3,5	0,001	0,0003	0,0006
5	5	3,5	0,002	0,0005	0,0003
6	6	2,5	0,001	0,0004	0,0007
7	4	2	0,003	0,0001	0,0006
8	5	3	0,002	0,0003	0,0005
9	6	2	0.003	0,0005	0,0001
10	4	4	0,001	0,0004	0,0003

Задание 2

Непрерывная СВ X задана плотностью распределения $f(x)$.

Задача 1 Найти значение a , при котором функция $f(x)$ является плотностью распределения.

Задача 2. Найти функцию $F(x)$ распределения случайной величины X.

Задача 3. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Задача 4. Найти числовые характеристики случайной величины X: математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$, среднее квадратическое отклонение σ_x.

Задача 5. Вычислить вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал (a,b).

Таблица задания 2 по вариантам

1.	$f(x)=\begin{cases} 0, x<\dfrac{\pi}{4}, \\ a\sin 2x, \dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ $(a,b)=\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right).$	2.	$f(x)=\begin{cases} 0, x<-1, \\ a\dfrac{1}{1+x^2}, -1\le x\le 1, \\ 0, x>1 \end{cases}$ $(a,b)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$

3.	$f(x)=\begin{cases}0, x<-\frac{1}{2},\\ ae^{2x}, -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2},\\ 0, x>\frac{1}{2}.\end{cases}$ $(a,b)=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.	4.	$f(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ a\sin 2x, 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 0, x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ $(a,b)=\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$.
5.	$f(x)=\begin{cases}0, x<\frac{1}{2},\\ a(2x-1)^2, \frac{1}{2}\le x\\ 0, x>\frac{3}{2}.\end{cases}$ $(a,b)=\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)$.	6.	$f(x)=\begin{cases}0, x<\pi,\\ a\sin\frac{x}{2}, \pi\le x\le 2\pi\\ x>2\pi.\end{cases}$ $(a,b)=\left(\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi\right)$.
7.	$f(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ a\cos\frac{x}{2}, 0\le x\le\\ 0, x>\pi.\end{cases}$ $(a,b)=\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$.	8.	$f(x)=\begin{cases}0, x<2,\\ a(x-1), 2\le x\le 4\\ 0; x>4.\end{cases}$ $(a,b)=(3;4)$.
9.	$f(\ )=\begin{cases}0, x<1,\\ ae^{x}, 1\le x\le 2,\\ 0, x>2.\end{cases}$ $(a,b)=(1;1,5)$.	10.	$f(x)=\begin{cases}0, x<-\sqrt{3},\\ a\frac{1}{1+x^2}, -\sqrt{3}\le x\le\\ 0, x>\sqrt{3}.\end{cases}$ $(a,b)=(-1;1)$.

25. Математическая статистика

25.1. Краткие теоретические сведения

25.1.1. Предмет и метод математической статистики

Математическая статистика – наука, изучающая методы обработки опытных данных, полученных в результате исследований над случайными величинами.

При исследованиях большого числа однородных объектов изучение всех членов совокупности представляет трудоемкую, экономически не выгодную, долговременную задачу, которую не всегда можно выполнить.

Математическая статистика позволяет существенно снизить трудозатраты, время, средства, ресурсы для производства подобных исследований, т.к. необходимую информацию о всей совокупности объектов исследования можно получить по результатам изучения сравнительно небольшой части этой совокупности с достаточной для практики достоверностью. Такой метод исследований называется *выборочным.*

25.1.2. Выборочный метод

Генеральная совокупность – вся подлежащая изучению совокупность объектов (элементов).

Выборочная совокупность или *выборка* – та часть объектов (элементов), которая попала на проверку, исследования и т.д.

Сущность выборочного метода – определить характеристики объектов выборки, по которым будут даны характеристики объектов генеральной совокупности.

Существует несколько способов отбора объектов в выборку: собственно случайный повторный, собственно случайный бесповторный, механический, типический, серийный. В зависимости от способа отбора применяют ту или иную методику вычисления характеристик. Мы будем рассматривать только два первых способа.

Введем обозначения:

N – объем генеральной совокупности;

N – объем выборки (количество объектов в выборке).

Каждый объект характеризуется числовым значением какого-либо признака (аналогично значениям случайной величины).

x_i – является i-м значением числового признака, или, еще проще, значением i-й варианты;

m_i – частота $i-$й варианты (количество $i-$х вариант в выборке).

Если в выборке находится r различных вариант, то $\sum_{i=1}^{r} m_i = n,$ т.е. сумма всех частот в выборке равна объему выборки.

Относительная частота $p_i = \frac{m_i}{n}$ – отношение частоты m_i к объему выборки.

Вариационным рядом наз. упорядоченный по возрастанию или убыванию ряд вариант с соответствующими им частотами (относительными частотами).

Для удобства обработки информации вариационные ряды группируют.

Если варианта в каждой группе имеет одно значение, то ряд называется *дискретным*.

Если варианта занимает интервал значений или в каждой группе имеется несколько различных вариант, входящих в соответствующий интервал значений, то ряд называется *интервальным*. Для интервального ряда вводится обозначение $\overline{x_i}$ – середина i – го интервала.

В интервальном ряду часть выборочной информации теряется, т.к. он не отражает распределение вариант внутри интервала.

Как правило, в интервальных рядах интервалы h имеют равную длину. Если для признака X выбирают k равных интервалов, то длина интервала h равна:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k},$$

где $x_{\max}, x_{\min}$ – $\min è \max$ значения наблюдаемого признака ($\min u \max$ значения вариант).

Рекомендуют выбирать k нечетным, ориентируясь ,например, на формулу Стерджесса:

$$k = 1 + 3,322 \cdot \lg n$$

Точки деления интервалов группирования x_i вычисляются:

$$x_i = x_{\min} + ih, i = 0,1,2,...,k.$$

Середины интервалов группирования $\overline{x_i}$ вычисляются:

$$\overline{x_i} = \frac{(x_{i-1} + x_i)}{2}, i = 1,2,...,k.$$

25.1.3. Графическое представление вариационных рядов

Графическое представление обладает наглядностью и часто используется для качественной оценки распределения признака.

По горизонтальной оси откладывают варианты выборки x_i для дискретных рядов или середины интервалов группирования $\overline{x_i}$

для интервальных рядов. По вертикальной оси – частоты m_i , относительные частоты $p_i = \frac{m_i}{n}$, плотности частот $\frac{m_i}{h}$, плотности относительных частот $f_i = \frac{p_i}{h}$.

Полигон частот – строится для дискретных и интервальных рядов и является ломанной, соединяющей последовательно точки с координатами (x_i, m_i) или $(\overline{x}_i, m_i)$. В последнем случае (для интервальных рядов) добавляют две точки с нулевыми ординатами, лежащими на расстоянии одного интервала: слева до $\overline{x}_1$, справа за $\overline{x}_k$.

Полигон относительных частот – ломанная, соединяющая последовательно точки (x_i, p_i) или $(\overline{x}_i, p_i.)$

Полигон плотности относительных частот –ломанная, соединяющая последовательно точки (x_i, f_i) или $(\overline{x}_i, f_i)$.

Для интервальных рядов во всех полигонах добавляются две точки с нулевыми ординатами, лежащими на расстоянии одного интервала: первая точка до $\overline{x}_1$, вторая – за $\overline{x}_k$.

Гистограмма частот – строится только для интервальных рядов и представляет ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы *h*, а высоты – плотность частоты $\frac{m_i}{h}$.

Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот,т.е. объему выборки *n*.

Гистограмма относительных частот- ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников с основаниями *h* и высотами $f_i = \frac{p_i}{h}$ - плотностями относительных частот. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т. е. единице.

Кумулята – график частот нарастающим итогом. Для ее построения предварительно рассчитывают для каждой варианты значения υ_i частоты нарастающим итогом по формулам:

$$\upsilon_1 = m_1, \upsilon_2 = \upsilon_1 + m_2, \upsilon_3 = \upsilon_2 + m_3, ..., \upsilon_k = n.$$

25.1.4. Точечные оценки

Согласно идее выборочного метода вычисленные при обработке числовые характеристики выборки, называемые *статическими характеристиками*, могут приближенно оценивать истинные значения числовых характеристик генеральной совокупности или являться их *оценками.* При этом оценка неизвестного параметра генеральной совокупности выражается одним числом, поэтому она называется *точечной оценкой* и часто обозначается значком $\hat{\ }$.

Например, $M[X]$-истинное значение математического ожидания генеральной совокупности ,тогда $\hat{m}_x$-точечная оценка МОЖ.

Можно записать: $M[X]\approx \hat{m}_x; D[X]\approx \hat{D}[X]; \sigma_x \approx \hat{\sigma}_x$, где

$\hat{D}[X]$-точечная оценка дисперсии,

$\hat{\sigma}_x$ – точечная оценка среднеквадратического значения.

Числовые характеристики генеральной совокупности являются постоянными, детерминированными числами, а их точечные оценки – случайными величинами, т.к. сама выборка формируется случайным образом.

Поэтому к точечным оценкам предъявляются следующие требования:

-*состоятельность*- заключается в приближении точечной оценки к истинному значению величины при увеличении объема выборки n;

-*несмещенность*- математическое ожидание точечной оценки должно быть равно оцениваемой величине;

-*эффективность*- дисперсия точечной оценки должна быть минимальной.

Ниже приведены расчетные формулы для точечных оценок $M[X], D[X], \sigma_x$.

$M[X]\approx \hat{m}_x = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i m_i$ – для дискретного ряда,

где r –число вариант, m_i–частота i-той варианты.

$M[X]\approx \hat{m}_x = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i m_i$ – для интервального ряда,

где k-число интервалов, m_i –количество вариант в i-том интервале.

$D[X]\approx \hat{D}[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\left(x_i - \hat{m}_x\right)^2 m_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i^2 m_i - \left(\hat{m}_x\right)^2$ – для дискретного ряда.

$D[X]\approx \hat{D}[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{x}_i - \hat{m}_x\right)^2 m_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i^2 m_i - \left(\hat{m}_x\right)^2$ – для интервального ряда.

Формулы для дисперсии применяются при условии $n>30$.

Если $n<30$, то для обеспечения несмещенности оценки дисперсии в указанных формулах вместо множителя $\frac{1}{n}$ нужно применять множитель $\frac{1}{n-1}$.

Выборочное среднеквадратичное, или оценку среднеквадратичного отклонения определяют как $\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\tilde{D}[X]}$.

25.1.5. Интервальные оценки

Точечные оценки числовых характеристик генеральной совокупности не являются точными, особенно при малом объеме выборки *n*, к тому же все они являются случайными величинами.

Поэтому точечные оценки нужно «уточнять». Для этой цели применяют *интервальные оценки*, которые определяются двумя параметрами (характеристиками): *доверительным интервалом* и *доверительной вероятностью.*

Доверительный интервал характеризует точность оценки, а доверительная вероятность – ее надежность.

Доверительная вероятность задается исследователем самостоятельно, исходя из требований стандарта (ГОСТ 8.207-76), который предусматривает следующие значения доверительных вероятностей $p_д$:

$p_д = 0{,}95$ – в обычных случаях (измерениях);

$p_д = 0{,}99$ – в измерениях, которые повторить нельзя;

$p_д = 0{,}9999$ – в измерениях, связанных со здоровьем людей.

Пусть H -числовая характеристика генеральной совокупности – истинное значение величины (это может быть МОЖ $M[X]$, дисперсия $D[X]$, и др.). Тогда $\tilde{h}$ – ее точечная оценка или выборочная характеристика и $H \approx \tilde{h}.$ Доверительным интервалом назовем интервал (a,b), в котором находится истинное значение величины H: ($a < H < b.$).

Для точечной оценки $\tilde{h}$ будет справедливо такое же неравенство: $\left(a < \tilde{h} < b\right)$. Обычно $\tilde{h}$ находится в середине интервала (a,b), т.е. $\tilde{h} - a = b - \tilde{h} = \Delta$, откуда $a = \tilde{h} - \Delta, b = \tilde{h} + \Delta.$ Тогда неравенство $a < H < b$ преобразуется в неравенство $\tilde{h} - \Delta < H < \tilde{h} + \Delta$ или $\left|H - \tilde{h}\right| < \Delta.$ В этом случае Δ является *доверительной точностью* или просто точностью статистической оценки, а сам доверительный интервал есть интервал $\left(\tilde{h} - \Delta, \tilde{h} + \Delta\right)$.

