СБОРНИК ЗАДАНИЙ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

СБОРНИК ЗАДАНИЙ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Под редакцией Свитачева А.И.

Издание второе, переработанное

Допущено Сибирским региональным учебно-методическим центром высшего профессионального образования

в качестве учебного пособия

Красноярск 2009

УДК 517 + 519

Коллектив авторов :
А.И. Свитачев, С.Н. Сизов, Е.А. Галькова, О.В. Пашковская,
Т.В. Белобородова.

Сборник заданий по высшей математике : Учеб. пособие для вузов / Свитачев А.И., Сизов С.Н., Галькова Е.А., Пашковская О.В., Белобородова Т.В.; под ред. Свитачева А.И./. 2-е изд.,перераб. КФ ИрГУПС - Красноярск, 2009. – 276 с.

Содержит задания по основным разделам курса высшей математики для вузов. В каждом разделе приводятся необходимые теоретические сведения и задачи с подробными решениями. Предлагается большое количество задач (типовые расчеты) для индивидуальной работы.

Рецензенты: Шлепкин А.К. – д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой высшей математики Красноярского государственного аграрного университета,
Ушанов С.В.- к.т.н., доцент, зав. кафедрой высшей математики и информатики Сибирского государственного технологического университета.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Настоящий «Сборник заданий по высшей математике» подготовлен авторским коллективом филиала Иркутского государственного университета путей сообщения в г. Красноярске. Сборник отражает содержание учебной программы по математике для инженерно-технических специальностей вузов и соответствует государственному образовательному стандарту от 5 апреля 2000г.

В сборник включены индивидуальные задания по всем разделам курса математики, за исключением теории вероятностей, математической статистики и некоторых специальных разделов. Каждый раздел сборника содержит краткие теоретические сведения, основные определения, теоремы и формулы, снабжен большим количеством разобранных примеров и задач. Индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов представлены двадцатью пятью и более вариантами.

Разделы по векторной алгебре, аналитической геометрии и неопределенному интегралу написаны Свитачевым А.И.; разделы по пределам и рядам - Сизовым С.Н.; разделы по дифференцированию и исследованию функций одной переменной - Гальковой Е.А.; разделы по определенному интегралу и функциям нескольких переменных - Пашковской О.В.; разделы по дифференциальным уравнениям и кратным интегралам - Белобородовой Т.В.

Авторы выражают сердечную благодарность сотрудникам кафедры естественнонаучных дисциплин Красноярского филиала ИрГУПС Кузовниковой Л.А. и Париловой Т.И. за помощь при подготовке сборника к печати.

Во втором издании исправлены допущенные ошибки в примерах и задачах.

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Матрицы и определители

Таблицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad \ldots\ldots\ldots \quad , \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij}, $i=1, \ldots , m$, $j=1, \ldots , n$ - числа, называются ***матрицами***. При $m=n$ - матрица квадратная, при $m \neq n$ – прямоугольная.

Определителем 2-ого порядка, соответствующим матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, называется число $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Определителем 3-его порядка, соответствующим квадратной матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Минором $\boldsymbol{M_{ij}}$ элемента a_{ij} называется определитель, полученный из данного определителя вычеркиванием i - строки и j- столбца. Так, минором M_{23} определителя 3-его порядка является определитель

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \text{схема:} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, равный $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Вычисление определителя по элементам строки или столбца.

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на их алгебраические дополнения. Так, по элементам второй строки вычислим определитель 3-его порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Операции над матрицами.

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B.

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\quad i = 1,2, \ldots, m, \quad j = 1,2, \ldots, n.$

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $\lambda A = (\lambda\, a_{ij})$, где каждый элемент матрицы A умножается на число λ.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{mn}$ на матрицу $B = (b_{ij})_{nk}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{mk} = AB$, элемент c_{ij} которой равен сумме произведений соответствующих элементов i -ой строки матрицы A и j -ого столбца матрицы B.

Так, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 4 \\ 29 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется ***вырожденной***, если ее определитель $|A| = 0$, и ***невырожденной***, если $|A| \neq 0$.

Обратной для невырожденной матрицы A называется матрица A^{-1} такая, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица (по главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы равны 0).

Так, обратная матрица A^{-1} для квадратной матрицы A 3-его порядка имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

1.2. Решение систем линейных уравнений

Правило Крамера. Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x & + & a_{12}\cdot y & + & a_{13}\cdot z & = & b_1 \\ a_{21}\cdot x & + & a_{22}\cdot y & + & a_{23}\cdot z & = & b_2 \\ a_{31}\cdot x & + & a_{32}\cdot y & + & a_{33}\cdot z & = & b_3 \end{cases} . \qquad (1.1)$$

Решение находится по ***формулам Крамера***

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Система имеет единственное решение при $\Delta \neq 0$, множество решений при $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ и не имеет решения при $\Delta = 0$ и хотя бы одном Δ_x, Δ_y, Δ_z, не равном нулю.

Пример. Решить по правилу Крамера систему:

$$\begin{cases} 2x & + & y & & = 3 \\ x & + & & 3z & = 7 \\ & & 5y & - \ z & = 3 \end{cases} .$$

Решение. $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot(-15)-1\cdot(-1)=-29$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot(-15)-1\cdot(-7-9)=-45+16=-29$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot(-7-9)-3\cdot(-1)=-32+3=-29$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot(-35)-1\cdot(3-15)=-70+12=-58$$

По формулам Крамера

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-29}{-29}=1\,,\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-29}{-29}=1\,,\qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-58}{-29}=2\,.$$

Матричное решение системы линейных уравнений. Систему линейных уравнений (1.1) можно представить в матричном виде

$$A\cdot X=B\ ,\ \text{где}\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

Если матрица A невырожденная, то, умножая слева матричное уравнение на матрицу A^{-1}, обратную A, получим $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$, т.к. $A^{-1}\cdot A=E$ и $E\cdot X=X$, то $X=A^{-1}\cdot B$.

Пример. Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases}x+2y-z=2\\3x+2z=5\\4x-2y+5z=7\end{cases}.$$

Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&0&2\\4&-2&5\end{vmatrix}=-3\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\-2&5\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}1&2\\4&-2\end{vmatrix}=$$

$$=-3\cdot(10-2)-2\cdot(-2-8)=-24+20=-4.$$

Найдем алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0&2\\-2&5\end{vmatrix}=4\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}2&-1\\-2&5\end{vmatrix}=-8\qquad A_{31}=\begin{vmatrix}2&-1\\0&2\end{vmatrix}=4$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}3&2\\4&5\end{vmatrix}=-7\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1&-1\\4&5\end{vmatrix}=9\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&-1\\3&2\end{vmatrix}=-5$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3&0\\4&-2\end{vmatrix}=-6\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\4&-2\end{vmatrix}=10\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}=-6\ .$$

Обратная матрица имеет вид $A^{-1}=\dfrac{1}{-4}\begin{pmatrix}4&-8&4\\-7&9&-5\\-6&10&-6\end{pmatrix}$.

Находим решение $X=A^{-1}\cdot B=\dfrac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}4&-8&4\\-7&9&-5\\-6&10&-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Таким образом, система имеет решение $x = 1,\quad y = 1,\ z = 1.$

Метод Гаусса. ***Элементарными преобразованиями*** системы уравнений называют следующие преобразования:

1) перемена местами двух любых уравнений;
2) умножение обеих частей любого из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;
3) прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

Две совместные системы уравнений называются ***равносильными***, если каждое решение одной является решением другой и обратно.

Элементарные преобразования переводят систему в равносильную данной.

Пример. Решить методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16\ . \end{cases}$$

Решение. Сначала умножим первое уравнение на (-2) и сложим со вторым , затем первое уравнение умножим на (-5) и сложим с третьим , в результате получим систему:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ \quad\ y - 3z = 4 \\ -3y + 11z = -14 \end{cases}.$$

Далее умножим второе уравнение на $(+3)$ и сложим с третьим:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ \quad\ y - 3z = 4 \\ \qquad\ 2z = -2 \end{cases}.$$

Из этой системы последовательно находим

$$z = -1 \qquad y = 4 + 3z = 1 \qquad x = 6 + 2z - y = 6 - 2 - 1 = 3.$$

Итак, первоначальная система с помощью элементарных преобразований приведена к равносильной системе, имеющей треугольный вид и единственное решение.

Пример. Решить методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x - y + 5z = 3 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ 2x + 3y - 6z = -1 \end{cases}.$$

Решение. Составим расширенную матрицу и выполним над ней элементарные преобразования:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & \vline & 3 \\ 3 & 2 & -1 & \vline & 2 \\ 2 & 3 & -6 & \vline & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & \vline & 3 \\ 0 & 5 & -16 & \vline & -7 \\ 0 & 5 & -16 & \vline & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & \vline & 3 \\ 0 & 5 & -16 & \vline & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \vline & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь первую строку умножили на *(-3)* и сложили со второй, далее - первую строку умножили на *(-2)* и сложили с третьей, а затем из третьей строки вычли вторую.

Последней матрице соответствует ступенчатая система уравнений $\begin{cases} x - y + 5z = 3 \\ 5y - 16z = -7 \end{cases}$, равносильная данной. Неизвестные x и y можно выразить через z:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{7}{5} + \frac{16}{5}z \\ x &= \frac{8}{5} - \frac{9}{5}z \end{aligned}.$$

Придавая z произвольные значения, получим соответствующие значения x и y. Таким образом, система имеет множество решений вида:

$$x = \frac{8}{5} - \frac{9}{5}\alpha, \quad y = -\frac{7}{5} + \frac{16}{5}\alpha, \quad z = \alpha.$$

Задание 1.1.

Дана система линейных уравнений. Решить тремя способами:

1) по правилу Крамера;
2) с помощью обратной матрицы ;
3) методом Гаусса.

1. $\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 5 \\ 2x + 3y + z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= 11 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 6 \\ 2x + 3y - 4z &= 20 \\ 3x - 2y - 5z &= 6 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 4x - 3y + 2z &= 9 \\ 2x + 5y - 3z &= 4 \\ 5x + 6y - 2z &= 18 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= 8 \\ 2x - y - 3z &= -4 \\ x + 5y + z &= 0 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 8x + 3y - 6z &= 2 \\ 4x + y - 3z &= 3 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 3x - 2y - 5z &= 6 \\ 4x + 4y + 4z &= -2 \\ 3x - 2y - 5z &= 6 \end{aligned}$

9.
$$\begin{aligned} 7x - 5y &= 31 \\ 4x + 11z &= -43 \\ 2x + 3y + 4z &= -20 \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 31 \\ 5x + y + 2z &= 29 \\ 3x - y + z &= 10 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} x - 3y - z &= 1 \\ 2x + y + z &= -7 \\ 2x - y - 3z &= 5 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} 3x + y + 2z &= -4 \\ x - 2y - z &= -1 \\ 2x + 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 2 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ x - y - 2z &= 6 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} 3x - 2y + 2z &= 3 \\ 2x + y - z &= -5 \\ 5x - y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned} x + 5y - z &= -1 \\ 2x + y - 2z &= 7 \\ x - 4y - z &= 0 \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} 2x - 2y + 3z &= 0 \\ x + y - 2z &= -7 \\ x - 2y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 3 \\ x - y + 2z &= -4 \\ 2x + 2y + z &= 4 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ 2x + 3y - z &= 0 \\ x - 2y - z &= 7 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 3 \\ x + y - 2z &= 4 \\ 3x - 2y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= 0 \\ 3x + y - 3z &= -1 \\ 2x - y + 5z &= 3 \end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 3x - 2y + 3z &= 4 \\ 7x + 2z &= 9 \end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned} 2x - z &= 3 \\ y + z &= 4 \\ 3x + 2z &= 8 \end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - 3y + z &= 3 \\ 3x - 3y + 2z &= 9 \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 7 \\ 3x + 3y - 2z &= 5 \\ x + 4y - 5z &= -2 \end{aligned}$$

25.
$$\begin{aligned} 3x + y - 2z &= 5 \\ x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x - y - 5z &= -1 \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 3 \\ x + 3y - 2z &= 7 \\ 4x - 5y + 3z &= -4 \end{aligned}$$

27.
$$\begin{aligned} 7x + 6y - 3z &= 5 \\ 2x - 3y + 5z &= 6 \\ 5x + 9y - 8z &= -1 \end{aligned}$$

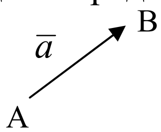
28.
$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 3 \\ 2x + 2y + 5z &= 9 \\ 3x - 4y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

29.
$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 9 \\ 3x + 7z &= 10 \\ -x + 2y - 3z &= -2 \end{aligned}$$

30.
$$\begin{aligned} 7x - 3y + 4z &= 8 \\ -x + y - z &= -1 \\ 2x + 3y - 5z &= 5 \end{aligned}$$

2. ВЕКТОРЫ И ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Вектором называется направленный отрезок в пространстве, имеющий определенную длину.



Обозначают $\overline{a}$ или $\overline{AB}$. Длина вектора - модуль, обозначают $|\overline{a}|$, $|\overline{AB}|$.

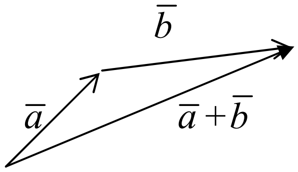
Нуль-вектор - $\overline{0}$ - вектор, не имеющий определенного направления, и модуль $|\overline{0}| = 0$.

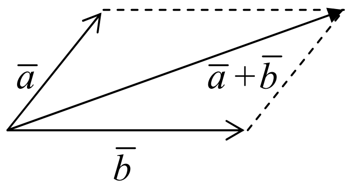
Вектора, расположенные на одной или параллельных прямых, называются ***коллинеарными.***

Вектор $(-\overline{a})$ называют ***противоположным*** вектору $\overline{a}$, он коллинеарен вектору $\overline{a}$ и направлен в противоположную сторону.

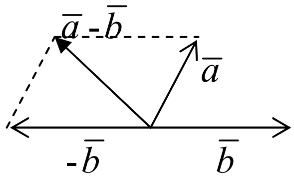
Сложение:

по правилу треугольника; по правилу параллелограмма.





Вычитание:



Произведением вектора $\overline{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\,\overline{a}$, модуль которого $|\lambda\,\overline{a}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$, и направление совпадает с направлением $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно, если $\lambda < 0$.

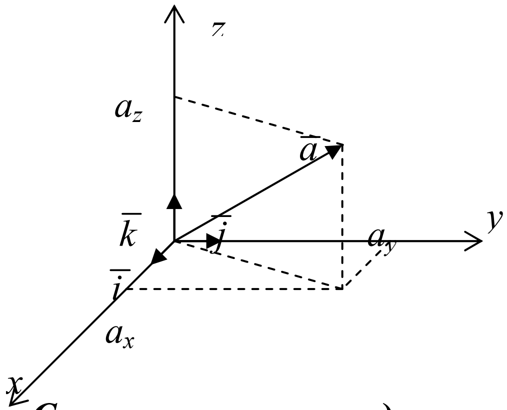
Вектора, лежащие на одной или параллельных плоскостях называются ***компланарными .***

Система векторов $\overline{a}_1$,...., $\overline{a}_n$ называется ***линейно зависимой***, если существуют числа λ_1, λ_2 , … , λ_n такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля и $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n = 0$. В противном случае система называется ***линейно независимой*** .

Максимальное число линейно независимых векторов в пространстве называется ***базисом*** .

Вектора $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ - попарно перпендикулярны и, имеющие единичную длину, обозначают прямоугольный декартов базис. Всякий вектор $\overline{a}$ может быть единственным образом представлен как

$\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}$, где a_x, a_y , a_z - называются координатами вектора в базисе $(\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k})$ и представляют собой проекции вектора $\overline{a}$ на оси x, y, z .



Скалярное произведение векторов. Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\,\overline{a}\,| \cdot |\,\overline{b}\,| \cdot \cos \overline{a} \,\hat{}\, \overline{b}$.

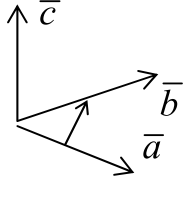
Если вектора заданы координатами $\overline{a}(a_x,\ a_y\ ,\ a_z)$, $\overline{b}(b_x,\ b_y\ ,\ b_z)$, то скалярное произведение $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$.

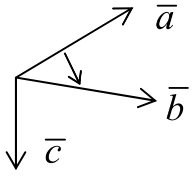
Из формулы нахождения скалярного произведения можно находить косинус угла между двумя векторами

$$\cos \overline{a} \,\hat{}\, \overline{b} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\,\overline{a}\,| \cdot |\,\overline{b}\,|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \ .$$

Векторное произведение векторов. Векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$, определяемый тремя условиями :

1. модуль вектора $\overline{c} = |\,\overline{a}\,| \cdot |\,\overline{b}\,| \cdot \sin \overline{a} \,\hat{}\, \overline{b}$ численно равен площади параллелограмма , построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, как на сторонах;
2. вектор $\overline{c} \perp \overline{a}$ и $\overline{b}$;
3. вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ образуют правую тройку, т. е. если смотреть с конца вектора $\overline{c}$ на вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то поворот от вектора $\overline{a}$ к $\overline{b}$ по кратчайшему расстоянию виден совершающимся против часовой стрелки.





Если вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы координатами $\bar{a}(a_x,\ a_y\ ,\ a_z)$, $\bar{b}(b_x,\ b_y\ ,\ b_z)$, то векторное произведение находится так

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами

$A\ (\ 1,1,1\ ),\ \ B\ (\ 2,5,7\ ),\ \ C\ (\ 3,2,4\ )$.

Решение. Рассмотрим вектора $\overline{AB}(1,4,6)$, $\overline{AC}(2,1,3)$.

Найдем их векторное произведение

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 4 & 6\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}4 & 6\\ 1 & 3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}1 & 6\\ 2 & 3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix}=6\bar{i}+9\bar{j}-7\bar{k}\ .$$

Модуль векторного произведения векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$, как на сторонах

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{6^2+9^2(-7)^2}=\sqrt{166}\ .$$

Тогда площадь ΔABC будет равна половине площади параллелограмма

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{166}\ .$$

Смешанное произведение . Смешанным произведением трех векторов $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ называется число, равное векторно-скалярному произведению векторов $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$. Геометрически смешанное произведение с точностью до знака численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$, как на ребрах. Смешанное произведение через координаты векторов выражается в виде

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}\ .$$

Если три вектора $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ компланарны, то их смешанное произведение $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=0$ и наоборот.

Пример. Найти объем тетраэдра с вершинами

$A\ (\ 2,\text{-}3,5\ ),\ \ B\ (\ 0,2,1\ ),\ \ C\ (\ \text{-}2,\text{-}2,3\ ),\ \ D(\ 3,2,4\ ).$

Решение. Рассмотрим три вектора :

$\overline{AB}(-2,\ 5,-4)$, $\overline{AC}(-4,\ 1,-2)$, $\overline{AD}(1,-5,\ 1)$.

Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$(\overline{AB}\times\overline{AC})\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}-2 & 5 & -4\\ -4 & 1 & -2\\ 1 & 5 & -1\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & -1\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=-2(-1+10)-5(4+2)-4(-20-1)=-18-30+84=36.$$

Объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, тогда

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(\overline{AB}\times\overline{AC})\cdot\overline{AD}\right|=\frac{36}{6}=6\,.$$

Задание 2.1.

1. Дан равносторонний треугольник ABC. Найти построением векторы $2\overline{AB}+\overline{BC}$ и $\frac{2}{3}\overline{AB}-\frac{1}{3}\overline{BC}$.

2. В треугольнике OAB проведена медиана OC. Доказать, что $\overline{OC}=\frac{1}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OB}\right)$.

3. При каких значениях α и β векторы $\overline{a}=-2\cdot\overline{i}+3\cdot\overline{j}+\alpha\cdot\overline{k}$ и $\overline{b}=\beta\cdot\overline{i}-6\cdot\overline{j}+2\cdot\overline{k}$ коллинеарны ?

4. По данным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ построить каждый из следующих: $3\overline{a}-\frac{3}{2}\overline{b}$; $-2\overline{a}+\frac{2}{3}\overline{b}$.

5. Заданы векторы $\overline{a}=2\cdot\overline{i}+4\cdot\overline{j}$, $\overline{b}=-\overline{j}-2\cdot\overline{k}$, $\overline{c}=\overline{i}+2\cdot\overline{j}-3\cdot\overline{k}$. Найти : координаты вектора $\overline{a}-2\overline{b}+\overline{c}$; разложение вектора $2\overline{a}+3\overline{b}-\overline{c}$ по базису $(\overline{i}\ ,\ \overline{j}\ ,\ \overline{k}\ )$.

6. Дан треугольник ABC . На стороне BC расположена точка M так, что $|BM|\div|MC|=2$. Найти $\overline{AM}$, если $\overline{AB}=\overline{b}$, $\overline{AC}=\overline{a}$.

7. В трапеции $ABCD$ $DC \parallel AB$, $\left|\overline{DC}\right|=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right|$. Выразить $\overline{AB}$ через $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

8. Вне плоскости треугольника ABC взята точка O . Построить векторы $\overline{OA}-\overline{OB}$; $-\overline{OA}-\overline{OB}$; $\overline{OA}+\overline{OB}-\overline{OC}$.

9. $ABCD$ - параллелограмм, O - точка пересечения его диагоналей. Выразить через $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ векторы $\overline{BO}$, $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$.

10. По сторонам OA и OB прямоугольника $OACB$ отложены единичные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы $\overline{AC}$, $\overline{BO}$, $\overline{OC}$.

11. Выразить векторы–медианы треугольника ABC через два вектора $\overline{AB}$ *и* $\overline{BC}$ - стороны его.

12. $ABCD$- параллелограмм, O - точка пересечения его диагоналей, $\overline{AB}=\overline{p}$, $\overline{AD}=\overline{q}$. Выразить через $\overline{p}$ *и* $\overline{q}$ векторы $\overline{DC}$, $\overline{OA}$, $\overline{CA}$.

13. $ABCD$ - параллелограмм, $\overline{AB}=\overline{p}$, $\overline{AD}=\overline{q}$. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$, где M - точка пересечения диагоналей.

14. $ABCD$ - параллелограмм, O - точка пересечения его диагоналей. Выразить через $\overline{AB}$ *и* $\overline{AD}$ векторы $\overline{CB}$, $\overline{BD}$, $\overline{OC}$.

15. В треугольнике ABC сторона AB точками M и P разделена на три части так, что $|AM|=|MP|=|PB|$. Найти вектор $\overline{CM}$, если $\overline{CA}=\overline{a}$, $\overline{CB}=\overline{b}$.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - параллелепипед с основанием $ABCD$. Выразить векторы BD_1 и DB_1 через $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA_1}$.

17. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S - вершина). Выразить через $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AS}$ векторы, совпадающие с остальными ребрами пирамиды.

18. На основании $\overline{AB}$ треугольника OAB отложен отрезок $|AD|=\frac{1}{3}|\overline{AB}|$. Выразить вектор $\overline{OD}$ через векторы $\overline{OA}$ *и* $\overline{OB}$.

19. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ дано: $\overline{AA_1}=\overline{m}$, $\overline{BB_1}=\overline{n}$, $\overline{AC_1}=\overline{p}$. Выразить через $\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{p}$ векторы, совпадающие с ребрами этой призмы.

20. Основание AB треугольника разделено точкой M в соотношении $2:3$. Выразить вектор $\overline{OM}$ через $\overline{OA}$ *и* $\overline{OB}$.

21. Треугольник ABC построен на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ так, что $\overline{BC}=\overline{a}$, $\overline{AC}=\overline{b}$. Выразить через $\overline{a}$ и $\overline{b}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CK}$, совпадающие с медианами данного треугольника.

22. В ромбе $ABCD$ даны диагонали $\overline{AC}=\overline{a}$, $\overline{BD}=\overline{b}$. Разложить по этим векторам все векторы, совпадающие со сторонами ромба: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$.

23. $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ - медианы треугольника ABC . Доказать равенство $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = 0$.

24. Заданы векторы $\overline{a}\ (-1,\ 2,\ 3)$, $\overline{b}(\ 2,\ -1,\ 5)$. Найти координаты вектора $\overline{c} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$, $cos\ (\overline{d} \hat{\ } \ \overline{j})$.

25. Заданы векторы $\overline{a}\ (2,\ 0,\ 3)$, $\overline{b}(\ -1,\ 1,\ 0)$, $\overline{c}(3,\ -2,\ 1)$. Найти координаты вектора $\overline{d} = 3\overline{a} - \frac{1}{2}\overline{b} + 3\overline{c}$, $cos\ (\overline{d} \hat{\ } \ \overline{i})$.

26. Дан вектор $\overline{a} = 4\overline{i}\ -2\ \overline{j}\ +3\ \overline{k}$. Найти вектор $\overline{b}$, если $|\overline{b}| = |\overline{a}|$, $b_y = a_y$, $b_x = 0$.

27. Найти длину вектора $\overline{a} = n\overline{i}\ +(n+1)\ \overline{j}\ +n(n+1)\ \overline{k}$.

28. M – точка пересечения медиан треугольника ABC , O - произвольная точка пространства. Доказать равенство $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$.

29. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Проверить следующую формулу $(\overline{a} + 4\overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (4\overline{b} + \overline{c})$.

30. Проверить на рисунке следующие формулы : $(\overline{p} + \overline{q}) + (\overline{p} - \overline{q}) = 2\overline{p}$ $\qquad \frac{(\overline{p} - \overline{q})}{2} + \overline{q} = \frac{(\overline{p} + \overline{q})}{2}$.

Задание 2.2.

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Требуется :

1) найти векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ и их модули ;
2) найти угол между векторами $\overline{AB}$, $\overline{AC}$;
3) найти площадь грани ABC ;
4) найти объем пирамиды .

1. *A (2,-3,1), B (6,1,-1), C (4,8,-9), D (2,-1,2).*
2. *A (5,-1,-4), B (9,3,-6), C (7,10,-14), D (5,1,-3).*
3. *A (1,-4,0), B (5,0,-2), C (3,7,-10), D (1,-2,1).*
4. *A (-3,-6,2), B (1,-2,0), C (-1,5,-8), D (-3,-4,3).*
5. *A (-1,1,-5), B (3,5,-7), C (1,12,-15), D (-1,3,-4).*
6. *A (-4,2,-1), B (0,6,-3), C (-2,13,-11), D (-4,4,0).*
7. *A (0,4,3), B (4,8,1), C (2,15,-7), D (0,6,4).*
8. *A (-2,0,-2), B (2,4,-4), C (0,11,-12), D (-2,2,-1).*
9. *A (3,3,-3), B (7,7,-5), C (5,14,-13), D (3,5,-2).*

10. $A(4,-2,5)$, $B(8,2,3)$, $C(6,9,-5)$, $D(4,0,6)$.
11. $A(-5,0,1)$, $B(-4,-2,3)$, $C(6,2,11)$, $D(3,4,9)$.
12. $A(1,-4,0)$, $B(2,-6,2)$, $C(12,-2,10)$, $D(9,0,8)$.
13. $A(-1,-2,-8)$, $B(0,-4,-6)$, $C(10,0,2)$, $D(7,2,0)$.
14. $A(0,2,-10)$, $B(1,0,-8)$, $C(11,4,0)$, $D(8,6,-2)$.
15. $A(3,1,-2)$, $B(4,-1,0)$, $C(14,3,8)$, $D(0,7,7)$.
16. $A(8,3,-1)$, $B(-7,1,1)$, $C(3,5,9)$, $D(0,7,7)$.
17. $A(2,-1,-4)$, $B(3,-3,-2)$, $C(13,1,6)$, $D(10,3,4)$.
18. $A(4,5,-5)$, $B(-3,3,-3)$, $C(7,7,5)$, $D(4,9,3)$.
19. $A(-2,-3,2)$, $B(-1,-5,4)$, $C(9,-1,12)$, $D(6,1,10)$.
20. $A(-3,4,-3)$, $B(-2,2,-1)$, $C(8,6,7)$, $D(5,8,5)$.
21. $A(3,2,-6)$, $B(0,-5,1)$, $C(-2,1,0)$, $D(4,-1,3)$.
22. $A(4,-1,0)$, $B(-1,2,-3)$, $C(2,1,-2)$, $D(3,4,5)$.
23. $A(-3,6,3)$, $B(1,5,-7)$, $C(-2,7,3)$, $D(1,-1,2)$.
24. $A(1,1,-1)$, $B(2,3,1)$, $C(3,2,1)$, $D(-3,-7,6)$.
25. $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$.
26. $A(2,3,8)$, $B(2,-2,4)$, $C(-1,1,3)$, $D(1,1,2)$.
27. $A(2,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,2,1)$, $D(-5,3,7)$.
28. $A(-13,-8,16)$, $B(5,2,6)$, $C(3,0,-3)$, $D(1,2,0)$.
29. $A(14,4,5)$, $B(-5,-3,2)$, $C(-2,-6,-3)$, $D(-1,-8,7)$.
30. $A(-6,5,5)$, $B(4,-8,-4)$, $C(-1,7,1)$, $D(-2,0,-4)$.

Задание 2.3.

Даны три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. Найти :

1) косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$;
2) выяснить компланарны ли вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$;
3) если вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны, найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, как на сторонах, а если $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ некомпланарны – найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, как на ребрах.

1. $\overline{a}(2,1,1)$, $\overline{b}(19,11,17)$, $\overline{c}(7,4,6)$.
2. $\overline{a}(-2,4,-1)$, $\overline{b}(0,-2,-1)$, $\overline{c}(-7,10,-5)$.
3. $\overline{a}(-4,7,6)$, $\overline{b}(-3,3,3)$, $\overline{c}(3,0,-1)$.
4. $\overline{a}(1,-2,1)$, $\overline{b}(3,3,1)$, $\overline{c}(1,1,1)$.
5. $\overline{a}(6,2,6)$, $\overline{b}(4,1,1)$, $\overline{c}(-9,-4,-9)$.
6. $\overline{a}(-2,-1,0)$, $\overline{b}(3,1,-1)$, $\overline{c}(5,2,-1)$.
7. $\overline{a}(4,3,1)$, $\overline{b}(2,2,2)$, $\overline{c}(1,-2,1)$.
8. $\overline{a}(6,7,4)$, $\overline{b}(4,3,1)$, $\overline{c}(4,0,-2)$.
9. $\overline{a}(1,2,3)$, $\overline{b}(3,2,1)$, $\overline{c}(1,-3,-7)$.

10. $\bar{a}\ (2,3,4)$, $\bar{b}\ (1,-1,-3)$, $\bar{c}\ (3,2,1)$.

11. $\bar{a}\ (1,5,2)$, $\bar{b}\ (-1,1,-1)$, $\bar{c}\ (1,1,1)$.

12. $\bar{a}\ (2,3,4)$, $\bar{b}\ (3,1,-1)$, $\bar{c}\ (3,2,1)$.

13. $\bar{a}\ (2,3,1)$, $\bar{b}\ (2,2,2)$, $\bar{c}\ (-1,0,-1)$.

14. $\bar{a}\ (3,1,3)$, $\bar{b}\ (4,1,1)$, $\bar{c}\ (-9,-4,-9)$.

15. $\bar{a}\ (4,3,6)$, $\bar{b}\ (-1,-2,-1)$, $\bar{c}\ (2,1,2)$.

16. $\bar{a}\ (4,-1,1)$, $\bar{b}\ (3,0,1)$, $\bar{c}\ (8,-3,1)$.

17. $\bar{a}\ (-1,1,1)$, $\bar{b}\ (6,1,8)$, $\bar{c}\ (3,0,3)$.

18. $\bar{a}\ (0,1,3)$, $\bar{b}\ (-5,-4,-5)$, $\bar{c}\ (2,1,2)$.

19. $\bar{a}\ (-6,-1,4)$, $\bar{b}\ (-7,-3,1)$, $\bar{c}\ (-4,-1,2)$.

20. $\bar{a}\ (2,4,3)$, $\bar{b}\ (0,1,1)$, $\bar{c}\ (6,11,8)$.

21. $\bar{a}\ (4,3,5)$, $\bar{b}\ (3,3,4)$, $\bar{c}\ (8,5,9)$.

22. $\bar{a}\ (4,1,2)$, $\bar{b}\ (1,1,-1)$, $\bar{c}\ (9,2,5)$.

23. $\bar{a}\ (2,1,1)$, $\bar{b}\ (-1,-1,-1)$, $\bar{c}\ (2,1,2)$.

24. $\bar{a}\ (1,0,-1)$, $\bar{b}\ (8,3,-2)$, $\bar{c}\ (3,1,-1)$.

25. $\bar{a}\ (4,3,1)$, $\bar{b}\ (-2,-4,-3)$, $\bar{c}\ (6,7,4)$.

26. $\bar{a}\ (2,4,3)$, $\bar{b}\ (-2,-2,-3)$, $\bar{c}\ (3,10,5)$.

27. $\bar{a}\ (4,2,4)$, $\bar{b}\ (-2,0,-2)$, $\bar{c}\ (5,3,4)$.

28. $\bar{a}\ (4,7,5)$, $\bar{b}\ (2,3,2)$, $\bar{c}\ (2,0,-1)$.

29. $\bar{a}\ (7,3,4)$, $\bar{b}\ (-1,-2,-1)$, $\bar{c}\ (4,2,4)$.

30. $\bar{a}\ (2,1,2)$, $\bar{b}\ (6,3,4)$, $\bar{c}\ (-1,-2,-1)$.

3. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Прямоугольные координаты на плоскости. Точка M на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат xOy задается координатами x и y и обозначается $M(x, y)$.

Расстояние d между двумя точками на плоскости $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяется по формуле $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Координаты точки M(x, y) , которая делит отрезок между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ в отношении λ , находятся по формулам

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \quad , \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} .$$

Координаты середины отрезка M_1M_2 находятся из условия $\lambda=1$ и равны $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

Основные виды уравнений прямой на плоскости.

1) $Ax+By+C=0$ - ***общее уравнение прямой.***

2) $A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$ - ***уравнение прямой, проходящей через точку*** $M_1(x_1, y_1)$ ***перпендикулярно нормальному вектору*** $\overline{N}(A,B)$.

3) $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}$ - ***каноническое уравнение прямой***, т.е. уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ параллельно направляющему вектору $\overline{s}(m,n)$.

4) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ - ***уравнение прямой, проходящей через две точки*** $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

5) $y = k\,x + b$ - ***уравнение прямой с угловым коэффициентом*** , где $k=\operatorname{tg}\alpha$ (α - угол наклона к оси Ox) , b - ордината точки пересечения прямой с осью Oy .

6) $\overline{r}=\overline{r_0}+\overline{s}\cdot t$ - ***векторное уравнение*** прямой , где $\overline{r}(x,y)$ - радиус-вектор произвольной точки $M(x,y)$ прямой, $\overline{r_0}(x_0,y_0)$- радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0)$ прямой, $\overline{s}(m,n)$ - направляющий вектор прямой . Из векторного уравнения можно получить ***параметрическое уравнение прямой***.

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases} , \ t\in(-\infty,\infty) \ .$$

7) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ - ***уравнение прямой в отрезках***, где a – абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox, b - ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Угол между двумя прямыми.

Угол между прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ определяется по формуле $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Условие параллельности прямых : $k_1=k_2$.

Условие перпендикулярности прямых : $1+ k_1k_2=0$.

Расстояние от точки до прямой.

Расстояние от точки $M_1(x_1,\ y_1)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находится по формуле $d=\dfrac{\left|Ax_1+By_1+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Пример. Задан ΔABC координатами своих вершин $A\ (1,2)$, $B\ (2,-2)$, $C\ (6,1)$. Требуется :

1) найти уравнение стороны AB;
2) найти уравнение высоты CD и ее длину
3) найти уравнение медианы BM и угол между медианой BM и высотой CD.

Решение.

1) Уравнение стороны AB можно рассматривать как уравнение прямой, проходящей через две точки $A\ (1,2)$, $B\ (2,-2)$. Полагая $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = -2$ и подставляя в уравнение

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$, получаем $\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-2}{-2-2}$ или $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-4}$.

Данное уравнение можно преобразовать к общему уравнению прямой $-4\ (x-1) = y-2 \ \Rightarrow\ -4x+4-y+2=0 \ \Rightarrow\ 4x+y-6=0$, где нормальный вектор $\overline{N}\ (4,1)$. Из общего уравнения прямой можно прийти к уравнению прямой с угловым коэффициентом $y = -4x + 6$, где $k = -4$.

2) Уравнение высоты CD можно рассматривать как прямую, проходящую через точку C параллельно нормальному вектору $\overline{N}\ (4,1)$ и прямой AB, т.е. вектор $\overline{N}$ является направляющим вектором для прямой CD. Тогда, пользуясь уравнением $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}$, получим $\dfrac{x-6}{4}=\dfrac{y-1}{1}$, или в общем виде $x-4y-2=0$.

Длину высоты CD находим как расстояние от точки C до прямой AB:

$$d = \left|CD\right| = \frac{\left|4 \cdot 6 + 1 \cdot 1 - 6\right|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{19}{\sqrt{17}} \quad .$$

3) Для того, чтобы найти уравнение медианы BM, найдем координаты точки M, как середины стороны AC.

$$x_M = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} \quad , \quad y_M = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \ .$$

Уравнение медианы BM получим как уравнение прямой, проходящей через две точки B и M.

$$\frac{x-2}{\frac{7}{2}-2} = \frac{y+2}{\frac{3}{2}+2} \qquad \text{или} \qquad y = \frac{7}{3}x - \frac{20}{3} \quad .$$

Для нахождения угла между высотой CD и медианой BM найдем их угловые коэффициенты. Из уравнения CD находим угловой коэффициент $k_{CD} = \frac{1}{4}$, а из уравнения BM - $k_{BM} = \frac{7}{3}$. Тогда угол между двумя прямыми равен

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\frac{7}{3} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{25}{19} \quad , \quad \varphi = \mathrm{arctg}\ \frac{25}{19} \quad .$$

Пример. Составить уравнение прямой , проходящей через точку $A(1,2)$ и параллельно прямой $3x + 2y + 2 = 0$. Найти координаты точки M, расположенной симметрично точке A относительно данной прямой.

Решение . Так как прямая, проходящая через точку A, должна быть параллельна прямой $3x + 2y + 2 = 0$, нормальные вектора у них одни и те же, тогда искомая прямая запишется как прямая , проходящая через точку A перпендикулярно вектору $\overline{N}\ (3,2)$, т.е.

$$3(x-1) + 2(y-2) = 0 \qquad \text{или} \qquad 3x + 2y - 7 = 0 \ .$$

Для нахождения точки M, симметричной точке A, найдем уравнение прямой , проходящей через точку A перпендикулярно прямой $3x + 2y + 2 = 0$. Это уравнение прямой , проходящей через точку A параллельно нормальному вектору $\overline{N}\ (3,2)$, т.е.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} \qquad \text{или} \qquad 2x - 3y + 4 = 0 \ .$$

Найдем точку пересечения данных прямых , т.е. решим систему

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases} \qquad x = -\frac{14}{13} \quad , \quad y = \frac{8}{13} \quad .$$

Эта точка является серединой отрезка AM, поэтому справедливы соотношения $-\frac{14}{13}=\frac{x_M+1}{2}$, $\frac{8}{13}=\frac{y_M+2}{2}$, откуда и найдем координаты точки M : $x_M=-\frac{41}{13}$, $y_M=-\frac{10}{13}$.

Задание 3.1.

Составить уравнения прямой, проходящей через точку A параллельно и перпендикулярно данной прямой :

1. $A(1, 2)$, $x + y + 5 = 0$.
2. $A(3, 2)$, $2x + 3y + 1 = 0$.
3. $A(0, 1)$, $x + 4y + 5 = 0$.
4. $A(1, 1)$, $2x + y - 4 = 0$.
5. $A(1, 3)$, $3x - 5y + 7 = 0$.
6. $A(-1, 2)$, $2x + 5y + 3 = 0$.
7. $A(2, 3)$, $x + 2y + 4 = 0$.
8. $A(1, 7)$, $x - y + 2 = 0$.
9. $A(3, 2)$, $x + 8y - 1 = 0$.
10. $A(-8, -10)$, $x + 2y + 5 = 0$.
11. $A(-5, 3)$, $2x + 3y + 5 = 0$.
12. $A(-4, -8)$, $3x + 7y - 1 = 0$.
13. $A(5, 10)$, $4x + 3y - 8 = 0$.
14. $A(8, 14)$, $-5x + 3y + 5 = 0$.
15. $A(-1, -2)$, $x - 3y + 1 = 0$.
16. $A(2, 3)$, $x - 7y + 5 = 0$.
17. $A(3, 0)$, $-5x + 2y + 5 = 0$.
18. $A(4, 3)$, $3x + 2y - 1 = 0$.
19. $A(2, -7)$, $x - y + 7 = 0$.
20. $A(1, 3)$, $x + 3y - 5 = 0$.
21. $A(7, -5)$, $2x - 3y + 1 = 0$.
22. $A(6, -8)$, $x + 3y + 7 = 0$.
23. $A(9, -1)$, $2x - 4y + 5 = 0$.
24. $A(20, -8)$, $x - 3y + 5 = 0$.
25. $A(6, -5)$, $2x - 3y + 5 = 0$.
26. $A(-7, 9)$, $3x - y + 3 = 0$.
27. $A(-3, 7)$, $2x - 3y - 1 = 0$.
28. $A(-2, 8)$, $5x - 3y + 5 = 0$.
29. $A(-1, 7)$, $6x - 4y - 1 = 0$.
30. $A(4, 0)$, $5x - 10y - 2 = 0$.

Задание 3.2.

Даны координаты вершин треугольника *ABC*. Найти:

1) длины сторон;
2) уравнения сторон *AB* и *BC* и их угловые коэффициенты;
3) угол *B*;
4) уравнение высоты *СД* и ее длину;
5) уравнение медианы *AE* и координаты точки *K* пересечения этой медианы с высотой *СД*;
6) уравнение прямой проходящей через точку *K* параллельно стороне *AB*. Сделать чертеж.