Теперь уместно поставить вопрос о вероятности нахождения истинного значения величины H в интервале $\left(\tilde{h} - \Delta, \tilde{h} + \Delta\right)$. Это и будет доверительная вероятность, задаваемая исследователем:

$$p_д = p\left\{\tilde{h} - \Delta < H < \tilde{h} + \Delta\right\} = p\left\{\left|H - \tilde{h}\right| < \Delta\right\}.$$

Отличие существует только в постановке вопроса: если обычно определяют вероятность нахождения случайной величины в интервале, ограниченном числами – детерминированными величинами, то теперь определяют вероятность нахождения детерминированной величины – истинного значения величины в интервале, ограниченном случайными величинами $\left(\tilde{h}-\Delta, \tilde{h}+\Delta\right)$. Сущность и определение доверительной информации не изменились.

Чтобы найти доверительный интервал для истинного значения H по заданной доверительной вероятности и высчитанной точечной оценке $\tilde{h}$, нужно знать закон распределения случайной величины $\tilde{h}$.

Рассмотрим наиболее востребованные примеры.

Пример 1. По доверительной вероятности $p_д = \beta$ определить доверительный интервал для МОЖ генеральной совокупности $M[X]$, если оценка МОЖ $\tilde{m}_x$ распределена по нормальному закону с известным среднеквадратическим отклонением $\sigma_x / \sqrt{n}$, где n –объем выборки, σ_x- известное истинное значение среднеквадратического отклонения вариант генеральной совокупности.

Решение. Согласно формулы (24.11) вероятности попадания нормально распределенной СВ в симметричный интервал имеем:

$$p_д = \beta = p\left\{\left|M[X]-\tilde{m}_x\right| < \Delta\right\} = 2\Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma_x}\right).$$

Выражение в скобках $\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma_x} = \gamma -$ определяется по таблице 2 приложения для функции $\Phi(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$ при этом не ошибиться, что $\frac{\beta}{2} = \Phi(\gamma)$.

Тогда $\Delta = \frac{\gamma\sigma_x}{\sqrt{n}}$, а доверительный интервал: $\left(\tilde{m}_x - \frac{\gamma\sigma_x}{\sqrt{n}} < M[X] < \tilde{m}_x + \frac{\gamma\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)$.

Пример 2. По доверительной вероятности $p_д = \beta$ определить доверительный интервал для МОЖ генеральной совокупности $M[X]$, если оценка МОЖ $\tilde{m}_x$ распределена по нормальному закону, а значение среднеквадратического отклонения $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ для оценки МОЖ неизвестно.

Решение. Вместо неизвестного истинного значения $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ нужно использовать его оценку по выборочным данным:

$$\frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\tilde{D}[X]}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{x_i}-\tilde{m}_x\right)^2 m_i}.$$

При этом среднеквадратическое отклонение будет не вполне достоверным, что должно сказаться на расширении доверительного интервала. Это обстоятельство учитывают с помощью замены нормального распределения $\tilde{m}_x$ на распределение Стъюдента.

Расчетные формулы имеют вид:

$$p_д = \beta = p\left\{\left|M\left[X\right] - \tilde{m}_x\right| < \Delta\right\} = 2S\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}_x}\right); \frac{\beta}{2} = S\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}_x}\right).$$

Выражение в скобках $\frac{\Delta\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}_x} = t_s$ определяется по таблицам функции Стъюдента $S\left(t_s\right)$ (здесь не приводятся).

Тогда $\Delta = \frac{t_s \tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}}$, а доверительный интервал равен:

$$\left(\tilde{m}_x - \frac{t_s \tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}} < M\left[X\right] < \tilde{m}_x + \frac{t_s \tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}}\right).$$

Иногда при больших $n > 50$ уменьшением достоверности σ_x из-за его отсутствия пренебрегают и тогда пример 2 решают по методике примера 1. При этом за истинное значение σ_x берут его оценку $\tilde{\sigma}_x$.

25.1.6. Элементы дисперсионного анализа

В ряде случаев истинные значения параметров какого-либо числового признака генеральной совокупности, определяемые по точечным и интервальным оценкам, не удовлетворяют исследователя. Нужны более полные сведения о числовом признаке, который меняется от элемента к элементу случайным образом и поэтому является случайной величиной. Возникает необходимость определить закон распределения числового признака (закон распределения вариант).

В связи с этим возникают две основные *задачи дисперсионного анализа:*

1. Вывести конкретный вид закона распределения значений признака в генеральной совокупности по данным выборки.

2. Выяснить, насколько согласуется распределение выборочных данных с предположением (гипотезой) о распределении значений признака в генеральной совокупности по выведенному в п.1. закону распределения, т. е. установить, насколько состоятельна гипотеза.

Чтобы решить задачи дисперсионного анализа необходимо выполнить следующие этапы исследований.

1. Построение эмпирической кривой распределения.

Для этого по данным интервального ряда строят гистограмму относительных частот. Проведя плавную кривую по средним точкам верхних оснований прямоугольников, получают эмпирическую кривую распределения, по которой можно составить примерное представление о виде плотности распределения признака.

2. Определение параметров эмпирического распределения.

Такими параметрами являются точечные оценки параметров генеральной совокупности, рассчитанные по выборке по известным формулам.

3. Выбор теоретического закона распределения для эмпирического распределения.

Из большого количества существующих законов распределения нужно выбрать такой, чтобы он наилучшим образом представлял эмпирическую кривую. При этом надо учитывать вид эмпирической кривой распределения , значения параметров эмпирического распределения, степень точности произведенных наблюдений, физический смысл решаемой задачи, условия и признаки , при которых следует ожидать появление того или иного закона распределения.

Результат выбора – аналитическое выражение (формула) кривой распределения.

4.Выравнивание эмпирического распределения по гипотетическим теоретическим кривым.

Выравниванием (сглаживанием) эмпирического распределения называется подбор теоретической кривой распределения так, чтобы она выражала существенные черты статистического материала, удовлетворяла основным свойствам плотности распределения: $f(x \geq 0), \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Параметры теоретической функции должны быть равны соответствующим оценкам.

5. Проверка о виде закона распределения.

После выполнения четырех этапов исследования выдвигается основная нулевая гипотеза H_0: генеральная совокупность распределена по закону $f(x)$ (следует конкретная формула конкретного закона).

Для поверки гипотезы H_0 нужно выбрать критерий проверки или критерий согласия. Таких критериев достаточно много. Наиболее распространены критерии χ^2 – Пирсона, λ – Колмогорова, ω^2. Рассмотрим только критерий χ^2 – Пирсона.

В этом критерии сравниваются эмпирические (наблюдаемые, опытные) частоты m_i и теоретические частоты m_i^0, вычисленные в предположении какого-либо закона.

Частоты m_i находятся из выборки. Это есть число вариант, попавших в *i*-й интервал интервального вариационного ряда.

Частоты m_i^0 есть частоты, попадающие в те же интервалы, но они находятся по формулам соответствующих предполагаемых законов распределения.

Например, если предполагаемый закон нормальный, то

$$m_i^0 = np_i^0; p_i^0 = p\left\{x_{i-1} < X < x_i\right\} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(x_i - m_x\right)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi\left(\frac{x_i - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - m_x}{\sigma_x}\right),$$

где x_{i-1}, x_i – начало и конец i-го интервала.

При этом, левый конец первого интервала смещают до $x_0 = -\infty$, а правый конец последнего интервала смещают до $x_k = +\infty$.

Эмпирические и теоретические частоты различаются по многим причинам: из-за малого объема выборки n, способа группировки вариант, из-за неверной гипотезы и др.

Критерий χ^2 – Пирсона не доказывает справедливость гипотезы, а только устанавливает на принятом уровне значимости α ее согласие или несогласие с данными наблюдений.

В качестве критерия согласия принимают случайную величину χ^2 – Пирсона: $\chi^2 = \sum_i \frac{\left(m_i - m_i^0\right)^2}{m_i^0}$.

Чем меньше разность эмпирических m_i и теоретических m_i^0 частот, тем меньше критерий χ^2 – Пирсона, тем ближе эмпирический закон распределения к теоретическому.

По данным выборки находят эмпирические и теоретические частоты и вычисляют *наблюдаемое* значение критерия:

$$\chi^2_{набл.} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(m_i - m_i^0\right)^2}{m_i^0}.$$

В случае малого объема выборки следует сливать интервалы, имеющие малые частоты так, чтобы в каждом интервале суммарная частота была не меньше пяти. Тогда k- число интервалов с учетом укрупнения.

Определяют *число степеней свободы* r закона χ^2 – Пирсона для конкретного примера по формуле: $r = k - q - 1$, где

k – число интервалов с учетом укрупнения,

q – число параметров предполагаемого закона распределения (для нормального закона $q = 2$, т.к. закон имеет два параметра m_x и σ).

Для критерия χ^2 – Пирсона уровень значимости, при котором гипотеза может считаться истинной, составляет $\alpha = 0,05$.

Для уровня значимости α, числу степеней свободы r по таблице распределения χ^2 (таблица 3 приложения) находят *критическое значение* $\chi^2_{кр}$.

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ – гипотеза H_0 принимается.

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ – гипотеза H_0 отвергается.

25.1.7. Элементы теории корреляции

При изучении систем случайных величин X и Y возникает вопрос об их взаимосвязи.

Эта связь может быть *функциональной* $y = y(x)$ или $x = x(y)$, когда каждому значению одной величины соответствует точное значение другой.

Эта связь может быть *статистической*, когда кроме однозначной функциональной связи между величинами существует связь, зависящая от случайных факторов. В этом случае изменение одной величины влечет за собой изменение распределения другой.

Частный случай статистической связи является *корреляционная зависимость* – зависимость среднего значения (математического ожидания) одной величины от другой:

$m_{y/x} = f(x)$ или $m_{x/y} = g(y)$.

Эти уравнения называются *уравнение регрессии* y на x и *уравнения регрессии* x на y.

Обратим внимание, что слева стоят условные МОЖ одной величины при условии другой.

Функции $f(x)$ и $g(y)$ могут иметь различный вид: линейный, параболический, кубический, логарифмический, экспоненциальный и др. Уравнения регрессии определяют вид корреляционной связи.

Существуют числовые характеристики системы СВ, характеризующие тесноту их статистической связи.

Ковариация (*корреляционный момент*) k_{xy} двух случайных величин есть математическое ожидание произведения их случайных отклонений:

$$k_{xy} = M\left[(X - m_x)(Y - m_y)\right] = M[XY] - M[X]M[Y].$$

Если $k_{xy} = 0$, случайные величины X и Y независимы друг от друга.

Если вместо Y поставить X, т.е. $k_{xx} = M\left[(X - m_x)^2\right] = D[X]$ – дисперсия СВ есть частный случай ковариации СВ самой на себя.

Ковариация характеризует степень линейной зависимости случайных величин между собой и их рассеяние вокруг точки (m_x, m_y).

Единицы измерения ковариации есть произведение единиц измерения X и Y, что весьма неудобно.

Для устранения последнего недостатка применяют *коэффициент корреляции* r_{xy} - безразмерную величину, характеризующую только степень (тесноту) линейной корреляционной зависимости между X и Y.

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}; -1 \le r_{xy} \le 1.$$

Если $|r_{xy}| = 1$, то X и Y связаны 100% линейной функциональной связью. Причем, если $r_{xy} = 1$, то эта линейная связь положительная: $y = ax + b$. Если $r_{xy} = -1$, то линейная связь отрицательная: $y = -ax + b$ (чем больше x, тем меньше y).

Если $r_{xy} = 0$, связь между X и Y может отсутствовать (X не зависит от Y). Но при $r_{xy} = 0$ корреляционная связь между X и Y может иметь место, но эта связь не будет линейной.

Для определения степени любой корреляционной связи между X и Y применяют *корреляционное отношение* η_{yx}.

Случайные изменения значений величины Y определяются двумя факторами: с одной стороны – изменениями средних значений Y при изменениях значений случайной величины X (корреляционная связь), с другой стороны – случайным изменением (случайным рассеянием) Y вокруг своего МОЖ при каждом фиксированном X.

Первый фактор можно охарактеризовать межгрупповым среднеквадратическим отклонением $\sigma_{\bar{y}/x}$ – рассеянием групповой средней $\bar{y}_x$ относительно математического ожидания Y в зависимости от изменения X. При каждом значении X формируется своя группа случайных значений Y со своим среднегрупповым значением $\bar{y}_x$. Эти среднегрупповые случайным образом изменяются от группы к группе (при изменении X), т.е. рассеяны относительно m_y.

Если $\sigma_{\bar{y}/x} = 0$, то при изменении X не происходит рассеяния или изменения групповой средней $\bar{y}_x$, иначе, X не влияет на Y, т.е. зависимость между X и Y отсутствует.

Если $\sigma_{\bar{y}/x} > 0$, то с увеличением связи между X и Y, растет и $\sigma_{\bar{y}/x}$.

При 100%-й (функциональной) связи между X и Y стохастические (случайные) свойства Y будут сохраняться неизменными в каждой группе при любых значениях X в том числе и при любом фиксированном X. Иначе говоря, при функциональной связи между X и Y «случайность» Y определяется только вторым фактором, который характеризуется общим среднеквадратическим отклонением σ_y, т.е. $\sigma_{\bar{y}/x} = \sigma_y$.