1 .A(-8, -6), B(4, -12), C(8, 10)	*2 .A(-5, 7), B(7, -2), C(11, 20)*
3. A(-10, 9), B(2, 0), C(6, 22)	*4. A(0, 2), B(12, -7), C(16, 15)*
5. A(-9, 6), B(3, -3), C(7, 19)	*6. A(1, 0), B(13, -9), C(17, 13)*
7. A(-4, 8), B(8, 1), C(12, 23)	*8. A(2, 5), B(14, -4), C(18, 18)*
9. A(-1, 4), B(11, -5), C(15, 17)	*10 .A(-2, 7), B(10, -2), C(8, 12)*
11. A(-6, 8), B(6, -1), C(4, 13)	*12. A(3, 6), B(15, -3), C(13, 11)*
13. A(-10, 5), B(2, -4), C(0, 10)	*14. A(-4, 12), B(8, 3), C(6, 17)*
15. A(-3, 10), B(9, 1), C(7, 15)	*16. A(4, 1), B(16, -8), C(14, 6)*
17. A(-7, 4), B(5, -5), C(3, 9)	*18. A(0, 3), B(12, -6), C(10, 8)*
19. A(-5, 9), B(7, 0), C(5, 14)	*20. A(-4, 6), B(7, 0), C(5, 14)*
21. A(-6, 8), B(6, -8), C(9, 13)	*22. A(-8, 10), B(4, -6), C(7, 15)*
23. A(-10, 4), B(2, -12), C(5, 9)	*24. A(-2, 7), B(10, -9), C(13, 12)*
25. A(-5, 9), B(7, -7), C(10, 14)	*26. A(-3, 11), B(9, -5), C(12, 16)*
27. A(-7, 13), B(5, -3), C(8, 18)	*28. A(-11, 12), B(1, -4), C(4, 17)*
29. A(-9, 5), B(3, -11), C(6, 10)	*30. A(0, 1), B(3, 10), C(13, 4)*

4. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Основные виды уравнений плоскости.

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ - ***общее уравнение плоскости*** ;

2) $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно нормальному вектору $\bar{N}(A, B, C)$;

3) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ - ***уравнение плоскости в отрезках***, где a, b, c - величины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях Ox ,Oy, Oz соответственно ;

4) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ - ***уравнение плоскости, проходящей через три точки*** $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Основные виды уравнений прямой.

1) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ - ***общее уравнение прямой***, как пересечение двух плоскостей , где направляющий вектор прямой находится из векторного произведения нормальных векторов плоскостей

$$\overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} ;$$

2) $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$ - ***каноническое уравнение прямой*** или уравнение прямой , проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ параллельно вектору ;.

3) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ - ***уравнение прямой, проходящей через две точки*** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$;

4) $\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{s}t$ - ***векторное уравнение прямой***, где $\bar{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ - радиус-вектор точки, лежащей на прямой, $\bar{s}$ (m, n, p) - направляющий вектор прямой, или в параметрической форме $\begin{matrix} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{matrix}$.

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***до плоскости*** $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Угол между двумя прямыми, заданными в канонической форме $\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ *и* $\dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$, определяется как угол между их направляющими векторами

$$\cos\ \varphi = \frac{m_1\ \ m_2 + n_1\ \ n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1{}^2 + n_1{}^2 + p_1{}^2}\ \cdot\ \sqrt{m_2{}^2 + n_2{}^2 + p_2{}^2}}\ .$$

Угол между прямой $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$ ***и плоскостью*** $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется так :

$$\sin\ \varphi = \frac{m\ \ A + n\ \ B + p\ \ C}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\ \cdot\ \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\ .$$

Задача. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,2,3)$ параллельно прямой $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 3}{3} = \dfrac{z - 4}{-2}$.

Решение. Так как прямые параллельны, значит направляющий вектор для искомой прямой будет таким же, как и для данной, т.е. $\bar{s}\ (2,3,-2)$. Поэтому применяем каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A\ (1,2,3)$ параллельно вектору $\bar{s}\ (2,3,-2)$, т.е. $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 2}{3} = \dfrac{z - 3}{-2}$.

Задача. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-3,5)$ параллельно прямой, заданной в виде пересечения двух плоскостей: $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 5z - 1 = 0 \end{cases}$.

Решение. Найдем направляющий вектор заданной прямой через векторное произведение нормальных векторов плоскостей

$$\bar{s} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 6\bar{i}\ -\ 3\bar{j}\ -\ 3\bar{k}\ .$$

Тогда каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-3,5)$ параллельно вектору $\bar{s}\ (6,-3,-3)$ будет $\dfrac{x - 2}{6} = \dfrac{y + 3}{-3} = \dfrac{z - 5}{-3}$.

Задача. Дана пирамида $ABCD$ с вершинами $A(1,5,7)$, $B(-1,0,1)$, $C(3,-2,4)$, $D(0,1,-1)$. Найти угол между ребром AD и гранью ABC.

Решение. Найдем уравнение грани ABC, т.е. уравнение плоскости, проходящей через три точки A, B и C.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z-7 \\ -1-1 & 0-5 & 1-7 \\ 3-1 & -2-5 & 4-7 \end{vmatrix} = 0 \ , \ \text{т.е.} \ \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z-7 \\ -2 & -5 & -6 \\ 2 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-27(x-1) - 18(y-5) + 24(z-7) = 0 \quad \text{или}$$

$$-9x - 6y + 8z - 17 = 0$$

Уравнение ребра AD - уравнение прямой, проходящей через две точки A и D:

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-5}{1-5} = \frac{z-7}{-1-7} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{+1} = \frac{y-5}{+4} = \frac{z-7}{+8} \ .$$

Тогда угол между ребром и гранью будем находить по формуле угла между прямой и плоскостью:

$$\sin\ \varphi = \frac{(-9)\cdot 1 + (-6)\cdot 4 + 8\cdot 8}{\sqrt{9^2+6^2+8^2}\ \cdot\ \sqrt{1^2+4^2+8^2}} = \frac{31}{\sqrt{181}\ \cdot\ \sqrt{81}} = \frac{31}{9\ \cdot\sqrt{181}} \ .$$

Задача. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,2,3)$ и через прямую, данную в виде пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases} .$$

Решение. Воспользуемся уравнением пучка плоскостей, проходящих через данную прямую $x+y+z-1+\lambda(2x+y-z+2)=0$. Так как плоскость должна проходить через точку A, то, подставив ее координаты в уравнение пучка, найдем λ:

$$1+2+3-1+\lambda(\ 2\cdot 1+2-3+2\ ) = 0$$

$$5+\lambda\cdot 3 = 0 \ , \ \lambda = -\frac{5}{3} \ .$$

Теперь, подставив λ в уравнение пучка, получим искомую плоскость:

$$x+y+z-1-\frac{5}{3}(2x+y-z+2)=0 \quad \text{или}$$

$$7x+2y-8z+13=0$$

Задача. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{4}$ и плоскости $x-y+2z-3=0$.

Решение. Параметрически уравнения прямой запишутся в виде $x=2t+1$, $y=3t-1$, $z=4t$. Далее, подставив в уравнение плоскости, найдем t: $2t+1-3t+1+81-3=0$, $t=\frac{1}{7}$.

По данному t найдем координаты точки пересечения

$$x=\frac{2}{7}+1=\frac{9}{7} \ , \ y=\frac{3}{7}-1=-\frac{4}{7} \ , \ z=\frac{4}{7}.$$

Задание 4.1.

Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*. Найти:

1) Уравнение грани *ABC*;
2) Уравнение высоты *DM,* опущенной из точки *D* на грань *ABC;*
3) Длину высоты *ДМ*;
4) Уравнение ребра *DC*;
5) Угол наклона ребра *DC* к плоскости *ABC.*

1. *A(-3;-2;-4), B(-4;2;-7), C(5;0;3), D(-1;3;0)*
2. *A(2;-2;1), B(-3;0;-5), C(0;-2;-1), D(-3;4;2)*
3. *A(5;4;1), B(-1;-2;-2), C(3;-2;2), D(-5;5;4)*
4. *A(3;6;-2), B(0;2;-3), C(1;-2;0), D(-7;6;6)*
5. *A(1;-4;1), B(4;4;0), C(-1;2;-4), D(-9;7;8)*
6. *A(4;6;-1), B(7;2;4), C(-2;0;-4), D(3;1;-4)*
7. *A(0;6;-5), B(8;2;5), C(2;6;-3), D(5;0;-6)*
8. *A(-2;4;-6), B(0;-6;1), C(4;2;1), D(7;-1;-8)*
9. *A(-4;-2;-5), B(1;8;-5), C(0;4;-4), D(9;-2;-10)*
10. *A(3;4;-1), B(2;-4;2), C(5;6;0), D(11;-3;-12)*
11. *A(2;1;3), B(3;-2;-4), C(-1;-3;-2), D(5;-3;4)*
12. *A(4;1;1), B(-2;-1;3), C(1;-3;-4), D(6;-5;5)*
13. *A(-3;-2;2), B(0;1;5), C(1;-2;-2), D(-1;9;-2)*
14. *A(-1;0;4), B(2;2;5), C(3;2;4), D(2;3;1)*
15. *A(-2;0;5), B(1;-4;-6), C(3;2;4), D(2;3;1)*
16. *A(2;1;-1), B(0;3;-1), C(5;2;1), D(-2;-1;5)*
17. *A(2;3;0), B(3;4;1), C(-2;5;-1), D(3;4;-5)*
18. *A(-3;0;-4), B(2;7;2), C(4;-1;-1), D(-3;-2;7)*
19. *A(1;-4;-4), B(-1;0;-3), C(2;5;1), D(5;6;-9)*
20. *A(3;2;0), B(5;-2;-1), C(-4;3;-3), D(2;3;-3)*
21. *A(1;1;1), B(6;3;2), C(0;7;1), D(2;3;4)*
22. *A(1;0;-1), B(5;1;1), C(2;6;1), D(3;4;5)*
23. *A(-1;2;0), B(8;1;1), C(2;7;-1), D(4;3;6)*
24. *A(-1;-1;0), B(9;2;1), C(0;8;-1), D(4;4;7)*
25. *A(0;1;0), B(8;2;1), C(1;7;2), D(3;5;1)*

Задание 4.2.

Даны координаты точек *A, B, C*. Требуется:

1) составить каноническое уравнение прямой *AB*;
2) составить уравнение прямой, проходящей через точку *C* параллельно прямой *AB*;
3) составить уравнение плоскости, проходящей через точку *C* перпендикулярно прямой *AB;*
4) найти следы этой плоскости на координатных плоскостях.

1. A(3;-1;5), B(7;1;1), C(4;-2;1). *2. A(-1;2;3), B(3;4;-1), C(0;1;-1).*
3. A(2;-3;7), B(6;-1;3), C(3;-4;3). *4. A(0;-2;6), B(4;0;2), C(1;-3;2).*
5. A(-3;1;2), B(1;3;-2), C(-2;0;-2). *6. A(-2;3;1), B(2;5;-3), C(-1;2;-3).*
7. A(-4;0;8), B(0;2;4), C(-3;-1;4). *8. A(1;4;0), B(5;6;-4), C(2;3;-4).*
9. A(4;-4;9), B(8;-2;5), C(5;-5;5). *10. A(5;5;4), B(9;7;0), C(6;4;0).*
11. A(3;0;4), B(5;2;6), C(2;3;-3). *12. A(3;-2;2), B(-3;1;2), C(-1;2;1).*
13. A(1;-1;1), B(-2;1;3), C(4;-5;-2). *14. A(3;-1;2), B(4;-1;-1), C(2;0;2).*
15. A(-1;2;1), B(-3;1;2), C(3;-2;2). *16. A(9;-11;5), B(7;4;2), C(-7;13;-3).*
17. A(2;4;-1), B(2;-4;2), C(3;6;0). *18. A(-4;-2;-5), B(1;8;-5), C(0;4;-4).*
19. A(-2;4;-6), B(0;-6;1), C(4;2;1). *20. A(4;6;-1), B(7;2;4), C(-2;0;-4).*
21. A(3;3;0), B(-1;2;-4), C(-9;7;8). *22. A(7;2;4), B(-2;0-4), C(3;1;-4).*
23. A(8;2;5), B(2;6;-3), C(5;0;-6). *24. A(0;-6;1), B(4;2;1), C(7;-1;-8).*
25. A(1;8;-5), B(0;4;-4), C(9;-2;-10).

Задание 4.3.

Даны уравнение прямой в виде пересечения двух плоскостей и координаты точки *A*. Требуется:

1) составить уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и точку *A;*
2) составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку *A* и параллельно оси *OX*;
3) найти угол между полученной прямой и плоскостью;
4) найти расстояние от начала координат до плоскости.

1. $\begin{cases} 2x-y-3z=-1 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$ *A(3;0;2)*

2. $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-3y+2z=9 \end{cases}$ *A(1;2;0)*

3. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 8x+3y-6z=2 \end{cases}$ *A(-1;2;1)*

4. $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 4x-3y+z=1 \end{cases}$ $A(2;-3;0)$

5. $\begin{cases} 2x+5y-3z=4 \\ 4x-3y+2z=9 \end{cases}$ $A(0;4;-2)$

6. $\begin{cases} 2x+7y-z=8 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$ $A(-3;0;5)$

7. $\begin{cases} 3x+4y+2z=8 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$ $A(1;3;0)$

8. $\begin{cases} x-4y-2z=-3 \\ 3x+y+z=5 \end{cases}$ $A(5;1;-2)$

9. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$ $A(-2;0;1)$

10. $\begin{cases} 3x+y+z=5 \\ 4x-3y+z=1 \end{cases}$ $A(0;-5;2)$

11. $\begin{cases} x+4y-5z=-1 \\ 2x-y+3z=-2 \end{cases}$ $A(2;-1;2)$

12. $\begin{cases} x+y-2z=-1 \\ 3x-y+z=2 \end{cases}$ $A(2;0;-1)$

13. $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 2x+4y-z=4 \end{cases}$ $A(1;1;-2)$

14. $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x-y+2z=-2 \end{cases}$ $A(0;2;1)$

15. $\begin{cases} 3x-y+z=-2 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$ $A(1;-1;2)$

16. $\begin{cases} 2x-y+3z=6 \\ x+2y-z=-3 \end{cases}$ $A(1;2;4)$

17. $\begin{cases} 3x+y+z=4 \\ x \quad\quad +3z=5 \end{cases}$ $A(1;3;2)$

18. $\begin{cases} 3x+2y-5z=4 \\ x-2y+3z=4 \end{cases}$ $A(2;1;2)$

19. $\begin{cases} 3x-5y+z=8 \\ 2x+y-z=-2 \end{cases}$ $A(-1;2;3)$

20. $\begin{cases} 2x-3y-3z=9 \\ x-2y+z=-3 \end{cases}$ $A(2;-5;3)$

21. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-3y+z=5 \end{cases}$ $A(1;1;7)$

22. $\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$ $A(1;2;1)$

23. $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ 3x+y+3z=-2 \end{cases}$ $A(1;1;1)$

24. $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ x+3y+z=2 \end{cases}$ $A(1;2;0)$

25. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-3y+2z=10 \end{cases}$ $A(0;1;2)$

5. ПРЕДЕЛЫ

5.1 Краткие сведения из теории

Основное определение предела функции:
Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ при x стремящимся к a, если для любого малого $\varepsilon>0$ существует такое малое $\delta>0$, что неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ наступает, как только наступает $|x-a|<\delta$.
Обозначается: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Очень удобным для понимания этого определения является определение предела функции «на языке окрестностей»: точка A называется пределом функции $y=f(x)$ в точке a (т.е. $x\to a$), если по любой ε-окрестности $(\bullet)A$ найдется δ-окрестность $(\bullet)a$ такая, что для любого x, принадлежащего δ-окрестности $(\bullet)a$ $(x\neq a)$, соответствующее значение функции $y=f(x)$ попадает в ε-окрестность $(\bullet)A$.

Оба эти равноценные определения иллюстрируются на рис. 4.1

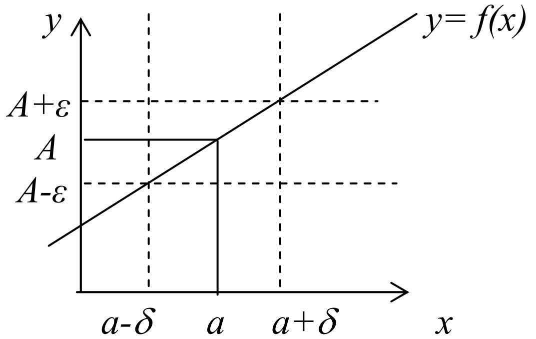
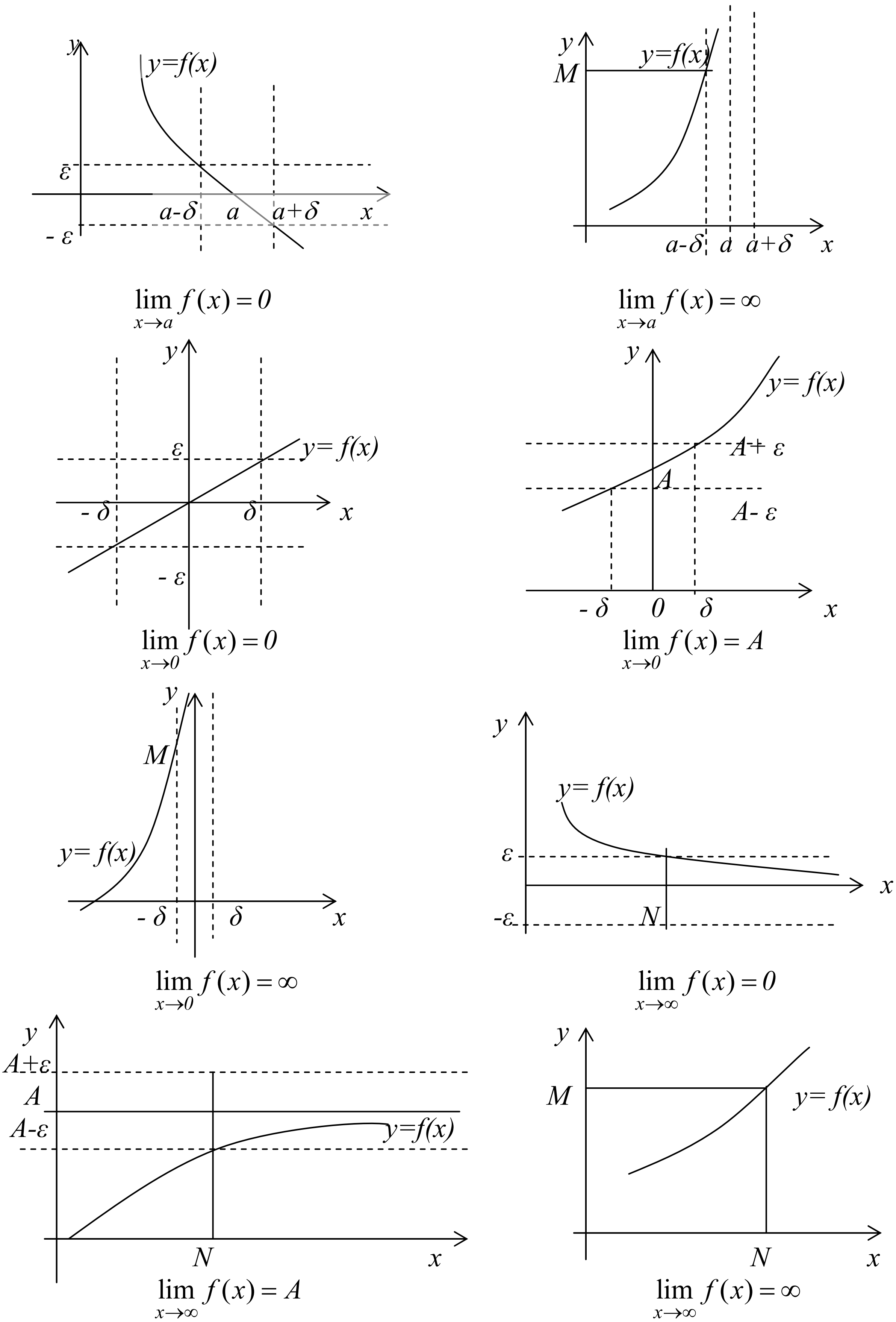


Рис. 4.1

Эти определения охватывают все возможные ситуации, когда A и a конечны, равны 0 или бесконечны (одно их них или оба). Для вариантов $A=\infty$ и $a=\infty$ соответствующие неравенства выглядят так: $|f(x)|>M$; $|x|>N$, где $M>0$, $N>0$ – сколь угодно большие. На рис. 4.2 приводится геометрическая «трактовка» остальных восьми определений пределов функции без самих определений.



y
y=f(x)
ε
- ε
a-δ
a
a+δ
x
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$
y
M
y=f(x)
a-δ
a
a+δ
x
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$
y
ε
y= f(x)
- δ
δ
x
- ε
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$
y
y= f(x)
A+ ε
A
A- ε
- δ
0
δ
x
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$
y
M
y= f(x)
- δ
δ
x
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$
y
y= f(x)
ε
-ε
N
x
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=0$
y
A+ε
A
A-ε
y=f(x)
N
x
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=A$
y
M
y= f(x)
N
x
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\infty$

Рис.4.2

Свойства пределов

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=B,$ то:

1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$
2. $\lim\limits_{x\to a}\left[C\cdot f(x)\right] = C\lim\limits_{x\to a} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$
5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)};\quad \lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to a}\varphi\left[f(x)\right] = \varphi\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где φ - непрерывная в $(\bullet)a$ функция.

Тогда предел и функцию можно менять местами.

7. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Если A и B являются нулями или бесконечностями, то существуют следующие виды неопределенностей: $\dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty}.$

Их неопределенность заключается в том, что пределы этих выражений могут быть любым числом или бесконечностью. Это зависит от интенсивности стремления каждой из бесконечно-малых к нулю и каждой из бесконечно-большой к бесконечности. Раскрытие (устранение) неопределенностей, а значит и вычисление таких пределов и составляет основное содержание индивидуальных заданий.

Свойства бесконечно-малых и бесконечно-больших

Если $C\neq 0$; $\lim\alpha=\lim\beta=\lim\gamma=0,$ то

1. $\dfrac{C}{0}=\infty;\quad \dfrac{C}{\infty}=0.$
2. $\alpha+\beta=\gamma$; $\infty+\infty=\infty$; $\infty\pm C=\infty$.
3. $\alpha\cdot\beta=\gamma$; $\alpha\cdot C=\beta$ или $0\cdot C=0$; $\infty\cdot\infty=\infty$, $\infty\cdot C=\infty$.
4. $\dfrac{\infty}{0}=\infty\cdot\infty=\infty;\quad \dfrac{0}{\infty}=0\cdot 0=0.$

Важные пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. ***Первый замечательный предел.***

На основе этого предела существуют следующие эквивалентные бесконечно-малые:

При $x\to 0$ $\quad x\approx\sin\ x\approx\mathrm{tg}\ x\approx\arcsin\ x\approx\mathrm{arctg}\ x$,

$$1-\cos x\approx\frac{x^2}{2}\ \text{или}\ \cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=2{,}71...=e$, а также $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e$. ***Второй замечательный предел.***

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$. При $x\to 0$, $\log_a(1+x)\approx\dfrac{x}{\ln a}$ –

Если $a=e$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$. При $x\to 0$, $\ln(1+x)\approx x$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, при $x\to 0$, $a^x-1\approx x\ln a$, $a^x\approx x\ln a+1$.

Если $a=e$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$. При $x\to 0$, $e^x-1\approx x$, $e^x\approx x+1$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^m-1}{mx}=1$, при $x\to 0$, $(1+x)^m-1\approx mx$, где $m>0$ – любое.

На основе 1,3,4,5 пределов можно записать общую формулу эквивалентных преобразований : $x\to 0$

$$x\approx\sin\ x\approx\mathrm{tg}\ x\approx\arcsin\ x\approx\mathrm{arctg}\ x\approx\ln\left(1+x\right)\approx\ln a\log_a\left(1+x\right)\approx$$

$$\approx e^x-1\approx\frac{1}{\ln a}\left(a^x-1\right)\approx\frac{1}{m}\left[\left(1+x\right)^m-1\right].$$

На рис. 4.3. приводится геометрическая интерпретация преобразования эквивалентных бесконечно малых на основе перечисленных пределов в окрестностях нуля.

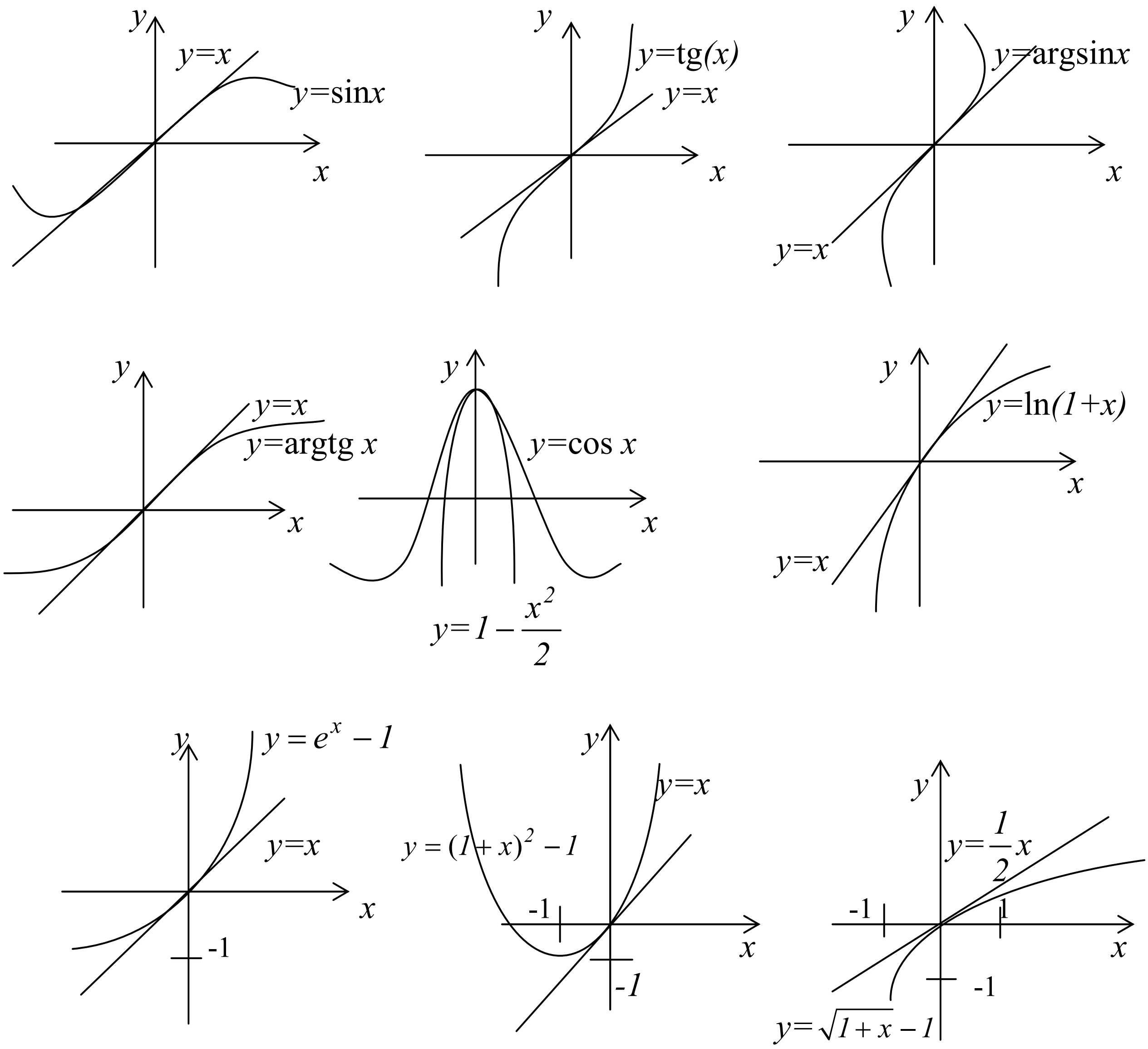


Рис. 4.3.

Следует подчеркнуть: в окрестностях нуля трансцендентные функции $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\ln x$, $\exp x$, а также *двучлен в степени m* можно заменить на линейную функцию, а $\cos x$ на квадратичную функцию. Это обстоятельство имеет место, если аргумент x простой.

Если аргумент функции сложный, т.е в свою очередь является функцией, то рассмотренные ранее эквивалентные замены справедливы, но при условии стремления этого сложного аргумента к нулю, а сама замена должна быть соответствующей.

Так, если $u=u(x)$, то $\sin u \approx u$, при $u \to 0$; $e^u \approx u+1$, при $u \to 0$ и т.д.

Пример: $x \to 0$, $\sin(3x) \approx 3x$, $e^{7x^3} \approx 7x^3 + 1$.

4.2. Вычисление типовых пределов

Приводятся типовые пределы с неопределенностями и некоторые способы их вычисления.

Неопределенности $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, **содержащие алгебраические выражения.**

Неопределенности $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ преобразованиями переводятся в $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Последние разрешаются единым подходом: необходимо выделить в числителе и знаменателе тот множитель, который дает неопределенность и его сократить. Иногда выделение такого множителя достаточно «головоломное».

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\frac{4}{2}=2$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{2x^2+2x^2-x-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to -1}\frac{3(x+1)(x+\frac{1}{3})}{(x+1)(2x^2-1)}=\frac{-2}{1}=-2$.

Пример 3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^3-4x^2+4x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x(x-2)}=\frac{12}{2\cdot 0}=\infty\ .$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3-\sqrt{2x+7}}{x^2+6x-7}=\left|\frac{0}{0}\right|$.

Дающий неопределенность множитель (x-1) в знаменателе выделить легко, в числителе – труднее. Нужно весь предел умножить и разделить на сопряженный числитель, т.е на $(3+\sqrt{2x+7})$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(3-\sqrt{2x+7})(3+\sqrt{2x+7}\ )}{(x-1)(x+7)(3+\sqrt{2x+7}\ )}=\lim_{x\to 1}\frac{9-(2x+7)}{(x-1)(x+7)(3+\sqrt{2x+7}\ )}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(-2)(x-1)}{(x-1)(x+7)(3+\sqrt{2x+7}\ )}=-\frac{1}{24}\ .$$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt{5-x})-(\sqrt{3+x})}{\sqrt{8+x}-3}=\left|\frac{0}{0}\right|$.

Нетрудно догадаться, что неопределенность дает множитель (x - 1), но выделить его непросто. Нужно всё выражение умножить и разделить и на сопряженный числитель $(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x})$ и на сопряженный знаменатель $(\sqrt{8+x}\ +3)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{8+x}+3\right)}{\left(\sqrt{8+x}-3\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{8+x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{[(5-x)-(3+x)](\sqrt{8+x}+3)}{(8+x-9)(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}\ )}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(-2)(x-1)(\sqrt{8+x}+3)}{(x-1)(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x})}=\frac{-12}{4}=-3$$

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}=\left|\dfrac{0}{0}\right|.$

Обычное выделение множителя x, дающего неопределенность, не приводит к решению, т.к. опять получается неопределенность. Решение кроется в устранении радикалов любым способом, например, самым простым – заменой переменной, с дальнейшим выделением и сокращением множителя, дающего неопределенность.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}=\left|\begin{matrix}1+x=t^6\\ x\to 0\ ,\ t\to 1\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{2}{3}\ .$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+7}{4x+3x^2-4x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}{x^3\left(\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x}-4\right)}=\dfrac{2}{-4}=-\dfrac{1}{2}\ .$

Пример 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+4x-x^4}{3x-2x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4\left(\dfrac{5}{x^4}+\dfrac{4}{x^3}-1\right)}{x^2\left(\dfrac{3}{x}-2\right)}=\dfrac{\infty(-1)}{(-2)}=\infty.$

Пример 9.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2+3n-1)^3+(3n^3-4)^2}{\left(\sqrt{4n^2+7}\ +\sqrt{9n^2-3n+1}\right)^6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[n^2\left(2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\right]^3+\left[n^3\left(3-\frac{4}{n^3}\right)\right]^2}{\left(\sqrt{n^2\left(4+\frac{7}{n^2}\right)}\ +\sqrt{n^2\left(9-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\ \right)^6}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^6 \cdot \left(2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^3 + n^6 \cdot \left(3-\frac{4}{n^3}\right)^2}{\left(n\cdot\sqrt{4+\frac{7}{n^2}} + n\cdot\sqrt{9-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)^6} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^6\left[\left(2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^3 + \left(3-\frac{4}{n^3}\right)^2\right]}{n^6\left(\sqrt{4+\frac{7}{n^2}} + \sqrt{9-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)^6} = \frac{17}{5^6}$$

Пример 10. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\left(\frac{3x^2-1}{x^2}-\frac{3x+5}{x}\right)=\left|\infty\left(\frac{\infty}{\infty}-\frac{\infty}{\infty}\right)\right.$, здесь несколько видов неопределенностей, которые устраняются последовательно, аналогично арифметическим действиям $\Big| =$

$$= \lim_{x\to\infty}(x-1)\left(\frac{x^2\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2} - \frac{x\left(3+\frac{5}{x}\right)}{x}\right) = \left|\infty\cdot 0\right| = \lim_{x\to\infty}(x-1)\left(3-\frac{1}{x^2}-3-\frac{5}{x}\right) =$$

$$= \left|\infty\cdot 0\right| = \lim_{x\to\infty}(x-1)\cdot\frac{(-1-5x)}{x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(-5-\frac{1}{x}\right)}{x^2} = -5$$

Пример 11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{(n^3+1)(n^3+3)}-\sqrt{n(n^5+2)}\right]=\Big|\ \infty-\infty$, для перевода этой неопределенности в $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить и умножить на сопряженное выражение $\Big| =$

$$= \lim_{n\leftarrow\infty}\left(\left(\sqrt{(n^3+1)(n^3+3)}-\sqrt{n(n^5+2)}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{(n^3+1)(n^3+3)}+\sqrt{n(n^5+2)}\right)}{\left(\sqrt{(n^3+1)(n^3+3)}+\sqrt{n(n^5+2)}\right)}\right) =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+1)(n^3+3)-n(n^5+2)}{\sqrt{(n^3+1)(n^3+3)}+\sqrt{n(n^5+2)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^6+4n^3+3-n^6-2n}{\left(\sqrt{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}+\sqrt{n^6\left(1+\frac{2}{n^5}\right)}\right)}=$$

$$=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(4-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{3}{n^3}\right)}+\sqrt{1+\frac{2}{n^5}}\right)}=\frac{4}{2}=2\ .$$

Пример 12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-3}\ )}{(\sqrt{n+7}-\sqrt{n-3}\ )}=\left|\ \frac{\infty-\infty}{\infty-\infty}\right.$, для устранения неопределенности вида $(\infty-\infty)$ в числителе нужно все выражение умножить и разделить на неполный квадрат суммы , а в знаменателе - нужно все выражение умножить и разделить на сопряженный знаменатель.$\Big|$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-3}\right)}{\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n-3}\right)}\times$

$$\times\frac{\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{(n+2)(n-3)}+\sqrt[3]{(n-3)^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{(n+2)(n-3)^2}+\sqrt[3]{(n-3)^2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{n+7}+\sqrt{n-3}\right)}{\left(\sqrt{n+7}+\sqrt{n-3}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left((n+2)-(n-3)\right)\cdot\left(\sqrt{n+7}+\sqrt{n-3}\right)}{\left((n+7)-(n-3)\right)\ \cdot\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}\ +\ \sqrt[3]{(n+2)(n+3)}+\sqrt[3]{(n-3)^2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\left(\sqrt{n\left(1+\frac{7}{n}\right)}+\sqrt{n\left(1-\frac{3}{n}\right)}\right)}{10\ \left(\sqrt[3]{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}\ +\ \sqrt[3]{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}\ +\ +\ \sqrt[3]{n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)^2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\ \left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}\ +\sqrt{1-\frac{3}{n}}\right)}{2\ \sqrt[3]{n^2}\cdot\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}\ +\ \sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}\ +\ \sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{n}\right)^2}\right)}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}\right)}{2\ \sqrt[6]{n}\ \cdot \left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}\ +\ \sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}\ +\ \sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{n}\right)^2}\right)} = \frac{2}{2\cdot\infty\cdot 3} = 0\,.$$

Разрешение неопределенности 1^∞**.**

В конечном счете, эта неопределенность сводится ко 2[му] замечательному пределу:

$$\lim_{u\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = e \quad \text{или} \quad \lim_{v\to 0}(1+V)^{\frac{1}{V}} = e\ , \quad \text{где} \quad u=u(x), \quad V=V(x)$$

- любые непрерывные функции от x.

Иногда полезно воспользоваться 7[м] свойством пределов:

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)\right]^{g(x)} = \left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}\ .$$

Вот типичный пример, когда $f(x)$ и $g(x)$- алгебраические выражения.

Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x+6}\right)^{3x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+6-7}{5x+6}\right)^{3x+1} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-7)}{5x+6}\right)^{3x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5x+6}{(-7)}}\right)^{3x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5x+6}{(-7)}}\right)^{\left(\frac{-7}{5x+6}\right)\left(\frac{5x+6}{-7}\right)(3x+1)} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5x+6}{(-7)}}\right)^{\left(\frac{5x+6}{(-7)}\right)}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(-7)(3x+1)}{5x+6}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(-7)x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(5+\frac{6}{x}\right)}} = e^{-\frac{21}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{e^{21}}}\ .$$

Разрешение неопределенностей с помощью важных пределов.

Общий подход: неопределенность $\frac{0}{0}$, выраженная известными трансцендентными функциями, с помощью 1, 3, 4, 5 важных пределов преобразуется в неопределенность $\frac{0}{0}$, выраженную алгебраическими функциями, которая разрешается сокращением в числителе и знаменателе множителя, дающего эту неопределенность.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{5}\right)}{(\arcsin 2x)^3}=\left|\begin{matrix}\sin 3x\approx 3x, & \arcsin\ 2x\approx 2x\\ \mathrm{tg}\frac{x}{5}\approx\frac{x}{5}, & x\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x\left(\frac{x}{5}\right)^2}{(2x)^3}=\frac{3}{200}\ .$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\mathrm{tg}^2(2x)}=\Big|$ Эквивалентные замены тригонометрических функций на алгебраические производить нельзя, т.к сам аргумент x не является бесконечно малой. Нужно перейти к новой переменной, которая была бы бесконечно малой и далее действовать по известному плану: $t=x-\pi, x\to\pi, t\to 0\ \Big|=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos 3(t+\pi)-\cos(t+\pi)}{\mathrm{tg}^2[2(t+\pi)]}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 3t\cos 3\pi-\sin 3t\sin 3\pi-\cos t\cos\pi+\sin t\sin\pi}{\mathrm{tg}^2(2t+2\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\cos 3t}{\mathrm{tg}^2(2t)}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\cos\ 3t\approx 1-\frac{(3t)^2}{2}\ ;\ \cos\ t\approx 1-\frac{t^2}{2}\\ \mathrm{tg}\ \ 2t\approx 2t\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{t^2}{2}-1+\frac{(3t)^2}{2}}{(2t)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{8t^2}{8t^2}=1.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{e^{2x}-1}=\left|\begin{matrix}\ln(1+4x)\approx 4x\\ e^{2x}-1\approx 2x\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{2x}=2\ .$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}=\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg\frac{x}{10}}{\sqrt{x-9}-1}=\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg e\cdot\ln\frac{x}{10}}{\sqrt{x-9}-1}=$

$$=\left|\begin{matrix} t=x-10\ ,\ x\to 10 \\ x=t+10\ ,\ t\to 0\end{matrix}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{\lg e\ln\left(\frac{t+10}{10}\right)}{\sqrt{t+10-9}\ -1} = \lg e\ \lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{10}\right)}{\sqrt{1+t}-1} =$$

$$=\left|\ln\left(1+\frac{t}{10}\right)\approx\frac{t}{10},\ \sqrt{1+t}-1\approx\frac{t}{2}\right| = \lg e\ \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{10}}{\frac{t}{2}} = \frac{\lg e}{5}.$$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-\sqrt{2x-3})}{\sin^2\dfrac{\pi x}{2}} = \Bigg|$ Непосредственный переход к новой переменной $t = x - 2$, с последующей заменой эквивалентных бесконечно малых приведет опять к неопределенности $\dfrac{0}{0}$. Нужно предварительно «разрушить» скрытый ноль в числителе с помощью сопряженного выражения.$\Bigg| =$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left[(x-\sqrt{2x-3})\left(\frac{x+\sqrt{2x-3}}{x+\sqrt{2x-3}}\right)\right]}{\sin^2\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 2}\frac{\ln\frac{x^2-2x+3}{x+\sqrt{2x-3}}}{\sin^2\frac{\pi x}{2}} = \left|\begin{matrix} t=x-2\ ,\ x\to 2 \\ x=t+2\ ,\ t\to 0\end{matrix}\right| =$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{t^2+4t+4-2t-4+3}{t+2+\sqrt{2t+4-3}}}{\sin^2\left[\frac{\pi}{2}(t+2)\right]} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{t^2+2t+3}{t+2+\sqrt{1+2t}}}{\sin^2\left[\frac{\pi t}{2}+\pi\right]} = \left|\sqrt{1+2t}\approx\frac{1}{2}2t+1\right| =$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{t^2+2t+3}{t+2+t+1}}{\left(-\sin\frac{\pi t}{2}\right)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{t^2+2t+3}{2t+3}}{\sin^2\frac{\pi t}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t^2}{2t+3}\right)}{\sin^2\frac{\pi t}{2}} =$$

$$=\left|\ln\left(1+\frac{t^2}{2t+3}\right)\approx\frac{t^2}{2t+3}\ ,\ \sin\frac{\pi t}{2}\approx\frac{\pi t}{2}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{(2t+3)\left(\frac{\pi t}{2}\right)^2} = \frac{4}{3\pi^2}.$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2^x+7}-\sqrt{2^{x+1}+5}}{x^2-1}=\left|\begin{matrix} t=x-1\ ,\ x=t+1 \\ x\to 1\ ,\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2^{t+1}+7}-\sqrt{2^{t+2}+5}}{t^2+2t+1-1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt{2\cdot 2^t+7}-\sqrt{4\cdot 2^t+5})(\sqrt{2\cdot 2^t+7}+\sqrt{4\cdot 2^t+5})}{t(t+2)(\sqrt{2\cdot 2^t+7}+\sqrt{4\cdot 2^t+5}\ )}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\cdot 2^t+7-4\cdot 2^t-5}{t(t+2)(\sqrt{2\cdot 2^t+7}+\sqrt{4\cdot 2^t+5}\ )}=\lim_{t\to 0}\frac{-2\cdot 2^t+2}{t(t+2)(\sqrt{2\cdot 2^t+7}+\sqrt{4\cdot 2^t+5}\ )}=$$

$$=\left|2^t\approx t\cdot\ln 2+1\right|==\lim_{t\to 0}\frac{(-2)(t\ln 2+1)+2}{t(t+2)(\sqrt{2\cdot 2^t+7}+\sqrt{4\cdot 2^t+5}\ )}=\frac{-\ln 2}{6}.$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln(1+\mathrm{tg}^2\,3x)}}=\left|\begin{matrix}\sin\frac{x}{2}\approx\frac{x}{2} \\ \mathrm{tg}\ \ 3x\approx 3x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{\ln(1+9x^2)}}=$$

$$=\left|\ln(1+9x^2)\approx 9x^2\right|=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{4}{x^2}\right)}\right)^{\left(-\frac{4}{x^2}\right)\left(-\frac{x^2}{4}\right)\cdot\frac{1}{9x^2}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{4}{x^2}\right)}\right)^{\left(-\frac{4}{x^2}\right)}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-x^2}{4\cdot 9x^2}\right)}=e^{-\frac{1}{36}}=\frac{1}{\sqrt[36]{e}}.$$

Задание 5.1.

1.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+2}{2x^2-7x+6}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{3x-2}$

3. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-8x-9}{\sqrt{2x+7}-5}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{25x^2+2x+1}-5x\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}{\cos 2x\cdot\sin^3(2x)}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^m-1}{\sin x}$

2.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+3x-1}{2x^3+2x^2+2x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+12x+9}{5x^2+6x+9}$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{3-\sqrt{2x+1}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-1}\right)^{4x-5}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot\sin^2\left(\dfrac{x}{4}\right)}{\mathrm{tg}\left(2x^2\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{6x^2}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[m]{1+bx}}{\sin(3x)}$

3.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-x-3}{x^3-x^2+2x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+7)\left(5x^2+3x+1\right)}{4x^3+5x+6}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{2x+7}}{x^2+6x-7}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{81x^2+7x+81}-9x\right)$

5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x-2}{9x+1}\right)^{2x+5}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cdot\mathrm{tg}\,3x}{\sin 6x\cdot\sin 5x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)^3}{x\,\mathrm{tg}^2(4x)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{\ln\left(1+2x^3\right)}$

4.

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+4x+3}{x^3+3x^2+4x+12}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2+5x+1\right)(3x+4)}{3x^3+4x^2+2x+1}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-7}{x+2}\right)^{4x+3}$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{\sqrt{5-2x}-3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{(x+2)(x+1)}-\sqrt{(x-1)(x+3)}\right]$

5. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x\cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{x^2\sin x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\operatorname{tg} x}$

5.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{2x^3+2x^2-x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+2x^3-1}{\left(3x^2+1\right)\left(3x^2+2\right)}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{\sqrt{2x+19}-5}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(6x-\sqrt{36x^2+7x+49}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+1}\right)^{5x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{3}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{4}\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln\left(1+5\operatorname{tg} x\right)}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-x^n}{1-x}$

6.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-2}{4x^2-11x+7}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{\left(3x^2-7\right)\left(9x+1\right)}$

3. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{16+3x}-2}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left[\sqrt{x\left(x^4-1\right)}-\sqrt{x^5-8}\right]$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+3}{7x-5}\right)^{4x+5}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin\left(\dfrac{x}{4}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(3x^2\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(x-1)^2}-\cos(x-1)}{(x-1)^2}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}-1}{\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{x}\right)}$

7.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+5x+2}{4x^2+7x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(6x^3-9\right)(3x+2)}{17x^4+19x^3-1}$

3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{\sqrt{1-5x}-4}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-8x}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+3x+8}-2}{x^2+x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+9}{4x+1}\right)^{9x-5}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x\sin^2(2x)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\operatorname{tg}(2x)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^4-1}{8x}$

8.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{3x^3-6x^2+x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(3x^2+4x-1\right)\left(x^2-1\right)}{9x^4+3x^2-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{13-2x}-3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5x-\sqrt{25x^2+8x+16}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-2}{x+5}\right)^{4x+3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{5}\right)}{\arcsin^3(2x)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}-1}{3\operatorname{arctg} x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

9.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+2x^2-x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2x^2-1\right)\left(2x^2+1\right)}{8x^4-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-20}{\sqrt{3x+4}-4}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+3}{8x+2}\right)^{5x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x\cdot\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2\cdot\sin 2x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{\arcsin(x)}-1\right)^2}{x\sin x}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

10.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+2x-15}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2x^2-1\right)\left(2x^2+1\right)}{8x^4-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-12}{\sqrt{7x-5}-3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-3}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{8x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{3}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{4}\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-e^{2x}\right)^3}{\sin^2 x\cdot \operatorname{tg}2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sin 4x}$

11.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-2x-2}{7x^2-8x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2x^2-1\right)\left(2x^2+1\right)}{8x^4-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{25x^2+6x+121}-5x\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-7}{5x+2}\right)^{2x-9}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}{1-\cos^2 5x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\left(1+x^2\right)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

12.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-16x}{x^2-6x+8}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)\left(6x^2-3\right)}{2+4x-9x^3}$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{4-\sqrt{6-5x}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{(x+2)(x+1)}-\sqrt{(x-1)(x+3)}\right]$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-3}{7x+4}\right)^{4x+9}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3\left(\dfrac{x}{3}\right)}{\sin(2x^2)\cdot\arcsin\left(\dfrac{x}{5}\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin(x)}}$

9. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{4+x}-1}{3+x}$

13.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-x^2-4x+4}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(12x^2+3x-1\right)\left(2x^2+3\right)}{7+x-9x^4}$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{7-x}}{x^2+6x+8}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x+64}-2x\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+7}{6x+4}\right)^{5x-3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\dfrac{x^2}{4}\right)}{\operatorname{arctg}7x\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{5}\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{4x}-1\right)^4}{x\cdot\sin^3 x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\cos x\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^3}$

14.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x^2+x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4+8x^2-4}{\left(3x^2-5\right)\left(3x^2+5\right)}$

3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{4x+5}-5}{x^2-8x+15}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x(x+5)}-x\right]$

5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+5}\right)^{7x+3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1-\cos 3x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\ln\left(1+7x\right)}{\sin^4 4x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{\sin^3 3x}$

15.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x^3+2x^2-4x-8}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{19x^3+13x^2+11x+7}{\left(6x^2-3x+1\right)\left(3x+4\right)}$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x-7}-3}{x^2-2x-8}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+7x+36}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4x+2}-\sqrt{2x}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{6x-7}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(4x\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{7}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt[3]{x^2}}-1}{\sin^2\sqrt[3]{x}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(x\right)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{\sin^3\left(3x\right)}$

16.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+4}{2x^2-3x-20}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^4-9x^2+3}{\left(2x^2-3\right)\left(3-2x^2\right)}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2-7x}-3}{x^2+5x+4}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sqrt{x(x-2)}-\sqrt{x^2-3}\right]$

5. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+5}{6x-7}\right)^{2x+9}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{x^2}{3}\right)}{\sin^2\left(5x^2\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2(2x)}{\ln^2(1+8x)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)\left(\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+3x}\right)}{\operatorname{tg}^3(4x)}$

17.

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+8x-12}{2x^2+x-15}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+3x-9x^3}{(3-7x)\left(1-2x+3x^2\right)}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-4x+3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+1}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^3-1}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+5}{8x+3}\right)^{3x-5}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(3x)\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\arcsin^2\left(5x^2\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(2+x)}{e^{x+1}-1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{\left(1+x^2\right)^3}-1}{x^{\frac{3}{2}}}$

18.

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-3x-35}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-3x^4}{\left(7-2x^2\right)\left(9+3x^2\right)}$

3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{13-x}-4}{x^2+x-6}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(8x-\sqrt{64x^2+9x+14}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{x}-2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+5}{8x+3}\right)^{3x-5}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)\cdot\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{4}\right)}{\operatorname{arctg}^2(3x)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\ln\left(1+8\sqrt{x}\right)}{x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{\ln\left(1+2x^2\right)}$

19.

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-5x^2-x+5}{x^2-3x-10}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+2x-3x^2+4x^4}{6+7x+9x^2-12x^4}$

3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{x^2+x-6}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x^2-4\right)}-\sqrt{x^4-9}\right]$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x}-3}{\sqrt[3]{9x}-3}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+5}{7x+4}\right)^{3x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{x}{3}\right)\cdot\sin 5x}{\arcsin\left(\dfrac{x^3}{4}\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+8x)}{3\sin^2(4x)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sin(x)-\mathrm{tg}(x)\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^4}$

20.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-4x^2+2x-8}{x^2-16}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-x+7x^2-3x^3-7x^4}{\left(2-3x+4x^2-9x^3\right)(1-3x)}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{2x+3}}{x^2-x-6}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{49x^2+5x+4}-7x\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt[3]{4x}-2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+4}\right)^{7x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(2x)\cdot\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{3}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{x}{4}\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{3\sin\left(\dfrac{x}{7}\right)}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

21.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2+2x+2}{4x^2+2x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(3x^2+4x-1\right)\left(2x^2-3\right)}{1-3x+6x^2-9x^4}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3-\sqrt{7-2x}}{x^2+5x+4}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{81x^2+3x+4}-9x\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{5x}-5}{\sqrt[3]{25x}-5}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{3x-7}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x\cdot\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{x}{4}\right)}{\sin^2\left(5x^2\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{3\,\mathrm{tg}(4x)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+8x}-1}{\sin^2\left(\sqrt{x}\right)}$

22.

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+3x^2+2x+6}{x^2+2x-3}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(3x^2+4x-1\right)\left(2x^2-3\right)}{1-3x+6x^2-9x^4}$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{9-2x}-1}{x^2-3x-4}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{4-x^3}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt[3]{36x}-6}{\sqrt{6x}-6}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+7}\right)^{3x-4}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}4x\cdot\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{5}\right)}{\sin^3(3x)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}(x)}-1}{4\ln(1+5x)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x\cdot\sin x\cdot\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x\cdot\operatorname{ctg}x}$

23.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^5-x^4+5x-5}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x+2)^3}{(3x+2)^3+(4x+1)^3}$

3. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-6x-7}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{36x^2-9x+7}-6x\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{49x}-7}{\sqrt{7x}-7}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x-5}{9x+2}\right)^{2x+3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{\arcsin(4x)\cdot\sin(3x)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{3x}-1\right)^3}{\sin(2x)\operatorname{tg}^2(4x)}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(1-\sqrt{2x-3}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$

24.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{x^4-2x^3-x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3-(2x+3)^3}{(2x+1)^3+(2x+3)^3}$

3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{3-\sqrt{4x+21}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt[3]{x-3}+2}{x+5}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-8}{3x+5}\right)^{4x+7}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(4x)\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1-\cos(9x)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2e^{-x}+e^{-2x}}{x^2}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

25.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3+2x-2}{x^2+x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-(x-1)^3}{(x+1)^4-x^4}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4-\sqrt{5x+1}}{x^2-x-6}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5x-\sqrt{25x^2+6x+6}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{3+\sqrt[3]{x-24}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-7}{3x+2}\right)^{5x-3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{4}\right)}{\operatorname{arctg}^2\left(\dfrac{x}{3}\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(4+x)-\ln 4}{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{6x}{7}\right)}$

9. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin\left(\dfrac{x+2}{2}\right)}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}$

26.

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{3x^2-16x+5}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^4-(x-2)^4}{(x+5)^2+(x-5)^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{3-\sqrt{2x+3}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^3+8}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-1}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{4-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+11}-3}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-5x+5}\right)^{3x+2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$

8. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2^x+7}-\sqrt{2^{x+1}+5}}{x^2-1}$

27.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+2x^3-x-2}{x^2+3x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^4-(x-1)^4}{(x+1)^3+(x-1)^3}$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6-5x}-4}{x^2+6x+8}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{100x^2+8x+1}-10x\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{3-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3x}-9}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x+1}{x^3+2}\right)^{3x+2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2(2x)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+4x)}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-2^{4-x^2}}{x\left(\sqrt{2x}-2\right)}$

28

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-4x-7}{4x^2+7x+3}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^3+1}$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{\sqrt{7-x}-3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+9x+4}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x^2+18x-15}{7x^2+11x+15}\right)^{x+2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2(3x)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+2)-\ln(2)}{3\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{4}\right)}$

9. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg(x)-1}{\sqrt{x-9}-1}$

29.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x^3+4x^2-3x-4}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3-(x+1)^3}{x^2+x+1}$

3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3-\sqrt{2x-1}}{x^2-8x+15}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+2x}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{4-\sqrt[3]{x^2}}{4-\sqrt{2x}}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{13x+3}{13x-10}\right)^{2x+4}$

7. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\sin x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sin 4x}$

9. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{1-\sqrt{x^2+1}}$

30.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{3x^3+7x^2-3x-7}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3-4x)^2}{(x-3)^3-(x+3)^3}$

3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{5-\sqrt{4x+5}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(8x-\sqrt{64x^2+7x+4}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{\sqrt{3x}-9}{\sqrt[3]{x^2}-9}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x+7}{2x^2+5x+3}\right)^{x}$

7. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}^2(4x)}{\cos(3x)-\cos(2x)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{3x}-e^{2x}\right)^2}{\operatorname{tg}^2(3x)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(e^{\pi x}-1\right)}{3\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)}$

6. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

6.1 Дифференцирование функций, заданных явно

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Производная функции $y=f(x)$ обозначается через y', или $f'(x)$.

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Операция нахождения производной $f'(x)$ от функции $f(x)$ называется ***дифференцированием*** этой функции.

Геометрически значение производной функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ равно тангенсу угла, образованного положительным направлением оси Ox и касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0, то есть $f'(x_0)=\text{tg}\alpha$ (рис 6.1).

Число $\text{tg}\alpha$ называют ***угловым коэффициентом касательной*** и обозначают k, то есть

$$k = f'(x_0) = \text{tg}\alpha.$$

В прямоугольной системе координат уравнения касательной и нормали к некоторой кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеют вид

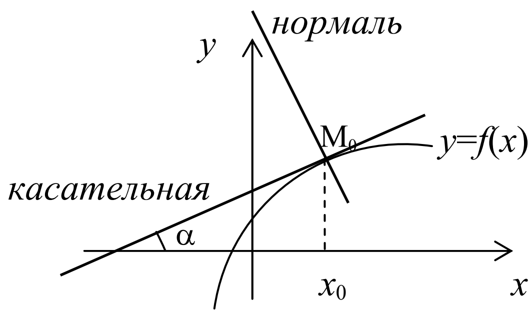


Рис 6.1

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad – \textbf{\textit{ уравнение касательной}},$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad – \textbf{\textit{ уравнение нормали}}.$$

Если функция $y=f(x)$ описывает какой–либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит физический смысл производной.

Основные правила дифференцирования.

Пусть даны функции, имеющие производные $u=u(x)$ и $v=v(x)$, $c=\text{const}$

6.1 $(c)' = 0$

6.2 $x' = 1$

6.3 $(c \cdot u)' = c \cdot u'$

6.4 $(u \pm v)' = u' \pm v'$

6.5 $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

6.6 $\left(\dfrac{u}{v}\right)^{/}=\dfrac{u^{/}\cdot v-u\cdot v^{/}}{v^{2}}$

6.7 Если дана сложная функция $y=f(u)$, где $u=u(x)$, то есть $y=f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то $y_x^{/}=f_u^{/}\cdot u_x^{/}$ (правило дифференцирования сложной функции).

Основные формулы дифференцирования.

6.8 $\left(u^{n}\right)^{/}=n\cdot u^{n-1}\cdot u^{/}$

6.9 $\left(\sqrt{u}\right)^{/}=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u^{/}$

6.10 $\left(\dfrac{1}{u}\right)^{/}=-\dfrac{1}{u^{2}}\cdot u^{/}$

6.11 $\left(a^{u}\right)^{/}=a^{u}\cdot\ln a\cdot u^{/}$

6.12 $\left(e^{u}\right)^{/}=e^{u}\cdot u^{/}$

6.13 $\left(\log_a u\right)^{/}=\dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u^{/}$

6.14 $\left(\ln u\right)^{/}=\dfrac{1}{u}\cdot u^{/}$

6.15 $\left(\sin u\right)^{/}=\cos u\cdot u^{/}$

6.16 $\left(\cos u\right)^{/}=-\sin u\cdot u^{/}$

6.17 $\left(\mathrm{tg}\,u\right)^{/}=\dfrac{1}{\cos^{2}u}\cdot u^{/}$

6.18 $\left(\mathrm{ctg}\,u\right)^{/}=-\dfrac{1}{\sin^{2}u}\cdot u^{/}$

6.19 $\left(\arcsin u\right)^{/}=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\cdot u^{/}$

6.20 $\left(\arccos u\right)^{/}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\cdot u^{/}$

6.21 $\left(\mathrm{arctg}\,u\right)^{/}=\dfrac{1}{1+u^{2}}\cdot u^{/}$

6.22 $\left(\mathrm{arcctg}\,u\right)^{/}=-\dfrac{1}{1+u^{2}}\cdot u^{/}$

6.23 $\left(\mathrm{sh}\,u\right)^{/}=\mathrm{ch}\,u\cdot u^{/}$

6.24 $\left(\mathrm{ch}\,u\right)^{/}=\mathrm{sh}\,u\cdot u^{/}$

6.25 $\left(\mathrm{th}\,u\right)^{/}=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^{2}u}\cdot u^{/}$

6.26 $\left(\mathrm{cth}\,u\right)^{/}=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^{2}u}\cdot u^{/}$

Пример 1. Найти производную функции $y=5x^{4}-3x^{2}+7x-4$.

Решение. Дифференцируем как сумму по формулам 6.4, 6.1, 6.3 правил дифференцирования и применяем формулу 6.8

$$y^{/}=\left(5x^{4}\right)^{/}-\left(3x^{2}\right)^{/}+\left(7x\right)^{/}-\left(4\right)^{/}=5\left(x^{4}\right)^{/}-3\left(x^{2}\right)^{/}+7\left(x\right)^{/}-0=$$
$$=5\cdot 3x^{2}-2\cdot 2x+3\cdot 1=15x^{2}-4x+3.$$

Пример 2. Найти $y^{//}$ функции $y=\dfrac{1+x^{3}}{1-2x}$.

Решение. Дифференцируем как частное по формуле 6.5 правил дифференцирования и применяем формулы 6.2, 6.1 и 6.8

$$y' = \frac{\left(1+x^3\right)' \cdot (1-2x) - \left(1+x^3\right) \cdot (1-2x)'}{(1-2x)^2} = \frac{3x^2 \cdot (1-2x) - (-2) \cdot \left(1+x^3\right)}{(1-2x)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot (1-2x) + 2 \cdot \left(1+x^3\right)}{(1-2x)^2} = \frac{3x^2 - 6x^3 + 2 + 2x^3}{(1-2x)^2} = \frac{-4x^3 + 3x^2 + 2}{(1-2x)^2} \quad .$$

$$y'' = \left(\frac{-4x^3 + 3x^2 + 2}{(1-2x)^2} \right)' =$$

$$= \frac{\left(-4x^3 + 3x^2 + 2\right)' \cdot (1-2x)^2 - \left(-4x^3 + 3x^2 + 2\right) \cdot \left((1-2x)^2\right)'}{\left((1-2x)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(-12x^2 + 6x\right) \cdot (1-2x)^2 - \left(-4x^3 + 3x^2 + 2\right) \cdot 2 \cdot (1-2x) \cdot (-2)}{(1-2x)^4} =$$

$$= \frac{(1-2x) \cdot \left(\left(-12x^2 + 6x\right) \cdot (1-2x) + 4 \cdot \left(-4x^3 + 3x^2 + 2\right)\right)}{(1-2x)^4} =$$

$$= \frac{-12x^2 + 6x + 24x^3 - 12x^2 - 16x^3 + 12x^2 + 8}{(1-2x)^3} = \frac{8x^3 - 12x^2 + 6x + 8}{(1-2x)^3} .$$

Пример 3. Найти y' функции $y = \mathrm{tg}^3 \sqrt{x+2}$.

Решение. Дифференцируем, применяя формулы производной сложной функции и формулы 6.8 и 6.12

$$y' = 3\,\mathrm{tg}^2 \sqrt{x+2} \cdot \left(\mathrm{tg}\sqrt{x+2}\right)' = 3\,\mathrm{tg}^2 \sqrt{x+2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x+2}} \cdot \left(\sqrt{x+2}\right)' =$$

$$= 3\,\mathrm{tg}^2 \sqrt{x+2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x+2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3\,\mathrm{tg}^2 \sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2} \cdot \cos^2 \sqrt{x+2}} .$$

Пример 4. Найти y' функции $y = \left(x^4 - \frac{2}{x\sqrt{x}} + 1 \right)^5 = \left(x^4 - 2x^{-\frac{3}{2}} + 1 \right)^5$.

Решение. Вводим сначала дробные и отрицательные показатели, затем дифференцируем, применяя формулы 6.3, 6.2 и 6.1 и формулу 6.8

$$y' = 5\left(x^4 - 2x^{-\frac{3}{2}} + 1\right)^4 \cdot \left(x^4 - 2x^{-\frac{3}{2}} + 1\right)' = 5\left(x^4 - 2x^{-\frac{3}{2}} + 1\right)^4 \cdot \left(4x^3 + 3x^{-\frac{5}{2}}\right) =$$

$$= 5\left(x^4 - 2x^{-\frac{3}{2}} + 1\right)^4 \cdot \left(4x^3 + \frac{3}{x^2\sqrt{x}}\right).$$

Пример 5. Найти y' функции $y = e^{\arcsin 3x} + x \cdot \arccos 3x$.

Решение. Применяем сначала формулу 6.3, а для второго слагаемого формулу 6.4. Затем используем формулы 6.9, 6.14, 6.8 и 6.15

$$y' = \left(e^{\arcsin 3x}\right)' + \left(x \cdot \arccos 3x\right)' = \left(e^{\arcsin 3x}\right)' + \left(x\right)' \cdot \arccos 3x + x \cdot \left(\arccos 3x\right)' =$$

$$= e^{\arcsin 3x} \cdot \left(\arcsin 3x\right)' + \arccos 3x - x\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot \left(3x\right)' =$$

$$= e^{\arcsin 3x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot \left(3x\right)' + \arccos 3x - x\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3 =$$

$$= e^{\arcsin 3x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3 + \arccos 3x - x\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3 =$$

$$= \frac{3e^{\arcsin 3x}}{\sqrt{1-9x^2}} + \arccos 3x - \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}} = \arccos 3x + \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\left(e^{\arcsin 3x} - x\right).$$

Логарифмический метод.

Иногда, прежде чем находить производную от заданного выражения, лучше выражение преобразовать так, чтобы процесс дифференцирования упрощался. Во многих случаях оказывается выгодным, прежде чем дифференцировать заданную функцию, взять ее логарифм, определить затем производную от этого логарифма и по производной от логарифма отыскать производную от заданной функции. Такой прием называется способом ***логарифмического дифференцирования***.

Метод логарифмического дифференцирования позволяет находить производные от сложной функции вида $y = u^v$, где u, v- функции аргумента x. Действительно, логарифмируя обе части исходного равенства, получаем

$$\ln y = v \ln u.$$

Дифференцируя последнее равенство, имеем

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}.$$

Умножая обе части равенства на y и заменяя затем y через u^v, окончательно получаем

$$y' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} u'.$$

Пример 6. Найти y', если $y = (\operatorname{ctg} x)^{x^3}$.

Решение. Здесь основание и показатель степени зависят от x. Логарифмируя, получим

$$\ln y = x^3 \cdot \ln(\operatorname{ctg} x) \qquad (\text{так как} \quad \log_a x^k = k \cdot \log_a x).$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по x. Так как y является функцией от x, то $\ln y$ есть сложная функция x и $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$. Следовательно,

$$(\ln y)' = \left(x^3 \cdot \ln \operatorname{ctg} x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \ln \operatorname{ctg} x + x^3 \cdot (\ln \operatorname{ctg} x)'$$

или $$\frac{y'}{y} = 3x^2 \ln \operatorname{ctg} x - x^3 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 x}.$$

Умножив последнее равенство на y, получим

$$y' = y \cdot \left(3x^2 \ln \operatorname{ctg} x - x^3 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 x}\right) = (\operatorname{ctg} y)^{x^3} \cdot \left(3x^2 \ln \operatorname{ctg} x - x^3 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 x}\right).$$

6.2 Дифференцирование функций, заданных неявно

Если y как функция от x задается посредством соотношения $F(x,y)=0$, где $F(x,y)$ – выражение, содержащее x и y, то y называется ***неявной функцией*** от x. В некоторых случаях уравнение $F(x,y)=0$ удается разрешить относительно y, и тогда можно перейти от неявного способа задания функции к явному $y=f(x)$, в других случаях такой переход невозможно осуществить. Независимо от возможности перехода производная от y по x для функции, заданной неявно, может быть определена следующим образом:

1. Находим производную от левой части равенства $F(x,y)=0$, учитывая при этом y как функцию от x, и приравниваем ее к нулю.

2. Разрешаем полученное уравнение относительно y'; в результате будем иметь выражение производной от неявной функции в виде $y'= f(x,y)$. Для определения второй производной от функции, заданной неявно, дифференцируем равенство $y'= f(x,y)$ (рассматривая y как функцию от x), а затем в правой части заменяем y' его выражением из равенства $y'= f(x,y)$. Аналогично поступаем при нахождении производных более высоких порядков.

Пример 7. Найти y'', если $\operatorname{arctg} y - y + x = 0$.

Решение. Дифференцируем данное выражение, рассматривая y как функцию от x: $(\operatorname{arctg} y)' - (y)' + (x)' = 0$

$$\frac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0 \qquad \text{или} \qquad y' - y'\left(1+y^2\right) + 1 + y^2 = 0 \ ,$$

$$y' - y' - y' \cdot y^2 + 1 + y^2 = 0 \ , \qquad y' \cdot y^2 = 1 + y^2 \ ,$$

$$\text{откуда} \qquad y' = \frac{1+y^2}{y^2} = 1 + \frac{1}{y^2} \, .$$

Находим далее y'': $\quad y'' = \left(1 + \dfrac{1}{y^2}\right)' = 0 + (-2)y^{-3} \cdot y' = -\dfrac{2}{y^3} y'$.

В последнее равенство вместо y' подставляем его значение. Тогда получаем

$$y' = -\frac{2}{y^3} \cdot \frac{1+y^2}{y^2} = -\frac{2\left(1+y^2\right)}{y^5} \ .$$

6.3 Дифференцирование функций, заданных параметрически

Если функция y аргумента x задается при помощи параметрических соотношений

$$x = x(t), \ \ y = y(t) \tag{6.27}$$

причем $x(t)$ и $y(t)$ – дифференцируемые функции t и $x(t) \neq 0$. Производная от y по x находится путем дифференцирования равенств (1) :

$$dx = x'(t)dt \, , \qquad dy = y'(t)dt,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{6.28}$$

Вторую производную от y по x находим, дифференцируя по x соотношение (6.28):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left[\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right]}{x'(t)dt} = \frac{\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)' dt}{x'(t)dt} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{\left[x'(t)\right]^3} \ .$$

Пример 6.8 Найти y''_x, если $x = \ln t$, $y = \sin 2t$.

Решение. Дифференцируем исходные соотношения:

$$dx = \frac{1}{t} dt \ , \ \ dy = 2\cos 2t dt \ .$$

Отсюда $$\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos 2tdt}{\frac{1}{t}dt}=2t\cos 2t\ .$$

Найдем вторую производную

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(2t\cos 2t\right)}{dx}=\frac{d\left(2t\cos 2t\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{d\left(2t\cos 2t\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=$$

$$=\frac{2\cos 2t-4t\sin 2t}{\frac{1}{t}}=2t\left(\cos 2t-2t\sin 2t\right).$$

6.4 Дифференциал функции

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Производная этой функции в некоторой точке x отрезка $[a,b]$ определяется равенством

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\ .$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$ стремится к определенному числу $f'(x)$ и, следовательно, отличается от производной $f'(x)$ на величину бесконечно малую: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0,$

или $\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x.$

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых $f'(x)\Delta x$ и $\alpha\Delta x$, которые являются бесконечно малыми при $\Delta x\to 0$. Первое слагаемое есть бесконечно малая функция первого порядка относительно Δx, так как

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x}=f'(x)\neq 0\,.$$

Произведение $\alpha\Delta x$ есть бесконечно малая величина высшего порядка относительно Δx, так как

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0\ .$$

Первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ называется ***главной частью*** приращения функции Δy.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке называется главная часть ее приращения, равная произведению производной $f'(x)$ на приращение Δx и обозначается через dy:

$$dy = f'(x)\,\Delta x\ .$$

Дифференциалом аргумента называется приращение аргумента

$$dx = \Delta x.$$

Тогда дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента $dy = f'(x)\,dx.$

Геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке $M(x,y)$.

Основные свойства дифференциала.

6.29 $dc = 0$

6.30 $d\left(c \cdot u\right) = c \cdot du$

6.31 $d\left(u \pm v\right) = du \pm dv$

6.32 $d\left(u \cdot v\right) = u \cdot dv + v \cdot du$

6.33 $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$

6.34 $df\left(u\right) = f'\left(u\right) \cdot du$

Дифференциал $dy = f'(x)\,dx$ называется ***дифференциалом первого порядка***.

Дифференциал $d(dy)$ от дифференциала dy называется ***дифференциалом второго порядка*** функции $f(x)$ и обозначается

d^2y, то есть $d^2y = f''(x)(dx)^2$ и т.д.

Дифференциал $d(d^{n-1}y)$ от дифференциала $d^{n-1}y$ называется ***дифференциалом n–го порядка*** функции $f(x)$ и обозначается

d^ny, то есть $d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Из определения производной и дифференциала вытекает, что $\Delta y = dy + \varepsilon(\Delta x)$, где $\varepsilon \to 0$, когда $\Delta x \to 0$, то есть дифференциал функции отличается от приращения на бесконечно малую высшего порядка, чем $\Delta x = dx$.

При малых Δx справедлива приближенная формула

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \quad \text{или}$$

$$f(x+\Delta x) \approx f'(x)\Delta x + f(x) \qquad (6.29)$$

Пример 9. Найти дифференциал функции $y = e^{x^2}$.

Решение. Так как $dy = f'(x)\,dx$, то $dy = \left(e^{x^2}\right)' dx = 2xe^{x^2}\,dx$.

Пример 10. Найти дифференциал функции $y = \sin\ln x$.

Решение. $dy = \left(\sin\ln x\right)^{/} dx = \cos\ln x \cdot \dfrac{1}{x} dx$.

Пример 11. Найти дифференциал третьего порядка функции $y = x^5 - 3x^3 + 2$.
Решение. Последовательно дифференцируя, получим

$$dy = y^{/} dx = \left(5x^4 - 9x^2\right) dx$$

$$d^2 y = d\left(dy\right) = d\left[\left(5x^4 - 9x^2\right) dx\right] = \left[\left(5x^4 - 9x^2\right) dx\right]^{/} dx = \left(20x^3 - 18x\right)\left(dx\right)^2$$

$$d^3 y = d\left(d^2 y\right) = \left[\left(20x^3 - 18x\right)\left(dx\right)^2\right]^{/} dx = \left(60x^2 - 18\right)\left(dx\right)^3 .$$

Пример 12. Вычислить приближенное значение функции $y = \arcsin x$ при $x = 0{,}51$ **.**
Решение. Рассмотрим функцию $y=\arcsin x$. Полагая $x=0{,}5$, $\Delta x=0{,}01$ и применяя формулу (6.29),

$$\arcsin(x+\Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)^{/}\, \Delta x, \qquad \text{получаем}$$

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-\left(0{,}5\right)^2}} \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 = 0{,}513 \; .$$

Пример 13. Вычислить приближенное значение функции $y = \ln x$ при $x = 2{,}001$.
Решение. Рассмотрим функцию $y = \ln x$. Полагая $x=2$, $\Delta x=0{,}001$ и применяя формулу (6.29), $\ln\left(x + \Delta x\right) \approx \ln x + \dfrac{1}{x}\Delta x$, получаем

$$\ln 2{,}001 = \ln\left(2 + 0{,}001\right) \approx \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}001 = 0{,}69315 + 0{,}00050 = 0{,}69365 .$$

Задание 6.1. В задачах 1 - 30 вычислить производную $y = f(x)$.

1.
   1. $y = \sin^2 2x \cdot \cos 8x^5$
   2. $y = \operatorname{arctg} 5x \cdot \ln(x - 4)$
   3. $y = \operatorname{ctg}^4 3x \cdot \arccos 2x^3$
   4. $y = \dfrac{e^{\arcsin x}}{x + 3}$
   5. $y = \dfrac{9\operatorname{arctg}(2x + 7)}{\left(x - 1\right)^2}$

2.
   1. $y = \operatorname{tg}^2 x \cdot \arcsin\left(4x^5\right)$
   2. $y = \operatorname{arcctg}^3 2x \cdot \ln(3x + 5)$
   3. $y = \left(x - 4\right)^4 \cdot \arcsin\left(5x^4\right)$
   4. $y = e^{\frac{(x+4)^2}{\operatorname{arcctg} x}}$
   5. $y = \dfrac{\ln^2\left(3x + 7\right)}{(x - 5)^3}$

3.
   1. $y = \cos^4 3x \cdot \operatorname{tg}\left(4x + 1\right)^2$

4.
   1. $y = \left(x^2 - 2\right)^{-3} \cdot \cos^5 x$

2. $y = \arccos^3 x \cdot \ln(x^2 + x - 1)$

3. $y = 2^x \cdot \mathrm{arctg}\left(7x^2\right)$

4. $y = \dfrac{e^{-3x}}{x^2 + 5x}$

5. $y = \dfrac{7\cos^3\left(x^2 + 2x - 1\right)}{(2x-1)^2}$

2. $y = 2\,\mathrm{tg}^2\, 5x \cdot \ln(3x - 4)$

3. $y = e^{-5x} \cdot \sin^2\left(2x^3\right)$

4. $y = \dfrac{e^{\sin 3x}}{\ln(2x-1)}$

5. $y = \dfrac{9\,\mathrm{arctg}^2(2x+7)}{(3x-1)^2}$

5. 1. $y = \mathrm{tg}^{-2} x \cdot \sin^2(3x)$

2. $y = \mathrm{arcctg}\left(4x^2\right) \cdot \ln^3(2x+5)$

3. $y = (x+2)^{-3} \cdot \arcsin^2 x$

4. $y = \dfrac{\sin^2(\cos 3x)}{e^{\mathrm{tg}\, 2x}}$

5. $y = \dfrac{\ln^3(3x-7)}{\cos(x+5)^3}$

6. 1. $y = \cos^5\left(x^2\right) \cdot \mathrm{tg}^3(4x+1)$

2. $y = \arccos^2(4x) \cdot \ln(x^2 - 1)$

3. $y = 3^{x-1} \cdot \mathrm{arctg}(7x)$

4. $y = \dfrac{e^{-\sin 7x}}{x^2 - 2}$

5. $y = \dfrac{7\sin^3\left(\ln x^2 + 2\right)}{(3x+7)^2}$

7. 1. $y = (x-5)^{-8} \cdot \cos^2(3x-1)$

2. $y = \mathrm{tg}^2(2x+1) \cdot \ln^3(x+3)$

3. $y = \sin^4 4x \cdot e^{\sin 2x}$

4. $y = \dfrac{\cos^2(\ln 3x)}{2^{x-5}}$

5. $y = \dfrac{5\,\mathrm{arctg}(2x)}{(3x-1)^2}$

8. 1. $y = tg^3 x \cdot \ln^2(\cos 3x)$

2. $y = \mathrm{arcctg}^4(2x) \cdot (x-3)^5$

3. $y = (x+5)^4 \cdot \arcsin^2 2x$

4. $y = \dfrac{\ln^2(x-4)}{e^{\mathrm{tg}\, 4x}}$

5. $y = \dfrac{\mathrm{tg}\left(2x^3 + 1\right)^2}{3^{\sin x}}$

9. 1. $y = \cos^4 3x \cdot \mathrm{tg}(3x-2)^3$

2. $y = \arcsin(2x-1) \cdot \ln x^3$

3. $y = 6^x \cdot \mathrm{arctg}^2(7x+3)$

4. $y = \dfrac{e^{-\mathrm{tg}\, 2x}}{\sin\left(x^2 - 7\right)}$

10. 1. $y = 2^{\sin 5x} \cdot \mathrm{tg}\, 2x^6$

2. $y = \mathrm{arcctg}\, 5x \cdot (x+3)^{-4}$

3. $y = (3x+4)^4 \cdot \arcsin^2\left(x^4\right)$

4. $y = \dfrac{e^{2x} + 1}{\ln^2(x-5)}$

5. $y = \dfrac{9\,\mathrm{sinctg}(x-2)}{(x+2)^2}$

5. $y=\dfrac{3\ln^2(x^3+1)}{4^{\arccos 2x}}$

11.
1. $y=x^4\cdot\arcsin\left(4x^5\right)$
2. $y=\operatorname{arctg}^3 4x\cdot\ln^3(2x-1)$
3. $y=\left(x+3\right)^4\cdot 5^{2x}$
4. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}\left(x+3\right)^2}{e^{\arccos 2x}}$
5. $y=\dfrac{4\ln^3 2x}{\operatorname{tg}(x+7)^4}$

12.
1. $y=\cos^5 3x\cdot\operatorname{tg}\left(x-1\right)^3$
2. $y=\arcsin 2x\cdot\ln(\cos x^2)$
3. $y=5^{-3x-1}\cdot\operatorname{arctg}\left(x^4\right)$
4. $y=\dfrac{\sin\left(e^{3x}\right)}{x^2-5}$
5. $y=\dfrac{x^2+2x-1}{\sin^2(2x-1)}$

13.
1. $y=\cos^3 x\cdot\sin^2 5x$
2. $y=\ln^5 x\cdot\operatorname{arcctg}^2\left(3x+1\right)$
3. $y=\arcsin^2 x\cdot\operatorname{tg}^2 4x$
4. $y=\dfrac{e^{\cos 2x-1}}{\ln(x-7)}$
5. $y=\dfrac{9\left(x+7\right)^5}{\sin^3(x+1)^2}$

14.
1. $y=\operatorname{tg}^2 2x\cdot\arcsin\left(5x-3\right)$
2. $y=\operatorname{arcctg}^3 2x\cdot\ln^5 x$
3. $y=\left(x+3\right)^{-2}\cdot\cos x^4$
4. $y=\dfrac{\sin^3(x+4)^2}{e^{\operatorname{arctg} 2x}}$
5. $y=\dfrac{3^{\ln(6x+2)}}{\operatorname{ctg}(x+3)^2}$

15.
1. $y=\cos^3 3x\cdot\operatorname{tg}^2(2x^2-3)$
2. $y=\ln(x^2+2)\cdot\arccos^3 4x$
3. $y=5^{\operatorname{ctg} x}\cdot\sin 3x^4$
4. $y=\dfrac{\arcsin(e^{3x})}{x^2-5x}$
5. $y=\dfrac{x^6-2x^2+5}{\ln^2(3x+1)^3}$

16.
1. $y=\operatorname{tg}^2 5x\cdot\arccos^2 x$
2. $y=\ln^2 4x\cdot\sin^2(x-1)$
3. $y=\left(x-1\right)^{-8}\cdot\arcsin^2 3x$
4. $y=\dfrac{5^{\cos x-x}}{\operatorname{tg}\left(x+5\right)}$
5. $y=\dfrac{\sin^2\left(x+7\right)}{\ln^2(x-2)^2}$

17.
1. $y=\left(2x^2-x\right)^4\cdot\arcsin^2 2x$
2. $y=8^{\operatorname{tg} 8x}\cdot\ln^5\left(5x+2\right)$
3. $y=\left(x-1\right)^{-2}\cdot\arccos 2x$

18.
1. $y=\cos^3 2x\cdot\operatorname{tg}^2\left(2x+1\right)$
2. $y=\arccos^3 x\cdot\ln^2 3x$
3. $y=2^{\ln x-1}\cdot\arcsin 5x$

4. $y=\dfrac{\arcsin^{3}(x-4)}{e^{\operatorname{arctg} x}}$

5. $y=\dfrac{2^{\ln(4x-2)}}{\sin(x-5)^{3}}$

4. $y=\dfrac{\arcsin\left(e^{-2x}\right)}{2+5x}$

5. $y=\dfrac{\operatorname{tg}^{2}\left(2x^{5}+2\right)}{\ln^{2}(2x-1)^{2}}$

19. 1. $y=\sin^{5}5x\cdot\operatorname{tg}^{8}x$

2. $y=\operatorname{arctg}^{2}4x\cdot\sin^{3}\left(x^{2}-2x\right)$

3. $y=\ln^{2}x\cdot\cos^{2}x$

4. $y=\dfrac{e^{\sin 5x-2}}{\ln^{2}(x+5)}$

5. $y=\dfrac{\cos(x+7)^{5}}{\sin^{2}(x-1)^{2}}$

20. 1. $y=\operatorname{tg}^{2}x\cdot\left(x^{3}+2x^{2}-5x+4\right)$

2. $y=\operatorname{arcctg}\left(x^{2}+2x\right)^{2}$

3. $y=(x-1)^{-7}\cdot\arccos x^{4}$

4. $y=\dfrac{\sin^{3}(\cos x)^{2}}{\operatorname{tg}^{2}5x}$

5. $y=\dfrac{5^{\ln(4x-2)}}{\arccos^{2}(3x-2)}$

21. 1. $y=\cos^{3}3x\cdot\operatorname{ctg}^{3}\left(4x^{2}+1\right)$

2. $y=\arccos^{3}x\cdot e^{\ln 5x}$

3. $y=6^{\operatorname{tg}x}\cdot\arcsin^{4}x^{2}$

4. $y=\dfrac{\sin\left(e^{-x}\right)}{e^{\arccos 5x}}$

5. $y=\dfrac{\cos\left(2x^{5}+2x^{2}\right)}{\ln^{5}(2x-1)}$

22. 1. $y=\left(5x^{3}+3x-5\right)^{2}\cdot\cos^{3}x$

2. $y=\operatorname{tg}^{2}4x\cdot\ln^{3}(5x-1)$

3. $y=2^{\ln(x-5)}\cdot\arcsin^{2}x$

4. $y=\dfrac{e^{\operatorname{tg}(x-1)}}{\ln(x+5)}$

5. $y=\dfrac{\operatorname{tg}(x+7)^{5}}{\sin^{2}(x-1)^{2}}$

23. 1. $y=\operatorname{tg}\left(x^{2}+x-1\right)\cdot\arcsin 5x$

2. $y=\operatorname{arcctg}^{2}3x\cdot\ln^{5}(x-1)$

3. $y=\sin(x-1)^{-2}\cdot e^{\sin 2x}$

4. $y=\dfrac{\sin^{3}(x-4)}{e^{\operatorname{arcctg}x}}$

5. $y=\dfrac{5^{\sin 4x}}{\operatorname{tg}(x-5)^{3}}$

24. 1. $y=\cos^{3}3x\cdot\operatorname{tg}^{2}\left(4x^{2}+1\right)$

2. $y=\arccos^{3}x\cdot e^{\sin 8x}$

3. $y=2^{\ln x+2}\cdot\operatorname{arctg}(x+1)^{4}$

4. $y=\dfrac{\arcsin\left(e^{\sin x}\right)}{\cos\left(20x^{2}+5x\right)}$

5. $y=\dfrac{\operatorname{tg}^{5}\left(2x^{2}-1\right)}{\ln^{2}(2x-1)^{2}}$

25.
1. $y=\sin^2 6x\cdot\left(2x^3+5x-4\right)^5$
2. $y=\operatorname{ctg}^3 5x\cdot\sin^2\left(x-1\right)$
3. $y=e^{\operatorname{tg}5x}\cdot\operatorname{arctg}^2 x$
4. $y=\dfrac{\sin^3\left(2x^2+x-5\right)}{\cos^2\ln(x+5)}$
5. $y=\dfrac{9^{\ln 5x+1}}{\sin^2(x-1)}$

26.
1. $y=\operatorname{tg}^2 x\cdot e^{\sin 8x}$
2. $y=\operatorname{arcctg}^2 7x\cdot\sin^5 x$
3. $y=5^{-2\ln x}\cdot\arccos^2 x$
4. $y=\dfrac{\arcsin^3\left(x-4\right)}{7^{2\operatorname{ctg}x}}$
5. $y=\dfrac{5^{\sin 3x-2}}{\operatorname{arctg}(x-5)^3}$

27.
1. $y=\ln\left(2x+x^3\right)\cdot\operatorname{tg}^2\left(x+1\right)$
2. $y=\arcsin^2 x\cdot\sin^3\left(x+2\right)$
3. $y=e^{\operatorname{tg}x}\cdot\operatorname{arcctg}^2 x$
4. $y=\dfrac{\cos^2\left(\sin 25x\right)}{x^5+5x}$
5. $y=\dfrac{e^{3\operatorname{tg}8x}}{\ln(8x+5)}$

28.
1. $y=\sin^3 2x\cdot\operatorname{tg}\sin\left(3x^5\right)$
2. $y=\operatorname{tg}^2 5x\cdot\sin\left(5x^2-4\right)$
3. $y=4^{\cos 5x}\cdot\arccos\left(2x^3\right)$
4. $y=\dfrac{e^{-2\sin x}}{\operatorname{tg}\left(x+2\right)}$
5. $y=\dfrac{\sin\operatorname{tg}\left(x+7\right)}{\ln(x-1)^2}$

29.
1. $y=\operatorname{tg}^4 x\cdot\sin\sin 4x$
2. $y=\operatorname{arctg}^3\left(2x^2-1\right)$
3. $y=\cos\left(x-2\right)^4\cdot\arcsin 5x$
4. $y=\dfrac{\sin\left(\sin x-4\right)^2}{e^{\sin\operatorname{tg}x}}$
5. $y=\dfrac{\ln^2\left(5x+1\right)}{\operatorname{tg}^2(x-1)}$

30.
1. $y=\cos^5 3x\cdot e^{3\sin 5x}$
2. $y=\cos\cos^4 x\cdot\left(7x^2+x-1\right)^{-5}$
3. $y=2^{-\operatorname{tg}x}\cdot\operatorname{tg}7x^4$
4. $y=\dfrac{e^{-x}}{\sin^2\left(5x^2+5\right)}$
5. $y=\dfrac{7\cos^3\ln x}{\operatorname{tg}(8x-2)}$

Задание 6.2. Продифференцировать данные функции, применяя метод логарифмического дифференцирования.