Тогда корреляционное отношение $\eta_{yx} = \dfrac{\sigma_{\bar{y}/x}}{\sigma_y}$ выразит в относительных единицах степень корреляционной связи X и Y без определения вида самой корреляционной связи.

В этом случае $0 \le \sigma_{\bar{y}/x} \le 1$, $\eta_{\bar{y}/x} = 0 -$ связи между X и Y нет, $\eta_{\bar{y}/x} = 1 -$ связь между X и Y 100%-я функциональная.

При обработке выборки, содержащей два вида вариант X и Y рассмотренные ранее числовые характеристики системы двух случайных величин, характеризующие тесноту их стохастической связи, определяют по их точечным (выборочным) оценкам. Для удобства их вычислений составляют корреляционную таблицу :

Интервалы	Y	$y_1 - y_2$	$y_2 - y_3$	$\dots$	$y_j - y_{j+1}$	$\dots$	$y_k - y_{k+1}$	
X	Середины интервал.	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\dots$	$\bar{y}_j$	$\dots$	$\bar{y}_k$	
$x_1 - x_2$	$\bar{x}_1$	m_{11}	m_{12}	$\dots$	m_{1j}	$\dots$	m_{1k}	$\sum\limits_{j=1}^{k} m_{1j} = m_{\bar{x}1}$, $\bar{y}_{\bar{x}_1} = \sum\limits_{j=1}^{k} \bar{y}_j \dfrac{m_{1j}}{m_{\bar{x}1}}$.
$x_2 - x_3$	$\bar{x}_2$	m_{21}	m_{22}	$\dots$	m_{2j}	$\dots$	m_{2k}	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$x_i - x_{i+1}$	$\bar{x}_i$	m_{i1}	m_{i2}	$\dots$	m_{ij}	$\dots$	m_{ik}	$\sum\limits_{j=1}^{k} m_{ij} = m_{\bar{x}_i}$, $\bar{y}_{\bar{x}_i} = \sum\limits_{j=1}^{k} \bar{y}_j \dfrac{m_{ij}}{m_{\bar{x}i}}$.
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$x_k - x_{k+1}$	$\bar{x}_k$	m_{k1}	m_{k2}	$\dots$	m_{kj}	$\dots$	m_{kk}	$\sum\limits_{j=1}^{k} m_{kj} = m_{\bar{x}_k}$, $\bar{y}_{\bar{x}_k} = \sum\limits_{j=1}^{k} \bar{y}_j \dfrac{m_{kj}}{m_{\bar{x}k}}$.

$$\sum_{i=1}^{k} m_{i1} = m_{\bar{y}_1}, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_{ij} = m_{\bar{y}_j}, \quad \sum_{i=1}^{k} m_{ik} = m_{\bar{y}_k}, \quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} m_{ij} = n.$$

В таблицу переносят интервальные вариационные ряды для X и Y со своими серединами интервалов. Заполняется таблица частотами $m_{ij} -$ количество одновременно попавших вариант по X в $i -$й интервал и по Y в $j -$й интервал. Эти частоты определяются при анализе исходного массива пар XY (выборка, содержащая попарно два вида вариант X и Y объемом n).

Справа от таблицы приведены подготовительные формулы для определения оценки межгруппового среднеквадратического отклонения.

$m_{\bar{x}_i} = \sum_{j=1}^{k} m_{ij}$ – частота для среднего значения варианты X в i – м интервале.

$\bar{y}_{\bar{x}_i} = \frac{1}{m_{\bar{x}_i}} \sum_{j=1}^{k} \bar{y}_j m_{ij}$ – среднее значение Y при условии $\bar{x}_i$.

Оценка межгруппового среднеквадратического отклонения определяется:

$$\tilde{\sigma}_{\bar{y}/\bar{x}_i} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \left(\bar{y}_{\bar{x}_i} - \tilde{m}_y \right)^2 m_{\bar{x}_i}}.$$

Ниже таблицы приведены формулы для определения частот средних значений варианты Y в j – м интервале: $m_{\bar{y}_i} = \sum_{i=1}^{k} m_{ij}$. Эти частоты необходимы для определения выборочного среднеквадратичного отклонения по y.

Далее приведены формулы для определения соответствующих точечных оценок (выборочных числовых характеристик):

$$m_x \approx \tilde{m}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i m_{\bar{x}_i},$$

$$m_y \approx \tilde{m}_y = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \bar{y}_j m_{\bar{y}_j},$$

$$\sigma_x \approx \tilde{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \left(\bar{x}_i - \tilde{m}_x \right)^2 m_{\bar{x}_i}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i^2 m_{\bar{x}_i} - \tilde{m}_x^2},$$

$$\sigma_y \approx \tilde{\sigma}_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \left(\bar{y}_j - \tilde{m}_y \right)^2 m_{\bar{y}_j}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \bar{y}_j^2 m_{\bar{y}_j} - \tilde{m}_y^2},$$

$$k_{xy} \approx \tilde{k}_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left(\bar{x}_i - \tilde{m}_x \right) \left(\bar{y}_j - \tilde{m}_y \right) m_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \bar{x}_i \bar{y}_j m_{ij} - \tilde{m}_x \tilde{m}_y = \tilde{m}_{xy} - \tilde{m}_x \tilde{m}_y,$$

$$r_{xy} \approx \tilde{r}_{xy} = \frac{\tilde{k}_{xy}}{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y},$$

$$\eta_{\bar{y}/x} \approx \tilde{\eta}_{\bar{y}/\bar{x}_i} = \frac{\tilde{\sigma}_{\bar{y}/\bar{x}_i}}{\tilde{\sigma}_y} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_y} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \left(\bar{y}_{\bar{x}_i} - \tilde{m}_y \right)^2 m_{\bar{x}_i}}.$$

Для более полной информации о связи между X и Y необходимо вывести уравнения регрессии Y на X или X на Y генеральной совокупности по выборочным уравнениям.

Определение выборочного уравнения регрессии производят по следующему плану.

1. Определение вида уравнения регрессии.

Для этого на плоскости строят точки с координатами $\left(\overline{x_i}, \overline{y}_{\overline{x_i}}\right)$ и по их расположению (кучности, распределению) делают заключение о примерном виде уравнения регрессии.

2. Проверка гипотезы о виде корреляционной связи между X и Y (о виде уравнения регрессии).

Гипотеза о виде корреляционной связи, сформулированная на основе результата исследования по пункту 1, проверяется статистически с использованием критерия согласия, распределенного по закону Стъюдента.

3. После принятия качественного решения о виде корреляционной связи необходимо это решение оформить количественно, в виде формулы, в которой коэффициенты при неизвестных должны иметь конкретные численные значения.

Достаточно часто в этих целях используется *метод наименьших квадратов*. Рассмотрим его сущность на примере, когда в результате статистической проверки допустимая гипотеза оказалась о том, что корреляционная связь между X и Y линейная: $m_{y/x} = ax + b$ или $\overline{y}_x = ax + b$.

На массиве точек $\left(\overline{x_i}, \overline{y}_{\overline{x_i}}\right)$ можно построить множество прямых, удовлетворяющих выдвинутой гипотезе. Но только одна из них (с конкретными a и b) будет оптимальным образом отображать уравнение регрессии.

Назовем эту прямую теоретической и обозначим: $\overline{y}_x = a\overline{x_i} + b.$

Здесь $\overline{y}_x$ – теоретические средние значения (МОЖ) варианты Y при условии другой варианты X.

Т.к. мы имеем дело с интервальными вариационными рядами, то переменной вариантой X являются середины интервалов варианты X т.е. $\overline{x_i}$.

$\overline{y}_{\overline{x_i}}$ – эмпирические (опытные) значения той же средней варианты Y при условии значений середин интервалов варианты X.

$\overline{y}_x - \overline{y}_{\overline{x_i}}$ – отклонения теоретических ординат $\overline{y}_x$ от эмпирических $\overline{y}_{\overline{x_i}}$ (ошибки опыта).

Изменяя параметры a и b нужно выбрать такую теоретическую прямую, чтобы сумма квадратов отклонений (суммарная квадратичная ошибка) была минимальной.

Для этого воспользуемся необходимыми условиями экстремума функции 2-х переменных (здесь переменными будут a и b) и найдем экстремальные значения a и b.

При формировании функции 2-х переменных и дальнейшем исследовании ее на экстремум для обеспечения точности вычислений нужно учитывать соответствующие «веса» (относительные частоты) усредненных вариант.

$$F(a,b)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\bar{y}_x-\bar{y}_{\bar{x}_i}\right)^2\frac{m_{ij}}{n}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(a\bar{x}_i+b-\bar{y}_{\bar{x}_i}\right)^2\frac{m_{ij}}{n}\Rightarrow\min.$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a}=2\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(a\bar{x}_i+b-\bar{y}_{\bar{x}_i}\right)\bar{x}_i\frac{m_{ij}}{n}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial b}=2\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(a\bar{x}_i+b-\bar{y}_{\bar{x}_i}\right)\frac{m_{ij}}{n}=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}a\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\bar{x}_i^2\frac{m_{ij}}{n}+b\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\bar{x}_i\frac{m_{ij}}{n}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\bar{x}_i\bar{y}_{\bar{x}_i}\frac{m_{ij}}{n},\\ a\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\bar{x}_i\frac{m_{ij}}{n}+b\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{m_{ij}}{n}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\bar{y}_{\bar{x}_i}\frac{m_{ij}}{n}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}a\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i^2\sum_{j=1}^{k}m_{ij}+b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i\sum_{j=1}^{k}m_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i\bar{y}_{\bar{x}_i}\sum_{j=1}^{k}m_{ij},\\ a\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i\sum_{j=1}^{k}m_{ij}+b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}m_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\bar{y}_{\bar{x}_i}\sum_{j=1}^{k}m_{ij}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}a\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i^2m_{\bar{x}_i}+b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_im_{\bar{x}_i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i\sum_{j=1}^{k}\bar{y}_j\frac{m_{ij}}{m_{\bar{x}_i}}m_{\bar{x}_i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\bar{x}_i\bar{y}_jm_{ij},\\ a\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_im_{\bar{x}_i}+b\frac{1}{n}n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\bar{y}_j\frac{m_{ij}}{m_{\bar{x}_i}}m_{\bar{x}_i}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\bar{y}_j\sum_{i=1}^{k}m_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\bar{y}_jm_{\bar{y}_j}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}a\tilde{m}_{x^2}+b\tilde{m}_x=\tilde{m}_{xy},\\ a\tilde{m}_x+b=\tilde{m}_y.\end{cases}\qquad\begin{cases}a\tilde{m}_{x^2}+\left(\tilde{m}_y-a\tilde{m}_x\right)\tilde{m}_x=\tilde{m}_{xy},\\ b=\tilde{m}_y-a\tilde{m}_x.\end{cases}$$

$$a=\frac{\tilde{m}_{xy}-\tilde{m}_x\tilde{m}_y}{\tilde{m}_{x^2}-\tilde{m}_x^2}=\frac{\tilde{k}_{xy}}{\tilde{\sigma}_x^2}=\frac{\tilde{k}_{xy}\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x^2\tilde{\sigma}_y}=\tilde{r}_{xy}\frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}.$$

$$b=\tilde{m}_y-\tilde{r}_{xy}\frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}\tilde{m}_x.$$

Подставим значения a и b в уравнение регрессии y на x:

$$\tilde{m}_{y/x}=\bar{y}_x=\tilde{r}_{xy}\frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}\bar{x}_i+\tilde{m}_y-\tilde{r}_{xy}\frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}\tilde{m}_x\quad\text{или}$$

$$\bar{y}_x=\tilde{m}_y+\tilde{r}_{xy}\frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}\left(\bar{x}_i-\tilde{m}_x\right).$$

При выводе уравнения регрессии y на x были использованы формулы соответствующих точечных оценок числовых характеристик системы 2-х СВ.

Аналогично выводится уравнение регрессии x на y:

$$\tilde{m}_{x/y}=\bar{x}_y=\tilde{m}_x+\tilde{r}_{xy}\frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y}\left(\bar{y}_j-\tilde{m}_y\right).$$

25.2. Решение типового задания

Случайным образом произведена выборка ста пар значений случайных величин X и Y из некоторой генеральной совокупности.