1.
a) $y=\left(\cos\left(x+5\right)\right)^{\arcsin 3x}$
b) $y=\left(x^2+5x-7\right)^{\ln(x+11)}$

2.
a) $y=\left(\cos\left(x+5\right)\right)^{\arcsin 3x}$
b) $y=\left(x^2+5x-7\right)^{\ln(x+11)}$

3. a) $y=\left(\operatorname{tg}\left(x+4\right)\right)^{2x+3}$

b) $y=\left(x^{2}+3x\right)^{\operatorname{arccrg}2x}$

4. a) $y=\left(\ln 3x+2\right)^{\cos x}$

b) $y=\left(\sin 2x\right)^{-5x+1}$

5. a) $y=\left(\sin\left(2x+1\right)\right)^{\arcsin 3x}$

b) $y=\left(\arccos x^{2}\right)^{x-3}$

6. a) $y=\left(\sqrt{x+5}\right)^{\sin x}$

b) $y=\left(\ln\left(3x-8\right)\right)^{\ln x}$

7. a) $y=\left(\lg\left(x+5\right)\right)^{2x-1}$

b) $y=\left(\sin\left(x^{2}+1\right)\right)^{\operatorname{arctg}x}$

8. a) $y=\left(\sqrt{5x^{2}+2x+5}\right)^{\sin x}$

b) $y=\left(\arcsin 2x\right)^{-2x-1}$

9. a) $y=\left(\sin\left(x^{2}-2x-5\right)\right)^{5x}$

b) $y=\left(5x^{2}+1\right)^{\arcsin 3x}$

10 a) $y=\left(\operatorname{arcctg}5x\right)^{\operatorname{tg}x}$

b) $y=\left(\lg 5x\right)^{\cos(2x-5)}$

11 a) $y=\left(\operatorname{tg}\left(2x+1\right)\right)^{3x-1}$

b) $y=\left(\sin\left(x^{2}-1\right)\right)^{3\operatorname{ctg}3x}$

12 a) $y=\left(\sqrt{x-1}\right)^{\arccos(1-2x)}$

b) $y=\left(\ln\left(5x-1\right)\right)^{-5x-1}$

13 a) $y=\left(\arcsin 2x\right)^{x-1}$

b) $y=\left(\log_{5}\left(x+1\right)\right)^{\operatorname{tg}3x}$

14 a) $y=\left(\ln\left(5x+1\right)\right)^{5x}$

b) $y=\left(\sin 2x\right)^{\arccos 2x}$

15 a) $y=\left(\sin^{2}\left(2x+1\right)\right)^{x-1}$

b) $y=\left(x^{5}+2x^{3}-5x-4\right)^{\arcsin 5x}$

16 a) $y=\left(\cos\left(6x^{5}+1\right)\right)^{\operatorname{tg}x}$

b) $y=\left(5x^{7}-8x^{4}+6x^{3}-1\right)^{\ln 8x}$

17 a) $y=\left(\arccos 2x\right)^{2x-5}$

b) $y=\left(\ln\left(1-x\right)^{3}\right)^{6x}$

18. a) $y=\left(\sqrt{x-1}\right)^{\ln(x-1)}$

b) $y=\left(5x^{7}-8x^{4}-1\right)^{\operatorname{arcctg}5x}$

19 a) $y=\left(\operatorname{tg}^{2}8x\right)^{x-5}$

b) $y=\left(x^{2}+1\right)^{\sin(x-8)}$

20 $y=\left(\sqrt{x^{9}-5x^{5}+6x^{3}+2x-1}\right)^{\ln 9x}$

$y=\left(\log_{5}\left(x+1\right)\right)^{\operatorname{tg}3x}$

21 a) $y=\left(\sin^2(x+1)\right)^{-8x}$

b) $y=\left(\lg x^2\right)^{\operatorname{tg} 2x}$

22 a) $y=\left(\cos^4(3x+5)\right)^{\cos x}$

b) $y=(\operatorname{arctg} 2x)^{-8x+1}$

23 a) $y=(\arccos 2x+8)^{x-2}$

b) $y=\left(x^5-8x^3+6x+4\right)^{\ln(x-3)}$

24 a) $y=\left(\sqrt{2x-7}\right)^{\operatorname{arctg} 3x}$

b) $y=(\ln 5x)^{\sin(x-9)}$

25 a) $y=\left(\cos^2(x+5)\right)^{9x-5}$

b) $y=\left(2x^2+9\right)^{\ln(x+1)}$

26 a) $y=\left(\ln^3(3x+2)\right)^{\sin x}$

b) $y=\left(\cos^4 9x\right)^{\operatorname{arctg} 2x}$

27 a) $y=\left(\sin^2(x+4)\right)^{2x+3}$

b) $y=\left(x^2+3\right)^{\operatorname{arctg} 2x}$

28 a) $y=\left(\ln^3(5x+1)\right)^{\cos 3x}$

b) $y=\left(\sin^5 2x\right)^{x+11}$

29 a) $y=\left(\sin^4 2x\right)^{\operatorname{arctg} 8x}$

b) $y=\left(\lg\left(x^2-2x+6\right)\right)^{2x+1}$

30 a) $y=\left(\sqrt{x+15}\right)^{\arcsin 7x}$

b) $y=(\sin(8x+1))^{\ln x-x}$

Задание 6.3. Найти первую и вторую производные функций.

1. a) $x^3+y^3+3xy=0$

b) $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t^3 \end{cases}$

2. a) $y=x+\operatorname{arctg} y$

b) $\begin{cases} x=2t+3 \\ y=3t^4 \end{cases}$

3. a) $y^2=25x-4$

b) $\begin{cases} x=6\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$

4. a) $\operatorname{tg} y=3x+5y$

b) $\begin{cases} x=2\cos^2 t \\ y=3\sin^2 t \end{cases}$

5. a) $\sin^2\left(3x+y^2\right)=5$

6. a) $x^2y^2+x=5y$

b) $\begin{cases} x=e^{-2t} \\ y=e^{6t} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+2} \\ y = \dfrac{t}{(t+2)^2} \end{cases}$

7. a) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{7} = 1$

b) $\begin{cases} x = 3t^3 - 1 \\ y = t^3 - 2 \end{cases}$

8. a) $\operatorname{arcctg} y = 4x^2 + 5y^2$

b) $\begin{cases} x = 4t^2 + 3 \\ y = 8t^2 - 2 \end{cases}$

9. a) $x^2 y^2 = \operatorname{ctg} y$

b) $\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 7\sin^3 t \end{cases}$

10. a) $\ln y - yx = 7$

b) $\begin{cases} x = 7\cos t - 1 \\ y = 2\sin t + 2 \end{cases}$

11. a) $e^{xy} = 4x - 7y$

b) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \dfrac{t}{(t+1)^2} \end{cases}$

12. a) $xy^2 - y = 4x - 5$

b) $\begin{cases} x = e^{-3t+2} \\ y = e^{4t-1} \end{cases}$

13. a) $4\sin(x+y) = x^2$

b) $\begin{cases} x = 2t^3 - 1 \\ y = t^3 \end{cases}$

14. a) $y = \dfrac{x+y}{x-y}$

b) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln t \end{cases}$

15. a) $y = e^{\sin y} + 4x$

b) $\begin{cases} x = 2\cos t - 6 \\ y = 4\sin t - 7 \end{cases}$

16. a) $\sin(x+y) - 2x + 5y = 7$

b) $\begin{cases} x = 4\cos^2 t - 2 \\ y = 6\sin^2 t + 1 \end{cases}$

17. a) $2\ln y - \sin x + xy = 0$

18. a) $x^2 - \operatorname{tg} y + 3xy = 5y$

b) $\begin{cases} x = te^{-t} \\ y = \dfrac{t}{e^{5t}} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{(3t+2)^2} \\ y = \dfrac{1}{(t+2)^2} \end{cases}$

19. a) $\sin\left(x^3 + y^3\right) + 2xy = x^2$

b) $\begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = t^3 \end{cases}$

20. a) $\ln y = x + \operatorname{sintg} y$

b) $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 3t + 2 \end{cases}$

21. a) $y^2 + x^2 = 8x - \sin y$

b) $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 12\sin^3 t \end{cases}$

22. a) $e^{5xy} = 3x + 7y$

b) $\begin{cases} x = 5\cos^2 t \\ y = 6\sin^2 t \end{cases}$

23. a) $y^2 + x = \arcsin x + y$

b) $\begin{cases} x = \dfrac{7}{t+2} \\ y = \dfrac{t}{(t-2)^2} \end{cases}$

24. a) $\ln y - \dfrac{y}{x} = 12$

b) $\begin{cases} x = e^{6t} \\ y = e^{-9t} \end{cases}$

25. a) $\operatorname{ctg}\left(x^3 + y\right) + y + 2x = 0$

b) $\begin{cases} x = 7t - 2 \\ y = 5t^3 \end{cases}$

26. a) $y^2 = \sin(x + y) - 2$

b) $\begin{cases} x = 8t^3 + 3 \\ y = 2t^3 \end{cases}$

27. a) $y^2 = \cos x - 4xy$

b) $\begin{cases} x = 8\cos^2 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}$

28. a) $\ln(xy) = 3x + 7y$

b) $\begin{cases} x = 9\cos^2 t \\ y = 10\sin^2 t \end{cases}$

29. a) $\dfrac{x}{y} - \sin 3x + y^2 = 5$

30. a) $x^2 \sin y + x = 5y^2$

b) $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \dfrac{7}{t+2} \\ y = \dfrac{t}{(t+2)^2} \end{cases}$

Задание 6.4. Вычислить с помощью дифференциала приближенное значение функции в заданной точке.

1. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}, \quad x = 1{,}58$
2. $y = \sqrt{2x - \sin\dfrac{\pi x}{2}}, \quad x = 1{,}02$
3. $y = \arccos 3x, \quad x = 0{,}6$
4. $y = \sqrt[3]{2x + \cos x}, \quad x = 0{,}01$
5. $y = \sqrt{4x+1}, \quad x = 1{,}78$
6. $y = x^6 + \sqrt{5+x}, \quad x = 2{,}997$
7. $y = \sqrt[5]{x^2+28}, \quad x = 1{,}99$
8. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}, \quad x = 1{,}016$
9. $y = \sqrt{1+x+\sin x}, \quad x = 0{,}01$
10. $y = \sqrt{x^2+x+5}, \quad x = 1{,}97$
11. $y = \sqrt[3]{2x^3+5x}, \quad x = 1{,}012$
12. $y = \dfrac{x+\sqrt{5+x^2}}{2}, \quad x = 0{,}98$
13. $y = x^2 + \sqrt[4]{x}, \quad x = 1{,}021$
14. $y = \arcsin 2x, \quad x = 0{,}08$
15. $y = \sqrt{x}, \quad x = 8{,}86$
16. $y = \sqrt[5]{x^2}, \quad x = 1{,}03$
17. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 2{,}34$
18. $y = \sqrt{x^2+5}, \quad x = 1{,}97$
19. $y = \dfrac{3x+2x^3}{3}, \quad x = 2{,}58$
20. $y = \sqrt[3]{x^2+2x+5}, \quad x = 0{,}97$
21. $y = \sqrt[5]{x}, \quad x = 1{,}21$
22. $y = \operatorname{arctg} 3x, \quad x = 1{,}05$
23. $y = x^4 + 4x, \quad x = 1{,}1$
24. $y = x^2 + 2x + 3, \quad x = 1{,}98$
25. $y = \ln x, \quad x = 1{,}01$
26. $y = \operatorname{arctg} x, \quad x = 1{,}04$
27. $y = x^5, \quad x = 2{,}01$
28. $y = \sqrt[4]{x}, \quad x = 16{,}64$
29. $y = \sqrt[5]{\dfrac{2+x}{2-x}}, \quad x = 0{,}15$
30. $y = e^{x^2-x}, \quad x = 1{,}2$

7. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

7.1 Условие монотонности функции. Экстремумы функции

Функция $f(x)$ называется ***возрастающей*** на некотором интервале, если для любых двух чисел x_1 и x_2 из этого интервала из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Если же из неравенства $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция называется ***неубывающей*** в этом интервале.

Функция $f(x)$ называется ***убывающей*** в некотором интервале, если для любых двух чисел x_1 и x_2 из этого интервала из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Если же из неравенства $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_2) \le f(x_1)$, то функция называется ***невозрастающей*** в этом интервале.

Функции возрастающие и убывающие, а также функции невозрастающие и неубывающие называются ***монотонными***.

Признак монотонности функции.

Если функция $f(x)$ дифференцируема на (a,b) и $f'(x) \ge 0$ ($f'(x) \le 0$) на (a,b), то функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на (a,b).

Говорят, что функция $f(x)$ в точке x_0 имеет ***максимум*** (***минимум***), если значение функции $f(x)$ в точке x_0 больше (меньше), чем ее значение во всех точках интервала, содержащего точку x_0.

Максимум и минимум функции называются ***экстремумом функции***. Точка максимума или минимума функции называется ***точкой ее экстремума***.

Точка x_0, в которой $f'(x_0)=0$, называется ***стационарной точкой***.

Точки, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует, называются ***критическими точками***.

Не всякая критическая точка является точкой экстремума. Точки экстремума следует искать среди критических точек.

Необходимое условие экстремума.

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ максимум или минимум, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Достаточные условия экстремума.

Первое достаточное условие.

Если при переходе через критическую точку слева направо $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то эта точка есть ***точка максимума*** функции, а если $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то эта точка есть ***точка минимума*** функции. Если же при переходе через критическую точку слева направо $f'(x)$ не меняет знак, то функция $f(x)$ в этой точке экстремума не имеет.

Второе достаточное условие.

Если в точке $x=x_0$ первая производная функции $f(x)$ равна нулю:

$$f'(x_0)=0,$$

то при $x=x_0$ имеет место максимум, если $f''(x_0)<0$,

и минимум, если $f''(x_0)>0$.

Если же $f''(x_0)=0$, то для заключения об экстремуме в этой точке требуется дальнейшее исследование (предполагается, что функция $f(x)$ в окрестности точки $x=x_0$ имеет непрерывную вторую производную).

Третье достаточное условие.

Пусть $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0,\ldots$, $f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. В этом случае функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, если n– четное число, а именно, максимум при $f^{(n)}(x_0)<0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0)>0$. Если же n – нечетное число, то функция $f(x)$ в точке x_0 экстремума не имеет.

7.2 Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Такая функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a,b]$, либо на границе отрезка, то есть при $x_0=a$ или $x_0=b$. Если $x_0\in(a,b)$, то точку x_0 следует искать среди критических точек данной функции.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на $[a,b]$:

1) Найти критические точки функции на интервале (a,b);
2) Вычислить значения функции в найденных критических точках;
3) Вычислить значения функции на концах отрезка, то есть в точках $x=a$ и $x=b$;
4) Среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=x^3-3x^2+1 \quad \text{на отрезке} \quad [-1,4].$$

Решение. Находим критические точки данной функции:

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

1) $f'(x)=0$ при $x_1=0\in[a,b]$ и при $x_2=2\in[a,b]$.
2) $f(0)=1$, $f(2)=2^3-3\cdot 2^2+1=-3$
3) $f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)^2+1=-3$, $f(4)=4^3-3\cdot 4^2+1=17$
4) $f_{наиб}=17$ при $x=4$, $f_{наим}=-3$ при $x=-1$ и при $x=2$.

7.3 Выпуклость, вогнутость функции. Точки перегиба

Говорят, что на интервале (a,b) кривая ***вогнутая***, если она лежит выше касательной, проведенной в любой ее точке.

Говорят, что на интервале (a,b) кривая ***выпуклая***, если она лежит ниже касательной, проведенной в любой ее точке.

Достаточные условия выпуклости (вогнутости) графика функции.

Если $f^{//}(x_0)<0$ в интервале (a,b), то график функции является выпуклым в этом интервале; если же $f^{//}(x_0)>0$, то в интервале (a,b) график функции – вогнутый.

Точка кривой, отделяющая ее выпуклую дугу от вогнутой, называется ***точкой перегиба*** (то есть это та точка, проходя через которую $f^{//}(x)$ меняет знак).

Точки кривой, в которых $f^{//}(x)=0$ или $f^{//}(x)=\infty$, а также те из них, в которых $f^{//}(x)$ не существует, называются ***критическими точками второго рода.***

Точки перегиба следует искать среди критических точек второго рода.

7.4 Асимптоты

Прямая L называется ***асимптотой*** кривой $y= f(x)$, если расстояние от прямой L до точки $M(x,y)$, принадлежащей кривой, стремится к нулю по мере удаления точки по этой кривой в бесконечность.

Различают асимптоты: 1) вертикальные, 2) наклонные, 3) горизонтальные.

Прямая $x=a$ называется ***вертикальной асимптотой*** кривой $y=f(x)$, если при $x\to a$ (справа или слева) значение функции стремится в бесконечность, то есть выполнено одно из следующих условий:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty\ ,\ \lim_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty .$$

Прямая $y=kx+b$ является ***наклонной асимптотой*** кривой $y=f(x)$, если существуют пределы

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right] .$$

Прямая $y=b$ является ***горизонтальной асимптотой*** кривой $y=f(x)$, если существует предел $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ (горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной асимптоты при $k=0$ и $b\neq 0$).

7.4 Построение графиков функций

Эскиз графика функции можно построить, если знать его характерные особенности. Для этого надо провести следующие исследования:

1. Найти область определения функции.
2. Установить четность, нечетность, периодичность функции.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат.
4. Найти критические точки, интервалы возрастания и убывания функции. Найти точки экстремума функции.
5. Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости.
6. Найти асимптоты.
7. Используя полученные результаты исследования, построить график функции.

Пример 2. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$ и построить ее график.

Решение.

1) Область определения функции: $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2) По определению функция является ***четной***, если $f(-x)=f(x)$, и ***нечетной***, если $f(-x)=-f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Для исследуемой функции $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, следовательно, данная функция не является ни четной, ни нечетной. Функция не периодична.

3) Найдем точки пересечения функции с осью Ox, то есть

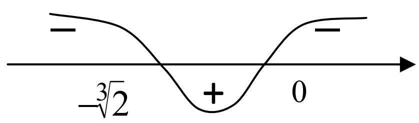
$$y=0,\quad \frac{1-x^3}{x^2}=0,\ \Rightarrow\ 1-x^3=0,\ \Rightarrow x=1,$$

значит график функции проходит через точку $(1;0)$. Точек пересечения графика с осью Oy нет, так как точка с абсциссой $x=0\notin D(f)$.

4) $$y'=\frac{-3x^2\cdot x^2-\left(1-x^3\right)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-3x^4-2x+2x^4}{x^4}=\frac{-x^4-2x}{x^4}=-\frac{x^3+2}{x^3}$$

$y'=0$ в точке $x=-\sqrt[3]{2}$, которая является критической; y' не определена в точке $x=0$, но эта точка не принадлежит области определения функции.

Отметим эти точки на числовой оси и определим знак производной в каждом полученном интервале.



На интервале $x\in\left(-\infty;-\sqrt[3]{2}\right)\cup\left(0;+\infty\right)$ производная отрицательная, следовательно, функция на этом интервале убывает, а на интервале $x \in \left(-\sqrt[3]{2};0\right)$ производная положительная, то функция возрастает.

При переходе через критическую точку $x = -\sqrt[3]{2}$ производная меняет знак с "–" на "+", следовательно, $x = -\sqrt[3]{2}$ - точка минимума, $y_{\min} = f\left(-\sqrt[3]{2}\right) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ - минимальное значение функции.

5) $y'' = -\frac{3x^2 \cdot x^3 - \left(x^3+2\right)\cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{3x^5 - 3x^5 - 6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}$

$y''\neq 0$, y'' не определена при $x = 0$, но это значение x не может быть абсциссой точки перегиба, так как $x = 0 \notin D(f)$. Значит точек перегиба график этой функции не имеет.

Во всей области определения $y'' = \frac{6}{x^4} > 0$, поэтому ее график всюду вогнут.

6) Данная функция не определена при $x = 0$.

$$\lim_{x\to+0}\frac{1-x^3}{x^2} = +\infty; \qquad \lim_{x\to-0}\frac{1-x^3}{x^2} = +\infty.$$

Следовательно, $x = 0$ - уравнение вертикальной асимптоты.

Будем искать наклонную асимптоту $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x\to\mp\infty}\left(f(x) - kx\right).$$

Найдем k и b:

$$k = \lim_{x\to\mp\infty}\frac{1-x^3}{x^3} = \lim_{x\to\mp\infty}\frac{\frac{1}{x^3}-1}{1} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{1-x^3}{x^2} + x\right) = \lim_{x\to\mp\infty}\frac{1-x^3+x^3}{x^2} = \lim_{x\to\mp\infty}\frac{1}{x^2} = 0.$$

Итак, $y = -x$ - уравнение наклонной асимптоты.

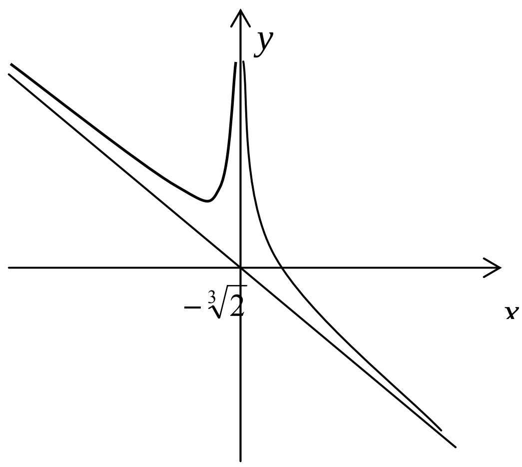
Вычислим $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}{1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}{1} = +\infty.$$

Значит горизонтальных асимптот нет.

7) Используя полученные результаты, построим график функции:



Пример 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$ и построить ее график.

Решение.

1) Область определения функции: $(-\infty;+\infty)$.

2) Для исследуемой функции $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, следовательно, данная функция не является ни четной, ни нечетной. Функция не периодична.

3) Найдем точки пересечения функции с осью Ox, то есть

$$y=0,\quad \sqrt[3]{2x^2-x^3}=0,\quad\Rightarrow\quad 2x^2-x^3=0,\quad\Rightarrow\quad x=0,\quad x=2.$$

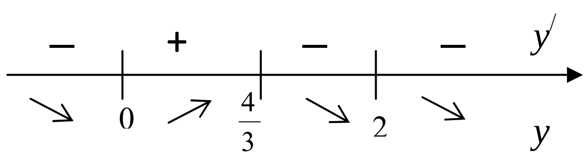
Значит график функции проходит через точки $(0;0)$ и $(2{,}0)$. Найдем точки пересечения графика с осью Oy, то есть $x=0$ тогда $y=0$. Тогда график функции проходит через точку с координатами $(0;0)$.

4) $$y'=\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}\right)'=\frac{4x-3x^2}{3\sqrt[3]{\left(2x^2-x^3\right)^2}}=\frac{x(4-3x)}{3x\sqrt[3]{x(2-x)^2}}=\frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}}$$

$$y'=0,\quad \text{когда}\quad 4-3x=0,\quad \text{а}\quad \sqrt[3]{x(2-x)^2}\neq 0,$$

$$y'=0\quad \text{в точке}\quad x=\frac{4}{3},\quad \text{и}\quad x\neq 0,\quad x\neq 2.$$

Отметим эти точки на числовой оси и определим знак производной в каждом полученном интервале.



На интервале

$x\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$

производная отрицательная, следовательно, функция на этом интервале убывает, а на интервале $x \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$ производная положительная, и функция возрастает. Точки входят в область определения. При переходе через критическую точку $x=0$ производная меняет знак с "–" на "+", следовательно, $x=0$ – точка минимума, $y_{\min} = f(0) = 0$ – минимальное значение функции.

При переходе через критическую точку $x = \frac{4}{3}$ производная меняет знак с "+" на "–" ,следовательно, $x = \frac{4}{3}$ – точка максимума, $y_{\max} = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$ – максимальное значение функции.

5)

$$y'' = \left(\frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x(2-x)^2}}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4-3x}{\sqrt[3]{x(2-x)^2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{(4-3x)'\sqrt[3]{x(2-x)^2} - (4-3x)\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)'}{\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{-3\sqrt[3]{x(2-x)^2} - (4-3x)\dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^2}\left((2-x)^2 - 2x(2-x)\right)}{\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{-3\sqrt[3]{x(2-x)^2} - (4-3x)\dfrac{4-4x+x^2-4x+2x^2}{3\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^2}}{\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{-9x(2-x)^2 - (4-3x)\left(4-8x+3x^2\right)}{3\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^2\left(\sqrt[3]{x(2-x)^2}\right)^2} =$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{-9x\left(4-4x+x^2\right)-\left(16-32x+12x^2-12x+24x^2-9x^3\right)}{\left(\sqrt[3]{x\left(2-x\right)^2}\right)^4}=$$

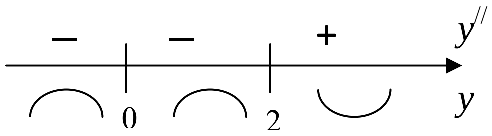
$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{-36x+36x^2-9x^3-16+44x-36x^2+9x^3}{x^{\frac{4}{3}}\left(2-x\right)^{\frac{8}{3}}}=\frac{1}{9}\cdot\frac{-16+8x}{x^{\frac{4}{3}}\left(2-x\right)^{\frac{8}{3}}}=$$

$$=-\frac{8}{9}\cdot\frac{2-x}{x^{\frac{4}{3}}\left(2-x\right)^{\frac{8}{3}}}=-\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}\left(2-x\right)^{\frac{5}{3}}}=-\frac{8}{9x^{\frac{4}{3}}\left(2-x\right)^{\frac{5}{3}}}\quad .$$

Ни в одной точке $y^{//}$ не обращается в нуль.

$$x^{\frac{4}{3}}\cdot\left(2-x\right)^{\frac{5}{3}}\neq 0\ ,\qquad \text{когда}\qquad x_1\neq 0,\qquad x_2\neq 2.$$

Отметим эти точки на числовой оси и определим знак второй производной в каждом полученном интервале.



На интервале $x\in(-\infty;2)$ вторая производная отрицательная, следовательно, функция на этом интервале выпуклая, а на интервале $x\in(2;+\infty)$ вторая производная положительная, то функция вогнутая. Точки входят в область определения. При переходе через критическую точку $x=2$ вторая производная меняет знак с "–" на "+", следовательно, $x=2$ – точка перегиба, $y=f(2)=0$ – значение функции в точке перегиба.

6) Асимптоты.

Вертикальных асимптот нет, так как функция определена всюду.

Наклонные асимптоты.

$$y=kx+b$$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}\right)^2-x\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}\right)^2-x\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x^2}=$$

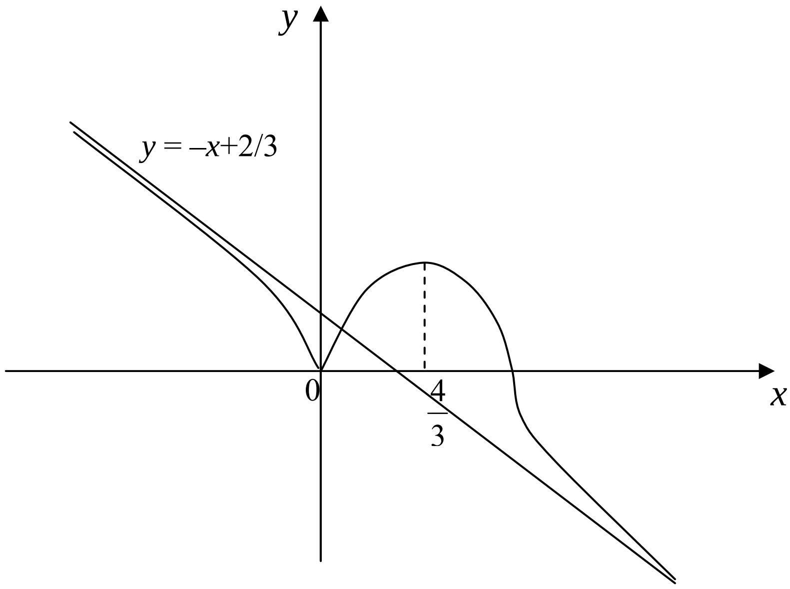
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - x^3 + x^3}{\left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3}\right)^2 - x\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{\left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3}\right)^2 - x\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1}\right)^2 - x^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 \cdot \left(\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1}\right)^2 - \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1}\right)^2 - \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3} \quad .$$

Уравнение наклонной асимптоты $y = -x + \dfrac{2}{3}$.

7) Построим график функции



Пример 4. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$ и построить ее график.

Решение.

1) Область определения функции: $(-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$.
2) Исследуем функцию на четность, нечетность и периодичность:

$$f(-x)=\frac{\left(-x^3\right)}{4-\left(-x^2\right)}=\frac{-x^3}{4-x^2}=-\frac{x^3}{4-x^2}=-f(x)$$

– функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. Функция не периодическая.

3) Найдем точки пересечения функции с осью Ox, то есть

$$y=0,\quad \frac{x^3}{4-x^2}=0 \quad\Rightarrow\quad x^3=0 \quad\Rightarrow\quad x=0\ ,$$

значит график функции проходит через точку $(0;0)$.

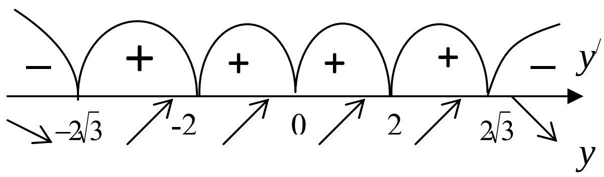
Найдем точки пересечения функции с осью Oy, то есть $x=0$. Получаем $y=0$.

Таким образом, точка с координатами $(0;0)$ – единственная точка пересечения графика с осями координат.

4) $$y'=\frac{3x^2\cdot\left(4-x^2\right)-x^3\cdot(-2x)}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{12x^2-3x^4+2x^4}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{12x^2-x^4}{\left(4-x^2\right)^2}$$

$y'=0$ в точках $x_1=0$ и $x_{2,3}=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$, которые являются критическими; y' не определена в точке $x_1=-2$, $x_2=2$.

Отметим эти точки на числовой оси и определим знак производной в каждом полученном интервале.



На интервале $x\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$ производная отрицательная, следовательно, функция на этом интервале убывает, а на интервале $x\in\left(-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$ производная положительная, то функция возрастает.

При переходе через критическую точку $x=-2\sqrt{3}$ производная меняет знак с "–" на "+", следовательно, $x=-2\sqrt{3}$ – точка минимума, $y_{\min}=f\left(-2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$ – минимальное значение функции.

При переходе через критическую точку $x=2\sqrt{3}$ производная меняет знак с "+" на "–", следовательно, $x=2\sqrt{3}$ – точка максимума, $y_{\max}=f\left(2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$ – максимальное значение функции.

5)

$$y^{//}=\left(\frac{12x^2-x^4}{\left(4-x^2\right)^2}\right)^{/}=\frac{\left(24x-4x^3\right)\cdot\left(4-x^2\right)^2-\left(12x^2-x^4\right)\cdot 2\cdot\left(4-x^2\right)\cdot(-2x)}{\left(4-x^2\right)^4}=$$

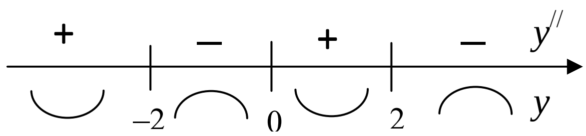
$$=\frac{\left(4-x^2\right)\cdot\left(\left(24x-4x^3\right)\cdot\left(4-x^2\right)+4x\left(12x^2-x^4\right)\right)}{\left(4-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(24x-4x^3\right)\cdot\left(4-x^2\right)+4x\left(12x^2-x^4\right)}{\left(4-x^2\right)^3}=$$

$$=\frac{96x-24x^3-16x^3+4x^5+48x^3-4x^5}{\left(4-x^2\right)^3}=\frac{96x+8x^3}{\left(4-x^2\right)^3}\quad .$$

$y^{//}=0$ при $x=0$, $y^{//}$ не определена при $x=-2$ и при $x=2$.

Отметим эти точки на числовой оси и определим знак второй производной в каждом полученном интервале.



На интервале $x\in(-\infty;-2)\cup(0;2)$ вторая производная положительная , следовательно, функция на этом интервале вогнутая, а на интервале $x\in(-2;0)\cup(2;+\infty)$ вторая производная отрицательная, то функция выпуклая. Точки $x=-2$ и $x=2$ не входят в область определения. При переходе через критическую точку $x=0$ вторая производная меняет знак с "–" на "+", следовательно, $x=0$ – точка перегиба, $y=f(0)=0$ – значение функции в точке перегиба.

6) Данная функция не определена при $x=-2$ и при $x=2$.

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{x^3}{4-x^2}=-\infty;\qquad \lim_{x\to -2-0}\frac{x^3}{4-x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^3}{4-x^2}=-\infty;\qquad \lim_{x\to 2-0}\frac{x^3}{4-x^2}=+\infty\quad .$$

Следовательно, $x=2$ и $x=-2$ - уравнения вертикальных асимптот. Будем искать наклонную асимптоту $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x};\qquad b=\lim_{x\to\mp\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Найдем k и b :

$$k=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^3}{x\left(4-x^2\right)}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^3}{x^3\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{1}{\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^3}{4-x^2}-(-x)\right)=\lim_{x\to\mp\infty}\left(\frac{x^3}{4-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^3+4x-x^3}{4-x^2}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{4x}{4-x^2}=0$$

Итак, $y=-x$ - уравнение наклонной асимптоты.

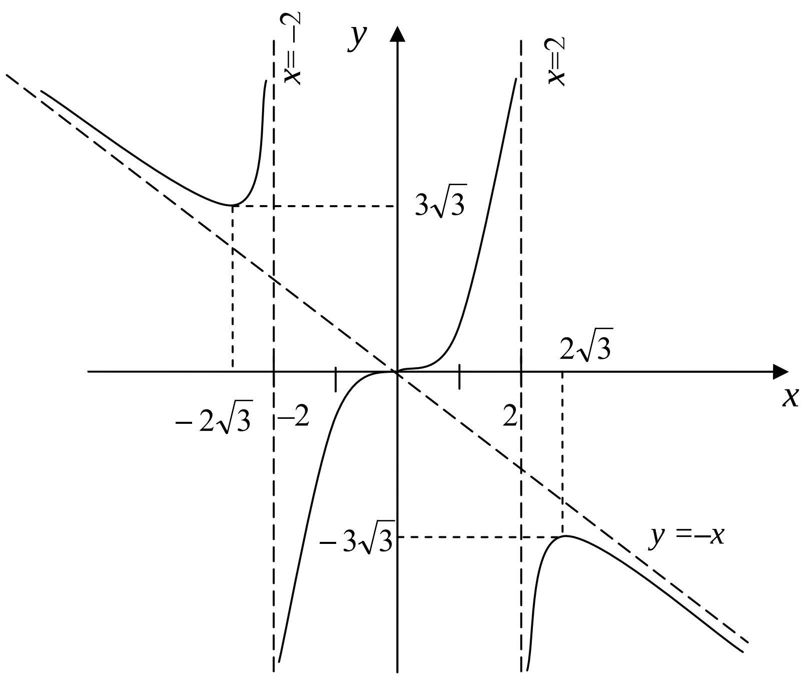
Вычислим $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{4-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{4-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}=+\infty\quad.$$

Значит, горизонтальных асимптот нет.

7) Используя полученные результаты, построим график.



Задание 7.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

1. $y = x^2 + \frac{x}{2}$, $[-3;3]$
2. $y = \sqrt{2(x-2)^2(7-x)}$, $[0;6]$
3. $y = x + \frac{4}{x}$, $[1;4]$
4. $y = \frac{x^4}{2} + x^3 - x^2 + 2$, $[-3;1]$
5. $y = 2\sqrt{x} - x$, $[0;4]$
6. $y = x - 4\sqrt{x} + 5$, $[1;9]$
7. $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$, $[-6;-1]$
8. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, $[-1;2]$
9. $y = \frac{x^2+4}{x}$, $[1;4]$
10. $y = \left(x^2 - 2x\right)^2$, $[0;3]$
11. $y = (x-1)^2(x+2)$, $[-3;2]$
12. $y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$, $[0;2]$
13. $y = x^3 - 12x + 7$, $[0;3]$
14. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}$, $[-2;5]$
15. $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
16. $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$, $[-3;-1]$
17. $y = x^3 - 3x + 1$, $\left[\frac{1}{2};2\right]$
18. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}$, $[-1;6]$
19. $y = x^4 + 4x$, $[-2;-1]$
20. $y = 81x - x^4$, $[-1;4]$
21. $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
22. $y = 3 - 2x^2$, $[-1;3]$
23. $y = \left(4 - x^2\right)\left(4 + x^2\right)$, $[-1;3]$
24. $y = x^3 - 12x + 7$, $[-3;3]$
25. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$, $[1;5]$
26. $y = 8x + \frac{4}{x^2} - 15$, $\left[\frac{1}{2};2\right]$
27. $y = \frac{x-1}{x+1}$, $[0;4]$
28. $y = x^4 - 2x^2 + 5$, $[-1;2]$
29. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$, $[-1;7]$
30. $y = \frac{4}{x^2} - 8x - 15$, $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$

Задание 7.2. Провести полное исследование функции и построить ее график.