Данные пары приведены в последующей таблице:

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
15	28	16	40	17	31	13	41	9	49	13	53
14	36	14	48	10	41	13	42	14	27	18	27
11	36	16	30	16	33	14	40	15	49	12	33
14	34	16	35	13	39	12	46	11	49	14	37
11	56	8	50	19	46	14	32	15	40	17	34
10	56	13	36	14	30	13	33	17	39	15	42
12	25	13	37	6	58	12	39	9	59	11	39
9	37	18	36	13	42	13	39	16	40	9	33
15	34	18	28	15	34	19	26	8	41	13	29
10	32	9	34	10	46	16	33	10	37	15	28
12	46	17	30	11	46	13	33	15	32	12	43
21	27	15	39	12	46	14	30	11	45	16	32
16	14	11	42	11	42	13	54	15	39	13	35
12	48	15	38	13	23	17	34	15	35	16	39
12	39	14	22	15	42	11	37	8	51	16	38
11	40	12	39	15	38	14	41	12	37		
12	51	11	48	12	49	13	36	9	39		

Требуется выполнить шесть задач.

Задача 1. Построить дискретные и интервальные вариационные ряды для X и Y.

Решение. Выбираем по возрастанию варианты X и Y, начиная с наименьших, подсчитываем количество каждой варианты , определяя таким образом их частоты, и строим дискретные вариационные ряды.

Дискретный вариационный ряд для X:

Таблица 25.1

x_i	6	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21
m_i	1	3	6	5	11	13	15	11	14	10	5	3	2	1

Здесь x_i – значение i – й варианты для X,

m_i – частота i – й варианты.

Дискретный вариационный ряд для Y:

Таблица 25.2

y_j	14	22	23	25	26	27	28	29	30	31	32

m_j	1	1	1	1	1	3	3	1	4	1	4
y_j	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
m_j	6	6	3	5	6	3	11	5	4	6	1
y_j	45	46	48	49	50	51	53	54	56	58	59
m_j	1	6	3	4	1	2	1	1	2	1	1

Здесь y_j – значение j – й варианты для Y,

m_j – частота j – й варианты.

Для построения интервальных вариационных рядов X необходимо:

а) определить количество интервалов k.

k должно быть целым, нечетным и удовлетворять условию Стерджесса:

$$k = 1 + 3{,}322 \lg n,$$

где n - объем выборки.

В нашем случае $n = 100$. Тогда $k = 7$.

б) определить длины интервалов h по формуле:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k},$$

в) определить точки деления интервалов группирования x_i:

$$x_i = x_{\min} + ih, i = 0,1,2,...,k.$$

г) определить середины интервалов группирования $\bar{x}_i$:

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, i = 1,2,...,k.$$

Для интервальных вариационных рядов Y формулы аналогичны.

В результате имеем:

–для интервального ряда X: $h = \frac{21-6}{7} = 2{,}14,$

–для интервального ряда Y: $h = \frac{59-14}{7} = 6{,}43.$

Интервальный вариационный ряд для X:

Таблица 25.3

$x_{i-1} - x_i$	6-8,14	8,14-10,28	10,28-12,42	12,42-14,56	14,56-16,7	16,7-18,84	18,84-21
$\bar{x}_i$	7,07	9,21	11,35	13,49	15,63	17,77	19,91
m_i	4	11	24	26	24	8	3
$p_i = m_i/n$	0,04	0,11	0,24	0,26	0,24	0,08	0,03

Поскольку далее при статистических исследованиях мы будем пользоваться исключительно интервальными рядами, то здесь и в дальнейшем m_i – количество вариант по X, попавших в i – й интервал, или частота середины i – го интервала $\bar{x}_i$.

Интервальный вариационный ряд для Y:

Таблица 25.4

$y_{j-1} - y_j$	14-20,43	20,43-26,86	26,86-33,29	33,29-39,72	39,72-46,15	46,15-52,58	52,58-59
$\overline{y}_j$	17,215	23,65	30,08	36,51	42,94	49,37	55,79
m_j	1	4	22	34	23	10	6
$p_j = m_j/n$	0,01	0,04	0,22	0,34	0,23	0,1	0,06

Аналогичным образом здесь m_j – количество вариант по Y, попавших в j – й интервал, или частота середины j – го интервала $\overline{y}_j$.

Задача 2. Построить полигоны и гистограммы распределения относительных частот для случайных величин X и Y.

Решение. Если в таблицах 25.3 и 25.4 добавить четвертую строку для относительных частот $p_i = m_i/n$, то полигоны относительных частот для X и Y достаточно просто переносятся из таблиц в графики. При этом не забывать добавить по две точки с нулевыми ординатами.

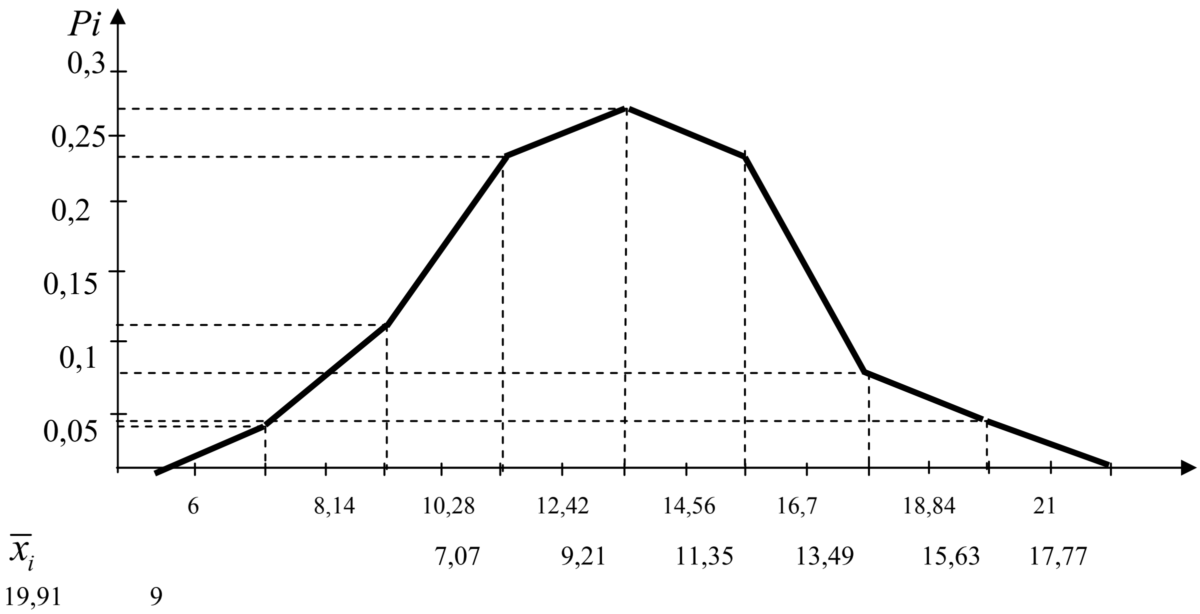
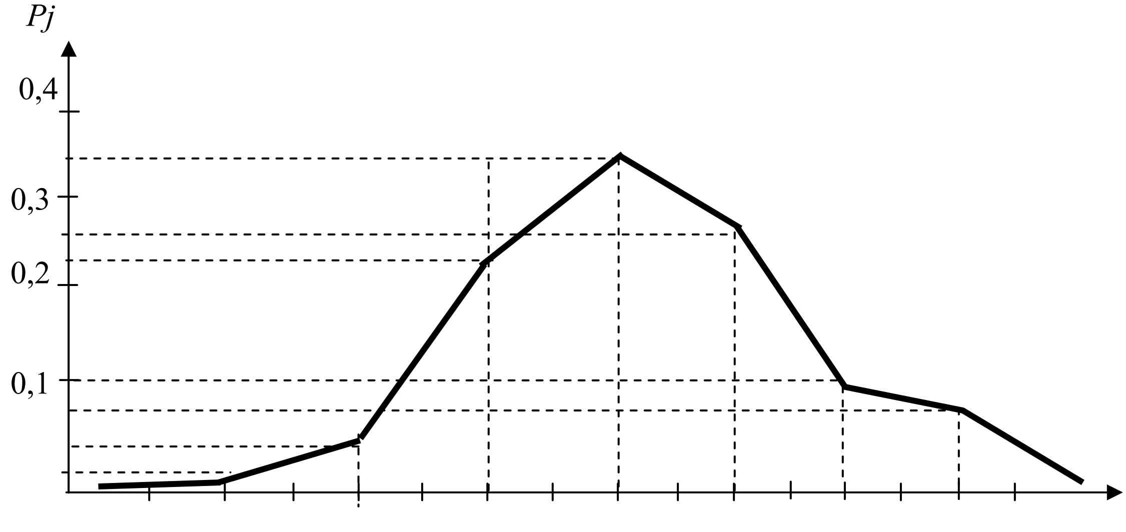


Рисунок 25.1. Полигон относительных частот для X



14 20,43 26,86 33,29 39,72 46,15 52,58 59

$\overline{y}_i$

17,25 23,65 30,08 36,51 42,94 49,37 55,79

Рисунок 25.2. Полигон относительных частот для Y

Гистограммы распределения относительных частот строятся в соответствии с их определениями по п.25.1.3. и имеют вид:

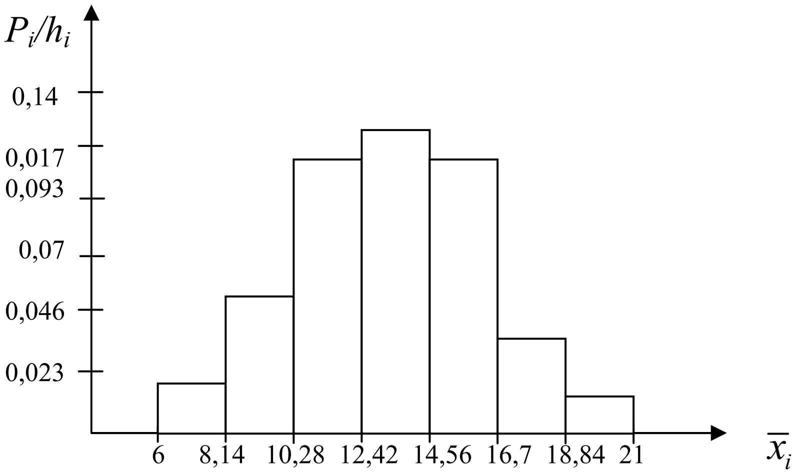


Рисунок 25.3. Гистограмма относительных частот для X

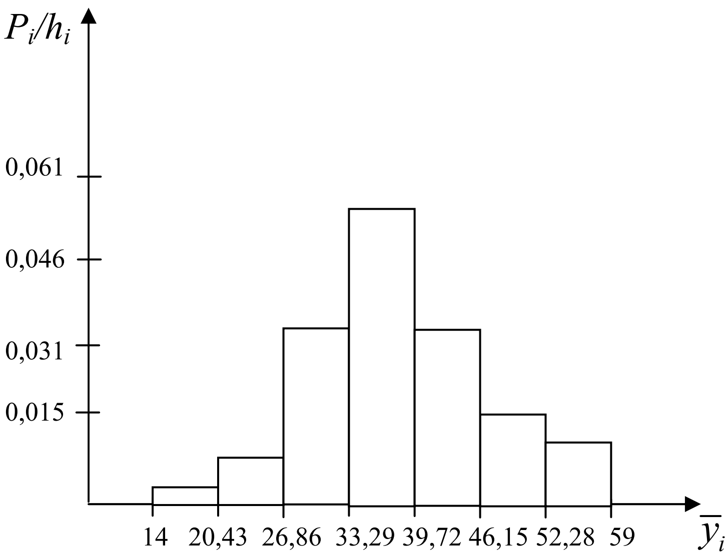


Рисунок 25.4. Гистограмма относительных частот для У

Задача 3. Вычислить точечные оценки числовых характеристик генеральной совокупности X и Y: выборочные средние $\tilde{m}_x = \overline{x}, \tilde{m}_y = \overline{y}$, выборочные дисперсии $\tilde{D}[x], \tilde{D}[y]$, выборочные среднеквадратические отклонения $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y$.

Решение. Для вычисления точечных оценок числовых характеристик генеральной совокупности X используем следующие формулы:

$$\tilde{m}_x = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\overline{x}_i m_i, \qquad \tilde{D}[x] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\overline{x}_i^2 m_i - \tilde{m}_x^2, \qquad \tilde{\sigma}_x = \sqrt{\tilde{D}[x]}.$$

Промежуточные вычисления сведем в таблицу.