1.
   a) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$
   b) $y = \ln\left(x^2 + 4\right)$

2.
   a) $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$
   b) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

3. a) $y = e^{\frac{1}{5+x}}$

b) $y = \dfrac{3-x^2}{1+x^2}$

4. a) $y = \dfrac{x}{9-x}$

b) $y = \ln\left(x^2+1\right)$

5. a) $y = \dfrac{4x-x^2-4}{x}$

b) $y = xe^{-x^2}$

6. a) $y = \dfrac{x^2}{4x^2-1}$

b) $y = x^5 - 7x^2 + 25x - 15$

7. a) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

b) $y = x^5 - x^3 - 2x$

8. a) $y = x \operatorname{arcctg} x$

b) $y = \dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$

9. a) $y = x + \ln(1+x)$

b) $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$

10. a) $y = \dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$

b) $y = x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{4}x^4$

11. a) $y = x^2 - 2\ln x$

b) $y = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$

12. a) $y = \dfrac{4x}{4-x^2}$

b) $y = (x-3)^2(2-x)$

13. a) $y = \dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$

b) $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

14. a) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x+1}$

b) $y = x^2 e^{-x}$

15. a) $y = -\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

b) $y = \dfrac{12x}{9+x^2}$

16. a) $y = \dfrac{x^5}{x^4-1}$

b) $y = (x-1)e^{3x}$

17. a) $y = \dfrac{x^2+6}{x^2-1}$

b) $y = xe^{x^2}$

18. a) $y = x^2 \operatorname{arcctg} x$

b) $y = \dfrac{x^2}{4x^2+1}$

19. a) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$

b) $y = (3-x)e^{x-2}$

20. a) $y = \dfrac{x^2-x+2}{x+2}$

b) $y = xe^{-x}$

21. a) $y=\dfrac{2x-1}{\left(x^2-1\right)^2}$

b) $y=\left(2+x^2\right)e^{-x^2}$

22. a) $y=\ln\left(x^2-1\right)$

b) $y=\dfrac{x-3}{x^2+1}$

23. a) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$

b) $y=xe^{2x-1}$

24. a) $y=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x}\,(x-5)$

b) $y=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$

25. a) $y=x\ln x$

b) $y=\dfrac{1}{e^x+1}$

26. a) $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$

b) $y=\dfrac{e^{3x}+1}{e^x}$

27. a) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

b) $y=\dfrac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$

28. a) $y=\dfrac{5x^4+3}{x}$

b) $y=e^{2x-x^2}$

29. a) $y=\dfrac{4-2x}{1-x^2}$

b) $y=\ln\left(9+x^2\right)$

30. a) $y=\dfrac{x^3}{x^4-1}$

b) $y=(x+4)e^{2x}$

8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

8.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на $(a;\ b)$, если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in (a;b)$.

Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ две первообразные функции $f(x)$, то $\Phi(x) = F(x) + C$, т.е. две любые первообразные одной и той же функции отличаются на постоянную величину C.

Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается символом

$\int f(x)dx$ т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{8.1}$$

В равенстве (8.1) $f(x)$ называется подинтегральной функцией, а $f(x)dx$ – ***подинтегральным*** выражением.

Нахождение неопределенного интеграла по данной подинтегральной функции есть действие ***интегрирования***. Геометрически неопределенный интеграл представляет собой множество плоских кривых $y = F(x) + C$, которые называют ***интегральными кривыми***.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$
2. $\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C.$
3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$
4. $\int \left(f(x) \pm \varphi(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$

Таблица основных неопределенных интегралов:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1).$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int e^x dx = e^x + C.$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

10. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x + a}{x - a}\right| + C.$

8.2. Непосредственное интегрирование

Интегрирование, основанное на применении основных свойств неопределенного интеграла и таблицы основных интегралов, принято называть ***непосредственным интегрированием***.

1. Найти интегралы:

а) $\int\left(3x^2 - \sqrt{x} + \frac{5}{x^2}\right)dx,$

б) $\int\left(5\sin x - 2e^x\right)dx,$

в) $\int\left(\frac{2}{4 + x^2} - \frac{3}{\sqrt{25 - x^2}} + \frac{7}{x}\right)dx,$

г) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx.$

Решение.

а) $\int\left(3x^2 - \sqrt{x} + \frac{5}{x^2}\right)dx = \int 3x^2 dx - \int \sqrt{x}dx + \int \frac{5}{x^2}dx =$

$$= 3\int x^2dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx + 5\int x^{-2}dx = 3\frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 5\frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= x^3 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{5}{x} + C;$$

б) $\int\left(5\sin x - 2e^x\right)dx = \int 5\sin x dx - \int 2e^x dx = 5\int \sin x dx - 2\int e^x dx =$

$= -5\cos x - 2e^x + C;$

в) $\int\left(\frac{2}{4+x^2} - \frac{3}{\sqrt{25-x^2}} + \frac{7}{x}\right)dx = 2\int\frac{dx}{4+x^2} - 3\int\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} + 7\int\frac{dx}{x} =$

$= \frac{2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - 3\arcsin\frac{x}{5} + 7\ln|x| + C =$

$= \operatorname{arctg}\frac{x}{2} - -3\arcsin\frac{x}{5} + 7\ln|x| + C;$

г) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\cos^2 x} =$

$= \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C.$

Задание 8.1. Найти интегралы:

1. $\int\left(4x^3 - \frac{1}{x^7} + \frac{5}{x}\right)dx,$
2. $\int\left(6\cos x - 3^x\right)dx,$
3. $\int\left(\frac{1}{6+x^2} - \frac{8}{\sqrt{4+x^2}} + \frac{2}{x^3}\right)dx,$
4. $\int\left(\frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3}\right)dx,$
5. $\int e^x\left(x^2 + \frac{1}{e^x\sin x}\right)dx,$
6. $\int\left(\frac{(1+x)^2}{x}\right)dx,$
7. $\int\left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)dx,$
8. $\int\left(\frac{x^2 + 2x\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}}\right)dx,$
9. $\int\left(\frac{5x^5 - x^3 - 2}{x^4}\right)dx,$
10. $\int x^3\left(5x-4\right)^2 dx,$
11. $\int\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2 dx,$
12. $\int\frac{(\sqrt{x+2})^3}{x}dx,$

13. $\int\left(7\sin x+2e^{x}-5x^{2}\right)dx,$

14. $\int\left(\frac{5}{1+x^{2}}-\frac{7}{\cos^{2}x}\right)dx,$

15. $\int\left(\frac{4}{\sqrt{1-x^{2}}}+3^{x}\right)dx,$

16. $\int\left(\frac{3}{9-x^{2}}-\cos x\right)dx,$

17. $\int\left(5^{x}-\frac{5}{16+x^{2}}\right)dx,$

18. $\int\frac{3-2\sin^{2}x}{\sin^{2}x}dx,$

19. $\int\frac{\cos 2x}{\sin^{2}x\cos^{2}x}dx,$

20. $\int\frac{x^{3}+2}{x}dx,$

21. $\int\left(\frac{2}{x^{5}}+\frac{3}{x}\right)dx,$

22. $\int\frac{\cos^{2}x-2}{\cos^{2}x}dx,$

23. $\int\frac{x^{2}-9}{x^{2}-8}dx,$

24. $\int\left(2^{x}-\frac{1}{x^{2}}\right)dx,$

25. $\int\left(3^{5}+7-\frac{1}{x^{5}}\right)dx.$

8.3. Метод подстановки

Если интеграл $\int f(x)dx$ не является табличным, то часто его можно упростить путем введения новой переменной t. Положим $x=\varphi(t)$ – это монотонная и непрерывно дифференцируемая функция на некотором промежутке. Если на указанном промежутке функция $f(x)$ интегрируема, то справедливо:

$$\int f(x)dx=\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt.$$

После того, как интеграл найден с помощью подстановки, следует возвратиться к первоначальной переменной x. Иногда вместо подстановки $x=\varphi(t)$ применяют подстановку $t=\varphi(x)$.

1. **Найти интегралы**:

а) $\int\frac{dx}{7x+1},$

б) $\int e^{x^{2}+1}xdx,$

в) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2}}}dx,$

г) $\int\frac{\cos x dx}{25+\sin^{2}x}.$

Решение.

а) Подстановка $t = 7x + 1$, тогда $dt = 7dx$ и $dx = \dfrac{dt}{7}$.

$$\int \frac{dx}{7x+1} = \frac{1}{7}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{7}\ln|t| + C = \frac{1}{7}\ln|7x+1| + C.$$

б) Подстановка $t = x^2 + 1$, тогда $dt = 2xdx,$ $xdx = \dfrac{dt}{2}$.

$$\int e^{x^2+1} xdx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C.$$

в) Положим $t = \arcsin x$, тогда $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = -\frac{\arcsin^2 x}{2} + C.$$

г) Подстановка $t = \sin x$, тогда $dt = \cos x dx$ и

$$\int \frac{\cos x dx}{25+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{5^2+t^2} = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{t}{5} + C = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{5} + C.$$

При решении примеров такого типа можно было бы явным образом не вводить переменную t, а поступать следующим образом:

$$\int \frac{\cos x dx}{25+\sin^2 x} = \int \frac{d\sin x}{5^2+\sin^2 x} = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{5} + C.$$

Задание 8.2. Методом подстановки найти интегралы.

1. $\int \sqrt{3+2x}dx,$
2. $\int (2x+3)^4 dx,$
3. $\int \sqrt{3x+4}dx,$
4. $\int \dfrac{dx}{2x+1},$
5. $\int \dfrac{dx}{(3x+1)^2},$
6. $\int e^{3x+2}dx,$
7. $\int 2^{-2x+1}dx,$
8. $\int \dfrac{2xdx}{x^2+2},$
9. $\int \sin^3 x\cos x dx,$
10. $\int \dfrac{\ln^2 x}{x}dx,$
11. $\int \dfrac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx,$
12. $\int e^{x^3}x^2 dx,$

13. $\int 6x\sin(x^2+3)dx,$

14. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx$,

15. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x},$

16. $\int e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2},$

17. $\int \frac{3x^2dx}{x^6-25},$

18. $\int \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx,$

19. $\int \frac{5x^2}{\sqrt{3-x^3}}dx,$

20. $\int \frac{\sin 2xdx}{(1+\cos 2x)^2},$

21. $\int e^{x^2+6x+1}(x+3)dx,$

22. $\int \frac{2xdx}{x^4+9},$

23. $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{\sin^2 x+3}},$

24. $\int \frac{6xdx}{\sqrt{x^4-5}},$

25. $\int \frac{e^xdx}{\sqrt{e^{2x}+1}}.$

8.4. Интегрирование по частям

Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, то справедлива формула $\int udv = uv - \int vdu.$

Данную формулу интегрирования по частям применяют в том случае, когда интеграл $\int vdu$ более простой в вычислении по сравнению с $\int udv.$

При этом следует иметь в виду, что если под знаком интеграла стоит произведение многочлена на тригонометрическую или показательную функции, то к u следует отнести многочлен, а оставшееся выражение к dv. Если же подинтегральная функция содержит сомножителем логарифмическую или обратную тригонометрическую функции, то их следует принимать за u, а остальное за dv.

Пример 1. Найти интегралы:

а) $\int xe^xdx,$

б) $\int x\cos xdx,$

в) $\int x^2\ln xdx,$

г) $\int 2x\operatorname{arctg} xdx.$

Решение.

а) $\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x, dv = \cos x dx \\ du = dx, v = e^x \end{vmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

б) $\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, dv = \cos x dx \\ du = dx, v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$

в) $\int x^2 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, dv = x^2 dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, v = \dfrac{x^3}{3} \end{vmatrix} = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \int \dfrac{x^3}{3}\dfrac{dx}{x} =$

$= \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{1}{3}\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{1}{3}\dfrac{x^3}{3} + C.$

г) $\int 2x \operatorname{arctg} x dx = \begin{vmatrix} u = \operatorname{arctg} x, dv = 2xdx \\ du = \dfrac{dx}{\dfrac{dx}{1+x^2}}, v = x^2 \end{vmatrix} = x^2 \operatorname{arctg} x - \int \dfrac{x^2}{1+x^2} dx =$

$= x^2 \operatorname{arctg} x - \int \dfrac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = x^2 \operatorname{arctg} x - \int dx + \int \dfrac{dx}{1+x^2} =$

$= x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x + C.$

Задание 8.3. Пользуясь формулой интегрирования по частям, найти интегралы:

1. $\int \ln x dx,$
2. $\int x\sin x dx,$
3. $\int xe^{-x} dx,$
4. $\int x^3 \ln x dx,$
5. $\int \operatorname{arctg} x dx,$
6. $\int x3^x dx,$
7. $\int \arccos x dx,$
8. $\int x\cos 2x dx,$
9. $\int \ln(x^2 + 1) dx,$
10. $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx,$
11. $\int (x^2 - x + 1)\ln x dx,$
12. $\int (3x + 1)e^x dx,$
13. $\int x^2 \cos x dx,$
14. $\int x^2 e^{3x} dx,$
15. $\int x3^x dx,$
16. $\int x^2 \sin 3x dx,$
17. $\int (x^2 - 2x)e^{-x} dx,$
18. $\int (5 - x)e^x dx,$
19. $\int xe^{2x} dx,$
20. $\int x^2 \ln x dx,$

21. $\int (3x^2+5)\ln x dx,$ 22. $\int (5x+1)e^{2x}dx,$

23. $\int x5^x dx,$ 24. $\int (2x-1)2^x dx,$

25. $\int (x^3+5x-1)\ln x dx.$

Указание. Интегралы вида

$$\int P(x)e^{ax}dx,\quad \int P(x)\sin axdx,\quad \int P(x)\cos axdx,$$

где $P(x)$ – многочлен, следует находить, применяя последовательно формулу интегрирования по частям столько раз, какова степень многочлена.

Иногда после двукратного применения формулы интегрирования по частям, получаем в правой части выражение, содержащее исходный интеграл, таким образом, получаем уравнение с искомым интегралом в качестве неизвестного.

К таким интегралам относятся:

$\int e^{mx}\sin nxdx,$ $\int e^{mx}\cos nxdx,$

$\int \sin(\ln x)dx,$ $\int \cos(\ln x)dx,$

$\int \sqrt{a^2+x^2}dx,$ $\int \sqrt{a^2-x^2}dx,$

и другие.

а) Найти интеграл $\int e^x\cos xdx = \begin{vmatrix} u=e^x, dv=\cos xdx \\ du=e^x dx, v=\sin x \end{vmatrix} =$

$$=\sin xe^x - \int e^x \sin xdx = \begin{vmatrix} u=e^x, dv=\sin xdx \\ du=e^x dx, v=-\cos x \end{vmatrix} = \sin xe^x - \int e^x\cos xdx + 2C.$$

Т. е. получили уравнение относительно искомого интеграла

$$\int e^x\cos xdx = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos dx + 2C.$$

Откуда

$$\int e^x\cos xdx = \frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C.$$

Задание 8.4. Найти интегралы:

1. $\int \sin(\ln x)dx,$ 2. $\int \sqrt{1+x^2}dx,$

3. $\int e^x\sin xdx,$ 4. $\int \cos(\ln x)dx,$

5. $\int 3^x\cos xdx,$ 6. $\int e^{ax}\sin bxdx,$

7. $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx,$ 8. $\int e^{\arcsin x}dx,$

9. $\int e^{\arccos x}dx,$ 10. $\int e^{ax}\cos bx\,dx.$

8.5. Интегралы вида

a) $\int\dfrac{dx}{ax^2+bx+c},$

b) $\int\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx,$

c) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$

d) $\int\dfrac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$

Интегралы a) и c) приводятся к табличным интегралам 11-14 (см.8.1) путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене.

При вычислении интегралов типа b) и d) могут возникать две ситуации:

1. Если выражение $MX+N$ является производной от квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то интегралы b) и d) берутся по формулам (2) и (1) в п.8.1 соответственно;

2. Если же выражение $MX+N$ не совпадает с производной трехчлена ax^2+bx+c, то его следует преобразовать так, чтобы из него можно было выделить производную трехчлена. После этого каждый из интегралов b) и d) представляются в виде суммы двух интегралов, один из которых берется по формулам (2) или (1), а другой есть интеграл типа a) и c).

Найти интегралы:

a) $\int\dfrac{dx}{x^2+2x+10}.$

Так как $x^2+2x+10=x^2+2x+1+9=(x+1)^2+3^2$, то

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+10}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3^2}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$$

b) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2+6x+25}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)dx}{x^2+6x+25}=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6-8}{x^2+6x+25}dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6}{x^2+6x+25}dx-4\int\frac{dx}{x^2+6x+25}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+6x+25)}{x^2+6x+25}-4\int\frac{dx}{(x+3)^2+4^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+6x+25)-4\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4}+C.$$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-(x^2-2x+1)+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}} =$

$= \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{3^2-(x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{3} + C.$

d) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-10x+29}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-10x+29}}dx =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-10+6}{\sqrt{x^2-10x+29}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-10)dx}{\sqrt{x^2-10x+29}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+29}} =$

$= \frac{1}{2}\int (x^2-10x+29)^{-\frac{1}{2}} d(x^2-10x+29) + 3\int \frac{dx}{\sqrt{(x-5)^2+2^2}} =$

$= \sqrt{x^2-10x+29} + 3\ln(x-5+\sqrt{x^2-10x+29}) + C.$

Задание 8.5. Найти интегралы:

1. $\int \frac{dx}{x^2-10x+25}$,
2. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+17}$,
3. $\int \frac{dx}{3x^2+4x-7}$,
4. $\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$,
5. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$,
6. $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$,
7. $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$,
8. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+11}$,
9. $\int \frac{3x-1}{3x^2-2x+7}dx$,
10. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$,
11. $\int \frac{x-1}{4x^2-4x-3}dx$,
12. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$,
13. $\int \frac{2x+3}{2x^2+x+1}dx$,
14. $\int \frac{3x-2}{x^2+3x+1}dx$,
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$,
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$,
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-4x^2}}$,
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$,
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$,
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$,

21. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx,$

22. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}}dx,$

23. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx,$

24. $\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}},$

25. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$

К интегралу вида (d) приводится также интеграл вида

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Для этого достаточно воспользоваться подстановкой $x-\alpha=\frac{1}{t}.$

Пример. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.$$

Решение.

Положим $x-1=\frac{1}{t}$, тогда $x=\frac{1}{t}+1,\quad dx=-\frac{dt}{t^2},$

$$x^2-2=\left(\frac{1}{t}+1\right)^2-2=\frac{t+2t-t^2}{t^2},\quad \sqrt{x^2-2}=\frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t},$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}=\int \frac{ttdt}{t^2\sqrt{1+2t-t^2}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}=$$

$$=-\int \frac{d(t-1)}{\sqrt{2-(t-1)^2}}=-\arcsin\frac{t-1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{\frac{1}{x-1}-1}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=-\arcsin\frac{2-x}{\sqrt{2}(x-1)}+C.$$

Найти интегралы:

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$

2. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}},$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$

4. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}},$

5. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-3+4x-x^2}}$, 6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}$,

7. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x+2x^2}}$, 8. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+5}}$.

8.6. Интегрирование рациональных дробей

Дроби следующих четырех типов называются **простейшими**:

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{(x-a)^m}$,

III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$,

IV. $\frac{Mx+N}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$,

где m, n – натуральные числа, а $ax^2 + bx + c$ не имеет действительных корней.

Интегрирование дробей первых двух типов производится непосредственно, а интегрирование дробей третьего типа рассмотрено в подразделе (8.5.). Интегрирование дроби четвертого типа связано с применением рекурентной формулы вида

$$\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^n} = \frac{t}{m^2(2n-2)(t^2+m^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{m^2(2n-2)}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{n-1}}. \qquad (8.1)$$

Пример. Найти интеграл.

$$\int \frac{2x-2}{(x^2-4x+5)^2}dx = \int \frac{2x-4+2}{(x^2-4x+5)^2}dx = \int \frac{(2x-4)dx}{(x^2-4x+5)^2} +$$

$$+2\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2} = \int \frac{d(x^2-4x+5)}{(x^2-4x+5)^2} + 2\int \frac{d(x-2)}{((x-2)^2+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2-4x+5} + 2\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}, \quad \text{где} \quad t = x-2.$$

По рекурентной формуле находим интеграл, полагая $n = 2$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-2) + C.$$

Интегрирование произвольной рациональной дроби

$\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{a_m x^m + ... + a_1 x + a_0}{b_n x^n + ... + b_1 x + b_0}$ с действительными коэффициентами производится следующим образом:

если m < n, то дробь называется **правильной**,

если же $m \ge n$, то дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ - **неправильная** и ее необходимо представить в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби,

т. е. $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L_{m-n}(x) + \dfrac{R_r(x)}{Q_n(x)}$, где $L_{m-n}(x)$ и $R_r(x)$ – многочлены степеней $m - n \ge 0$ и r соответственно, причем $r \le n$,

т. е. $\dfrac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ - правильная.

Выделение целой части в дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ производится делением числителя на знаменатель «уголком».

Пример. Выделить целую часть дроби

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

Делим числитель на знаменатель таким образом

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - 3x^2 - 3x - 2 & x^3 - x^2 - 2x \\
- & \overline{} \\
x^4 - x^3 - 2x^2 & x + 1 \\
\hline
x^3 - x^2 - 3x - 2 & \\
- & \\
x^3 - x^2 - 2x & \\
\hline
\qquad\qquad - x - 2. &
\end{array}$$

Следовательно, $\dfrac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 + \dfrac{-x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}$.

Пусть $Q_n(x)$ есть многочлен степени n с действительными коэффициентами вида

$$Q_n(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 .$$

Известно, что всякий многочлен разлагается единственным образом на линейные и квадратичные множители вида $(x - a)$ и $(x^2 + px + q)$, где a – действительный корень многочлена, квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней, т. к.

$$\frac{P^2}{4} - q < 0.$$

В общем виде разложение многочлена $Q_n(x)$ имеет вид

$$Q_n(x) = c_n (x-a)^k (x-b)^m \ldots (x^2+px+q)^r (x^2+p_1x+q_1)^s \ldots \qquad (*)$$

где a и b – действительные корни кратности k и m соответственно, а r и s выражают кратность каждой пары сопряженных комплексных корней многочлена.

При этом справедливо равенство:

$$k + m + \ldots + 2r + 2s + \ldots = n$$

Имеет место следующая теорема о разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.

Теорема. Всякая правильная рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой $Q(x)$ имеет разложение (*), может быть представлена единственным образом в виде суммы конечного числа простейших дробей следующим образом:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-b)^m} + \ldots +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_rx+N_r}{(x^2+px+q)^r} + \frac{D_1x+E_1}{x^2+p_1x+q_1} +$$

$$+ \frac{D_2x+E_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{D_sx+E_s}{(x^2+p_1x+q_1)^s} + \ldots .$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_m, M_1, M_2, \ldots, M_r, N_1, N_2, \ldots, N_r, \ldots$$

поступают следующим образом: приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x у многочлена $P(x)$ и многочлена, который получается в числителе правой части после приведения ее к общему знаменателю (метод неопределенных коэффициентов).

Продолжим рассматривать предыдущий пример

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 + \frac{-x-2}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

Полученную правильную дробь представим в виде суммы простейших дробей

$$\frac{-x-2}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{-x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} .$$

Приведя правую часть к общему знаменателю, получаем тождество, приравняв числители:

$$-x - 2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2) - x - 2 =$$

$$= (A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x - 2A \ .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A+B-2C=-1 \\ -2A=-2 \end{cases} .$$

Откуда $\quad A=1, B=-\dfrac{2}{3}, C=-\dfrac{1}{3}.$

Следовательно

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x} = x+1+\frac{1}{x}-\frac{2}{3(x-2)}-\frac{1}{3(x+1)}$$

и

$$\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int xdx + \int 1dx + \int \frac{dx}{x} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x\text{-}2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln x - \frac{2}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C.$$

Пример. Найти интеграл

$$\int \frac{x^3+1}{x^5+2x^3+x}dx.$$

Дробь $\dfrac{x^3+1}{x^5+2x^3+x}$ правильная, разложим знаменатель на простейшие сомножители: $\quad x^5+2x^3+x = x(x^4+2x^2+1) = x(x^2+1)^2.$

Дробь $\dfrac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Приведя простейшие дроби к общему знаменателю, и приравнивая числители, получим

$$x^3+1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x$$

$$x^3+1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A \ .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\quad x$

$A + B = 0$

$C = 1$

$2A + B + D = 0$

$C + E = 0$

$A = 1$.

Решая систему, находим

$A = 1, B = -1, C = 1, D = -1, E = -1.$

Следовательно

$$\frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{-x+1}{x^2+1}+\frac{-x-1}{(x^2+1)^2},$$

тогда:

$$\int\frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-x+1}{x^2+1}+\frac{-x-1}{(x^2+1)^2}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{x^2+1}-\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}-\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2(x^2+1)}-\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}\ .$$

Последний интеграл находим по рекурентной формуле (8.1) при $n = 2$

$$\int\frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Задание 8.6. Найти интегралы:

1. $\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)}$,
2. $\int\frac{x-1}{x^2+6x+8}dx,$
3. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$,
4. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx,$
5. $\int\frac{x^4dx}{(x^2-1)(x+2)}$,
6. $\int\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}dx,$
7. $\int\frac{2x-3}{(x-2)^3}dx,$
8. $\int\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)}dx,$
9. $\int\frac{x^5+2x^2+3}{(x-2)^2}dx,$
10. $\int\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x-1)^2}dx,$
11. $\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx,$
12. $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$,
13. $\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx,$
14. $\int\frac{dx}{x^3+1}$,
15. $\int\frac{7x^2-1}{x^4+4x^2-5}dx,$
16. $\int\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}dx,$

17. $\int \frac{4x(x-2)}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx,$

18. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx,$

19. $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx,$

20. $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}dx,$

21. $\int \frac{dx}{x^3+8},$

22. $\int \frac{x^4+1}{x^2-1}dx,$

23. $\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1},$

24. $\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)},$

25. $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx.$

8.7. Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx,$ где m и n – целые числа.

Если хотя бы одно из чисел m и n – нечетное положительное, то применяют подстановку $\cos x = z$, при m – нечетном и $\sin x = z$, при n – нечетном.

Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Применяем подстановку $\sin x = z$, $\cos x = dz$

$$\int z^2(1-z^2)dz = \int (z^2-z^4)dz = \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Если m и n – четные положительные, то степени понижаются с применением формул вида:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \text{и} \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Найти интеграл $\int \sin^4 x \cos^2 x dx.$

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \frac{1-\cos 2x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d\left(\sin 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Если m и n – четные и хотя бы один из них отрицательный, то применяют подстановку $\operatorname{tg} x = z$ или $\operatorname{ctg} x = z.$

Например,

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \left| \operatorname{tg} x = z,\ \ x = \operatorname{arctg} z,\ \ dx = \frac{dz}{1+z^2} \right| = \int \frac{z^2 dz}{1+z^2} =$$

$$\int \frac{z^2+1-1}{1+z^2}dz = \int dz - \int \frac{dz}{1+z^2} = z - \operatorname{arctg} z + C = \operatorname{tg} x - x + C.$$

2. Интегралы вида

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx.$$

Для нахождения данных интегралов применяют формулы из тригонометрии

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\big(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\big),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\big),$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\big(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\big).$$

Найти интеграл:

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \big(\sin(5-3)x + \sin(5+3)x\big)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2x dx + \frac{1}{2}\int \sin 8x dx = -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 8x}{16} + C.$$

3. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx,$

где $R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$. Для нахождения данных интегралов применяют подстановку:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z, \quad \text{при этом} \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Найти интеграл $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

Применяя указанную формулу, получим

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2dz}{2+2z} = \int \frac{dz}{1+z} =$$

$$= \ln|1+z| + C = \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Задание 8.7. Найти интегралы:

1. $\int \cos^3 x dx,$ 2. $\int \sin^5 x dx,$

3. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx,$

4. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx,$

5. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx,$

6. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx,$

7. $\int \cos^2 x dx,$

8. $\int \sin^4 x dx,$

9. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx,$

10. $\int \sin^6 x dx,$

11. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx,$

12. $\int \frac{dx}{\sin^4 x},$

13. $\int \frac{dx}{\cos^6 x},$

14. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx,$

15. $\int \mathrm{tg}^6 x dx,$

16. $\int \mathrm{tg}^2 x \sin^2 x dx,$

17. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x},$

18. $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x},$

19. $\int \frac{dx}{4 - 5\sin x},$

20. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x},$

21. $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx,$

22. $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x},$

23. $\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3},$

24. $\int \frac{dx}{3\cos x + 2},$

25. $\int \frac{dx}{3 - 2\sin x + \cos x}.$

8.8. Интегрирование некоторых иррациональных функций

1. Интегралы вида

$\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots) dx,$

$\int R(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots) dx,$

$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots \right) dx,$ где $R\ (x,\ y,\ z,\ \ldots)$ – рациональная функция своих аргументов, $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots$ - целые числа, вычисляются с помощью подстановок , соответственно

$x = z^s, \quad ax + b = z^s, \quad \frac{ax+b}{cx+d} = z^s,$

где s – общий знаменатель дробей $\quad \dfrac{m_1}{n_1}, \dfrac{m_2}{n_2}, \ldots$.

Пример: Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}}$.

Производим подстановку $\quad x + 2 = z^6, \qquad dx = 6\, z^5\, dz.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}} = \int \frac{6z^5 dz}{z^4 - z^3} = 6\int \frac{z^2}{z-1} dz = 6\int \frac{z^2 - 1 + 1}{z-1} dz =$$

$$= 6\int \left(z + 1 + \frac{1}{z-1} \right) dz = 6\left(\frac{z^2}{2} + z + ln|z-1| \right) + C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[3]{x+2}}{2} + \sqrt[6]{x+2} + ln\left(\sqrt[6]{x+2} - 1 \right) \right) + C.$$

2. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$$

сводятся к интегралам от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$, если применить соответственно подстановки:

$x = a \sin t$ или $x = a \cos t$,
$x = a\, \text{tg}\, t$ или $x = a\, \text{ctg} t$,
$x = a \sec t$ или $x = a\, \text{cosec}\, t$.

Пример: Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

Положим $\quad x = \text{tg} t$, тогда $\quad dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}.$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\dfrac{dt}{\cos^2 t}}{(1+\text{tg}^2 t)\sqrt{1+\text{tg}^2 t}} = \int \cos t dt = \sin t + C.$$

Выразим $\sin t$ через заданную переменную x :

$$\sin t = \text{tg} t \cos t = \frac{\text{tg} t}{\sec t} = \frac{\text{tg} t}{\sqrt{1+\text{tg}^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Следовательно, $\quad \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$

Задание 8.8. Найти интегралы:

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx,$

2. $\int \frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx,$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}},$

4. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx,$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}},$

6. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx,$

7. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx,$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}},$

9. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx,$

10. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}},$

11. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx,$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x-1}},$

13. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}},$

14. $\int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}dx,$

15. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}xdx,$

16. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x},$

17. $\int \sqrt{1-x^2}dx,$

18. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}},$

19. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx,$

20. $\int \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}},$

21. $\int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}},$

22. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}},$

23. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}},$

24. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}},$

25. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}.$

9. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

9.1. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Этот отрезок разделим на n произвольных, необязательно равных, частей:

$$a=x_0 < x_1 < \ldots < x_n=b.$$

В этом случае говорят, что произведено ***разбиение*** отрезка $[a,b]$. На каждом участке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ возьмем произвольную точку ξ_i и вычислим значение функции $f(x)$ в этих точках. Если умножить полученные значения функции $f(\xi_i)$ на длину соответствующего участка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и просуммировать , то получим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,, \tag{9.1}$$

которая называется ***интегральной суммой*** функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Обозначим через $\Delta x = \max \Delta x_i$.

Если предел последовательности интегральных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \tag{9.2}$$

существует, т.е. конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и от выбора точек ξ_i на соответствующих участках, то этот предел называется

Определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \tag{9.3}$$

Здесь число a называется ***нижним пределом***, число b называется ***верхним пределом*** интеграла.

Функция $f(x)$ называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a,b]$, если для этой функции на указанном отрезке существует предел интегральных сумм, т.е. определенный интеграл. ***Необходимое условие*** интегрируемости: если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке. ***Достаточное условие*** интегрируемости: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

9.2. Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b \left[C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \right] dx = C_1 \int\limits_a^b f_1(x) dx + C_2 \int\limits_a^b f_2(x) dx$.

2. $\int\limits_a^b f(x) dx = -\int\limits_b^a f(x) dx$.

3. $\int\limits_a^b f(x) dx = \int\limits_a^c f(x) dx + \int\limits_c^a f(x) dx$.

4. Если функция $f(x)$ – четная, то $\int\limits_{-a}^a f(x) dx = 2\int\limits_0^a f(x) dx$,

если функция $f(x)$ – нечетная, то $\int\limits_{-a}^a f(x) dx = 0$.

9.3. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема (***формула Ньютона-Лейбница***). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная на этом отрезке, то имеет место следующая формула:

$$\int\limits_a^b f(x) dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (9.4)$$

Пример 1. Вычислить интегралы

а) $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 2x \; dx$, б) $\int\limits_1^2 2^{3x-4} dx$.

Решение.

а) $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 2x \; dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{1}{2}$,

б) $\int\limits_1^2 2^{3x-4} dx = \left(\frac{1}{3\ln 2} 2^{3x-4}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3\ln 2}\left(4 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6\ln 2}$.

9.4. Метод замены переменной в определенных интегралах

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема на отрезке $[t_1,t_2]$, где $a=\varphi(t_1)$ и $b=\varphi(t_2)$, то имеет место формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,. \tag{9.5}$$

Пример 2. Вычислить интегралы

$$\text{а) } \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\;dx\,, \qquad \text{б) } \int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx\,.$$

Решение. а) Сделаем замену $\sqrt{e^x-1}=t$. Тогда $x=\ln(1+t^2)$ и $dx = 2tdt/(1+t^2)$. Поскольку при $x=0$ $t=0$ и при $x=\ln 2$ $t=1$, то получим

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\;dx = \left| \begin{array}{ll} t=\sqrt{e^x-1}, & x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\ln(1+t^2), & x=\ln 2 \Rightarrow t=1 \\ dx=\dfrac{2t\;\;dt}{1+t^2} & \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{2t^2dt}{t^2+1} =$$

$$= 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\;dt = 2(t-\operatorname{arctg} t)\Big|_0^1 = 2-\frac{\pi}{2}\,.$$

б) Сделаем тригонометрическую подстановку $x=4\sin t$. Тогда

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\;\;dx = \left| \begin{array}{ll} x=4\sin t, & x=0 \Rightarrow t=0 \\ dx=4\cos t\;\;dt & x=4 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{16-16\sin^2 t}\,4\cos t\;\;dt =$$

$$= 16\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\;\;dt = 8\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\;\;dt = 8\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = 4\pi\,.$$

Заметим, что при использовании метода замены переменной необходимо проверять выполнение всех перечисленных в теореме условий. Если эти условия нарушаются, то может быть получен неверный результат.

9.5. Метод интегрирования по частям в определенных интегралах

Теорема. Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a,b]$, то имеет место формула:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du . \qquad (9.6)$$

Пример 3. Вычислить интегралы

$$\text{а)} \int_0^1 x e^{-x} dx , \qquad \text{б)} \int_1^{e^2} \ln^2 x \ \ dx .$$

Решение. а) Воспользуемся формулой (9.6) интегрирования по частям, для этого положим $u=x$, $dv=e^{-x}dx$, откуда $du=dx$, $v=-e^{-x}$. Тогда

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{matrix} \right| = -x \ \ e^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = \frac{e-2}{e} .$$

б) Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_1^{e^2} \ln^2 x \ \ dx = \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x & du = 2\ln x \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = x \ \ \ln^2 x\Big|_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2} \ln x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = 4e^2 - 2\left(x \ \ \ln x\Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} dx \right) = 2\left(e^2 - 1\right).$$

9.6. Вычисление площадей плоских фигур

Напомним геометрический смысл определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx .$$

Если $f(x) \geq 0$, то определенный интеграл есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$, а также осью Ox. Если же функция $f(x) \leq 0$, то определенный интеграл будет меньше нуля. Знак минус означает, что криволинейная трапеция расположена ниже оси Ox и ее площадь будет равна $S=-\int_a^b f(x)dx$. Может оказаться, что функция $f(x)$ на отрезке интегрирования несколько раз меняет знак. В этом случае интеграл нужно разбить на сумму интегралов по участкам, на которых подынтегральная

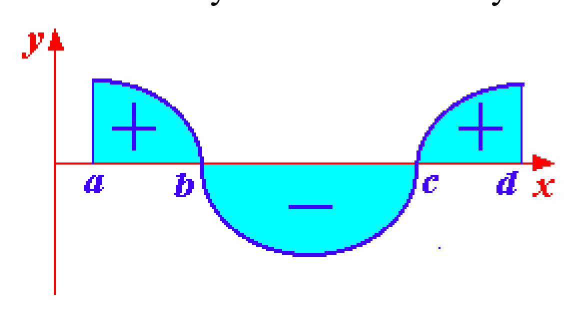


Рис. 9.1.

функция имеет постоянный знак. Например, площадь фигуры на рис. 9.1 будет иметь вид

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_b^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx\,.$$

Пример 4. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:

а) $y=\sin x,\ y=0,\ \ 0\le x\le 2\pi;$ б) $y=x-x^2,\ \ y=0,\ \ 0\le x\le 2.$

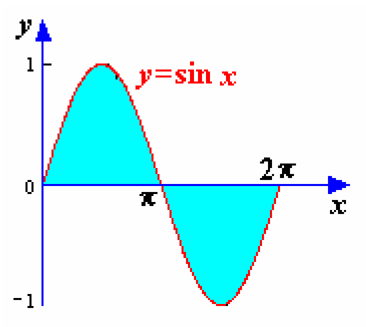


Рис. 9.2

Решение. а) Сделаем чертеж (см. рис. 9.2). Так как при $0\le x\le \pi$ $\sin x\ge 0$ и при $\pi\le x\le 2\pi$ $\sin x\le 0$, то

$$\text{S}=\int_0^{\pi}\sin x dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx=4 \text{ (кв. ед.)}$$

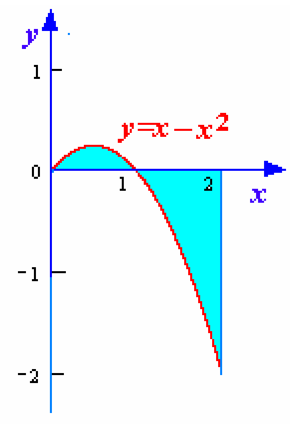


Рис. 9.3

б) Сделаем чертеж (см. рис. 9.3). Найдем точки пересечения параболы с осью Ox:

$$x-x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0, \\ x_2=1. \end{cases}$$

Из рисунка видно, что

$$\text{S}=\int_0^1 (x-x^2)dx-\int_1^2 (x-x^2)dx=1 \text{ (кв. ед.)}$$

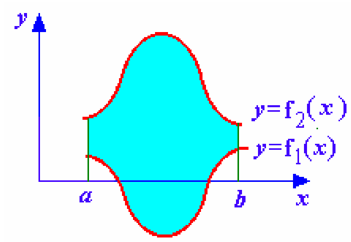


Рис. 9.4

Пусть плоская фигура на отрезке $[a,b]$ ограничена графиками двух функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, причем $f_2(x)\ge f_1(x)$ (см. рис. 9.4). Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx\,. \qquad (9.7)$$

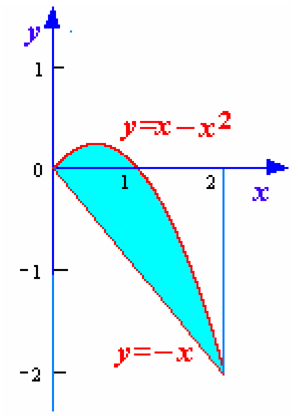


Рис. 9.5

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x-x^2$, $y=-x$.

Решение. Сделаем чертеж (см. рис. 9.5). Найдем точки пересечения параболы и прямой:

$$x-x^2=-x \Rightarrow \begin{cases} x_1=0, \\ x_2=2. \end{cases}$$

Поскольку на отрезке $[0;2]$ $x-x^2 \geq -x$, то площадь заданной фигуры будет равна

$$S=\int_0^{21}\left[(x-x^2)-(-x)\right]dx=\int_0^2(2x-x^2)dx=\frac{4}{3}.$$

Пример 6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2$, $y=x-2$, $y=0$.

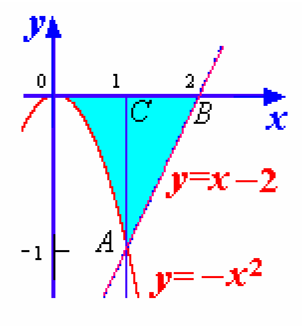


Рис. 9.6

Решение. Из чертежа (см. рис. 9.6) видно, что искомую площадь S фигуры OAB можно рассматривать как площадь над кривой OAB на отрезке $[0;2]$. Однако указанная кривая (ломаная) не задается одним уравнением. Поэтому для нахождения искомой площади разобьем фигуру OAB на две части: OAC и ACB. Найдем абсциссу точки A:

$$x-2=-x^2 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=-2. \end{cases}$$

Таким образом, точка A имеет координаты $(1;-1)$. После этого находим площадь заданной фигуры:

$$S=S_{OAC}+S_{ACB}=-\int_0^1(-x^2)dx-\int_0^2(x-2)dx=\frac{5}{6} \text{ (кв.ед.).}$$

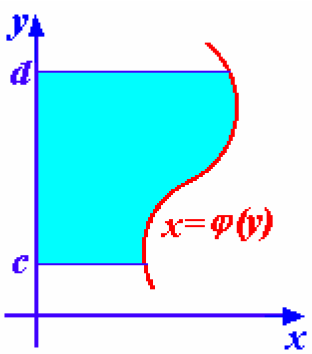


Рис. 9.7

Заметим, что криволинейная трапеция может образовываться графиком функции также и с осью Oy (см. рис. 9.7). Тогда площадь такой криволинейной трапеции можно записать в виде

$$S=\int_c^d\varphi(y)dy. \qquad (9.8)$$

Такой случай следует иметь ввиду, поскольку это может сильно сократить вычисления.

В частности, последний пример можно решить относительно оси Oy (переменной y). В этом случае фигура OAB будет ограничена снизу кривой $x_1 = \sqrt{-y}$, а сверху – прямой $x_2=y+2$. В результате, площадь фигуры будет вычисляться следующим образом:

$$S = \int_{-1}^{0} \left[(x_2(y) - x_1(y) \right] dy = \int_{-1}^{0} \left(y + 2 - \sqrt{-y} \right) dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y + \frac{2}{3}\sqrt{-y^3} \right]_{-1}^{0} = \frac{5}{6} (кв.ед.)$$

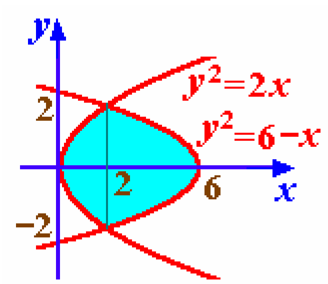


Рис. 9.8

Пример 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами:

$y^2=2x$ и $y^2=6-x$ (см. рис. 9.8).

Решение. Будем искать площадь данной фигуры относительно оси Oy. Ординаты точек пересечения линий равны $y_1=-2$ и $y_2=2$. Следовательно,

$$S = \int_{-2}^{2} \left[(6 - y^2) - \left(\frac{y^2}{2} \right) \right] dy = 16 \text{ (кв. ед.)}$$

9.7. Параметрические функции

Пусть верхняя граница криволинейной трапеции задана параметрическими уравнениями: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, причем $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$. Поскольку площадь криволинейной трапеции задается формулой $S=\int_a^b y(x)dx$ (если $y(x)\ge 0$ на отрезке $[a,b]$), то, производя замену переменной, получим формулу для вычисления площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной параметрически:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt \tag{9.9}$$

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом (рис. 9.9):

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi .$$

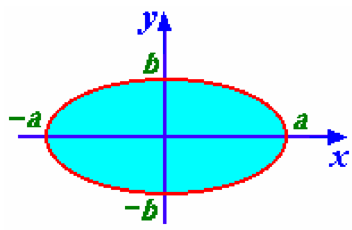


Рис. 9.9

Решение. Вычислим площадь верхней половины эллипса, а затем результат удвоим. Здесь x меняется от $-a$ до a, следовательно, t должно изменяться от π до 0. Таким образом,

$$S = 2\int_{\pi}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = -2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t dt = \pi ab .$$

Пример 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Oy и одной аркой циклоиды (см. рис. 9.10): $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

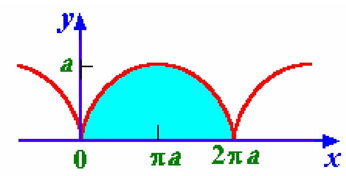


Рис. 9.10

Решение. Для получения одной арки циклоиды, достаточно чтобы t изменялось от 0 до 2π. Тогда по формуле (9.9) получим

$$S = \int_{0}^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt =$$

$$= a^2\int_{0}^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = 3\pi a^2$$

Пример 10. Вычислить площадь петли кривой (см. рис. 9.11):

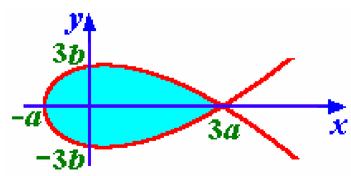


Рис. 9.11

$$\begin{cases} x = a(t^2 - 1), \\ y = b(4t - t^3). \end{cases}$$

Решение. Кривая пересекается с осью Ox в двух точках: $x_1 = -a$ и $x_2 = 3a$ при $t_1 = 0$ и $t_{2,3} = \pm 2$. Площадь петли находим как удвоенную площадь верхней ее половины:

$$S = 2\int_{0}^{2} b(4t - t^3)2atdt = 4ab\int_{0}^{2}(4t^2 - t^4)dt = \frac{256}{15}ab .$$

9.8. Полярная система координат

Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением: $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, причем функция $\rho(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Плоскую фигуру, ограниченную кривой $\rho(\varphi)$ и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β, будем называть ***криволинейным сектором*** (рис.9.12).

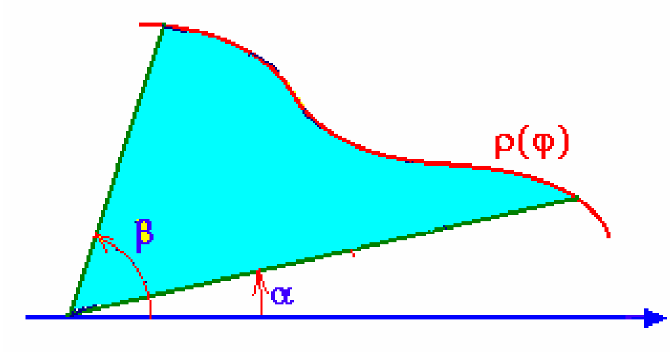


Рис. 9.12

Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi\,. \tag{9.10}$$

Пример 11. Вычислить площадь ограниченной: а) лемнискатой Бернулли $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$; б) трехлепестковой розой $\rho = a\cos 3\varphi$.

Решение. а) Поскольку $\rho^2 \geq 0$, то $\cos 2\varphi \geq 0$. Отсюда получаем

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow -\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k\,,$$

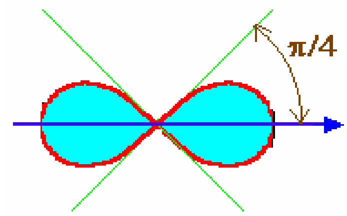


Рис. 9.13

где $k \in Z$. Таким образом, данная кривая расположена в двух секторах (см. рис. 9.13). Для нахождения искомой площади достаточно вычислить четверть площади, а затем умножить ее на 4. Воспользуемся формулой 9.10 :

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} \rho^2 d\,\varphi = 2\cdot a^2 \int_{0}^{\pi/4} \cos 2\varphi d\,\varphi =$$

$$= 2a^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = a^2(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = a^2\,.$$

б) Поскольку $\rho \geq 0$, то $\cos 3\varphi \geq 0$. Тогда получаем:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 3\,\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\,,$$

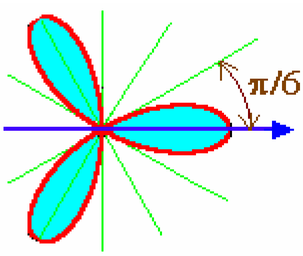


Рис. 9.14

где $k \in Z$. Таким образом, данная кривая будет расположена в трех секторах (см. рис. 9.14). Для нахождения искомой площади достаточно вычислить площадь половины одного "лепестка" и умножить ее на 6:

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/6} \rho^2 d\varphi = 3a^2 \int\limits_0^{\pi/6} \cos^2 3\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} a^2 .$$

9.9. Вычисление длины дуги плоской кривой

Если кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ – гладкая (т.е. производная $y' = f'(x)$ – непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле:

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx . \qquad (9.11)$$

При параметрическом задании кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ (здесь $x = x(t)$, $y = y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции) длина дуги кривой, соответствующая монотонному изменению параметра t от t_1 до t_2, вычисляется по формуле:

$$L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt . \qquad (9.12)$$

Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина дуги равна:

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi . \qquad (9.13)$$

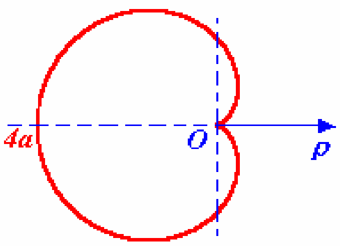


Рис. 9.15

Пример 13. Найти длину кардиоиды $\rho = 2a(1 - \cos\varphi)$ (рис. 9.15).

Решение. Найдем производную ρ':

$\rho' = \left(2a(1 - \cos\varphi)\right)' = 2a \sin\varphi$. Подставляя в формулу (9.13) получим:

$$L = 2\int\limits_0^\pi \sqrt{4a^2 \sin^2 \varphi + 4a^2 (1 - \cos\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^\pi \sqrt{4a^2 \sin^2 \varphi + 4a^2 - 8a^2 \cos\varphi + 4a^2 \cos^2 \varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^\pi \sqrt{8a^2 - 8a^2 \cos\varphi}\, d\varphi = 2 \cdot 2\sqrt{2}a \int\limits_0^\pi \sqrt{1 - \cos\varphi}\, d\varphi = 4\sqrt{2}a \int\limits_0^\pi \sqrt{2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right)}\, d\varphi =$$

$$4\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=8a\cdot 2\cdot\left(-\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{\pi}=16a\cdot\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos 0\right)=16a\,.$$

9.10. Вычисление площади поверхности вращения

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[a,b]$. Тогда площадь поверхности, образованная вращением графика этой функции вокруг оси Ox, будет вычисляться по формуле:

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\ . \qquad (9.14)$$

Пример 14. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox: а) отрезка прямой $y=x\ (0\le x\le R)$; б) одной арки синусоиды $y=\sin x$; в) одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$; г) параболы $y^2=2px$, $0\le x\le a$; д) дуги окружности $x^2+y^2=R^2$.

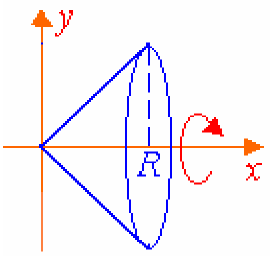


Рис. 9.16

Решение. а) Вычислим площадь поверхности, полученной вращением отрезка прямой $y=x\ (0\le x\le R)$ вокруг оси Ox (рис. 9.16). Найдем производную: $y'=(x)'=1$. Подставляя в формулу (9.14) получим:

$$S=2\pi\int_0^R x\sqrt{1+1^2}\,dx=2\pi\sqrt{2}\int_0^R xdx=2\sqrt{2}\pi\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^R=\sqrt{2}\pi R^2\,.$$

б) Согласно формуле (9.14), получим

$$S=2\pi\int_0^{\pi}\sin x\ \sqrt{1+\cos^2 x}\ \ dx=\left|\begin{array}{l}t=\cos x\\ dt=-\sin xdx\\ x=0\Rightarrow t=1\\ x=\pi\Rightarrow t=-1\end{array}\right|=-2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\,dt=$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt=4\pi\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt=4\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2}+\ln|t+\sqrt{1+t^2}\,|\right)\Bigg|_0^1\right)=$$

$$=2\pi\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})-0\right)=\ 2\pi[\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}]\approx 14{,}4\ \ (ед.кв.).$$

Замечание. При вычислении интеграла $\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt$ было использовано свойство 4 определенного интеграла (см. 9.2) и табличный интеграл $\int\sqrt{x^2+\lambda}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\lambda}+\lambda\ln\left|x+\sqrt{x^2+\lambda}\right|\right)+C$ (отметим, что этот интеграл можно было найти и методом интегрирования по частям).

в) В параметрической форме формулу (9.14) можно записать в следующем виде:

$$S=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+\left[y'(x)\right]^2}\,dt\ . \tag{9.15}$$

Тогда площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды вокруг оси Ox, будет равна

$$S=2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{(a\sin t)^2+a^2(1-\cos t)^2}\,dt=$$

$$=2\sqrt{2\pi}\quad a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\,dt=\frac{64}{3}\pi a^2 .$$

г) Поскольку $y=\sqrt{2px}$, $y'=\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}$, $\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}$, то по формуле (9.14) получим

$$S=2\pi\int_0^a\sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}dx=2\pi\sqrt{p}\int_0^a\sqrt{2x+p}dx=\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{3/2}-p^{3/2}\right].$$

д) Пусть дуга окружности с центром в начале координат и радиусом R вращается вокруг оси Ox. Из уравнения окружности $x^2+y^2=R^2$ имеем $y^2=R^2-x^2$, $y'y=-x$, значит

$$S=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=2\pi\int_{-R}^{R}Rdx=2\pi R(R+R)=4\pi R^2 .$$

Таким образом, площадь сферы $S=4\pi R^2$.

9.11. Объем тела вращения

Если площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, является непрерывной функцией на отрезке $[a;b]$, то объем тела вычисляется по формуле:

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (9.16)$$

Выражение для функции $S(x)$ получается достаточно просто в случае тел вращения. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x), a \le x \le b$, вращается вокруг оси Ox или оси Oy, то объемы тел вращения вычисляются по формулам:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx \quad \text{или} \quad V_y = \pi \int_a^b \varphi^2(y)dy. \qquad (9.17)$$

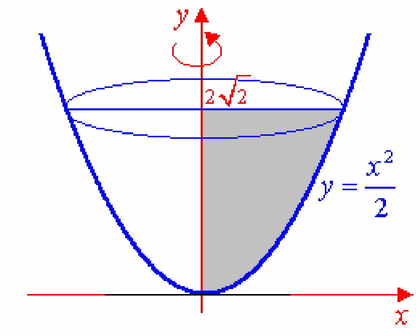


Рис. 9.17

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения равен:

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin\varphi d\varphi. \qquad (9.18)$$

Отметим, что объемы тел значительно проще вычисляются при помощи кратных интегралов.

Пример 15. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной а) линиями $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $y = 2\sqrt{2}$ вокруг оси Oy; б) кардиоидой $\rho = 2a(1 - \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

Решение. а) Используя формулу (9.17), найдем объем данного тела (рис. 9.17):

$$V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2ydy = 2\pi \cdot \left(\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi \ (ед.^3)$$

б) Используя формулу (9.18), найдем объем данного тела (рис. 9.18):

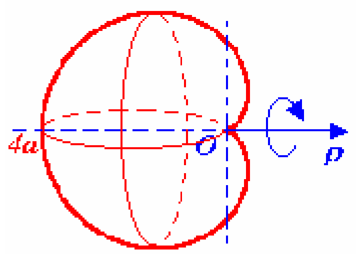


Рис. 9.18

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_0^\pi \left(2a(1 - \cos\varphi)\right)^3 \sin\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{16a^3}{3}\pi \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)^3 d(1 - \cos\varphi) =$$

$$= \frac{16a^3}{3}\pi \cdot \frac{(1 - \cos\varphi)^4}{4} \Bigg|_0^\pi = \frac{16a^3}{3}\pi \cdot 4 = \frac{64}{3}\pi a^3 = 21\frac{1}{3}\pi a^3$$

.

9.12. Физические приложения. Вычисление работы с помощью определенного интеграла

Работа, совершаемая переменной силой $F(x)$ при перемещении материальной точки вдоль оси Ox, равна

$$A=\int_a^b F(x)dx. \tag{9.19}$$

Рассмотрим пример нахождения работы, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость плотности γ из резервуара, имеющего вид тела вращения, получающегося при вращении криволинейной трапеции вокруг оси Oy.

Пусть криволинейная трапеция в плоскости переменных ограничена линиями$x=f(y)>0$, $y=0$, $y=H$, $x=0$. Элемент объема тела вращения равен

$$\Delta V_i=\pi f^2(y_i)\Delta y_i\ ,$$

элемент веса равен $$\Delta P_i=\pi\gamma g f^2(y_i)\Delta y_i.$$

Умножая элемент веса на $(H–y_i)$ – высоту, на которую нужно поднять соответствующий вес при выкачивании жидкости – получим элемент работы:

$$\Delta A_i=\pi\gamma g f^2(y_i)\left(H-y_i\right)\Delta y_i.$$

Тогда работа по выкачиванию жидкости равна определенному интегралу по отрезку $[0;H]$:

$$A=\int_0^H \pi g\gamma f^2(y)(H-y)dy. \tag{9.20}$$

Пример 16. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость плотности γ из резервуара, имеющего форму:

а) конуса вращения с вершиной, обращенной вниз и совпадающей с началом координат, высота которого H, а радиус основания R;

б) полусферы, обращенной выпуклостью вниз, радиус основания которой равен R;

в) цилиндра высоты H и радиуса основания R.

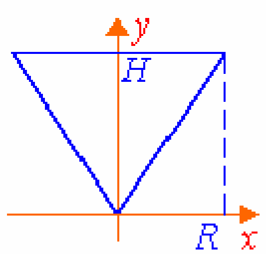


Рис. 9.19

Решение. а) Данный конус получается в результате вращения прямой $f(y)=\dfrac{Ry}{H}$ вокруг оси Oy (см. рис. 9.19). По формуле (9.20) находим

$$A=\int_0^H \pi\gamma g\frac{R^2}{H^2}y^2(H-y)dy=\frac{\pi}{12}\gamma gR^2H^2.$$

б) Данная полусфера получается в результате вращения нижней четверти окружности $f(y)=\sqrt{R^2-y^2}$ вокруг оси Oy (см. рис. 9.20). По формуле (9.20) находим

$$A=\int_0^R \pi\gamma g\left(R^2-(y-R)^2\right)(R-y)dy==\pi\gamma g\int_0^R\left(y^3-3y^2R+2yR^2\right)dy=$$

$$\pi\gamma g\left(\frac{y^4}{4}-3R\frac{y^3}{3}+2R^2\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^R=\frac{1}{4}\pi\gamma gR^4.$$

в) Данный цилиндр получается в результате вращения отрезка прямой $f(y)=R$, $0\le y\le H$ вокруг оси Oy. Тогда

$$A=\pi\gamma g\int_0^H R^2(H-y)dy=\frac{\pi}{2}\gamma gR^2H^2.$$

9. 13. Вычисление координат центра тяжести, статических моментов и моментов инерции плоской кривой

Пусть дуга кривой задана уравнением $y=f(x), a\le x\le b$, и имеет плотность $\gamma=\gamma(x)$. Тогда ***статические моменты*** этой дуги относительно координатных осей Ox и Oy равны:

$$M_x=\int_a^b\gamma(x)f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx, \qquad (9.21)$$

$$M_y=\int_a^b\gamma(x)x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (9.22)$$

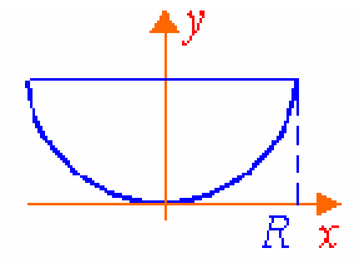


Рис. 9.20

Моменты инерции дуги этой кривой относительно координатных осей Ox и Oy равны:

$$I_x=\int_a^b\gamma(x)f^2(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx, \qquad (9.23)$$

$$I_y=\int_a^b\gamma(x)x^2\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (9.24)$$

Координаты центра тяжести дуги этой кривой вычисляются по формулам:

$$\overline{x}=\frac{M_y}{l}=\frac{1}{l}\int_a^b\gamma(x)x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx, \qquad (9.25)$$

$$\overline{y}=\frac{M_x}{l}=\frac{1}{l}\int\limits_a^b \gamma(x)f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx, \qquad (9.26)$$

где l – масса дуги, определяемая по формуле:

$$l=\int\limits_a^b \gamma(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (9.27)$$

Пример 17. Найти координаты центра тяжести дуги окружности $x^2+y^2=R^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0$ (рис. 9.21), при условии $\gamma=const$.

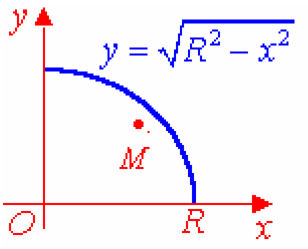


Рис. 9.21

Решение. Длина дуги равна $\frac{1}{4}\cdot 2\pi R=\frac{1}{2}\pi R$. Найдем массу этой дуги: $l=\gamma\cdot\frac{1}{2}\pi R$. Используя формулу 9.21, найдем статический момент:

$$M_x=\gamma\int\limits_0^R\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx=\gamma R\int\limits_0^R dx=\gamma R^2.$$

Тогда $\overline{y}=\frac{M_x}{l}=\frac{\gamma R^2}{\frac{1}{2}\gamma\pi R}=\frac{2R}{\pi}$. Учитывая симметричность дуги относительно биссектрисы координатного угла, получим $\overline{x}=\overline{y}=\frac{2R}{\pi}$. Центр тяжести имеет координаты $M\left(\frac{2R}{\pi};\frac{2R}{\pi}\right)$.

9. 14. Вычисление координат центра тяжести, статических моментов и моментов инерции плоской фигуры

Пусть плоская фигура ограничена кривой $y=f(x)\geq 0$ и прямыми $y=0,\ x=a,\ x=b$, и имеет плотность $\gamma=\gamma(x)$. Тогда ***статические моменты*** этой фигуры относительно координатных осей *Ox* и *Oy* равны:

$$M_x=\frac{1}{2}\int\limits_a^b \gamma(x)f^2(x)dx, \qquad (9.28)$$

$$M_y=\frac{1}{2}\int\limits_a^b \gamma(x)xf(x)dx. \qquad (9.29)$$

Моменты инерции этой фигуры относительно координатных осей Ox и Oy равны:

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \gamma(x) f^3(x) dx, \tag{9.30}$$

$$I_y = \int_a^b \gamma(x) x^2 f(x) dx. \tag{9.31}$$

Координаты центра тяжести плоской фигуры вычисляются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{2m}\int_a^b \gamma(x) x f(x) dx, \tag{9.32}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{2m}\int_a^b \gamma(x) f^2(x) dx, \tag{9.33}$$

где m – масса фигуры, определяемая по формуле:

$$m = \int_a^b \gamma(x) f(x) dx. \tag{9.34}$$

Пример 18. Найти координаты центра тяжести полукруга $x^2 + y^2 \le R^2$, $y \ge 0$ (рис. 9.22), при условии $\gamma = const$.

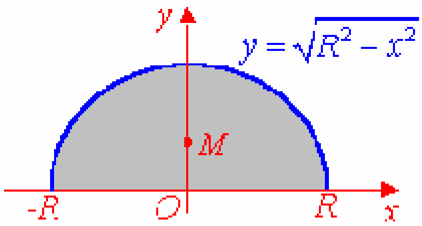


Рис. 9.22

Решение. Площадь полукруга равна $S = \frac{1}{2}\pi R^2$.

Найдем массу этой фигуры:

$$m = \gamma \cdot S = \gamma \cdot \frac{1}{2}\pi R^2.$$

Так как фигура симметрична относительно оси Oy, то $\bar{x} = 0$. Используя формулу 9.28, найдем M_x:

$$M_x = \frac{1}{2}\gamma \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\gamma\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{1}{2}\gamma\left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\gamma R^3.$$

По формуле 9.33, получаем:

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{2}{3}\gamma R^3}{\frac{1}{2}\gamma\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Центр тяжести имеет координаты $M\left(0;\dfrac{4R}{3\pi}\right)$.

9.15. Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются 1) интегралы с бесконечными пределами (*несобственные интегралы 1-го рода*); 2) интегралы от неограниченных функций (*несобственные интегралы 2-го рода*).

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (9.35)$$

Если этот предел существует и конечен, то интеграл называется ***сходящимся***, если же предел не существует или равен бесконечности, то интеграл называется ***расходящимся***.

Аналогично определяются:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)dx. \qquad (9.36)$$

Если функция имеет бесконечный разрыв в точке c отрезка $[a;b]$ и непрерывна при $a \le x < c$ и при $c < x \le b$, то несобственный интеграл 2-го рода определяется следующим равенством:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (9.37)$$

Несобственный интеграл 2-го рода называется ***сходящимся***, если оба предела в правой части существуют и конечны; если же хотя бы один из интегралов не существует или бесконечен, то несобственный интеграл называется ***расходящимся***.

Пример 19. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость): а) $\int_0^{+\infty}\sin x dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$; в) $\int_0^1 \dfrac{dx}{x}$.

Решение. а) Согласно формуле (9.35) получим

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \sin x dx = \lim_{b\to+\infty} (-\cos x)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-\cos b + 1\right) = 1 - \lim_{b\to+\infty} \cos b,$$

т.е. предел не существует и несобственный интеграл расходится.

б) Используя четность подынтегральной функции и формулу (9.36), получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = 2\lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = 2\frac{\pi}{2} = \pi .$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится и равен π.

в) Используя формулу (9.37), получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0} (-\ln\varepsilon) = +\infty .$$

Следовательно, несобственный интеграл расходится.

Задание 9.1. Вычислить определенные интегралы:

1. а) $\int_1^8 \frac{96 - 160\sqrt[3]{x}}{x^2} dx,$ б) $\int_0^4 \frac{3xdx}{\sqrt{9-2x}},$ в) $\int_{-\pi/2}^{\pi} 9x \sin 3x dx .$

2. а) $\int_1^4 \frac{42x - 14x^3}{\sqrt{x}} dx,$ б) $\int_1^5 \frac{\sqrt{11}dx}{x\sqrt{11-2x}},$ в) $\int_{\pi/2}^{\pi} 2x \cos 2x dx .$

3. а) $\int_1^{16} 48\frac{3x + 5\sqrt[4]{x}}{x^2} dx,$ б) $\int_0^6 \frac{3xdx}{\sqrt{16-2x}},$ в) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin\frac{x}{3} dx .$

4. а) $\int_1^4 \frac{3x^2 - 9x}{\sqrt{x^3}} dx,$ б) $\int_1^{10} \frac{\sqrt{6}dx}{2x\sqrt{6+3x}},$ в) $\int_0^{\pi} x \cos\frac{x}{4} dx .$

5. а) $\int_1^8 64\frac{3x - 5\sqrt[3]{x^2}}{x^3} dx,$ б) $\int_0^3 \frac{27xdx}{\sqrt{25-3x}},$ в) $\int_{\pi/2}^{\pi} 4x \sin 2x dx .$

6. а) $\int_1^8 \frac{60x - 50}{\sqrt[3]{x}} dx,$ б) $\int_1^4 \frac{\sqrt{7}dx}{x\sqrt{28-3x}},$ в) $\int_{\pi/4}^{\pi} 72x \cos 6x dx .$

7. а) $\int_1^{16} \frac{3 - 2\sqrt[4]{x^3}}{2x} dx,$ б) $\int_0^6 \frac{3xdx}{\sqrt{4+2x}},$ в) $\int_{-\pi}^{-\pi/2} \sqrt{2}x \sin\frac{x}{2} dx .$

8. а) $\int_1^4 \frac{3x^2+9\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx$, б) $\int_1^5 \frac{\sqrt{5}dx}{x\sqrt{5+4x}}$, в) $\int_0^{\pi/3} 96x\cos 4x dx$.

9. а) $\int_1^{16} \frac{6-3\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$, б) $\int_0^4 \frac{147xdx}{\sqrt{36+7x}}$, в) $\int_{-\pi/2}^{\pi} 8x\sin 4x dx$.

10. а) $\int_1^8 \frac{10-15x}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int_1^6 \frac{\sqrt{3}dx}{x\sqrt{12+4x}}$, в) $\int_{\pi/2}^{\pi} 18x\cos 3x dx$.

11. а) $\int_1^9 81\frac{2\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}{x^3}dx$, б) $\int_0^5 \frac{27xdx}{\sqrt{49+3x}}$, в) $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2}x\sin\frac{x}{4}dx$.

12. а) $\int_1^{27} \frac{20\sqrt[3]{x^2}-10x}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int_1^7 \frac{\sqrt{21}dx}{2x\sqrt{21+4x}}$, в) $\int_0^{\pi} \frac{2}{3}x\cos\frac{x}{3}dx$.

13. а) $\int_1^{16} 35\frac{3\sqrt{x}-x}{\sqrt[4]{x}}dx$, б) $\int_0^7 \frac{3xdx}{\sqrt{4x-3}}$, в) $\int_{\pi/2}^{\pi} 9x\sin 3x dx$.

14. а) $\int_1^{64} \frac{10x-250}{\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int_1^7 \frac{3\sqrt{3}dx}{x\sqrt{4x-3}}$, в) $\int_0^{\pi/4} \frac{72}{\sqrt{2}}x\sin 3x dx$.

15. а) $\int_1^{81} 81\frac{2\sqrt[4]{x^3}-50}{x^2}dx$, б) $\int_0^9 \frac{2xdx}{\sqrt{9+3x}}$, в) $\int_{-\pi}^{-\pi/2} 18x\cos 3x dx$.

16. а) $\int_1^9 \frac{5x^2-5}{\sqrt{x^3}}dx$, б) $\int_1^{14} \frac{\sqrt{11}dx}{2x\sqrt{11+5x}}$, в) $\int_0^{\pi/3} 150x\sin 5x dx$.

17. а) $\int_1^8 \frac{48\sqrt[3]{x}-80}{x^2}dx$, б) $\int_0^4 \frac{75xdx}{\sqrt{36-5x}}$, в) $\int_{-\pi/2}^{\pi} 50x\cos 5x dx$.

18. а) $\int_1^{16} \frac{9\sqrt{x^3}-90}{4\sqrt[4]{x}}dx$, б) $\int_1^5 \frac{\sqrt{5}dx}{2x\sqrt{5+4x}}$, в) $\int_{\pi/2}^{\pi} 162x\cos 9x dx$.

19. а) $\int_1^{27} \frac{2\sqrt[3]{x^2}-8\sqrt[3]{x}}{x}dx$, б) $\int_0^4 \frac{24xdx}{\sqrt{81-8x}}$, в) $\int_0^{\pi} x\cos\frac{x}{6}dx$.

20. а) $\int_1^4 \frac{18x^2-3x^3}{\sqrt{x^5}}dx$, б) $\int_1^3 \frac{dx}{2x\sqrt{1+8x}}$, в) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{2}x\cos\frac{x}{2}dx$.

21. а) $\int_1^8 16\frac{\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}}{x^2}dx$, б) $\int_0^3 \frac{6xdx}{\sqrt{1+8x}}$, в) $\int_0^{3\pi/2} \sqrt{2}x\sin\frac{x}{2}dx$,.

22. а) $\int\limits_1^8 \frac{7\sqrt[3]{x^5}-35x}{2\sqrt[3]{x}}dx$, б) $\int\limits_1^9 \frac{dx}{x\sqrt{4+5x}}$, в) $\int\limits_0^{\pi/4} 36\sqrt{2}x\cos 3x dx$.

23. а) $\int\limits_1^{16} \frac{63\sqrt[4]{x^3}-35x}{2\sqrt[4]{x}}dx$, б) $\int\limits_1^9 \frac{75xdx}{\sqrt{4+5x}}$, в) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4} x\cos 2x dx$.

24. а) $\int\limits_1^4 \frac{54\sqrt{x^3}-30x}{5\sqrt{x}}dx$, б) $\int\limits_1^9 \frac{\sqrt{7}dx}{2x\sqrt{7+2x}}$, в) $\int\limits_0^{\pi/6} 96x\sin 4x dx$.

25. а) $\int\limits_1^{81} \frac{21\sqrt[4]{x^3}-7x}{4\sqrt[4]{x}}dx$, б) $\int\limits_1^9 \frac{3xdx}{\sqrt{7+2x}}$, в) $\int\limits_0^{\pi/6} 18x\cos 3x dx$.

Задание 9.2. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

1. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$;
2. $y = \ln x,\ 2 \le x \le 5$;
3. $\rho = a\cos 3\varphi,\ (a>0)$;
4. $xy = 4,\ x=1,\ x=4,\ y=0$;
5. $xy = 4,\ x+y-5=0$;
6. $\rho = \cos 2\varphi$;
7. $y^2 = 16-8x,\ y^2 = 24x+48$;
8. $\rho = \sin 3\varphi$;
9. $y = x^2-3x,\ 3x+y-4=0,\ x=0$;
10. $\rho = 6\cos 3\varphi,\ \rho = 3\ (\rho\ge 3)$;
11. $x = \mathrm{tg} 3x,\ y = 0,\ x = \pi/12$;
14. $y^2 = x,\ y = x^2$;
15. $y = -x^2+2x+3,\ y = x^2-4x+3$;
16. $x = 6(t-\sin t),\ y = 6(1-\cos t)\ (y\ge 9)$;
17. $y = \arccos x,\ x = 0,\ y = 0$;
18. $\rho = \sin\varphi,\ \rho = 2\sin\varphi$;
19. $y^2 = 2x,\ y^2 = -x^2+4x$;
20. $\rho = \frac{1}{2} + \cos\varphi$;
21. $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}},\ y = 0,\ x = 1$;
22. $y = x\sqrt{4-x^2},\ y = 0,\ 0 \le x \le 2$;
23. $y = \frac{1}{1+\cos x},\ y = 0,\ x = \pm\frac{\pi}{2}$;
24. $\rho = 4\cos 4\varphi$;

12. $\rho = 2\cos 6\varphi$;

13. $x = 8\sqrt{2}\cos^3 t,\ y = \sqrt{2}\sin^3 t\ \ (x \ge 4)$;

25. $y = \dfrac{x}{(x^2+1)^2},\ y = 0,\ x = 1.$

Задание 9.3. Найти длину кривой:

1. $x = \ln\left(\dfrac{1}{\cos y}\right),\ 0 \le y \le \pi/3$;
2. $x = 5(t-\sin t)$, $y = 5(1-\cos t)$ при $0 \le x \le \pi$;
3. $9y^2 = x(3-x)^2$, между точками пересечения кривой с осью Ox;
4. $x = R(\cos t + t\sin t)$, $y = R(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \pi$, $(R>0)$;
5. $\rho = \sqrt{2}\ \ e^{\varphi},\ -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$;
6. $y = 2\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1$;
7. $x = \dfrac{t^6}{6},\ y = 2 - \dfrac{t^4}{4}$, между точками пересечения линии с осями координат;
8. $y = \sqrt{(x+1)^3},\ -1 \le x \le 4$, между точками пересечения линии с осями координат;
9. $\rho = 12\ \ e^{12\varphi/5},\ 0 \le \varphi \le \pi/3$;
10. $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$ *при* $x^2 \le 2$;
11. $\rho = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3},\ 0 \le \varphi \le 3\pi\ \ (a > 0)$;
12. $y = \ln\sin x,\ \pi/3 \le x \le \pi/2$;
13.
14. $y = \ln(1-x^2),\ 0 \le x \le 1/2$;
15. $\rho = 2(1-\cos\varphi),\ -\pi \le \varphi \le -\pi/2$;
16. $y = e^x + 13,\ \ln\sqrt{15} \le x \le \ln\sqrt{24}$;
17. $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin\sqrt{x},\ 0 \le x \le 1$;
18. $y^2 = \dfrac{4}{9}(2-x)^3,\ -1 \le x \le 0$;
19. $x = 2(\cos t + t\sin t)$, $y = 2(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le \pi$;
20. $y = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 1$;
21. $\rho\varphi = 1,\ \dfrac{3}{4} \le \varphi \le \dfrac{4}{3}$;
22. $x = e^t(\cos t + \sin t),\ y = e^t(\cos t - \sin t)$, $\dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{4}$
23. $y = \ln 7 - \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$;
24. $y = e^x + 26,\ \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24}$;
25. $x = \mathrm{R}(\cos t + t\sin t)$, $y = \mathrm{R}(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le \pi$

13. $x=\sqrt{r^2-y^2},\ 0\le y\le r$;

Задание 9.4. Определить объем тела, образованного вращением вокруг указанной оси плоской фигуры, ограниченной заданными линиями:

1. $x^2+y^2=1,\ y=\sqrt{2x/3},\ y=0\ \ (\textit{вокруг оси } Ox)$;

2. $x^2-y^2=16,\ y=2x-8\ \ (\textit{вокруг оси } Ox)$;

3. $y=\dfrac{1}{1+x^2},\ x=\pm 1,\ y=0\ \ (\textit{вокруг оси } Ox)$;

4. $y=\arcsin x,\ x=1,\ y=0\ \ (\textit{вокруг оси } Ox)$;

5. $y=x^3,\ x=0,\ y=8\ \ (\textit{вокруг оси } Oy)$;

6. $y^2=2px\ \ (p>0),\ x=a\ \textit{ при }\ a>0\ \ (\textit{вокруг оси } Oy)$;

7. $y^2=x^3,\ y=0,\ x=1\ \ (\textit{вокруг оси } Oy)$;

8. $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1,\ y=\pm 4,\ (\textit{вокруг оси } Oy)$;

9. $9x^2-25y^2=225,\ y=\pm 1,\ (\textit{вокруг оси } Oy)$;

10. $y=3+\sqrt{9-x^2},\ y=3\ \textit{ при }\ y\ge 3\ \ (\textit{вокруг оси } Ox)$;

11. $y=x+1,\ y=0,\ x=4\ \ (\textit{вокруг оси } Ox)$;

12. $x^2-y^2=16,\ x=\pm 8\ \ (\textit{вокруг оси } Ox)$;

13. $y=e^x,\ y=e,\ x=0\ \ (\textit{вокруг оси } Oy)$;

14. $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1,\ y=\pm 3\ \ (\textit{вокруг оси } Oy)$;

15. $\frac{x^2}{9}+y^2=1$, $(вокруг\ \ оси\ \ Ox)$;

16. $y^2=8x,\ x=3\ \ (вокруг\ \ оси\ \ Ox)$;

17. $\frac{x^2}{10}+y^2=1$, $(вокруг\ \ оси\ \ Oy)$;

18. $x^2-y^2=25,\ x=\pm 10\ \ (вокруг\ \ оси\ \ Ox)$;

19. $y=\cos x,\ -\pi/2\le x\le \pi/2\ \ (вокруг\ \ оси\ \ Ox)$;

20. $x^2-y^2=4,\ x=\pm 1\ \ (вокруг\ \ оси\ \ Ox)$;

21. $y=\arcsin x,\ y=0,\ x=\frac{1}{2}\ \ (вокруг\ \ оси\ \ Ox)$;

22. $x^2-y^2=25,\ x=5+h\ \ при\ \ h>0\ \ (вокруг\ \ оси\ \ Ox)$;

23. $y=x^2+1,\ x=0,\ x=2,\ y=0\ \ (вокруг\ \ оси\ \ Ox)$;

24. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1,\ y=\pm\sqrt{2}\ \ (вокруг\ \ оси\ \ Oy)$;

25. $y=x^2,\ x=y^2\ \ (вокруг\ \ оси\ \ Ox)$.

Задание 9.5. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением линии:

1. $x^2+y^2=1,\ y=\sqrt{2x/3},\ y=0\ \ (вокруг\ \ оси\ \ Ox)$;
2. $y=\sin x,\ x=0,\ x=\pi\ \ (вокруг\ \ оси\ \ Ox)$;
3. $y=\operatorname{tg} x,\ x=0,\ x=\pi/4\ \ (вокруг\ \ оси\ \ Ox)$;
4. $4x^2+y^2=4\ \ (вокруг\ \ оси\ \ Ox)$;
5. $x=4-\frac{t^2}{2},\ y=\frac{t^2}{3}\ \ (вокруг\ \ оси\ \ Oy)$, между точками пересечения линии с осями координат;
6. $y^2=16ax,\ x=0,\ x=a\ \ (вокруг\ \ оси\ \ Oy)$;

7. $y=\dfrac{x^2}{2},\ y=\dfrac{3}{2}$ (*вокруг оси* Oy);

8. $y^2=2x,\ 2x=3$ (*вокруг оси* Ox);

9. $\rho=a^2\cos 2\varphi,\ 2x=3$ (*вокруг полярной оси*);

10. $y=e^{-x},\ x=0,\ x=8$ (*вокруг оси* Ox);

11. $y=\sin 2x,\ x=0,\ x=\pi/2$ (*вокруг оси* Ox);

12. $x=2(t-\sin t),\ y=2(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$ (*вокруг оси* Ox);

13. $y^2=16ax,\ x=a$ (*вокруг оси* Oy);

14. $x=5\cos^3 t,\ y=5\sin^3 t,$ (*вокруг оси* Ox);

15. $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t,\ 0\le t\le \pi/2$ (*вокруг оси* Ox);

16. $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},\ x=\pm 1$ (*вокруг оси* Ox);

17. $x=3(t-\sin t),\ y=3(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$ (*вокруг оси* Ox);

18. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ (*вокруг оси* Oy);

19. $y^2=x+4,\ x=1$ (*вокруг оси* Ox);

20. $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t$ (*вокруг оси* Ox);

21. $x^2+(y-\delta)^2=\mathrm{R}^2$ (*вокруг оси* Ox);

22. $y=\cos x,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ (*вокруг оси* Ox);

23. $x=\dfrac{t^3}{3},\ y=4-\dfrac{t^2}{2},\ 0\le t\le\sqrt{8}$ (*вокруг оси* Ox);

24. $x=t^2,\ y=\dfrac{1}{3}t(t^2-3),\ x=0,\ x=3$ (*вокруг оси* Ox);

25. $x^2+y^2-2x=0,\ x=0,\ x=h$ *при* $0<h\le 2$ (*вокруг оси* Ox).

Задание 9.6. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость удельного веса γ из резервуара, имеющего форму

а) конуса вращения, обращенного вершиной вниз, высота которого H, а радиус основания R:

1. $H = 6$ *м*, $R = 4$ *м*;
2. $H = 2$ *м*, $R = 3$ *м*;
3. $H = 8$ *м*, $R = 3$ *м*;
4. $H = 2$ *м*, $R = 5$ *м*;
5. $H = 6$ *м*, $R = 5$ *м*;
6. $H = 3$ *м*, $R = 7$ *м*;
7. $H = 3$ *м*, $R = 4$ *м*;
8. $H = 4$ *м*, $R = 5$ *м*;
9. $H = 5$ *м*, $R = 6$ *м*.

б) полусферы, обращенной выпуклостью вниз, радиус основания которой равен R:

10. $R = 10$ *м*;
11. $R = 20$ *м*;
12. $R = 30$ *м*;
13. $R = 4$ *м*;
14. $R = 15$ *м*;
15. $R = 6$ *м*;
16. $R = 7$ *м*.
17. $R = 8$ *м*.

в) форму цилиндра высоты H и радиуса основания R:

18. $H = 5$ *м*, $R = 2$ *м*;
19. $H = 4$ *м*, $R = 3$ *м*;
20. $H = 5$ *м*, $R = 3$ *м*;
21. $H = 6$ *м*, $R = 3$ *м*;
22. $H = 3$ *м*, $R = 2$ *м*;
23. $H = 3$ *м*, $R = 5$ *м*;
24. $H = 7$ *м*, $R = 2$ *м*;
25. $H = 2$ *м*, $R = 4$ *м*;

Задание 9.7. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1. а) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$, б) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$;

2. а) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x^3-5x^2}$, б) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

3. а) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$, б) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$;

4. а) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{x^2dx}{x^3-4}$, б) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x-1}{x^3}dx$;

14. а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x\ln x}$, б) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$;

15. а) $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-x^2)}}$, б) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ \sqrt[5]{\ln x}}$;

16. а) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{x\ln x}$, б) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(x+2)^3}{x^5}dx$;

17. а) $\displaystyle\int_{1/3}^2 \frac{dx}{(3x-1)^2}$,

б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$;

5. а) $\int\limits_0^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$, б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx$;

6. а) $\int\limits_{-1/2}^{12} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$, б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$;

7. а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, б) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{\ln x}}$;

8. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}$, б) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{(x-3)^3}{x^4} dx$;

9. а) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^4}}$, б) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-2x} dx$;

10. а) $\int\limits_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$, б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$;

11. а) $\int\limits_{-7}^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+14}}$,

б) $\int\limits_0^{+\infty} x \ e^{-x^2/2} dx$;

12. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-3)(x-1)}$,

б) $\int\limits_{2/\pi}^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx$;

13. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$, б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

18. а) $\int\limits_4^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}$, б) $\int\limits_0^{+\infty} x \ e^{-x^2} dx$;

19. а) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln^5 x}$, б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(2x-1)^2}{x^3} dx$;

20. а) $\int\limits_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^5}}$, б) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

21. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$;

22. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$, б) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^4 x}$;

23. а) $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{(x-2)^3}$, б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2}$;

24. а) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^4}}$,

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$;

25. а) $\int\limits_0^1 x\ln x \ dx$,

б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{(x-4)^2}{x^5} dx$.

10. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

10.1. Понятие функции нескольких переменных, предел и непрерывность функции нескольких переменных

Если каждой точке $M \in D \subset E^n$ по определенному правилу ставится в соответствие одно и только одно число $u \in R$, то говорят, что на множестве D задана ***функция*** $u=f(M)$, или $u=f(x_1,\ldots,x_n)$. При этом множество D называется ***областью определения*** функции.

Область определения функции двух переменных можно изобразить на плоскости.

Пример 1. Изобразить на плоскости область определения следующей функции: $u = \ln(x^2 + y + 1)$.

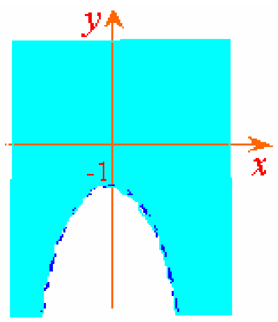


Рис. 10.1

Решение. Поскольку логарифмическая функция определена для положительных значений ее аргумента, то $x^2 + y + 1 > 0$. Изобразим линию $x^2 + y + 1 = 0$, которая является параболой (см. рис. 10.1). Так как точка $(0;0)$ удовлетворяет неравенству, то заштриховываем ту область, в которой точка находится. Отметим, что границу мы изобразили пунктирной линией, поскольку она не входит в область определения функции.

Линией уровня функции $z=f(x,y)$ называется множество точек плоскости xOy, в которых функция принимает одно и то же значение: $f(x,y)=C$.

Пример 2. Построить линии уровня функции

$$u = x^2 + y^2 - 2y.$$

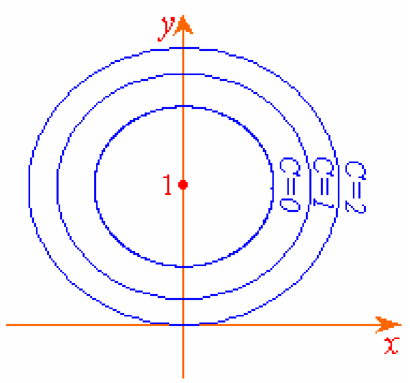


Рис. 10.2

Решение. Линии уровня $u=C$ – это кривая на плоскости xOy, задаваемая уравнением $x^2 + y^2 - 2y = C$, или $x^2 + (y-1)^2 = C + 1$. Это уравнение окружности с центром в точке $(0;1)$ и радиусом $\sqrt{C+1}$ (см. рис. 10.2). Таким образом, линии уровня данной функции– это концентрические окружности, радиус которых увеличивается с ростом $C>-1$, причем расстояние между линиями с одинаковым шагом уровня уменьшается по мере удаления от центра. Таким образом, график исходной функции представляет собой коническую поверхность, вершина которой находится в точке $(0;1;-1)$.

Рассмотрим функцию $u=f(M)$, определенную на множестве $D\subset E^n$, и точку $P\in E^n$, быть может, и не принадлежавшую множеству D, но обладающую тем свойством, что в любой окрестности этой точки содержится хотя бы одна точка множества D, отличная от P (другими словами, точка P является *предельной точкой* множества D).

Число a называется ***пределом*** функции $u=f(M)$ в точке P (или при $M\to P$), если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех точек M, удовлетворяющих условию $0<\rho(M,P)<\delta$, выполняется неравенство $|f(M)-a|<\varepsilon$, записывают

$$\lim_{M\to P} f(M)=a, \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x_1\to p_1\\ \dots\dots\\ x_n\to p_n}} f(x_1,\dots,x_n)=a.$$

Здесь $\rho(M,P)$ – расстояние между точками M и P : если $M(x_1,\dots,x_n)$, $P(a_1,\dots,a_n)$, то $\rho(M,P)=\sqrt{(x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2}$.

Понятие непрерывности функции нескольких переменных вводится точно также как и для функции одной переменной.

Функция $u=f(M)$ называется ***непрерывной*** в точке P, если предел в этой точке существует и равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{M\to P} f(M)=f(P), \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x_1\to p_1\\ \dots\dots\\ x_n\to p_n}} f(x_1,\dots,x_n)=f(p_1,\dots,p_n).$$

10.2. Частные производные

Пусть функция $u=f(x_1,x_2,\dots x_n)$ определена в некоторой окрестности точки M, включая саму эту точку. Придадим аргументу x_k приращение Δx_k, тогда функция тоже получит приращение

$$\Delta_k u=f(x_1,\dots,x_k+\Delta x_k,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n).$$

Частной производной от функции $u=f(x_1,x_2,\dots x_n)$ по независимой переменной x_k называется предел (если он существует и конечен):

$$\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_k u}{\Delta x_k}.$$

Обозначают $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ или f'_{x_k}. Таким образом, по определению:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=f'_{x_k}=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_k u}{\Delta x_k}.$$

Отметим, что частная производная по независимой переменной x_k вычисляется при условии, что все другие переменные постоянны. Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Пример 3. Найти все частные производные функции $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$.

Решение. Считая y постоянной, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\cos y^2}{x}\right)'_x = \cos y^2 \left(\frac{1}{x}\right)'_x = \cos y^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\cos y^2}{x^2}.$$

Считая x постоянной, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\cos y^2}{x}\right)'_y = \frac{1}{x}\left(\cos y^2\right)'_y = \frac{1}{x}\left(-\sin y^2\right)\cdot 2y = -\frac{2y\sin y^2}{x}.$$

Частными производными 2-го порядка функции $u=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Производные 2-го порядка обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f''_{x_k x_k}, \quad \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = f''_{x_k x_l} \text{ и т.д.}$$

Аналогично определяются производные порядка выше второго.

Отметим, что результат многократного дифференцирования по различным переменным не зависит от очередности дифференцирования, если получающиеся при этом частные производные непрерывны. Если дифференцирование производится по различным переменным, то полученные частные производные называются смешанными.

Пример 4. Найти все частные производные 2-го порядка функции $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$.

Решение. В примере 3 были найдены частные производные 1-го порядка этой функции: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\cos y^2}{x^2}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2y\sin y^2}{x}$. Найдем частные производные от этих производных, т. е. частные производные 2-го порядка.

Найдем частную производную второго порядка по переменной x:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(-\frac{\cos y^2}{x^2}\right)'_x = -\cos y^2 \left(\frac{1}{x^2}\right)'_x = -\cos y^2\left(\frac{-2}{x^3}\right) = \frac{2\cos y^2}{x^3}.$$

Найдем частную производную второго порядка по переменной y:

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(-\frac{2y\sin y^2}{x}\right)'_y = -\frac{2}{x}\left(y\sin y^2\right)'_y =$$

$$= -\frac{2}{x}\left(\sin y^2 + y\cdot\cos y^2\cdot 2y\right) = -\frac{2(\sin y^2 + 2y^2\cos y^2)}{x}.$$

Найдем смешанную частную производную второго порядка:

$$z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\frac{\cos y^2}{x^2}\right)'_y=-\frac{1}{x^2}\left(\cos y^2\right)'_y=-\frac{1}{x^2}\left(-\sin y^2\cdot 2y\right)=\frac{2y\sin y^2}{x^2}.$$

10.3. Дифференциал функции нескольких переменных

Полным приращением Δu функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точке $M(x_1,x_2,...,x_n)$, соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_n$, называется:

$$\Delta u=f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,...,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2,...,x_n).$$

Функция $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M(x_1,x_2,...,x_n)$, если в некоторой окрестности этой точки полное приращение функции может быть представлено в виде

$$\Delta u=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+...+A_n\Delta x_n+o(\rho),$$

где $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+...+\Delta x_n^2}$, $A_1,\ A_2,...,A_n$ – числа, $o(\rho)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем ρ.

Дифференциалом 1-го порядка du функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точке $M(x_1,x_2,...,x_n)$ называется главная часть полного приращения функции, линейная относительно приращений аргументов, т.е.

$$du=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+...+A_n\Delta x_n.$$

Для дифференциала 1-го порядка функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ справедлива следующая формула:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n. \tag{10.1}$$

При достаточно малом $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+...+\Delta x_n^2}$ для дифференцируемой функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ справедливы следующие приближенные равенства:

$$\Delta u\approx du;\ f(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,...,x_n+\Delta x_n)\approx f(x_1,x_2,...,x_n)+du. \tag{10.2}$$

Дифференциалом 2-го порядка d^2u функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ называется дифференциал от ее дифференциала $d^2u=d(du)$. Аналогично определяются дифференциалы более высоких порядков. Дифференциал порядка m символически выражается формулой

$$d^m u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m u\quad,$$

которая раскрывается по биномиальному закону. Например, для функции двух переменных $z = f(x,y)$ дифференциал 2-го порядка вычисляется по формуле:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 . \tag{10.3}$$

Пример 5. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции $z = e^{xy}$ и проверить равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Решение. Найдем частные производные 1-го порядка этой функции:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{xy}\right)'_x = e^{xy} \cdot y = ye^{xy};$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{xy}\right)'_y = e^{xy} \cdot x = xe^{xy}.$$

Используя формулу (10.1), найдем дифференциал 1-го порядка:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy = e^{xy}(ydx + xdy).$$

Найдем частные производные 2-го порядка:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(ye^{xy}\right)'_x = y^2 e^{xy};\quad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(xe^{xy}\right)'_x = e^{xy} + xye^{xy} = e^{xy}(1 + xy);$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(ye^{xy}\right)'_y = e^{xy} + xye^{xy} = e^{xy}(1 + xy);\qquad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(xe^{xy}\right)^t_y = x^2 e^{xy}.$$

Отметим, что справедливо равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Используя формулу (10.3), найдем дифференциал 2-го порядка:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = y^2 e^{xy}dx^2 + 2e^{xy}(1 + xy)dxdy + x^2 e^{xy}dy^2 =$$

$$= e^{xy}(y^2 dx^2 + 2(1 + xy)dxdy + x^2 dy^2 .$$

Пример 6. С помощью дифференциала вычислить приближенно $\operatorname{arctg}\left(\frac{1{,}02}{0{,}95}\right)$, исходя из значения функции $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ при $x = 1,\ y = 1$.

Решение. Вычислим значение функции при $x = 1,\ y = 1$:

$$z(1,1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Вычислим приближенно приращении функции Δz, заменяя его дифференциалом (формула 10.2), при $\Delta x = -0{,}05;\ \Delta y = 0{,}02$:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\Delta x + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\Delta y =$$

$$= \left(-\frac{1}{1^2+1^2}\right)\cdot(-0,05) + \left(\frac{1}{1^2+1^2}\right)\cdot 0,02 = 0,035.$$

Таким образом, используя формулу 10.2, получаем:

$$\mathrm{arctg}\left(\frac{1,02}{0,95}\right) = z + \Delta z \approx \frac{\pi}{4} + 0,035 \approx 0,785 + 0,035 = 0,82.$$

10.4. Экстремум функции нескольких переменных

Пусть функция $u{=}f(M)$ определена в области D и точка M_0 является внутренней точкой этой области. Говорят, что функция $f(M)$ имеет в точке M_0 ***экстремум*** (***максимум*** или ***минимум***), если существует такая окрестность точки M_0, в которой для любой точки M из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(M) \le f(M_0) \;\; \text{или} \;\; f(M) \ge f(M_0).$$

Из определения экстремума следует, что если функция имеет экстремум в точке M_0, то полное приращение $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ этой функции в точке M_0 удовлетворяет в некоторой окрестности точки M_0 одному из следующих условий:

$$\Delta u \le 0 \; - \; \text{в случае максимума},$$

$$\Delta u \ge 0 \; - \; \text{в случае минимума}.$$

И обратно, если в некоторой окрестности точки M_0 выполняется одно из этих неравенств, то функция $f(M)$ имеет в точке M_0 экстремум.

Если в точке в точке M_0 функция $f(M)$ имеет экстремум, то в этой точке ее частные производные либо равны нулю, либо не существуют

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{M_0} = 0. \qquad (10.4)$$

Точки, в которых выполняются условия (10.4), называются ***стационарными точками*** функции $u{=}f(M)$. Точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют, называются ***критическими.***

Рассмотрим функцию двух переменных $u{=}f(x,y)$ в окрестности стационарной точки $M_0(x_0, y_0)$. Обозначим

$$A_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\; A_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\; A_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}^2.$$

Достаточные условия существования точек экстремума
для функции двух переменных:

1) Если $\Delta>0$, то в точке M_0 экстремум, причем – максимум при $A_{11}<0$, минимум при $A_{11}>0$.

2) Если $\Delta<0$, то в точке M_0 экстремум отсутствует.

3) Если $\Delta=0$, то требуется дополнительное исследование на наличие экстремума данной функции в точке M_0.

Пример 7. Найти точки экстремума функции

$$u = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

Решение. Найдем стационарные точки данной функции, для этого вычислим частные производные функции и приравняем их нулю

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xy + 2y = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим, что существует четыре стационарных точки:

$$M_1(0;\ 0),\quad M_2\left(-\frac{5}{3};\ 0\right),\quad M_3(-1;\ 2),\quad M_4(-1;\ -2).$$

Теперь определим, есть ли в этих стационарных точках экстремумы. Для этого вычислим A_{11}, A_{22}, A_{12} и Δ. Поскольку

$$A_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x + 10,\ A_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x + 2,\ A_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y,\ \Delta = A_{11}A_{22} - A_{12}^2,$$

то для вычисления этих коэффициентов в найденных стационарных точках составим таблицу:

	M_1	M_2	M_3	M_4
A_{11}	$10>0$	$-10<0$	-2	-2
A_{22}	2	$-4/3$	0	0
A_{12}	0	0	4	-4
Δ	$20>0$	$40/3>0$	$-16<0$	$-16<0$
	min	*max*	*экстремума нет*	*экстремума нет*

Таким образом, в точке $M_1(0;\ 0)$ функция имеет минимум, в точке $M_2(-5/3;\ 0)$ – максимум, в точках M_3 и M_4 экстремума нет.

10.5. Условный экстремум

Рассмотрим задачу, специфическую для функций нескольких переменных, когда ее экстремум ищется не на всей области определения, а на множестве, удовлетворяющем некоторым дополнительным условиям (***условиям связи***). Такие экстремумы называются ***условными***.

Рассмотрим общую постановку задачи нахождения условного экстремума. Пусть задана функция $m+n$ переменных

$$u = f(x_1,\ldots,x_{m+n}), \tag{10.5}$$

для которой нужно найти условный экстремум при наличии m условий связи:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,\ldots,x_{m+n}) = 0, \\ \varphi_2(x_1,\ldots,x_{m+n}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1,\ldots,x_{m+n}) = 0. \end{cases} \tag{10.6}$$

Будем говорить, что функция (10.5) имеет условный экстремум при наличии связей (10.6) в точке M_0, координаты которой удовлетворяют условиям связи, если ее значение в этой точке является наибольшим или наименьшим по сравнению со значениями функции в точках некоторой окрестности точки M_0, координаты которых удовлетворяют условиям связи.

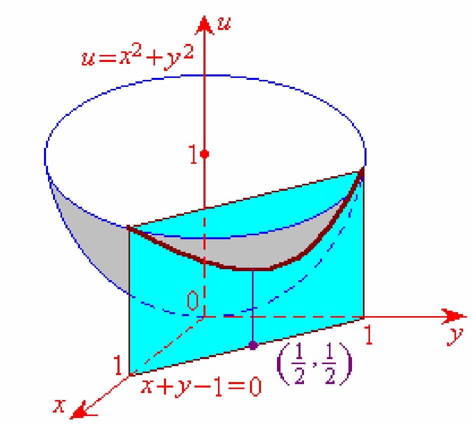


Рис. 10.3.

Пример 8. Найти экстремум функции $u = x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $x+y-1=0$.

Решение. Из уравнения связи следует, что $y=x-1$ и $u(x, x-1) = 2x^2 - 2x + 1$. Таким образом, при выполнении условия связи исходная функция становится функцией одной переменной. Ее экстремум находится элементарно: приравниваем нулю ее производную, получим $2x-1=0$, откуда $x=1/2$. В этой точке рассматриваемая функция, очевидно, имеет минимум. Значению $x=1/2$, согласно уравнению связи, соответствует $y=1/2$. Следовательно, в точке $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ исходная функция достигает минимума относительно уравнения связи. Геометрически это означает, что точка параболоида $u = x^2 + y^2$, находящаяся над точкой $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, является самой низкой из всех его точек, лежащих над прямой

$x+y-1=0$ (рис. 10.3). Этот пример показывает, что точка, в которой функция достигает условного экстремума, не является, вообще говоря, точкой экстремума этой функции.

Однако на практике решение системы (10.6) оказывается в явном виде невозможным или весьма затруднительным, поэтому для отыскания точек условного экстремума чаще используют ***метод неопределенных множителей Лагранжа***, который основан на следующей теореме:

Теорема. Пусть точка M_0 является точкой условного экстремума функции $u=f(M)$ при выполнении уравнений связи (10.6). Тогда существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m,$ что в точке M_0 будут выполняться условия

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}+\ldots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}=0,\ i=1,\ 2,\ldots,\ n. \qquad (10.7)$$

Функцией Лагранжа для данной функции $u=f(M)$ называется функция

$$L(x_1,\ldots,x_n;\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=u(x_1,\ldots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x_1,\ldots,x_n), \qquad (10.8)$$

Из теоремы следует, что если точка M_0 является точкой условного экстремума функции $u=f(M)$, то она является стационарной точкой для функции Лагранжа, т.е. должны выполняться условия:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=0,\ i=1,\ 2,\ldots,\ n. \qquad (10.9)$$

Таким образом, для отыскания точек условного экстремума следует рассмотреть систему $n+m$ уравнений (10.6) и (10.9) относительно неизвестных $x_1,\ldots,x_n,$ $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ и решить ее (если это окажется возможным), найдя $x_1,\ldots,x_n$ и по возможности исключив $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$. Сформулированная теорема утверждает, что все точки условного экстремума будут находиться среди найденных таким образом точек. Вопрос о том, какие же из них фактически будут точками условного экстремума, требует дополнительного исследования.

В случае функции двух переменных $z=f(x,y)$ при одном уравнении связи $\varphi(x,y)=0$ функция Лагранжа имеет вид $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$. Система уравнений (10.6) и (10.9) будет содержать три уравнения:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial y}=0,\\[2mm] \varphi(x,y)=0.\end{cases} \qquad (10.10)$$

Сформулируем **достаточное условие** условного экстремума. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ и λ_0 – решение системы (10.10),

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & L''_{xx}(M_0, \lambda_0) & L''_{xy}(M_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(M_0) & L''_{xy}(M_0, \lambda_0) & L''_{yy}(M_0, \lambda_0) \end{vmatrix}. \qquad (10.11)$$

Если $\Delta < 0$, то функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ условный максимум, $\Delta > 0$ – условный минимум.

Пример 9. Найти экстремум функции $u=xy$ при условии, что x и y связаны уравнением $2x+3y-5=0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(2x + 3y - 5).$$

Поскольку $\dfrac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda, \quad \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 3\lambda$, то

из системы уравнений $\begin{cases} y + 2\lambda = 0, \\ x + 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$ находим

$$x = \frac{5}{4}, \; y = \frac{5}{6}, \; \lambda = -\frac{5}{2}.$$

Таким образом, стационарная точка $M\left(\dfrac{5}{4}; \dfrac{5}{6}\right)$ может быть точкой условного экстремума.

Вычислим в точке M определитель Δ

$$\varphi'_x(M_0) = 2, \quad \varphi'_y(M_0) = 3,$$

$$L''_{xx}(M_0, \lambda_0) = 0, \quad L''_{yy}(M_0, \lambda_0) = 0, \quad L''_{xy}(M_0, \lambda_0) = 1.$$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(6 + 6) = -12.$$

Итак, точка $M\left(\dfrac{5}{4}; \dfrac{5}{6}\right)$ является точкой условного максимума для рассмотренной задачи.

10.6. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Если функция $f(M)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области, то она достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в стационарной точке или в граничной точке области. Таким образом, для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области, необходимо:

1) найти стационарные точки, расположенные в данной области, и вычислить значения функции в этих точках;
2) найти наибольшее и наименьшее значения на границе этой области;
3) из всех вычисленных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 10. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$z = x^2 + 3y^2 - x - y$$

в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 1,\ y = 1,\ x + y = 1$.

Решение. Изобразим треугольник, ограниченный данными прямыми (рис.10.4).

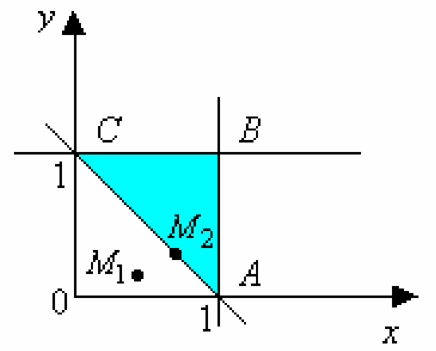


Рис. 10.4

1) Определим стационарные точки:

а) Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 1,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 6y - 1.$$

б) Решая систему, найдем стационарную точку

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0, \\ 6y - 1 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, \\ y = \dfrac{1}{6}. \end{cases} \quad M_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right).$$

Эта стационарная точка не принадлежит рассматриваемой области.

2) Исследуем функцию на границе области.

а) При $x=1$ (отрезок AB) имеем $z=3y^2-y,\quad y \in [0;1]$. Эта функция имеет минимум при $y = \frac{1}{6}$, $z\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}$ и на концах отрезка принимает значения $z(0) = 0,\ z(1) = 2$. Таким образом, на отрезке AB наибольшее значение $z(1) = 2$ и наименьшее значение $z\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}$.

б) При $y=1$ (отрезок BC) имеем $z=x^2-x+2,\quad x \in [0;1]$. Эта функция имеет минимум при $x = \frac{1}{2}$, $z\left(\frac{1}{2}\right) = 1\frac{3}{4}$ и на концах отрезка принимает значения

$z(0)=2,\ z(1)=2$. Таким образом, на отрезке BC наибольшее значение $z(0)=z(1)=2$ и наименьшее значение $z\left(\frac{1}{2}\right)=1\frac{3}{4}$.

б) При $y=1-x$ (отрезок CA) имеем $z=4x^2-6x+2,\quad x\in[0;1]$. Эта функция имеет минимум при $x=\frac{3}{4},\ z\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{4}$ и на концах отрезка принимает значения $z(0)=2,\ z(1)=0$. Таким образом, на отрезке CA наибольшее значение $z(0)=2$ и наименьшее значение $z\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{4}$.

3) Сравнивая все найденные значения, получаем, что $z_{наим}=-\frac{1}{4}$ в точке $M_2\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$, $z_{наиб}=2$ в точках $B(1;1)$ и $C(0;1)$.

10.7. Метод наименьших квадратов

На практике мы часто сталкиваемся с задачей сглаживания экспериментальных зависимостей. Пусть зависимость между двумя переменными x и y выражается в виде таблицы.

x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

Эти данные могут быть получены в результате опытных измерений или статистических наблюдений. Требуется наилучшим образом сгладить зависимость между переменными x и y, т.е. по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости y от x, исключив при этом случайные отклонения, связанные с неизбежными погрешностями измерений или статистических наблюдений. Такую сглаженную зависимость стремятся представить в виде формулы $y=f(x)$, или, как говорят, ***аппроксимировать*** опытные данные функцией $f(x)$.

Формулы, служащие для аналитического представления зависимости опытных данных, получили название ***эмпирических формул.*** Выбор той или иной эмпирической формулы основывается, как правило, на различного рода теоретических предпосылках. Обычно полагают, что множество допустимых функций является однопараметрическим семейством функций $\varphi(x,\theta)$, где θ – какой-то набор параметров. Например, семейство гипербол: $y=a+\frac{b}{x}$, семейство показательных функций $y=e^{a+bx+cx^2}$ и т.д. Задача аппроксимации состоит в том, чтобы так подобрать параметры функции, чтобы она "наилучшим" образом отвечала исходным данным. Существует много способов определения неизвестных параметров, наиболее распространенным и теоретически обоснованным способом является ***метод наименьших квадратов***.

Предположим, что функциональная зависимость между переменными x и y известна из предварительных сведений и имеет вид

$$y = \varphi(x; \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}), \qquad (10.12)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ – неизвестные параметры, которые следует найти. ***Метод наименьших квадратов*** состоит в том, что в качестве параметров $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ выбирают такие значения, при которых сумма квадратов отклонений "теоретических" значений $\varphi(x_i)$ от соответствующих значений y_i была бы минимальной:

$$Q(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \varphi(x_i; \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \right]^2 . \qquad (10.13)$$

Необходимым условием минимума функции (10.13) будет равенство нулю всех частных производных этой функции. В результате, для нахождения параметров $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ нужно решить систему k уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \alpha_0} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \alpha_{k-1}} = 0. \end{cases} \qquad (10.14)$$

Пример 11. Методом наименьших квадратов подобрать функцию $y = ae^{bx^2}$ по табличным данным и сделать чертеж.

X	0	2	4	6	8	10	12
Y	1080	935	724	362	176	43	19

Решение. В соответствие с методом наименьших квадратов следует подобрать коэффициенты a и b таким образом, чтобы функция

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ae^{bx_i^2} \right)^2$$

приняла минимальное значение. Необходимым условием экстремума функции Q является равенство нулю всех частных производных по неизвестным параметрам. Чтобы упростить вычисления вместо искомой функции рассмотрим ее логарифм

$$z = \ln y = \ln a + bx^2 = c + bx^2 .$$

В результате мы получим функцию линейную относительно неизвестных параметров c и b. Запишем функцию Q в виде

$$Q(c,b)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln y_i-c-bx_i^2\right)^2=min.$$

Здесь мы добавили множитель $\frac{1}{n}$ для того, чтобы использовать для краткости записей понятие средней арифметической величины:

$$\overline{u}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i. \qquad (10.15)$$

Составляем систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial c}=-\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln y_i-c-bx_i^2)=0,\\ \dfrac{\partial Q}{\partial b}=-\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln y_i-c-bx_i^2)(x_i^2)=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c+b\cdot\overline{x^2}=\overline{\ln y},\\ c\cdot\overline{x^2}+b\cdot\overline{x^4}=\overline{x^2\ln y}\end{cases}.$$

Отсюда находим

$$c=\overline{\ln y}-b\cdot\overline{x^2} \quad \text{и} \quad b=\frac{\overline{x^2\ln y}-\overline{x^2}\cdot\overline{\ln y}}{\overline{x^4}-\left(\overline{x^2}\right)^2}.$$

Далее составим таблицу вычислений:

№	x	y	$\ln y$	x^2	x^4	$x^2\ln y$	$y=ae^{bx^2}$
1	0	1080	6,985	0	0	0,000	1064,3
2	2	935	6,841	4	16	27,362	947,1
3	4	724	6,585	16	256	105,357	667,5
4	6	362	5,892	36	1296	212,099	372,6
5	8	176	5,170	64	4096	330,911	164,7
6	10	43	3,761	100	10000	376,120	57,7
7	12	19	2,944	144	20736	423,999	16,0
Σ/n	6	477	5,454	52	5200	210,836	

По данным таблицы находим

$$b=\frac{210,386-52\cdot 5,454}{5200-52^2}=-0,02916, \qquad c=5,454-(-0,02916)\cdot 52=6,97004,$$

$$a=e^c=1064,3.$$

Таким образом, искомая функция имеет вид

$$y = 1064,3 \cdot e^{-0,02916 \cdot x^2}.$$

Изобразим на рисунке 10.5 исходные данные (квадратики) и график искомой кривой:

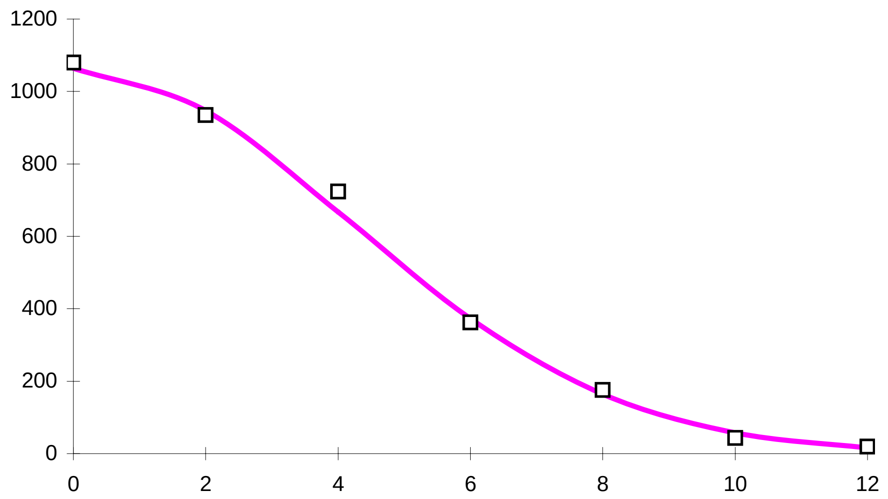


Рис. 10.5

Задание 10.1. Найти все частные производные 1-го порядка:

1. а) $z = 2xy - \operatorname{tg} x + \sqrt{y}$, б) $z = \dfrac{\cos(2x)}{1 + y^2}$, в) $z = (1 + \operatorname{ctg} y)^{\sqrt{x}}$.

2. а) $z = \dfrac{x^3}{6} - \operatorname{ctg}(xy) + \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, б) $z = \dfrac{\sin(y^3)}{x^4}$, в) $z = (\cos x)^{\ln y}$.

3. а) $z = \operatorname{ctg}(xy) - e^{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{y^7}}$, б) $z = \dfrac{\operatorname{tg}(y^4)}{\sqrt{x}}$, в) $z = (\cos y)^{\ln x}$.

4. а) $z = \operatorname{ctg}(xy) - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + e^{-2y^2}$, б) $z = \dfrac{x^4}{\cos 3y}$, в) $z = (1 - 3^y)^{\ln x}$.

5. а) $z = x^7 - \cos(2xy) + \sqrt{y^3}$, б) $z = \dfrac{e^{1/x}}{y^2}$, в) $z = (\cos x)^{\operatorname{ctg} y}$.

6. а) $z = e^{xy} + \operatorname{tg} x^3 + \sqrt[4]{y}$, б) $z = \dfrac{\ln(1 + y^2)}{\sqrt{x}}$, в) $z = (\sin y)^{x^2}$.

7. а) $z = \dfrac{6}{x^3} - \operatorname{ctg}\dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{y^5}}$, б) $z = \dfrac{\sin\sqrt{y}}{1 + x}$, в) $z = (\cos 2x)^{1/y}$.

8. а) $z = \operatorname{tg}(4xy) - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} + e^{\frac{-y^2}{4}}$, б) $z = \dfrac{1 + x^3}{\cos 6y}$, в) $z = (\ln x)^{\sin y}$.

9. а) $z = xy^2 - \operatorname{tg}\dfrac{x}{3} + \sqrt{y^7}$, б) $z = \dfrac{\sin(4x)}{y^2 - 4}$, в) $z = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{y}}$.

10. а) $z = \sin(xy) + \dfrac{1}{x^5} + \lg y$, б) $z = \dfrac{\operatorname{ctg}(x^5)}{\sqrt[3]{y^2}}$, в) $z = (1 + \ln x)^{1/y}$.

11. а) $z = \dfrac{y^5}{10} + \operatorname{ctg}(xy) + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, б) $z = \dfrac{\sin(x^4)}{y^3}$, в) $z = (\cos y)^{\ln x}$.

12. а) $z = \operatorname{tg}(xy) - \dfrac{1}{\sqrt{y}} + e^{-x^3}$, б) $z = \dfrac{y^5}{\cos 5x}$, в) $z = (1 + \ln x)^{\ln y}$.

13. а) $z = y^9 - \cos(4xy) + \sqrt{x^3}$, б) $z = \dfrac{e^{-1/y}}{x^2}$, в) $z = (\cos y)^{\operatorname{tg} x}$.

14. а) $z = e^{xy} + \operatorname{tg} x^4 + \sqrt[5]{y}$, б) $z = \dfrac{\ln(1 + x^3)}{\sqrt{y}}$, в) $z = (\sin x)^{y^2}$.

15. а) $z = \dfrac{2}{x^4} - \operatorname{ctg}\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{\sqrt{y^7}}$, б) $z = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{1 + y}$, в) $z = (\cos 2y)^{1/x}$.

16. а) $z = \operatorname{tg}(xy) - \dfrac{1}{\sqrt{y^3}} + e^{\frac{-x^2}{2}}$, б) $z = \dfrac{1 - x^4}{\cos 4y}$, в) $z = (\ln y)^{\sin x}$.

17. а) $z = 2xy - \operatorname{tg} x + \sqrt{y}$, б) $z = \dfrac{\cos(2x)}{1 + y^2}$, в) $z = (1 + \operatorname{ctg} y)^{\sqrt{x}}$.

18. а) $z = \sin(xy) - \dfrac{1}{x^3} + \ln y$, б) $z = \dfrac{\operatorname{ctg}(x^4)}{\sqrt[3]{y}}$, в) $z = (1 + 2^x)^{\sqrt{y}}$.

19. а) $z = \dfrac{x^3}{6} - \operatorname{ctg}(xy) + \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, б) $z = \dfrac{\sin(y^3)}{x^4}$, в) $z = (\cos x)^{\ln y}$.

20. а) $z = \operatorname{ctg}(xy) - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + e^{-2y^2}$, б) $z = \dfrac{x^4}{\cos 3y}$, в) $z = (1 - 3^y)^{\ln x}$.

21. а) $z = x^7 - \cos(2xy) + \sqrt{y^3}$, б) $z = \dfrac{e^{1/x}}{y^2}$, в) $z = (\cos x)^{\operatorname{ctg} y}$.

22. а) $z = e^{xy} + \operatorname{tg} x^3 + \sqrt[4]{y}$, б) $z = \dfrac{\ln(1 + y^2)}{\sqrt{x}}$, в) $z = (\sin y)^{x^2}$.

23. а) $z=\frac{6}{x^3}-\operatorname{ctg}\frac{y}{x}+\frac{1}{\sqrt{y^5}}$, б) $z=\frac{\sin\sqrt{y}}{1+x}$, в) $z=(\cos 2x)^{1/y}$.

24. а) $z=\operatorname{tg}(4xy)-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+e^{\frac{-y^2}{4}}$, б) $z=\frac{1+x^3}{\cos 6y}$, в) $z=(\ln x)^{\sin y}$.

25. а) $z=xy^2-\operatorname{tg}\frac{x}{3}+\sqrt{y^7}$, б) $z=\frac{\sin(4x)}{y^2-4}$, в) $z=(\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{y}}$.

Задание 10.2. Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков и проверить равенство $z''_{xy}=z''_{yx}$ для функции:

1. $z=e^{2x/y}$;	2. $z=\sin(x^2/y)$;	3. $z=\ln(x^2+4y^4)$;
4. $z=y-\sin(xy)$;	5. $z=\sin(1-x/y)$;	6. $z=y\sin(3x-5y)$;
7. $z=e^{1-x/y}$;	8. $z=\sin(x^2y)$;	9. $z=\ln(3x^4+y^5)$;
10. $z=y+\cos(xy)$;	11. $z=\cos(1+xy)$;	12. $z=x\cos(2x+3y)$;
13. $z=e^{x^2/y}$;	14 $z=\sin(-x/y^2)$;	15. $z=\ln(2x^2+y^4)$;
16. $z=x+\sin(xy)$.	17 $z=\cos(1-x/y)$.	18. $z=y\cos(3x+4y)$.
19. $z=e^{-x/y^2}$;	20. $z=\sin(xy^2)$;	21. $z=\ln(x^3+y^3)$;
22. $z=x+\operatorname{tg}(xy)$;	23 $z=\cos(xy^2)$;	24. $z=x\sin(2x+3y)$;
25. $z=e^{1+x/y}$.		

Задание 10.3 Исследовать функцию на экстремум:

1. $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$;	14. $z=4x^3-xy^2+4x^2+y^2$;
2. $z=x^3+3xy^2-15x-12$;	15. $z=x^3+3xy^2-27x-12$;
3. $z=x^3+xy^2+6xy$;	16. $z=x^3+xy^2-12xy$;
4. $z=x^3+y^3-3xy$;	17. $z=x^3+8y^3+6xy$;
5. $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$;	18. $z=x^3+2x^2+3y^2+4y$;
6. $z=x^3+y^3-15xy$;	19. $z=x^3-y^3-12xy$;
7. $z=x^3+8y^3-6xy+5$;	20. $z=x^3-8y^3-6xy-4$;
8. $z=x^3+y^3+3xy$;	21. $z=x^3-y^3+6xy$;
9. $z=x^3+xy^2+3xy$;	22. $z=x^3+4xy^2+8xy$;
10. $z=xy(4-x-y)$;	23. $z=x^3+y^3+12xy$;
11. $z=xy^2(1-x-y)$;	24. $z=xy(1-x-y)$;
12. $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$;	25. $z=2x^3+3xy^2+x^2+y^2$.
13. $z=xy(4-x-y)$;	

Задание 10.4. Найти условные экстремумы функции:

1. $z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$;
2. $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$;
3. $z = \ln(xy)$ при $x^3 + xy + y^3 = 0$;
4. $z = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$;
5. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $x + y = 2$;
6. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ при $x + y + 3 = 0$;
7. $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 8$;
8. $z = x^2 + y^2$ при $3x + 4y = 12$;
9. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{4}$;
10. $z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$;
11. $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$;
12. $z = \ln(xy)$ при $x^3 + xy + y^3 = 0$;
13. $z = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$;
14. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $x + y = 2$;
15. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ при $x + y + 3 = 0$;
16. $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 8$;
17. $z = x^2 + y^2$ при $3x + 4y = 12$;
18. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{4}$;
19. $z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$;
20. $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$;
21. $z = \ln(xy)$ при $x^3 + xy + y^3 = 0$;
22. $z = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$;
23. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $x + y = 2$;
24. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ при $x + y + 3 = 0$;
25. $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 8$;

Задание 10.5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$;
2. $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$;
3. $z = xy\,(6 - x - y)$ в области, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x+y=12$;
4. $z = x - 2y + 5$ в области, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x+y=1$;
5. $z = x - 2y + 5$ в области, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x-y+1=0$;
6. $z = xy$ в круге $x^2+y^2 \le 1$;

7. $z = x^2 – xy + y^2 – 4x$ в области, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $2x+3y–12=0$;

8. $z = xy + x + y$ в области, ограниченной линиями $x=1$, $x=2$, $y=2$, $y=3$;

9. $z = 1 – x^2 – y^2$ в круге $(x–1)^2 + (y–1)^2 \le 1$;

10. $z = x^2 + 3y^2 + x – y$ в области, ограниченной линиями $x=1$, $y=1$, $x+y=1$;

11. $z = xy$ в круге $x^2+y^2 \le 1$;

12. $z = xy + x + y$ в квадрате, ограниченном прямыми $x=1$, $x=2$, $y=2$, $y=3$;

13. $z = x^2 + 2xy – 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$;

14. $z = x^2 – y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$;

15. $z = xy\,(6 – x – y)$ в области, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x+y=12$;

16. $z = x – 2y + 5$ в области, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x+y=1$;

17. $z = x – 2y + 5$ в области, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x–y+1=0$;

18. $z = xy$ в круге $x^2+y^2 \le 1$;

19. $z = x^2 – xy + y^2 – 4x$ в области, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $2x+3y–12=0$;

20. $z = xy + x + y$ в области, ограниченной линиями $x=1$, $x=2$, $y=2$, $y=3$;

21. $z = 1 – x^2 – y^2$ в круге $(x–1)^2 + (y–1)^2 \le 1$;

22. $z = x^2 + 3y^2 + x – y$ в области, ограниченной линиями $x=1$, $y=1$, $x+y=1$;

23. $z = xy$ в круге $x^2+y^2 \le 1$;

24. $z = xy + x + y$ в квадрате, ограниченном прямыми $x=1$, $x=2$, $y=2$, $y=3$;

25. $z = x^2 + 2xy – 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$.

Задание 10.6. а) Полагая, что x и y связаны зависимостью $y=ax^2+b$, определить коэффициенты a и b *методом наименьших квадратов*, если данные опыта представлены следующей таблицей значений переменных x и y. Сделать чертеж.

1.

x	0	1	1,5	2,1	3
y	2,9	6,3	7,9	10,0	13,2

2.

x	0	3	6	9	12
y	0,3	4,1	5,7	13,4	28,5

3.

x	1	2	3	4	5
y	11,2	9,2	7,9	4,1	2,5

4.

x	1	2	3	4	5
y	11,2	9,2	7,9	4,1	2,5

5.

x	1	3	5	7	9
y	14,1	12,5	9,7	4,6	0,3

6.

x	1	3	5	7	9
y	14,1	12,5	9,7	4,6	0,3

7.

x	2	4	6	8	10
y	7	17	25	38	55

8.

x	0	3	6	9	12
y	0,7	2,6	5,5	12,4	24,3

б) Полагая, что x и y связаны зависимостью $y=a+be^x$, определить коэффициенты a и b *методом наименьших квадратов*, если данные опыта представлены следующей таблицей значений переменных x и y. Сделать чертеж.

9.

x	0	0,5	1	1,5	2
y	1,2	3,5	4,1	8,5	14,9

10.

x	1	2	3	4	5
y	11,2	9,2	7,9	4,1	2,5

11.

x	0	0,5	1	1,5	2
y	1,1	2,3	9,7	16,2	25,4

12.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8
y	29	24	17	9	1

в) Полагая, что x и y связаны зависимостью $y=a+b\ln x$, определить коэффициенты a и b *методом наименьших квадратов*, если данные опыта представлены следующей таблицей значений переменных x и y. Сделать чертеж.

13.

x	1	2	4	8	16
y	3,2	4,5	9,8	10,3	14,9

14.

x	1	3	9	27	81
y	21,4	14,5	9,8	5,8	2,1

15.

x	5	10	15	20	25
y	2,1	6,6	9,8	12,7	14,5

16.

x	1	10	20	30	40
y	78	50	38	31	27

г) Полагая, что x и y связаны зависимостью $y = a + \frac{b}{x}$, определить коэффициенты a и b *методом наименьших квадратов*, если данные опыта представлены следующей таблицей значений переменных x и y. Сделать чертеж.