Таблица 25.5

$x_{i-1}-x_i$	$\bar{x}_i$	m_i	$\bar{x}_i \cdot m_i$	$\bar{x}_i^2$	$\bar{x}_i^2 m_i$
6-8,14	7,07	4	28,28	49,98	199,92
8,14-10,28	9,21	11	101,31	84,82	933,02
10,28-12,42	11,35	24	272,4	128,82	3091,68
12,42-14,56	13,49	26	350,74	181,98	4731,48
14,56-16,7	15,63	24	375,12	244,29	5862,96
16,7-18,84	17,77	8	142,16	315,77	2526,16
18,84-21	19,91	3	59,73	396,41	1189,23
$\sum$		100	1329,74		18534,45

$$\tilde{m}_x = \bar{x} = \frac{1329,74}{100} = 13,29; \quad \tilde{D}[x] = \frac{18534,45}{100} - 13,29^2 = 8,72;$$

$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{8,72} = 2,95.$

Аналогичные вычисления для Y:

$$\tilde{m}_y = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \bar{y}_j m_j; \qquad \tilde{D}[y] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \bar{y}_j^2 m_j - \tilde{m}_y^2; \qquad \tilde{\sigma} = \sqrt{D[y]}.$$

Таблица 25.6

$y_{j-1}-y_j$	$\bar{y}_j$	m_j	$\bar{y}_j m_j$	$\bar{y}_j^2$	$\bar{y}_j^2 m_j$
14-20,43	17,215	1	17,22	296,36	296,36
20,43-26,86	23,65	4	94,6	559,32	2237,28
26,86-33,29	30,08	22	661,76	904,81	19905,82
33,29-39,72	36,51	34	1241,34	1332,98	45321,32
39,72-46,15	42,94	23	987,62	1843.84	42408,32
46,15-52,58	49,37	10	493,7	2437,39	24373,9
52,58-59	55,79	6	334,74	3112,52	18675,12
$\sum$		100	3830,98		153218,12

$$\tilde{m}_y = \bar{y} = \frac{3830,98}{100} = 38,31; \quad \tilde{D}[y] = \frac{153218,12}{100} - 38,31^2 = 64,52;$$

$\tilde{\sigma}_y = \sqrt{64,52} = 8,03.$

Задача 4. Проверить гипотезу о нормальном распределении X и Y с использованием критерия χ^2 Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

Решение. Предварительные приближенные исследования по четырем пунктам дисперсионного анализа (см. 25.1.6.),не смотря на то, что данные исследования подробно не проведены, дают основание выдвинуть нулевую (основную) гипотезу о распределении случайной величины X:

случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $\tilde{m}_x = 13,29$, $\tilde{\sigma}_x = 2,95$.

Для проверки этой гипотезы по критерию χ^2 Пирсона необходимо вычислить наблюдаемое значение $\chi^2_{набл.}$ и сравнить его с критическим значением $\chi^2_{кр.}$

$\chi^2_{набл.}$ вычисляется по формуле:

$$\chi^2_{набл.} = \sum \frac{\left(m_i - m_i^0\right)^2}{m_i^0},$$

где m_i – эмпирические (опытные) частоты – частоты интервального вариационного ряда;

m_i^0 – теоретические частоты – частоты, попадающие в те же интервалы вариационного ряда, но определяемые по формулам предполагаемого закона распределения, в нашем случае нормального закона:

$$m_i^0 = np_i^0; p_i^0 = p\left\{x_{i-1} < X < x_i\right\} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{2,95\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-13,29)^2}{2(2,95)^2}} = \Phi\left(\frac{x_i - 13,29}{2,95}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - 13,29}{2,95}\right).$$

При этом нужно учесть три обстоятельства:

1. Смещаем самую левую границу интервального ряда x_0 до $x_0 = -\infty$, а самую правую x_k до $x_k = \infty$.

2. Укрупняем первый $i = 1$ и последний $i = k = 7$ интервалы вариационного ряда X, т.к. они содержат малые частоты $m_1 = 4, m_7 = 3$ (частоты должны быть не менее 5). Для этого сливаем первый интервал со вторым, а седьмой с шестым. Тогда количество интервалов с учетом укрупнения будет $k = 5$.

3. $\Phi(-\infty) = 0,5; \Phi(\infty) = 0,5; \Phi(-\gamma) = -\Phi(\gamma); n = 100$.

Сведем промежуточные вычисления в таблицу 25.7:

Таблица 25.7

$x_{i-1}-x_i$	m_i	$\frac{x_i-13,29}{2,95}$	$\frac{x_{i-1}-13,29}{2,95}$	$\Phi\left(\frac{x_i-13,29}{2,95}\right)$	$\Phi\left(\frac{x_{i-1}-13,29}{2,95}\right)$	p_i^0	m_i^0	$\frac{\left(m_i-m_i^0\right)^2}{m_i^0}$
$-\infty-10,28$	15	–1,02	$-\infty$	–0,3461 –	–0,5	0,1539	15,39	0,01
10,28–12,42	24	–0,29	–1,02	–0,1141	–0,3461	0,232	23,2	0,028
12,42–14,56	26	0,43	–0,29	0,1664	–0,1141	0,2805	28,05	0,15
14,56–16,7	24	1,16	0,43	0,377	0,1664	0,2106	21,06	0,41
16,7–∞	11	∞	1,16	0,5	0,377	0,123	12,3	0,137
$\sum$	100					1	100	0,735

$$\chi^2_{набл.} = 0,735.$$

$\chi^2_{кр.}$ определяем по таблице значений χ^2 (приложение, таблица 3).

С учетом уровня значимости $\alpha = 0,05,$ числа степеней свободы $r = k - q - 1,$ где $k-$ количество укрупненных интервалов ($k = 5$), $q-$ число параметров закона распределения ($q = 2$ для нормального закона) имеем:

$$r = 5 - 2 - 1 = 2; \qquad \chi^2_{кр.} = 5,991.$$

Т.к. 0,735< 5,991, т.е. $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{кр.},$ то выдвинутая гипотеза о нормальном законе распределения случайной величины X подтверждается.

Аналогичным образом проведем исследования гипотезы о том, что случайная величина Y то же распределена по нормальному закону с параметрами $\tilde{m}_y = 38,31, \tilde{\sigma}_y = 8,03.$

Все расчетные формулы и особенности расчета сохраняются, только здесь приходится в вариационном ряду укрупнять один первый $j = 1$ интервал, имеющий частоту $m_1 = 1.$ Сливаем его со вторым интервалом. Количество интервалов становится равным $k = 6.$

Таблица вычислений примет вид:

Таблица 25.8

$y_{j-1}-y_j$	m_j	$\frac{y_j-38,31}{8,03}$	$\frac{y_{j-1}-38,31}{8,03}$	$\Phi\left(\frac{y_j-38,31}{8,03}\right)$	$\Phi\left(\frac{y_{j-1}-38,31}{8,03}\right)$	p_j^0	m_j^0	$\frac{\left(m_j-m_j^0\right)^2}{m_j^0}$
$-\infty-26,86$	5	–1,426	$-\infty$	–0,4229	–0,5	0,0771	7,71	0,9525
26,86-33,29	22	–0,625	–1,426	–0,2341	–0,4229	0,1888	18,88	0,5156
33,29-39,72	34	0,176	–0,625	0,0698	–0,2341	0,3039	30,39	0,4288
39,72-46,15	23	0,976	0,176	0,3356	0,0698	0,2658	26,58	0,4822
46,15-52,58	10	1,777	0,976	0,4623	0,3356	0,1267	12,67	0,5627
52,58-∞	6	∞	1,777	0,5	0,4623	0,0377	3,77	1,3191
$\sum$	100					1	100	4,2609

$$\chi^2_{набл.} = 4,2609.$$

При $\alpha = 0,05, r = k-q-1 = 6-2-1 = 3$ по табл.3 приложения имеем $\chi^2_{кр.} = 7,815$. $4,2609 < 7,815$, т.е. $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{кр.}$, значит, гипотеза о нормальном распределении случайной величины Y подтверждается.

Задача 5. При условии нормального распределения случайных величин X и Y и доверительной вероятности $p = 0,95$ построить доверительные интервалы для математических ожиданий $M[X], M[Y]$ генеральной совокупности.

Решение. При объеме выборки n>50 воспользуемся примером 1, изложенным в 25.1.5. Оценка МОЖ генеральной совокупности $\tilde{m}_x$ является случайной величиной , распределенной по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением, определенным по выборке, и равным $\frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}}$.

Математическое ожидание генеральной совокупности $M[X]$ находится в доверительном интервале ($\tilde{m}_x - \Delta < M[X] < \tilde{m}_x + \Delta$). Симметричные случайные отклонения Δ определяются по заданной доверительной вероятности $p_д$ и заданному нормальному закону распределения.

$$p_д = p\,(\tilde{m}_x - \Delta < M[X] < \tilde{m}_x + \Delta) = p\,(\left|M[X] - \tilde{m}_x\right| < \Delta) = 2\Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}_x}\right).$$

Если $\gamma = \frac{\Delta\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}_x}$, то его можно определить по таблице 2 приложения, учитывая, что $\frac{p_д}{2} = \Phi(\gamma)$. Определив γ, находим $\Delta = \frac{\gamma\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}}$, а, значит, и сам доверительный интервал.

В нашем случае для интервальной оценки $M[X]$ имеем:

$p_д = 0,95$; $\frac{p_д}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475 = \Phi(\gamma)$.

По таблице 2 приложения находим $\gamma = 1,96$.

$$\Delta = \frac{\gamma \tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 2,95}{\sqrt{100}} = 0,578.$$

$(\tilde{m}_x - \Delta < M[X] < \tilde{m}_x + \Delta)$;

$(13,29 - 0,578 < M[X] < 13,29 + 0,578)$;

$$(12,71 < M[X] < 13,87), \qquad p_д = 0,95.$$

Математическое ожидание $M[X]$ генеральной совокупности находится в интервале от $12,71$ до $13,87$ с доверительной вероятностью $p_д = 0,95$.

Для интервальной оценки $M[Y]$ имеем:

$p_д =,95$; $\frac{p_д}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475 = \Phi(\gamma)$; $\gamma = 1,96$,

$\Delta = \frac{\gamma \tilde{\sigma}_y}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 8,03}{\sqrt{100}} = 1,57.$

$(\tilde{m}_y - \Delta < M[Y] < \tilde{m}_y + \Delta)$; $(38,31 - 1,57 < M[Y] < 38,31 + 1,57)$;

$$(36,74 < M[Y] < 39,88), \qquad p_д = 0,95.$$

Математическое ожидание $M[Y]$ генеральной совокупности находится в интервале от $36,74$ до $39,88$ с доверительной вероятностью $p_д = 0,95$.

Задача 6. Исследовать корреляционную связь между X и Y.

Для чего: *а*) построить корреляционную таблицу;

б) определить оценки числовых характеристик корреляционной связи (выборочную ковариацию, выборочный коэффициент корреляции, выборочное корреляционное отношение);

в) определить параметры и формулу уравнения регрессии. Дать графическую интерпретацию этого уравнения (начертить график).

Решение. а) Как уже отмечено в 25.1.7, в корреляционную таблицу переносят интервальные вариационные ряды для X и Y со своими серединами интервалов. Клетки таблицы заполняют частотами m_{ij} – количество одновременно попавших вариант по X в i – й интервал и по Y в j – й интервал. Эти частоты определяются при анализе исходного массива пар XY – выборки, содержащей $n = 100$ пар случайных величин X и Y.

Для нашего случая имеем следующую корреляционную таблицу (таблица 25.9).

Таблица 25.9.

$y_{j-1}-y_j$ / $x_{i-1}-x_i$		$14-$ $-20,43$	$20,43-$ $-26,86$	$26,86-$ $-33,29$	$33,29-$ $-39,72$	$39,72-$ $-46,15$	$46,15-$ $-52,58$	$52,58-$ -59	$m_{\bar{x}_i}=\sum_{i=1}^{k} m_{ij}$
	$\bar{y}_j$ / $\bar{x}_i$	17,215	23,65	30,08	36,51	42,94	49,37	55,80	
$6-8,14$	7,07					1	2	1	$m_{\bar{x}_1}=\sum_{j=1}^{7} m_{1j}=4$
$8,14-10,28$	9,21			2	4	2	1	2	$m_{\bar{x}_2}=\sum_{j=1}^{7} m_{2j}=11$
$10,28-12,42$	11,35		1	1	7	9	5	1	$m_{\bar{x}_3}=\sum_{j=1}^{7} m_{3j}=24$
$12,42-14,56$	13,49		2	7	9	5	1	2	$m_{\bar{x}_4}=\sum_{j=1}^{7} m_{4j}=26$
$14,56-16,7$	15,63	1		7	10	5	1		$m_{\bar{x}_5}=\sum_{j=1}^{7} m_{5j}=24$
$16,7-18,84$	17,77			4	4				$m_{\bar{x}_6}=\sum_{j=1}^{7} m_{6j}=8$
$18,84-21$	19,91		1	1		1			$m_{\bar{x}_7}=\sum_{j=1}^{7} m_{7j}=3$
$m_{\bar{y}_j}=\sum_{i=1}^{k} m_{ij}$		$m_{\bar{y}_1}=\sum_{i=1}^{7} m_{i1}=1$	$m_{\bar{y}_2}=\sum_{i=1}^{7} m_{i2}=4$	$m_{\bar{y}_3}=\sum_{i=1}^{7} m_{i3}=22$	$m_{\bar{y}_4}=\sum_{i=1}^{7} m_{i4}=34$	$m_{\bar{y}_5}=\sum_{i=1}^{7} m_{i5}=23$	$m_{\bar{y}_6}=\sum_{i=1}^{7} m_{i6}=10$	$m_{\bar{y}_7}=\sum_{i=1}^{7} m_{i7}=6$	$\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7} m_{ij}=100$

б) Прежде чем приступить к определению оценок числовых характеристик корреляционной связи X и Y, в конце каждой строки и столбца корреляционной таблицы приведены необходимые подготовительные формулы и их расчет. Речь идет о частотах: $m_{\bar{x}_i}$ – частотах интервальных середин по X и $m_{\bar{y}_j}$ – частотах интервальных середин по Y.

Оценку ковариации (корреляционного момента) произведем по формуле:

$$\tilde{k}_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i\bar{y}_j m_{ij}-\tilde{m}_x\tilde{m}_y.$$

Для определения слагаемого $\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i\bar{y}_j m_{ij}$ составим таблицу 25.10, в которую перенесем середины интервалов $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_j$, а в клетках поставим их произведение на соответствующую частоту m_{ij}, взятую из корреляционной таблицы 25.9. Для контроля результата произведем сложение как по строкам, так и по столбцам.

Таблица 25.10

$\overline{y}_j$ / $\overline{x}_i$	17,215	23,65	30,08	36,51	42,94	49,37	55,79	$\sum$
7,07					$7{,}07\cdot 42{,}94\cdot 1$	$7{,}07\cdot 49{,}37\cdot 2$	$7{,}07\cdot 55{,}79\cdot 1$	1396,11
9,21			$9{,}21\cdot 30{,}08\cdot 2$	$9{,}21\cdot 36{,}51\cdot 4$	$9{,}21\cdot 42{,}94\cdot 2$	$9{,}21\cdot 49{,}37\cdot 1$	$9{,}21\cdot 55{,}79\cdot 2$	4172,41
11,35		$11{,}35\cdot 23{,}65\cdot 1$	$11{,}35\cdot 30{,}08\cdot 1$	$11{,}35\cdot 36{,}51\cdot 7$	$11{,}35\cdot 42{,}94\cdot 9$	$11{,}35\cdot 49{,}37\cdot 5$	$11{,}35\cdot 55{,}79\cdot 1$	11331,8
13,49		$13{,}49\cdot 23{,}65\cdot 2$	$13{,}49\cdot 30{,}08\cdot 7$	$13{,}49\cdot 36{,}51\cdot 9$	$13{,}49\cdot 42{,}94\cdot 5$	$13{,}49\cdot 49{,}37\cdot 1$	$13{,}49\cdot 55{,}79\cdot 2$	12978,7
15,63	$15{,}63\cdot 17{,}215\cdot 1$		$15{,}63\cdot 30{,}08\cdot 7$	$15{,}63\cdot 36{,}51\cdot 10$	$15{,}63\cdot 42{,}94\cdot 5$	$15{,}63\cdot 49{,}37\cdot 1$		13394,1
17,77			$17{,}77\cdot 30{,}08\cdot 4$	$17{,}77\cdot 36{,}51\cdot 4$				4733,22
19,91		$19{,}91\cdot 23{,}65\cdot 1$	$19{,}91\cdot 30{,}08\cdot 1$		$19{,}91\cdot 42{,}94\cdot 1$			1924,7
$\sum$	269,07	1377,376	9763,968	16980,07	12587,861	5392,1914	3560,5178	49931,04

Итак, $\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}\overline{x}_i\overline{y}_j m_{ij}=49931;$ значения $\tilde{m}_x=13,29; \tilde{m}_y=38,31$ вычислены ранее; тогда выборочная ковариация

$$\tilde{k}_{xy}=\frac{49931}{100}-13,29\cdot 38,31=-9,83.$$

Выборочный коэффициент корреляции

$$\tilde{r}_{xy}=\frac{\tilde{k}_{xy}}{\tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y}=-\frac{9,83}{2,95\cdot 8,03}=-0,415.$$

Оценка корреляционного отношения производится по формуле $\tilde{\eta}_{\overline{y}x}=\frac{\tilde{\sigma}_{\overline{y}x}}{\tilde{\sigma}_y}$, где $\tilde{\sigma}_{\overline{y}x}$ – выборочное межгрупповое среднеквадратическое отклонение: $\tilde{\sigma}_{\overline{y}x}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{y}_{\overline{x}_i}-\tilde{m}_y\right)^2 m_{\overline{x}_i}}$.

Здесь $\overline{y}_{\overline{x}_i}$ – условное среднее значение Y при условии $\overline{x}_i$:

$$\overline{y}_{\overline{x}_i}=\frac{1}{m_{\overline{x}_i}}\sum_{j=1}^{k}\overline{y}_j m_{ij}.$$

Вычисления сведем в таблицу 25.11.

Таблица 25.11

$\overline{y}_j$ / $m_{\overline{x}_i}$	17,215	23,65	30,08	36,51	42,94	49,37	55,79	$\sum_{j=1}^{k}\overline{y}_j m_{ij}$	$\overline{y}_{\overline{x}_i}$	$\overline{y}_{\overline{x}_i}-\tilde{m}_y$	$\left(\overline{y}_{\overline{x}_i}-\tilde{m}_y\right)^2 m_{\overline{x}_i}$
4					1	2	1	197,47	49,37	11,06	489,29
11			2	4	2	1	2	453	41,18	2,87	90,61
24		1	1	7	9	5	1	998,4	41,6	3,29	259,78
26		2	7	9	5	1	2	962,1	37	−1,31	44,62
24	1		7	10	5	1		856,95	35,71	−2,6	162,24
8			4	4				266,36	33,29	−5,02	201,6
3		1	1		1			96,67	32,22	−6,09	111,26

$$\sum = 1359,4$$

$$\tilde{\sigma}_{\bar{y}x} = \sqrt{\frac{1359,4}{100}} = 3,69.$$

Оценка корреляционного отношения равна: $\tilde{\eta}_{\bar{y}x} = \dfrac{\tilde{\sigma}_{\bar{y}x}}{\tilde{\sigma}_y} = \dfrac{3,69}{8,03} = 0,459.$

в) Воспользуемся готовыми формулами уравнений линейной регрессии, выраженные через оценки числовых характеристик корреляционной связи X и Y.

Уравнение регрессии Y на X:

$$\bar{y}_{\bar{x}} = \tilde{m}_y + \tilde{r}_{xy}\frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}\left(\bar{x}_i - \tilde{m}_x\right); \qquad \bar{y}_{\bar{x}} = 38,31 - 0,415\frac{8,03}{2,95}\left(\bar{x}_i - 13,29\right).$$

$$\bar{y}_{\bar{x}} = 53,32 - 1,13\bar{x}_i.$$

Уравнение регрессии X на Y:

$$\bar{x}_{\bar{y}} = \tilde{m}_x + \tilde{r}_{xy}\frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y}\left(\bar{y}_j - \tilde{m}_y\right); \qquad \bar{x}_{\bar{y}} = 13,29 - 0,415\frac{2,95}{8,03}\left(\bar{y}_j - 38,31\right).$$

$$\bar{x}_{\bar{y}} = 19,13 - 0,15\bar{y}_j.$$

Графики уравнений регрессии имеют вид:

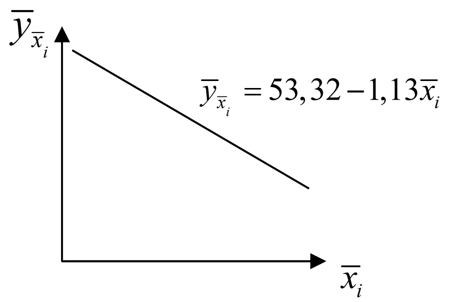


Рис.25. 5.

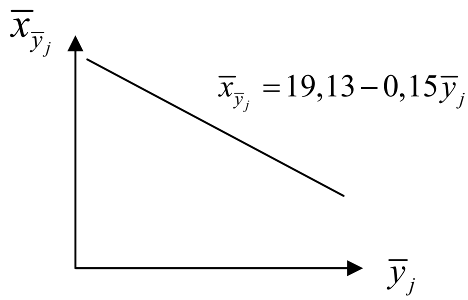


Рис.25. 6.

25.3. Задание на контрольную работу «Математическая статистика»

Контрольная работа состоит из 6-ти задач. Каждому варианту соответствует таблица, состоящая из 100 пар выборки случайных величин X и Y из некоторой генеральной совокупности.

Выполнить следующие задачи:

Задача №1. Построить дискретные и интервальные вариационные ряды для СВ X и Y.

Задача №2. Построить полигоны и гистограммы распределения относительных частот для СВ X и Y.

Задача №3. Вычислить точечные оценки числовых характеристик генеральной совокупности X и Y: выборочные среднюю, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Задача №4. Проверить гипотезу о нормальном распределении X и Y с использованием критерия χ^2 Пирсона на уровне значимости $\alpha = 0,05$.

Задача №5. При условии нормального распределения и доверительной вероятности $p_д = 0,95$ построить доверительные интервалы для математических ожиданий X и Y генеральной совокупности.

Задача №6. Исследовать корреляционную связь между X и Y. Для чего:

а) построить корреляционную таблицу;

б) определить оценки числовых характеристик корреляционной связи (выборочную ковариацию, выборочный коэффициент корреляции, выборочное корреляционное отношение);

в) определить параметры и вывести формулу уравнений регрессии. Дать геометрическую интерпретацию этих уравнений (начертить график).

Варианты заданий

В вариантах заданий приведены экспериментальные исследования-измерения двух случайных величин, имеющих корреляционную связь.

ВАРИАНТ 1

x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
0,57	23	0,83	37	0,58	21	0,75	33	0,71	54	1,10	60
0,73	51	0,61	34	1,05	68	0,92	55	0,58	29	0,81	42
0,88	31	0,91	53	0,83	43	0,59	30	0,72	35	0,90	31
0,61	21	0,82	24	0,93	60	0,82	45	0,32	23	0,69	60
0,56	32	0,76	40	0,70	25	0,73	33	0,85	44	0,90	42
0,88	55	0,38	43	1,06	70	0,89	33	0,80	42	0,95	40
0,78	50	0,63	20	0,82	44	0,94	53	0,71	33	0,60	20
0,77	40	0,98	54	0,96	26	0,95	52	0,92	51	0,80	46
0,86	52	0,79	50	0,69	51	0,89	51	0,84	35	0,80	30
0,63	28	0,55	20	0,78	25	0,70	22	0,58	41	0,96	63
0,86	43	0,92	39	0,96	51	0,79	30	0,85	52	0,84	45
0,78	40	0,82	51	0,95	62	1,04	67	0,72	30	1,10	66
0,83	52	0,69	42	0,83	41	0,75	32	1,02	35	0,97	60
0,56	15	0,80	25	1,09	55	1,03	43	0,81	42	0,57	28
0,98	46	0,65	32	0,65	29	0,87	39	1,01	64	0,97	45
0,87	43	0,74	38	1,03	63	0,63	38	0,90	42		
0,67	27	0,55	26	0,93	34	1,02	70	0,76	31		

ВАРИАНТ 2

x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
0,67	27	0,55	26	0,58	19	0,75	33	0,71	64	0,87	39
0,87	43	0,74	38	1,05	68	0,92	55	0,58	42	1,03	43
0,98	46	0,83	37	0,83	43	0,59	30	0,72	35	0,75	32
0,56	25	0,61	34	0,93	60	0,82	45	0,62	25	1,04	67
0,83	52	0,65	32	0,70	25	0,73	33	0,85	52	0,79	30
0,78	40	0,80	25	1,06	70	0,89	33	0,80	41	0,70	22
0,86	43	0,91	53	0,82	44	0,94	53	0,71	35	0,89	51
0,63	28	0,82	24	0,96	26	0,95	52	0,92	51	0,95	52
0,85	52	0,69	42	0,69	51	0,89	51	0,84	33	0,94	53
0,77	40	0,82	51	0,78	28	0,70	22	0,58	42	0,89	43
0,73	50	0,76	40	0,96	51	0,79	30	0,85	44	0,73	33
1,08	50	0,88	42	0,95	62	1,04	67	0,72	23	0,82	45
0,56	32	0,92	33	0,83	41	0,75	32	1,02	30	0,59	30
0,61	21	0,55	16	1,09	55	1,03	43	0,81	39	0,92	55
0,88	31	0,63	20	0,65	29	0,87	39	1,01	54	0,75	33
0,73	51	0,98	54	1,03	63	0,63	38	0,90	70		
0,57	23	0,79	50	0,93	34	1,02	70	0,76	38		

ВАРИАНТ 3

x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
15	53	22	37	17	41	24	29	32	11	20	50
24	16	16	45	20	39	26	15	21	38	18	51
21	30	22	39	22	21	18	31	19	34	22	22
20	44	21	38	9	68	20	41	22	42	20	23
25	23	19	29	20	36	26	36	11	51	22	39
16	38	24	30	23	31	11	37	17	51	31	21
19	40	11	52	19	33	9	60	17	22	15	49
29	30	32	12	25	20	13	48	15	52	22	32
29	20	13	55	13	43	16	38	25	32	21	41
27	20	19	46	19	36	25	15	14	35	15	50
26	14	20	25	19	29	14	47	15	53	22	23
13	38	22	26	4	63	20	27	15	42	22	35
20	27	19	47	33	24	23	20	22	33	25	36
17	42	10	47	28	23	15	33	20	34	13	48
21	36	31	21	22	26	15	58	16	43	14	27
13	50	16	42	18	37	18	29	24	32		
16	44	26	39	17	34	19	28	20	29		

ВАРИАНТ 4

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
19	36	12	44	21	23	18	24	23	17	16	37
16	39	10	28	17	24	15	27	15	34	15	32
20	26	16	28	16	38	17	40	15	47	19	33
26	19	16	28	18	31	17	20	15	43	12	55
10	50	18	31	19	28	17	32	10	48	16	36
15	36	21	24	21	26	18	29	19	20	15	47
20	40	19	34	13	27	8	36	18	23	19	45
8	42	19	29	12	43	12	44	20	26	25	31
16	13	15	40	22	8	9	38	25	19	17	23
13	33	23	31	12	38	14	41	19	37	24	20
21	29	16	39	10	44	15	19	15	34	13	48
14	35	19	29	15	28	20	33	13	36	20	33
15	18	14	33	13	40	14	29	12	31	14	35
17	40	13	42	12	52	15	46	19	34	15	40
22	35	9	47	23	27	7	48	19	28	15	42
19	34	9	56	18	23	18	25	17	25		
22	35	8	47	19	24	15	35	14	31		

ВАРИАНТ 5

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
21,1	76	16,7	75	18,9	72	14,7	99	18,9	41	20,9	61
9,5	85	25,8	114	15,0	48	25,5	62	23,6	60	32,2	60
24,9	87	25,7	80	22,5	65	16,1	79	15,6	99	20,5	76
21,9	70	18,2	77	15,2	63	16,8	67	21,4	64	19,9	90
14,3	44	27,7	66	18,3	69	15,6	53	15,0	60	25,5	73
10,2	51	23,8	59	13,2	80	8,8	53	15,8	81	19,5	66
14,8	48	22,4	83	19,4	66	23,0	81	23,1	78	16,5	74
16,5	67	20,2	49	20,2	65	29,1	73	24,7	50	19,7	56
24,6	31	20,9	88	25,1	45	13,4	64	10,1	69	13,6	68
18,3	76	17,9	99	18,9	57	23,0	72	12,1	82	27,5	55
16,8	77	23,6	68	31,2	83	23,3	103	7,5	80	14,3	42
28,0	62	4,6	85	15,5	111	11,0	87	25,6	73	17,7	75
21,0	79	21,9	53	21,7	112	12,5	83	18,4	57	19,4	66
17,4	79	15,6	101	10,9	77	23,8	73	30,6	58	25,0	64
15,0	71	15,0	68	23,6	49	26,1	72	18,0	87	21,3	51
20,8	82	20,0	60	18,1	92	21,5	75	26,7	76		
20,1	63	17,7	85	15,6	72	24,5	48	12,4	95		

ВАРИАНТ 6

x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
60	37	55	50	50	41	44	51	47	34	34	68
35	71	47	50	68	44	78	38	30	58	39	80
45	63	39	36	53	41	44	41	50	58	62	35
67	25	45	83	54	42	56	46	35	59	53	37
39	57	47	26	34	50	43	57	44	61	47	48
49	37	57	19	60	40	50	55	41	40	36	57
63	50	47	69	74	40	57	36	52	59	61	43
55	55	50	54	53	28	28	60	52	33	48	59
46	33	40	65	61	43	59	45	46	65	50	24
39	58	45	34	48	41	47	73	80	20	61	49
40	62	52	47	48	49	56	51	60	60	62	59
40	48	30	43	75	36	31	72	40	60	36	68
59	41	36	63	64	45	25	67	40	54	75	18
51	43	40	80	45	41	42	54	50	52	52	39
43	66	53	45	44	62	74	47	46	36	70	32
60	25	52	49	71	20	34	46	49	49		
61	25	37	55	65	34	57	24	66	44		

ВАРИАНТ 7

x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
20,0	50	20,5	45	21,0	33	22,0	85	21,5	50	21,0	50
21,5	44	21,0	47	21,5	61	21,0	51	21,0	65	21,0	61
20,0	26	19,5	30	22,0	72	22,5	75	21,0	72	21,5	78
20,0	46	22,0	65	21,0	52	21,5	58	21,0	59	21,5	55
19,0	29	20,5	28	21,5	53	21,0	70	21,0	62	20,0	40
19,0	27	20,5	42	21,0	43	21,5	46	21,0	43	22,5	42
22,5	63	20,5	63	23,0	74	23,0	90	20,0	50	18,0	26
22,5	75	20,5	40	21,5	56	24,0	37	20,0	25	25,0	91
21,0	55	21,5	53	21,0	56	21,5	54	19,0	35	22,5	78
24,5	85	24,5	93	22,5	52	22,0	55	21,0	69	22,5	83
21,0	63	21,5	65	20,5	53	23,5	85	20,5	31	18,5	37
23,5	87	19,0	30	21,5	53	21,0	54	21,0	55	21,5	58
22,0	61	20,5	48	22,0	72	23,0	80	18,5	33	20,5	27
19,5	40	22,5	74	21,5	60	21,0	57	19,5	26	21,5	60
21,5	59	21,0	60	20,0	50	21,5	70	22,5	61	20,5	41
22,0	48	19,5	26	21,0	68	23,0	84	20,0	32	23,5	82
19,5	40	20,0	52	20,5	60	22,5	64				

ВАРИАНТ 8

x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
21,0	57	21,5	60	21,5	59	21,0	60	18,5	33	20,5	27
19,5	40	22,5	74	22,0	61	20,5	48	18,0	72	23,0	80
20,5	50	21,5	70	22,5	61	20,5	41	22,0	78	19,5	26
21,0	68	23,0	84	20,0	32	22,5	73	23,5	82	19,5	40
20,0	52	20,5	60	22,5	64	23,5	86	21,5	53	21,0	58
21,0	54	21,0	54	20,5	31	18,5	37	23,5	87	19,0	30
21,0	63	21,5	65	20,5	53	23,5	85	22,5	52	22,0	55
21,0	69	22,5	83	19,0	35	22,5	79	24,5	85	24,5	93
21,0	55	215	53	21,0	56	21,5	54	21,5	54	24,0	87
20,0	25	25,0	91	20,0	50	18,0	26	22,5	75	20,5	40
22,0	63	21,5	63	23,0	74	23,0	90	21,0	43	21,5	46
21,0	43	21,5	46	21,0	43	22,5	42	21,0	62	20,0	40
19,0	27	20,5	42	19,0	29	20,5	28	21,5	53	21,0	70
21,0	52	21,5	58	21,0	59	21,5	55	21,0	72	21,5	78
20,0	26	19,5	30	22,0	72	22,5	75	21,5	61	21,0	51
21,0	65	21,0	61	21,5	50	21,0	50	21,5	44	21,0	47
20,0	50	20,2	45	21,0	33	22,0	85				

ВАРИАНТ 9

x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
18,5	33	20,5	27	19,5	40	22,5	74	22,0	61	20,5	48
22,0	72	23,0	83	21,5	53	21,0	54	21,0	55	21,5	58
20,5	31	18,5	37	23,5	87	19,0	80	21,0	63	21,5	65
20,5	53	23,5	85	22,5	52	22,0	55	21,0	69	22,5	83
19,0	35	22,5	79	24,5	85	24,5	93	21,0	55	21,5	53
21,0	56	21,5	54	21,5	56	24,0	87	20,0	25	25,0	91
20,0	50	18,0	26	22,5	75	20,5	40	22,0	63	21,5	63
23,0	64	23,0	90	21,0	43	21,5	46	21,0	46	22,5	42
21,0	62	20,0	40	19,0	27	20,5	12	19,0	29	20,5	28
21,5	53	21,0	70	21,0	52	21,5	58	21,0	59	21,5	55
21,0	72	21,5	78	20,0	43	22,0	65	20,0	26	19,5	30
22,0	72	22,5	75	21,5	61	21,0	51	21,0	65	21,0	61
21,5	50	21,0	50	21,5	44	21,0	47	20,0	50	20,5	45
21,0	33	22,0	85	21,0	57	21,5	60	21,5	59	21,0	60
20,0	50	21,5	70	22,5	61	20,0	61	20,5	41	19,5	26
21,0	68	23,0	84	20,0	32	22,5	73	20,5	82	19,5	40
20,0	52	20,5	60	22,5	64	23,5	84				

ВАРИАНТ 10

x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
22,0	63	21,5	63	23,5	74	23,0	90	21,0	43	21,5	42
21,0	43	22,5	42	21,0	62	20,0	40	19,0	27	20,5	42
19,0	29	20,5	28	21,5	53	21,0	70	21,0	52	21,5	58
21,0	59	21,5	55	21,0	72	21,5	78	20,0	43	22,0	65
20,0	26	19,5	30	22,0	72	22,5	75	21,5	65	21,0	51
21,0	65	21,0	61	21,5	50	21,5	44	21,0	47	20,0	50
20,5	45	21,0	50	21,0	33	22,0	85	20,0	52	20,5	60
22,5	64	23,5	95	20,0	32	22,5	73	23,5	82	19,5	40
22,0	78	19,5	37	21,0	67	23,0	84	20,0	50	21,5	70
22,5	61	20,5	41	21,0	57	21,5	60	21,5	59	21,0	60
18,5	33	20,5	27	19,5	40	22,5	74	22,0	61	20,5	48
22,0	62	23,0	80	21,5	53	21,0	54	21,0	55	21,5	58
20,5	31	18,5	37	23,5	87	19,0	30	21,0	63	21,5	65
20,5	53	23,5	85	22,5	52	22,0	55	21,0	69	22,5	81
19,0	35	22,5	79	24,5	85	24,5	92	21,0	55	21,5	53
21,0	56	21,5	54	21,5	56	24,0	87	20,0	25	25,0	91
20,0	50	18,0	26	22,5	75	20,5	40				

26. Контрольные работы

Контрольная работа № 1

Комплексные числа. Системы линейных уравнений. Основы линейной алгебры

Задание на контрольную работу 1.3.	Задание 1.	Задание 2.	Задание 3.	Задание 4.

Контрольная работа № 2

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Задание на контрольную работу 2.3.	Задание 1.	Задание 2.	Задание 3.	Задание 4.

Контрольная работа № 3

Введение в анализ

Задания на контрольную работу			
3.3.	Задание 3.3.		
4.3.	Задание 1.	Задание 2.	Задание 3.

Контрольная работа № 4

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Задания на контрольную работу		
5.3.	Задание 1.	Задание 2.
6.3.	Задание 1.	Задание 2.

Контрольная работа № 5

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Задание на контрольную работу 7.3.	Задания 1,3.	Задание 4.	Задание 6.	Задание 7.

Замечание. В зависимости от специальности преподаватель может изменить задания. Например, вместо задания 4 поставить задание 5, или дать оба задания вместе.

Контрольная работа №6

Интегральное исчисление функции одной переменной

Задание на контрольную работу 8.4.	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание.4

Контрольная работа №7

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задание на контрольную работу 9.3	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5	Задание 6

Контрольная работа №8

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Элементы теории поля

Задания на контрольную работу		
11.5	Задание 1	
12.5	Задание 1	
13.1.5	Задание 1	
13.2.5	Задание 1	
14.2.5	Задание 1	Задание 2
15.4	Задание2	Задание 3

Замечание. Данная тема весьма скупо описана в литературе, особенно в отношении практических примеров и задач. Автор попытался устранить этот недостаток и приводит достаточно большое количество примеров. Некоторые из них оригинальные и непростые. Такое разнообразие примеров избыточное, но позволяет преподавателю подобрать задания в контрольной работе так, чтобы они наиболее полно соответствовали бы той или иной специальности. Выше дан самый простой вариант контрольной работы.

Контрольная работа №9

Теория функции комплексной переменной. Операционное исчисление

Задание на контрольную работу 16.3	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5

Контрольная работа №10

Уравнения математической физики

Задание на контрольную работу 17.3	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5

Контрольная работа №11

Ряды

Задание на контрольную работу 18.4	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5

Контрольная работа №12

Линейное, нелинейное и динамическое программирование

Задание на контрольную работу	Задание 19.4	Задание 20.3	Задание 21.3	Задание 22.3

Контрольная работа №13

Марковские случайные процессы и теория игр

Задание на контрольную работу	Задание 23.3

Контрольная работа №14

Теория вероятностей

Задание на контрольную работу	Задание 24.3

Контрольная работа №15

Математическая статистика

Задание на контрольную работу	Задание №25.3

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица значений функций $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$**.**

Таблица 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	3970	3965	3961	956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	280	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1985	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1415	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0332	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0040	0039	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица значений функции $\Phi(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\gamma} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt$

Таблица 2

γ	Φ(γ)	γ	Φ(γ)	γ	Φ(γ)	γ	Φ(γ)
0,00	0,0000	0,41	0,1591	0,82	0,2939	1,23	0,3907
0,01	0,0040	0,42	0,1628	0,83	0,2967	1,24	0,3925
0,02	0,0080	0,43	0,1664	0,84	0,2995	1,25	0,3944
0,03	0,0120	0,44	0,1700	0,85	0,3023	1,26	0,3962
0,04	0,0160	0,45	0,1736	0,86	0,3051	1,27	0,3980
0,05	0,0199	0,46	0,1772	0,87	0,3078	1,28	0,3997
0,06	0,0239	0,47	0,1808	0,88	0,3106	1,29	0,4015
0,07	0,0279	0,48	0,1844	0,89	0,3133	1,30	0,4032
0,08	0,0319	0,49	0,1879	0,90	0,3159	1,31	0,4049
0,09	0,0359	0,50	0,1915	0,91	0,3186	1,32	0,4056
0,10	0,0398	0,51	0,1950	0,92	0,3212	1,33	0,4082
0,11	0,0438	0,52	0,1985	0,93	0,3238	1,34	0,4099
0,12	0,0478	0,53	0,2019	0,94	0,3264	1,35	0,4115
0,13	0,0517	0,54	0,2054	0,95	0,3289	1,36	0,4131
0,14	0,0557	0,55	0,2088	0,96	0,3315	1,37	0,4147
0,15	0,0596	0,56	0,2123	0,97	0,3340	1,38	0,4162
0,16	0,0636	0,57	0,2157	0,98	0,3365	1,39	0,4177
0,17	0,0675	0,58	0,2190	0,99	0,3389	1,40	0,4192
0,18	0,0714	0,59	0,2224	1,00	0,3413	1,41	0,4207
0,19	0,0753	0,60	0,2257	1,01	0,3438	1,42	0,4222
0,20	0,0793	0,61	0,2291	1,02	0,3461	1,43	0,4230
0,21	0,0832	0,62	0,2324	1,03	0,3485	1,44	0,4251
0,22	0,0871	0,63	0,2357	1,04	0,3508	1,45	0,4265
0,23	0,0910	0,64	0,2389	1,05	0,3531	1,46	0,4279
0,24	0,0948	0,65	0,2422	1,06	0,3554	1,47	0,4292
0,25	0,0987	0,66	0,2454	1,07	0,3577	1,48	0,4305
0,26	0,1026	0,67	0,2486	1,08	0,3599	1,49	0,4319
0,27	0,1064	0,68	0,2517	1,09	0,3621	1,50	0,4332
0,28	0,1103	0,69	0,2549	1,10	0,3643	1,51	0,4345
0,29	0,1141	0,70	0,2580	1,11	0,3665	1,52	0,4357
0,30	0,1179	0,71	0,2611	1,12	0,3686	1,53	0,4370
0,31	0,1217	0,72	0,2642	1,13	0,3708	1,54	0,4382
0,32	0,1255	0,73	0,2673	1,14	0,3729	1,55	0,4394
0,33	0,1293	0,74	0,2703	1,15	0,3749	1,56	0,4406
0,34	0,1331	0,75	0,2734	1,16	0,3770	1,57	0,4418
0,35	0,1368	0,76	0,2764	1,17	0,3790	1,58	0,4429
0,36	0,1406	0,77	0,2794	1,18	0,3810	1,59	0,4441
0,37	0,1443	0,78	0,2823	1,19	0,3830	1,60	0,4452
0,38	0,1480	0,79	0,2852	1,20	0,3849	1,61	0,4463
0,39	0,1517	0,80	0,2881	1,21	0,3869	1,62	0,4474
0,40	0,1554	0,81	0,2910	1,22	0,3883	1,63	0,4484

γ	$\Phi(\gamma)$	γ	$\Phi(\gamma)$	γ	$\Phi(\gamma)$	γ	$\Phi(\gamma)$
1,64	0,4495	1,88	0,4699	2,24	0,4875	2,72	0,4967
1,65	0,4505	1,89	0,4706	2,26	0,4881	2,74	0,4969
1,66	0,4515	1,90	0,4713	2,28	0,4887	2,76	0,4971
1,67	0,4525	1,91	0,4719	2,30	0,4893	2,78	0,4973
1,68	0,4535	1,92	0,4726	2,32	0,4898	2,80	0,4974
1,69	0,4545	1,93	0,4732	2,34	0,4904	2,82	0,4976
1,70	0,4554	1,94	0,4738	2,36	0,4909	2,84	0,4977
1,71	0,4564	1,95	0,4744	2,38	0,4913	2,86	0,4979
1,72	0,4573	1,96	0,4750	2,40	0,4918	2,88	0,4980
1,73	0,4582	1,97	0,4756	2,42	0,4922	2,90	0,4981
1,74	0,4591	1,98	0,4761	2,44	0,4927	2,92	0,4982
1,75	0,4599	1,99	0,4767	2,46	0,4931	2,94	0,4984
1,76	0,4608	2,00	0,4772	2,48	0,4934	2,96	0,4985
1,77	0,4616	2,02	0,4783	2,50	0,4938	2,98	0,4985
1,78	0,4625	2,04	0,4793	2,52	0,4941	3,00	0,49865
1,79	0,4633	2,06	0,4803	2,54	0,4945	3,20	0,49931
1,80	0,4641	2,08	0,4812	2,56	0,4948	3,40	0,49966
1,81	0,4649	2,10	0,4821	2,58	0,4951	3,60	0,499841
1,82	0,4656	2,12	0,4830	2,60	0,4953	3,80	0,499928
1,83	0,4664	2,14	0,4838	2,62	0,4956	4,00	0,499968
1,84	0,4671	2,16	0,4846	2,64	0,4959	4,50	0,499997
1,85	0,4678	2,18	0,4854	2,66	0,4961	5,00	0,499997
1,86	0,4686	2,20	0,4861	2,68	0,4963		
1,87	0,4693	2,22	0,4868	2,70	0,4965	∞	0,5

Критические точки распределения

χ^2 при $\gamma = 0,95$ *($\alpha = 0,05$)*

Таблица 3.

r	χ^2	r	χ^2	r	χ^2	r	χ^2	r	χ^2
1	3,841	7	14,067	13	22,362	19	30,144	25	37,652
2	5,991	8	15,507	14	23,685	20	31,410	26	38,885
3	7,815	9	16,919	15	24,996	21	32,671	27	40,113
4	9,488	10	18,307	16	26,296	22	33,924	28	41,337
5	11,070	11	19,675	17	27,587	23	35,172	29	42,557
6	12,592	12	21,026	18	28,869	24	36,415	30	43,773

Таблица значений функции $\dfrac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!}e^{-\lambda}$

Таблица 4

κ	λ=0,1	λ=0,2	λ=0,3	λ=0,4	λ=0,5	λ=0,6	λ=0,7	λ=0,8	λ=0,9	
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
6							0,0001	0,0002	0,0003	
κ	λ=1	λ=2	λ=3	λ=4	λ=5	λ=6	λ=7	λ=8	λ=9	λ=10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,1680	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1008	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,0504	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0216	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	01,0631
7	0,0001	0,0034	0,0081	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0027	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0008	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,01318	0,1251
10			0,0002	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0001	0,0019	0,0082	0,0213	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12				0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0003	0,0013	0,0052	0,0071	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0033	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0014	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0006	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0002	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0001	0,0009	0,0029	0,0071
19								0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0003	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

Литература

1. Виноградова А.И., Олейник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. - М.: Высшая школа, 2000.

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.- М.: Астрель 2003.

3. Данко П.Е., Попов А.Г. Кожевникова Г.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В2-х ч. Учебное пособие для втузов. 5-е изд. испр.-М.: Высш. шк., 1997.

4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты).- М.: Высш. шк., 1994.

5. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов / Под ред. B.C. Зарубина, А.П. Крищенко.-М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.

6. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра: Учеб. для вузов / Под ред. B.C. Зарубина, А.П. Крищенко.-М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.

7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. В2-х т. Т.1,2.-М.: Наука, 1985.

8. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа(2). – СПб.: Лань,2001

9.Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии* М.: Наука, 1972.

10. Гаврилов В. Р., Иванова Е. Е., Морозова В. Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: Учебник для вузов/ Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко: М., Издательство МГТУ им. М. Э. Баумана, 2001.

11. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математики, М.: наука, 1969.

12. Сборник задач по математике для втузов. 4.2. Специальные разделы математического анализа/ под. ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. М.: Наука, 1986.

13. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. — М., «Дело», 2001.

14. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах.− М., «Высшая школа», 1993.

15. Кузнецов Б.Т. Математика: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000)⁄ Б.Т.Кузнецов.−2-е изд., перераб. и доп. −М., ЮНИТИ − ДАНА, 2004.

16. Шапкин А.С. ,Мазаева Н.П. Математические методы и модели исследования операций: Учебник, − М., Издательско-торговая корпорация «Дашков и $К^0$ », 2003.

17. .Печерский С.Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов.

18. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математеческие методы в экономике. — М.: Дело и сервис, 2004 г.,

19. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей (задачи и упражнения). М.: Наука, 1969.

20. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 2002.

21. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистики. — М., «Высшая школа», 2001.

22. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика, М.: Высшая школа, 2002.

23. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.

24. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Статистика, 1979.

25. Сизов С.Н. Галькова Е.А. Ряды. Типовые расчеты. Учебное пособие. Красноярск,КФ СГУПС,2001

26. Свитачев А.И.,Высщая математика. Неопределенный интеграл. Уч. пособие.Красноярск, КФ ИрГУПС. 2003.

27. Свитачев А.И.,Сизов С.Н.,Галькова Е.А.,Пашковская О.В.,Белобородова Т.В. под ред. Свитачева А.И. Сборник задач по высшей математике. Учебное пособие для вузов. В2-х ч.Ч.I.. Красноярск,КФ ИрГУПС, 2003.

28. Сизов С.Н. Математический практикум по кратным, криволинейным, поверхностным интегралам и элементам теории поля. Учебное пособие для вузов. Красноярск, КФ ИрГУПС, 2004.

29. Сизов С.Н.,Свитачев А.И.,Пашковская О.В.,Галькова Г.А. Практикум по математике в 3-х частях. Часть I.Учебное пособие для заочников. Под ред. Сизова С.Н. Красноярск,КФ ИрГУПС,2005.

30.Пашковская О.В.,Новоселов О.В.Элементы теории комплексного переменного. Учебное пособие. Красноярск, КФ ИрГУПС. 2005.

31. Сизов С.Н.,Свитачев А.И.,Пашковская О.В., Шалагина Е.В. Практикум по математике в 3-х частях. Часть II.Учебное пособие для заочников. Под ред. Сизова С.Н. Красноярск,КФ ИрГУПС,2006.

32. Селиверстова И.Ф.,Галькова Е.А. Основы операционного исчисления. Учебное пособие. Красноярск. КФ Ир ГУПС. 2006.

33. Сизов С.Н., Свитачев А.И., Галькова Е.А., Шалагина Е.В. Практикум по математике в 3-х частях. Часть III. Учебное пособие для заочников. Под ред. Сизова С.Н. Красноярск: КрИЖТ ИрГУПС, 2008.

34. Петрякова Е.А., Синеговская Т.С. Поверхностные интегралы. Векторный анализ. Учебное пособие. Иркутск, ИрГУПС, 2007.

Учебно-методическое издание

Сергей Николаевич Сизов,

Андрей Павлович Хоменко,

Анатолий Иванович Свитачев,

Ольга Владимировна Пашковская,

Елена Александровна Галькова,

Елена Викторовна Шалагина.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ
И РУКОВОДСТВО К ИХ РЕШЕНИЮ

Учебное пособие для втузов

Под редакцией Сизова С.Н.

Подписано в печать г.
Формат бумаги 60×84/16
авт. л.; 29,4 печ. л.
экз.
План издания 2011 г. № п/п 3

Отпечатано в КрИЖТ ИрГУПС
Красноярск, ул. Л. Кецховели, 89