17.

x	1	4	7	10	13
y	17,2	8,7	5,6	4,5	3,5

18.

x	1	3	5	7	9
y	2,1	9,8	13,7	14,5	15,2

19.

x	1	4	7	10	13
y	23,7	12,5	10,1	8,8	7,1

д) Полагая, что x и y связаны зависимостью $y = a + b\sqrt{x}$, определить коэффициенты a и b *методом наименьших квадратов*, если данные опыта представлены следующей таблицей значений переменных x и y. Сделать чертеж.

20.

x	1	4	7	10	13
y	17,2	8,7	5,6	4,5	3,5

21.

x	0	4	8	12	16
y	20,5	15,8	12,4	9,8	7,4

22.

x	1	5	9	13	17

y	15	22	35	67	89

е) Полагая, что *x* и *y* связаны зависимостью *y=ax+b*, определить коэффициенты *a* и *b* *методом наименьших квадратов*, если данные опыта представлены следующей таблицей значений переменных *x* и *y*. Сделать чертеж.

23.

x	1	2	3	4	5
y	235	250	270	292	300

24.

x	0	2	4	6	8
y	35,7	27,2	19,1	15,9	11,1

25.

x	1	5	9	13	17
y	15	22	35	67	89

11. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

11.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида

$$F(x,y,y')=0,$$

где x - независимая переменная, y - искомая функция, y' - ее производная называется обыкновенным ***дифференциальным уравнением первого порядка***.

Если это уравнение можно разрешить относительно y', то оно принимает вид

$$y'=f(x,y) \tag{11.1}$$

и называется уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Решением дифференциального уравнения называется дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, $x\in(a,b)$[*], которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество.

График решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***.

Условия

$$y=y_0 \text{ при } x=x_0, \tag{11.2}$$

при которых функция $y=\varphi(x)$ принимает заданное значение y_0 в заданной точке x_0, называют ***начальным условием***.

Общим решением уравнения (11.1) в некоторой области G плоскости xOy называется функция $y=\varphi(x,C)$, зависящая от x и произвольной постоянной C и обладающая следующими свойствами:

1. она является решением уравнения (11.1) при любом значении постоянной C;
2. при любых начальных условиях (11.2) таких, что $(x_0,y_0)\in G$, существует единственное значение постоянной $\tilde{N}=\tilde{N}_0$ такое, что функция $y=\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию $\varphi(x_0,C)=y_0$.

Частным решением уравнения (11.1) в области G называется функция $y=\varphi(x,C_0)$, которая получается из общего решения $y=\varphi(x,C)$ при определенном значении постоянной $\tilde{N}=\tilde{N}_0$.

Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения (11.1), удовлетворяющее начальному условию (11.2), называется ***задачей Коши***.

---

[*] Интервал может быть как конечным, так и бесконечным в одну или обе стороны.

Пример 1. Показать, что функция $y=-\sqrt{x^4-x^2}$ удовлетворяет уравнению $xyy'-y^2=x^4$.

Решение. Имеем

$$y'=-\frac{2x^3-x}{\sqrt{x^4-x^2}}.$$

Подставим y и y' в левую часть уравнения:

$$x\left(-\sqrt{x^4-x^2}\right)\left(-\frac{2x^3-x}{\sqrt{x^4-x^2}}\right)-\left(x^4-x^2\right)=x\left(2x^3-x\right)-x^4+x^2=x^4.$$

Получили тождество $x^4\equiv x^4$. Следовательно, функция $y=-\sqrt{x^4-x^2}$ является решением данного уравнения.

Пример 2. Показать, что функция $y=\sin 2x$ служит решением дифференциального уравнения второго порядка $y''+4y=0$.

Решение. Находим $y'=2\cos 2x$, $y''=-4\sin 2x$. Подставив выражение для y'' и y в данное уравнение, получим

$$y''+4y=-4\sin 2x+4\sin 2x\equiv 0,$$

т.е. функция $y=\sin 2x$ действительно является решением данного дифференциального уравнения.

Пример 3. Проверить, что функция y, определяемая уравнением $y^3+3y-x^3=4$, является решением дифференциального уравнения $y'=\dfrac{x^2}{y^2+1}$.

Решение. Продифференцируем обе части равенства $y^3+3y-x^3=4$ по переменной x с учетом того, что $y=y(x)$; тогда получим

$$3y^2y'+3y'-3x^2=0, \quad \text{или} \quad y'\left(y^2+1\right)=x^2, \quad \text{откуда } y'=\frac{x^2}{y^2+1}.$$

Пример 4. Составить дифференциальное уравнение семейства окружностей $(x-C)^2+y^2=1$.

Решение. Дифференцируя данное выражение, получаем $2(x-C)+2yy'=0$, откуда $y'=-\dfrac{x-C}{y}$. Исключаем теперь произвольную постоянную C. Для этого из последнего уравнения находим $x-C=-yy'$, подставляя его в данное уравнение, получим

$$y^2y'^2+y^2=1.$$

Это и есть дифференциальное уравнение данного семейства окружностей.

Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0, \qquad (11.3)$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ - непрерывные функции, называется ***дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными***.

Если ни одна из функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ тождественно не равна нулю, то в результате деления уравнения (11.3) на $f_2(x)\varphi_1(y)$ оно приводится к виду

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0.$$

Почленное интегрирование этого уравнения приводит к соотношению

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C,$$

которое и определяет (в неявной форме) решение уравнения (11.3)*.

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$y' = -\frac{x}{y+1}$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точку $(0,0)$.

Решение. Данное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y+1} \quad \text{или} \quad xdx + (y+1)dy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными (коэффициент при dx - функция только от x, коэффициент при dy - функция только от y).

Интегрируя, получим общее решение

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y = C.$$

Полагая в нем $x = 0$, $y = 0$, находим $C = 0$. Таким образом, частное решение, проходящее через точку $(0,0)$ - $x^2 + y^2 + 2y = 0$.

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\left(xy^2 + x\right)dx + \left(y - x^2y\right)dy = 0.$$

Решение. Вынося общие множители за скобки, данное уравнение можно записать так:

---

* Решение дифференциального уравнения, выраженное в неявной форме, называют *интегралом* этого уравнения

$$x\left(y^2+1\right)dx+y\left(1-x^2\right)dy=0,$$

откуда видно, что это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив обе части последнего уравнения на произведение $\left(y^2+1\right)\left(1-x^2\right)\neq 0$, получим

$$\frac{xdx}{1-x^2}+\frac{ydy}{y^2+1}=0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$-\ln\left|1-x^2\right|+\ln\left|1+y^2\right|=\ln|C|$$

или

$$\ln\left|\frac{1+y^2}{1-x^2}\right|=\ln|C|,$$

откуда получаем общее решение:

$$1+y^2=C\left(1-x^2\right).$$

Уравнение вида

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

называется **однородным.**

С помощью подстановки $y=zx$, где z - новая неизвестная функция, оно преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными.

Уравнение

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \qquad (11.4)$$

для которого

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

преобразованием

$$\begin{cases} x=u+h; \\ y=v+k, \end{cases}$$

где постоянные h и k находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1h+b_1k+c_1=0; \\ a_2h+b_2k+c_2=0, \end{cases}$$

сводится к однородному уравнению.

При $\Delta=0$ преобразованием $a_1x+b_1y=t$ уравнение (11.4) сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}.$$

Решение. Разделим числитель и знаменатель правой части данного уравнения на x^2, получим:

$$y' = \frac{1 + 2\frac{y}{x} - 5\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 - 6\frac{y}{x}}.$$

Делаем подстановку $y = xz$, где $z = z(x)$ - новая неизвестная функция. Тогда $y' = z + xz'$ и уравнение приводится к виду

$$z + xz' = \frac{1 + 2z - 5z^2}{2 - 6z} \quad \text{или} \quad xz' = \frac{1 + z^2}{2 - 6z}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{2 - 6z}{1 + z^2} dz = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем

$$2 \operatorname{arctg} z - 3 \ln(1 + z^2) = \ln|x| + C.$$

Заменяя z на $\frac{y}{x}$, получим общее решение данного уравнения:

$$2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 3 \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \ln|x| + C \quad \text{или} \quad 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln\frac{\left(x^2 + y^2\right)^3}{|x|^5} = C.$$

Пример 8. Найти общее решение уравнения

$$(4y - 3x - 5)dy + (7x - 3y + 2)dx = 0.$$

Решение. Это уравнение вида (11.4):

$$y' = \frac{-7x + 3y - 2}{-3x + 4y - 5},$$

при этом $\Delta = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -28 + 9 = -19 \neq 0.$

Вводим новые переменные $x = u + h$, $y = v + k$,

где h и k должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} -7h + 3k - 2 = 0, \\ -3h + 4k - 5 = 0. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, находим $h = \frac{7}{19}$, $k = 1$.

Таким образом, $x = u + \frac{7}{19}$, $y = v + \frac{29}{19}$; $dx = du$, $dy = dv$.

Исходное уравнение преобразуется к виду

$$y' = \frac{dv}{du} = \frac{-7u + 3v - \frac{49}{19} + \frac{87}{19} - 2}{-3u + 4v - \frac{21}{19} + \frac{116}{19} - 5} = \frac{-7u + 3v}{-3u + 4v}$$

или

$$\frac{dv}{du} = \frac{-7 + 3\frac{v}{u}}{-3 + 4\frac{v}{u}} .$$

В полученном однородном уравнении положим $v = uz$, откуда $\frac{dv}{du} = z + u\frac{dz}{du}$; приходим к уравнению с разделяющимися переменными:

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{-7 + 3z}{-3 + 4z} .$$

Преобразуем последнее уравнение:

$$u\frac{dz}{du} = \frac{-7 + 3z}{-3 + 4z} - z = \frac{-7 + 3z + 3z - 4z^2}{-3 + 4z} = -\frac{4z^2 - 6z + 7}{4z - 3} .$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{(4z - 3)dz}{2\left(2z^2 - 3z + \frac{7}{2}\right)} = -\frac{du}{u} .$$

Пользуясь формулой

$$\int \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \ln f(z),$$

из последнего уравнения находим

$$\frac{1}{2}\ln\left(2z^2 - 3z + \frac{7}{2}\right) = -\ln u + \frac{1}{2}\ln C_1 \quad \text{или} \quad \ln\left(2z^2 - 3z + \frac{7}{2}\right) = -\ln u^2 + \ln C_1 .$$

Отсюда

$$u^2\left(2z^2 - 3z + \frac{7}{2}\right) = C_1 .$$

Подставляя сюда $z = \frac{v}{u}$, получим

$$u^2\left(2\frac{v^2}{u^2} - 3\frac{v}{u} + \frac{7}{2}\right) = C_1 \quad \text{или} \quad 2v^2 - 3vu + \frac{7}{2}u^2 = C_1 .$$

Перейдем к переменным x и y по формулам $u = x - \frac{7}{19}$, $v = y - \frac{29}{19}$:

$$2\left(y - \frac{29}{19}\right)^2 - 3\left(y - \frac{29}{19}\right)\left(x - \frac{7}{19}\right) + \frac{7}{2}\left(x - \frac{7}{19}\right)^2 = C_1 .$$

Раскрыв скобки и заменив полученную в уравнении константу на C, получим общее решение исходного уравнения:

$$2y^2 - 3xy + \frac{7}{2}x^2 + 2x - 5y = C .$$

Уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad (11.5)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - непрерывные функции, называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка*** (y и y' входят в первых степенях, не перемножаясь между собой).

Если $Q(x) \equiv 0$, то уравнение (11.5) называется линейным ***однородным*** уравнением. Если $Q(x) \neq 0$, то уравнение (11.5) называется линейным ***неоднородным*** уравнением.

Общее решение линейного однородного уравнения (11.4) легко получается разделением переменных:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx; \qquad \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx; \qquad \ln y = -\int P(x)dx + \ln C,$$

или, наконец,

$$y = Ce^{-\int P(x)dx},$$

где C - произвольная постоянная.

Решение линейного неоднородного уравнения ищется ***методом Бернулли*** в виде

$$y = u(x)v(x).$$

Подстановка выражений для y и y' в уравнение (11.5) приводит его к виду

$$v\frac{du}{dx} + \left[\frac{dv}{dx} + P(x)v\right]u = Q(x).$$

В качестве v выбирают одну из функций, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0,$$

тогда функция u определяется из уравнения

$$v\frac{du}{dx} = Q(x).$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения можно найти исходя из общего решения соответствующего однородного уравнения ***методом Лагранжа или методом вариации постоянных***, полагая

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx},$$

где $C(x)$ - некоторая дифференцируемая функция от x.

Для нахождения $C(x)$ нужно подставить y в исходное уравнение (11.5), что приводит к уравнению

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Отсюда

$$C(x) = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx} + C,$$

где C - произвольная постоянная. Тогда искомое общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{-\int P(x)dx} + C\right].$$

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \qquad (11.6)$$

где α - действительное число. В случае $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ уравнение (11.6) является линейным. Во всех других случаях оно сводится к линейному с помощью подстановки

$$z = y^{1-\alpha}.$$

Пример 9. Найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0.$$

Выделить решение, удовлетворяющее условию $y(1) = 2$.

Решение. Разделим переменные в данном уравнении:

$$\frac{dy}{y} - \frac{2x}{1+x^2}dx = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\ln y - \ln\left(1+x^2\right) = \ln C \qquad \text{или} \qquad y = C\left(1+x^2\right).$$

Решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию, имеет вид

$$y(1) = C\left(1+1^2\right) = 2C = 2; \qquad C = 1; \qquad y = 1 + x^2.$$

Пример 10. Решить уравнение

$$xy' - 2y = 2x^4.$$

Решение. Разделив левую и правую части данного уравнения на x, приходим к линейному неоднородному уравнению:

$$y' - \frac{2}{x} y = 2x^3 .$$

Применим метод Бернулли. Пусть $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$ и уравнение примет вид

$$u'v + u\left(v' - \frac{2}{x} v \right) = 2x^3 .$$

Положим

$$v' - \frac{2}{x} v = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x} .$$

Проинтегрировав, найдем какое-либо частное решение этого уравнения, например, при $C = 0$

$$\ln|v| = 2\ln|x| \qquad \text{и} \qquad v = x^2 .$$

При этом данное уравнение обратится в уравнение

$$u'x^2 = 2x^3 \qquad \text{или} \qquad u' = 2x .$$

Решая это уравнение, получим

$$u = x^2 + C .$$

Таким образом, окончательно имеем

$$y = uv = \left(x^2 + C\right)x^2 = x^4 + Cx^2 .$$

Пример 11. Решить уравнение

$$y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$$

при начальном условии $y(0) = 0$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y' \cos^2 x + y = 0 .$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\cos^2 x} = 0 , \qquad \ln y + \operatorname{tg} x = \ln C , \qquad y = Ce^{-\operatorname{tg} x} .$$

Ищем решение исходного неоднородного уравнения в виде

$$y = C(x)e^{-\operatorname{tg} x} ,$$

где $C(x)$ - неизвестная функция. Подставляя в исходное уравнение $y = C(x)e^{-\operatorname{tg} x}$ и $y' = C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} - C(x)e^{-\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x}$, придем к уравнению

$$\left(C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} - C(x)e^{-\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} \right) \cos^2 x + C(x)e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x$$

или

$$C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} \cos^2 x = \operatorname{tg} x$$

откуда

$$C(x)=\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx=\int e^{\operatorname{tg} x}\operatorname{tg} x \quad d(\operatorname{tg} x).$$

Интегрируя по частям при $u=\operatorname{tg} x$, $dv=e^{\operatorname{tg} x}d(\operatorname{tg} x)$ и $du=d(\operatorname{tg} x)$, $v=e^{\operatorname{tg} x}$, получим

$$C(x)=e^{\operatorname{tg} x}\operatorname{tg} x-\int e^{\operatorname{tg} x} \quad d(\operatorname{tg} x)=(\operatorname{tg} x-1)e^{\operatorname{tg} x}+C.$$

Таким образом, получаем общее решение исходного уравнения

$$y=\operatorname{tg} x-1+Ce^{-\operatorname{tg} x}.$$

Используя начальное условие $y(0)=0$, получим $0=-1+C$, откуда $C=1$. Следовательно, искомое решение задачи Коши $y=\operatorname{tg} x-1+e^{-\operatorname{tg} x}$.

Пример 12. Найти общее решение уравнения

$$xy'+y=xy^2.$$

Решение. Преобразовав уравнение к виду

$$y'+\frac{1}{x}y=y^2,$$

убеждаемся, что это уравнение Бернулли с $\alpha=2$. С помощью подстановки

$$z=y^{1-\alpha}=y^{1-2}=\frac{1}{y}, \qquad y=\frac{1}{z}, \qquad y'=-\frac{z'}{z^2}$$

данное уравнение приводится к линейному

$$z'-\frac{1}{x}z=-1.$$

Решая однородное уравнение

$$z'-\frac{1}{x}z=0, \qquad \frac{dz}{z}-\frac{dx}{x}=0, \qquad \ln z-\ln x=\ln C,$$

получаем $z=Cx$.

Ищем решение неоднородного уравнения в виде

$z=C(x)x$, $z'=C'(x)x+C(x)$.

Подставляем в уравнение

$$C'(x)x+C(x)-\frac{1}{x}C(x)x=-1 \qquad \text{или} \qquad C'(x)x=-1.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$dC=-\frac{dx}{x}, \qquad C(x)=C-\ln x.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$z=x(C-\ln x),$$

или, после замены $z=\dfrac{1}{y}$,

$$y=\frac{1}{x\left(C-\ln x\right)}.$$

Уравнение вида

$$P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=0, \qquad (11.7)$$

где левая часть представляет полный дифференциал некоторой функции $F\left(x,y\right)$ в некоторой области G, называется ***уравнением в полных дифференциалах***.

Его можно записать в виде

$$dF\left(x,y\right)=0,$$

где $F\left(x,y\right)$ - такая функция, что $dF\left(x,y\right)=P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy$. Отсюда следует, что общее решение уравнения (11.7) имеет вид $F\left(x,y\right)=C$. Решение сводится к отысканию функции $F\left(x,y\right)$.

Для того чтобы уравнение (11.7) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области G, в которой функции $P\left(x,y\right)$ и $Q\left(x,y\right)$ определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial P\left(x,y\right)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q\left(x,y\right)}{\partial x}$, было выполнено условие

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (11.8)$$

В том случае, когда условие (11.8) выполнено, общий интеграл уравнения (11.7) можно записать в виде

$$\int_{x_0}^{x}P\left(x,y\right)dx+\int_{y_0}^{y}Q\left(x,y\right)dy=C$$

или

$$\int_{x_0}^{x}P\left(x,y_0\right)dx+\int_{y_0}^{y}Q\left(x,y\right)dy=C, \qquad (11.9)$$

где $\left(x_0,y_0\right)$ - произвольная фиксированная точка области G.

Если условие (11.8) не выполнено, то уравнение (11.7) не является уравнением в полных дифференциалах. Однако в некоторых случаях его можно привести к уравнению в полных дифференциалах умножением на функцию $\mu\left(x,y\right)$, которая называется ***интегрирующим множителем***.

Интегрирующий множитель легко находится, когда он зависит только от x, т.е. $\mu=\mu\left(x\right)$, или только от y, т.е. $\mu=\mu\left(y\right)$. Первый из этих случаев имеет место, если соотношение

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\varphi(x)$$

является функцией только от x; тогда интегрирующий множитель находится по формуле

$$\mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx} \tag{11.10}$$

Второй случай имеет место, если соотношение

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{P}=\psi(y)$$

является функцией только от y; тогда интегрирующий множитель находится по формуле

$$\mu(y)=e^{-\int\psi(y)dy}. \tag{11.11}$$

Пример 13. Найти общее решение уравнения

$$(x+y-1)dx+\left(e^{y}+x\right)dy=0.$$

Решение. Здесь $P(x,y)=x+y-1$, $Q(x,y)=e^{y}+x$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$; таким образом, условие (11.8) выполнено, т.е. данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Найдем общее решение по формуле (11.9), взяв $x_0=0$, $y_0=0$:

$$\int_0^x(x+y-1)dx+\int_0^y e^{y}dy=C_1 \qquad \text{или} \qquad \left.\left(\frac{x^2}{2}+xy-x\right)\right|_0^x+\left.e^{y}\right|_0^y=\tilde{N}_1.$$

Подставляя пределы, находим

$$\frac{x^2}{2}+xy-x+e^{y}-1=\tilde{N}_1 \qquad \text{или} \qquad \frac{x^2}{2}+xy-x+e^{y}=\tilde{N},$$

где $C=C_1+1$.

Пример 14. Найти общее решение уравнения

$$ydx+x\left(\ln x-y^3\right)dy=0.$$

Решение. Здесь $P(x,y)=y$, $Q(x,y)=x\left(\ln x-y^3\right)$, так что $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1+\ln x-y^3$, т.е. условие (11.8) не выполняется. Проверим, существует ли для данного уравнения интегрирующий множитель. Поскольку

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{1-\left(1+\ln x-y^3\right)}{x\left(\ln x-y^3\right)}=-\frac{1}{x}=\varphi(x),$$

то интегрирующий множитель вычисляется по формуле (11.10):

$$\mu=e^{\int\varphi(x)dx}=e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}.$$

Умножив обе части исходного уравнения на $\mu=\dfrac{1}{x}$, получаем уравнение

$$\frac{y}{x}dx+\left(\ln x-y^3\right)dy=0,$$

которое, как нетрудно проверить, является уравнением в полных дифференциалах.

Решим это уравнение. Полагая $x_0=1$, $y_0=0$ и используя формулу (11.9), имеем

$$\int\limits_1^x\frac{y}{x}dx+\int\limits_0^y\left(-y^3\right)dy+C,$$

т.е.

$$\left(y\ln|x|\right)\Big|_1^x-\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^y=C \qquad \text{или} \qquad y\ln|x|-\frac{y^4}{4}=C.$$

Это и есть общее решение данного уравнения.

11.2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Дифференциальным уравнением n***-го порядка*** называется уравнение вида

$$F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0. \qquad (11.12)$$

Интегрирование дифференциальных уравнений n-го порядка (в конечном виде) удается произвести только для некоторых частных случаев.

Решение уравнения $y^{(n)}=f(x)$ находится n-кратным интегрированием, а именно:

$$y^{(n)}=f(x),\; y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1=f_1(x)+C_1,$$

$$y^{(n-2)}=\int\left[f_1(x)+C_1\right]dx+C_2=f_2(x)+C_1x+C_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

где

$$f_n(x) = \underbrace{\iiint \ldots \int}_{n\ \text{ðàç}} f(x)\,dx^n.$$

Так как $\frac{C_1}{(n-1)!}$, $\frac{C_2}{(n-2)!}$, $\ldots$ являются постоянными величинами, то общее решение может быть записано так:

$$y = f_n(x) + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Пример 15. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{IV} = \sin 2x.$$

Решение. Последовательно интегрируя четыре раза данное уравнение, получим

$$y''' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1,$$

$$y'' == \int -\frac{1}{2}\cos 2x dx + \int C_1 dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2,$$

$$y' = \frac{1}{8}\cos 2x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3,$$

$$y = \frac{1}{16}\sin 2x + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4.$$

Порядок уравнения вида

$$F\left(x,\ y^{(k)},\ y^{(k+1)},\ldots,\ y^{(n)}\right) = 0$$

можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных данного уравнения, т.е. полагая $y^{(k)} = z$. Тогда получим уравнение

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

Таким образом, порядок уравнения понижается на k единиц.

Пример 16. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\left(1 + x^2\right)y'' + 2xy' = 12x^3.$$

Решение. Поскольку уравнение не содержит y, то полагая $y' = z$, имеем $y'' = z'$. Получаем дифференциальное уравнение

$$\left(1 + x^2\right)z' + 2xz = 12x^3.$$

Разделив его на $1 + x^2$, получим линейное неоднородное уравнение

$$z' + \frac{2x}{1+x^2} z = \frac{12x^3}{1+x^2}.$$

Решая однородное уравнение, получаем

$$\frac{dz}{z} + \frac{2x}{1+x^2} dx = 0, \qquad \ln z + \ln\left(1+x^2\right) = \ln C, \qquad z = \frac{C}{1+x^2}.$$

Решаем неоднородное уравнение, например, методом вариации постоянных:

$$z = \frac{C(x)}{1+x^2}, \qquad z' = \frac{C'(x)\left(1+x^2\right) - 2xC(x)}{\left(1+x^2\right)^2}, \qquad C'(x) = 12x^3, \qquad C(x) = 3x^4 + C.$$

Таким образом, решением является

$$z = \frac{3x^4 + C}{1+x^2}.$$

Т.к. $z = y'$, имеем

$$y' = \frac{3x^4 + C}{1+x^2}.$$

Интегрируя, получим общее решение

$$y = \int \left(3x^2 - 3 + \frac{3+C}{1+x^2} \right) dx = x^3 - 3x + (3+C)\operatorname{arctg} x + C_2$$

или

$$y = x^3 - 3x + C_1 \operatorname{arctg} x + C_2.$$

Уравнение вида

$$F\left(y,\ y',\ y'',\dots,\ y^{(n)}\right) = 0$$

допускает понижение порядка на единицу, если положить $y' = z$, а за новый аргумент принять сам y. В этом случае y'', y''', … выразятся через z и производные от z по y по формулам

$$y'' = z\frac{dz}{dy},\ y''' = z\left[z\frac{d^2 z}{dy^2} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \right], \dots$$

(они выводятся по правилу дифференцирования сложной функции), причем порядок уравнения понизится на единицу.

Пример 17. Найти решение уравнения

$$2yy'' = y'^2 + 1.$$

Решение. Положив $y' = z$ и приняв y за новую независимую переменную, получим $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$. Тогда данное уравнение можно записать в виде

$$2yz\frac{dz}{dy} = z^2 + 1.$$

Полученное уравнение – с разделяющимися переменными:

$$\frac{2zdz}{z^2+1} = \frac{dy}{y} \qquad \text{или} \qquad \frac{dz^2}{z^2+1} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln\left(z^2+1\right) = \ln|y| + \ln C_1, \qquad z = \pm\sqrt{C_1 y - 1}.$$

Т.к. $z = y'$, то приходим к следующему уравнению относительно y

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx.$$

Находя интеграл, получаем

$$\pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2, \qquad \pm\sqrt{C_1 y - 1} = \frac{C_1}{2}\left(x + C_2\right)$$

или окончательно

$$C_1 y - 1 = \frac{C_1^2}{4}\left(x + C_2\right)^2.$$

11.3. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (11.13)$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ - некоторые действительные числа, называется ***линейным однородным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами***.

Общее решение уравнения (11.13) определяется формулой

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - его линейно независимые частные решения.

Для нахождения частных решений уравнения (11.13) составляют ***характеристическое уравнение***

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \qquad (11.14)$$

которое получается из уравнения (11.13) заменой производных искомой функции соответствующими степенями λ, сама функция заменяется единицей. Уравнение (11.14) является уравнением n-й степени и имеет n корней (действительных или комплексных, среди которых могут быть и равные).

Общее решение дифференциального уравнения (11.13) строится в зависимости от характера корней уравнения (11.14):

1) каждому действительному простому корню λ в общем решении соответствует слагаемое вида $Ce^{\lambda x}$;

2) каждому действительному корню кратности k в общем решении соответствует слагаемое вида $\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}\right)e^{\lambda x}$;

3) каждой паре комплексных сопряженных простых корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в общем решении соответствует слагаемое вида $e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$;

4) каждой паре комплексных сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ кратности k в общем решении соответствует слагаемое вида $e^{\alpha x}\left[\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}\right)\cos\beta x + \left(C_{k+1} + C_{k+2} x + \ldots + C_{2k} x^{k-1}\right)\sin\beta x\right]$.

Пример 18. Решить уравнение

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Решение. Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Соответствующее ему характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

имеет действительные корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. В соответствии с п.1 общее решение записывается в виде

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Пример 19. Найти решение уравнения

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

имеет равные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. В соответствии с п.2 получаем общее решение исходного уравнения в виде

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{-2x}.$$

Пример 20. Решить уравнение

$$y'' - 6y' + 25y = 0.$$

Решение. Имеем:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0, \quad \lambda_1 = 3 + 4i, \quad \lambda_2 = 3 - 4i.$$

На основании п. 3 получаем общее решение уравнения:

$$y = e^{3x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right).$$

Пример 21. Решить уравнение

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0.$$

Решение. Здесь характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$$

имеет различные действительные корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, поэтому общим решением исходного уравнения в соответствии с п.1 будет

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

Пример 22. Найти решение уравнения

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0.$$

Решение. Имеем соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = i, \qquad \lambda_3 = \lambda_4 = -i.$$

Поэтому согласно п.4 общее решение имеет вид

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right)\cos x + \left(C_3 + C_4 x\right)\sin x.$$

Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (11.15)$$

называется ***линейным неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами.***

Общее решение уравнения (11.15) определяется формулой

$$y = \bar{y} + y_O,$$

где y_O - общее решение соответствующего однородного уравнения (11.13), а $\bar{y}$ - частное решение данного неоднородного уравнения.

В общем случае частное решение уравнения (11.15) может быть найдено с помощью ***метода вариации постоянных*** (метода Лагранжа). Если

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

общее решение однородного уравнения (11.13), то общее решение неоднородного уравнения (11.15) ищут в виде

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n.$$

Функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, …, $C_n(x)$ находят из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0; \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0; \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{11.16}$$

Пример 23. Найти решение задачи Коши

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y'' + y = 0.$$

Имеем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Ему соответствуют корни $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = -i$. Тогда общее решение однородного уравнения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Применим метод вариации постоянных. Для этого решение данного неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Для определения функций $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ записываем систему уравнений (11.16):

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ C_1'(-\sin x) + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x.} \end{cases}$$

Решая ее (т.к. решение ищем в окрестности точки $x = 0$, то $\cos x > 0$), получаем

$$C_1'(x) = -\operatorname{tg} x, \qquad C_2'(x) = 1.$$

Интегрируя, находим

$$C_1(x) = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln(\cos x) + C_1, \qquad C_2(x) = x + C_2.$$

Записываем полученное общее решение данного неоднородного уравнения

$$y = \left[\ln(\cos x) + C_1\right]\cos x + (x + C_2)\sin x.$$

Используя начальные условия, определяем константы C_1 и C_2. Т.к.

$$y(0) = \left[\ln(\cos 0) + C_1\right]\cos 0 + (0 + C_2)\sin 0 = 1,$$

то $C_1 = 1$. Т.к.

$$y'(0)=\left[\ln(\cos 0)+C_1\right]\sin 0+\left(-\frac{\sin 0}{\cos 0}\right)\cos 0+\sin 0+(0+C_2)\cos 0=0,$$

то $C_2=0$. Таким образом, решением задачи Коши является

$$y=\left[\ln(\cos x)+1\right]\cos x+x\sin x.$$

В простейших случаях частное решение может быть найдено с помощью ***метода неопределенных коэффициентов***. Этот метод применим только в том случае, если правая часть уравнения (11.15) имеет специальный вид. Укажем возможные случаи и соответствующие им виды частных решений:

1. $f(x)=P(x)$, где $P(x)$ - полином от x, который может, в частности, быть заданным постоянным числом, отличным от нуля. Тогда частное решение неоднородного уравнения (11.15) можно найти в виде $\overline{y}=x^kQ(x)$, где $Q(x)$ - полином той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами, а k - число корней характеристического уравнения, равных нулю.

2. $f(x)=P(x)e^{ax}$, где $P(x)$ - полином от x. Тогда частное решение следует искать в виде $\overline{y}=x^kQ(x)e^{ax}$, где $Q(x)$ - полином той же степени, что и $P(x)$, а k - число корней характеристического уравнения, равных a.

3. $f(x)=e^{ax}\left[P_1(x)\cos bx+P_2(x)\sin bx\right]$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ - полиномы от x. (Эти полиномы, в частности, могут быть постоянными числами, и один из них – тождественным нулем). Пусть m - наивысшая из степеней полиномов $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Тогда частное решение следует искать в виде

$$\overline{y}=x^ke^{ax}\left[Q_1(x)\cos bx+Q_2(x)\sin bx\right],$$

где $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ - полиномы степени m с неопределенными коэффициентами, k - число корней характеристического уравнения, равных $a+ib$.

4. $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_m(x)$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_m(x)$ - функции вида, рассмотренного в п.п. 1-3. Если y_1, y_2, …, y_m - частные решения, соответствующие функциям $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_m(x)$,

то $\overline{y}=y_1+y_2+\ldots+y_m$ является частным решением уравнения (11.15).

Пример 24. Найти общее решение уравнения

$$y''-2y'+y=x+1.$$

Решение. Характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению имеет вид

$$\lambda^2-2\lambda+1=0.$$

Его корнями являются $\lambda_1=\lambda_2=1$. Им соответствует общее решение

$$y_O=e^x\left(C_1+C_2x\right).$$

Согласно п.1 частное решение ищем в виде

$$\overline{y}=Ax+B,$$

где A и B - неизвестные коэффициенты. Дифференцируя $\overline{y}$ дважды и подставляя $\overline{y}$, $\overline{y'}$, $\overline{y''}$, находим

$$-2A+Ax+B=x+1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства:

$$x:\quad A=1;$$

$$x^0:\ -2A+B=1,$$

находим $A=1$, $B=3$. Итак, частное решение данного уравнения имеет вид $\overline{y}=x+3$, а его общее решение

$$y=y_O+\overline{y}=e^x\left(C_1+C_2x\right)+x+3.$$

Пример 25. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+2y'=e^x\left(3x^2+2x+9\right).$$

Решение. Найдем общее решение y_O соответствующего однородного уравнения

$$y''+2y'=0.$$

Решая отвечающее ему характеристическое уравнение

$$\lambda^2+2\lambda=0,$$

получаем корни $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-2$. Следовательно,

$$y_O=C_1+C_2e^{-2x}.$$

Перейдем к отысканию частного решения $\overline{y}$ исходного уравнения. Здесь правая часть имеет вид $f\left(x\right)=e^x\left(3x^2+2x+9\right)$, т.е. соответствует п. 2 с $a=1$, $P\left(x\right)=3x^2+2x+9$. Т.к. число $a=1$ не является корнем характеристического уравнения, то $k=0$. Следовательно, частное решение $\overline{y}$ нужно искать в виде

$$\overline{y}=e^x\left(Ax^2+Bx+C\right),$$

где A, B и C - некоторые неизвестные коэффициенты. Для их отыскания воспользуемся тем, что $\overline{y}$ должно быть решением исходного уравнения. Найдем $\overline{y'}$ и $\overline{y''}$:

$$\overline{y'} = e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right) + e^x\left(2Ax + B\right) = e^x\left(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C\right),$$

$$\overline{y''} = e^x\left(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C\right) + e^x\left(2Ax + 2A + B\right) =$$

$$= e^x\left(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C\right);$$

теперь подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$e^x\left(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C\right) + 2e^x\left(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C\right) =$$

$$= e^x\left(3x^2 + 2x + 9\right).$$

Сокращая обе части полученного равенства на e^x и группируя члены при одинаковых степенях x, в результате получим

$$3Ax^2 + \left(8A + 3B\right)x + 2A + 4B + 3C = 3x^2 + 2x + 9.$$

Это равенство тождественно выполняется только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равны между собой. Итак, для отыскания коэффициентов A, B и C имеем следующую систему уравнений:

$$x^2:\ 3A = 3;$$
$$x:\ \ 8A + 3B = 2;$$
$$x^0:\ 2A + 4B + 3C = 9.$$

Решая эту систему, найдем $A = 1$, $B = -2$, $C = 5$. Таким образом, получаем искомое частное решение

$$\overline{y} = e^x\left(x^2 - 2x + 5\right).$$

Теперь можно записать общее решение исходного уравнения:

$$y = y_O + \overline{y} == C_1 + C_2e^{-2x} + e^x\left(x^2 - 2x + 5\right).$$

Пример 26. Найти решение уравнения

$$y'' + y = 3\sin x,$$

удовлетворяющего краевым условиям $y\left(0\right) + y'\left(0\right) = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y_O = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Частное решение $\overline{y}$, согласно п.3 следует искать в виде

$$\overline{y} = x\left(A\cos x + B\sin x\right),$$

т.к. $a=0$, $b=i$; i является простым корнем характеристического уравнения, поэтому $k=1$; кроме того, $m=0$. Итак, дифференцируя $\overline{y}$ дважды и подставляя производные в исходное уравнение, получим

$$-2A\sin x+2B\cos x+x\left(-A\cos x-B\sin x\right)+x\left(A\cos x+B\sin x\right)=3\sin x.$$

Приведя подобные, получим

$$-2A\sin x+2B\cos x=3\sin x;$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в правой и левой частях полученного равенства, имеем

$$\sin x:\ -2A=3,$$
$$\cos x:\ 2B=0,$$

т.е. $A=-\dfrac{3}{2}$, $B=0$. Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$\overline{y}=-\frac{3}{2}x\cos x,$$

а общее решение исходного уравнения

$$y=y_O+\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{3}{2}x\cos x.$$

Постоянные C_1 и C_2 найдем, используя краевые условия. Имеем

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x-\frac{3}{2}\cos x+\frac{3}{2}x\sin x.$$

и, далее,

$$y(0)=C_1\cos 0+C_2\sin 0-\frac{3}{2}\cdot 0\cdot\cos 0=C_1,$$

$$y'(0)=-C_1\sin 0+C_2\cos 0-\frac{3}{2}\cos 0+\frac{3}{2}\cdot 0\cdot\sin 0=C_2-\frac{3}{2},$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=C_1\cos\frac{\pi}{2}+C_2\sin\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}=C_2,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-C_1\sin\frac{\pi}{2}+C_2\cos\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=-C_1+\frac{3\pi}{4}.$$

Таким образом,

$$y(0)+y'(0)=C_1+C_2-\frac{3}{2}=0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)+y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=C_2-C_1+\frac{3\pi}{4}=0,$$

откуда получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{3}{2}, \\ C_1 - C_2 = \dfrac{3\pi}{4}, \end{cases}$$

решая которую, находим $C_1 = \dfrac{3(2+\pi)}{8}$, $C_2 = \dfrac{3(2-\pi)}{8}$. Таким образом, решение исходного уравнения, удовлетворяющее поставленным краевым условиям имеет вид

$$y = \frac{3}{8}\left[(2+\pi)\cos x + (2-\pi)\sin x\right] - \frac{3}{2}x\cos x.$$

Пример 27. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' = 4x - 5 + 10e^x \cos x.$$

Решение. Находим сначала y_O. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, поэтому

$$y_O = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

Переходим к нахождению $\overline{y}$. Здесь правая часть $f(x)$ исходного уравнения представляет собой сумму функций $f_1(x) = 4x - 5$ и $f_2(x) = 10e^x \cos x$. Согласно п.4 будем искать частные решения y_1, y_2 для каждой из функций в отдельности.

Функция $f_1(x) = 4x - 5$ соответствует п.1 при $k = 1$ и $P(x) = 4x - 5$. Значит

$$y_1 = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Дифференцируя, находим

$$y_1' = 2Ax + B, \qquad y_1'' = 2A,$$

подставляя y_1' и y_1'' в левую часть исходного уравнения и приравнивая полученное выражение к $f_1(x) = 4x - 5$, получим

$$2A - 4(2Ax + B) = 4x - 5,$$

откуда

$$x:\ -8A = 4,$$
$$x^0:\ 2A - 4B = -5,$$

или $A = -\dfrac{1}{2}$, $B = 1$. Таким образом,

$$y_1 = -\frac{x^2}{2} + x.$$

Функция $f_2(x)=10e^x\cos x$ соответствует п.3 при $k=0$, $P(x)=1$, $Q(x)=0$. Поэтому частное решение ищем в виде

$$y_2=e^x\left(C\cos x+D\sin x\right).$$

Дифференцируя, находим

$$y_2'=e^x\left(C\cos x+D\sin x\right)+e^x\left(-C\sin x+D\cos x\right)=$$
$$=e^x\left[\left(C+D\right)\cos x+\left(D-C\right)\sin x\right]$$
$$y_2''=e^x\left[\left(C+D\right)\cos x+\left(D-C\right)\sin x\right]+e^x\left[-\left(C+D\right)\sin x+\left(D-C\right)\cos x\right]=$$
$$=e^x\left(2D\cos x-2C\sin x\right).$$

Подставляя y_2' и y_2'' в левую часть исходного уравнения и приравнивая полученное выражение к $f_2(x)=10e^x\cos x$, имеем

$$e^x\left(2D\cos x-2C\sin x\right)-4e^x\left[\left(C+D\right)\cos x+\left(D-C\right)\sin x\right]=10e^x\cos x$$

или

$$e^x\left[\left(-4C-2D\right)\cos x+\left(2C-4D\right)\sin x\right]=10e^x\cos x,$$

откуда

$$\sin x:\ 2C-4D=0,$$
$$\cos x:\ -4C-2D=10,$$

т.е. $C=-2$, $D=-1$. Следовательно,

$$y_2=-e^x\left(2\cos x+\sin x\right).$$

Итак, общее решение исходного уравнения запишется следующим образом:

$$y=y_O+y_1+y_2=C_1+C_2e^{4x}-\frac{x^2}{2}+x-e^x\left(2\cos x+\sin x\right).$$

11.4. Системы дифференциальных уравнений

Совокупность уравнений вида

$$\begin{cases}F_1\left(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n'\right)=0,\\ F_2\left(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n'\right)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ F_n\left(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n'\right)=0,\end{cases}$$

где x - независимая переменная, y_1, y_2, …, y_n - искомые функции, y_1', y_2', …, y_n' - их производные, называется ***системой дифференциальных уравнений первого порядка***.

Система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных от неизвестных функций, называется ***нормальной системой дифференциальных уравнений*** и имеет следующий общий вид:

$$\begin{cases} y_1' = f_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ y_2' = f_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right). \end{cases} \tag{11.17}$$

Совокупность n функций

$$y_1 = \varphi_1\left(x\right),\ y_2 = \varphi_2\left(x\right),\ \ldots,\ y_n = \varphi_n\left(x\right),$$

определенных на интервале $\left(a,b\right)$, называется ***решением нормальной системы уравнений*** (11.17), если эти функции при подстановке в уравнения системы (11.17) обращают их в тождества.

Если правые части нормальной системы (11.17) являются линейными функциями относительно неизвестных функций $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$, то такая система называется ***линейной*** и имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = P_{11}\left(x\right)y_1 + P_{12}\left(x\right)y_2 + \ldots + P_{1n}\left(x\right)y_n + f_1\left(x\right), \\ y_2' = P_{21}\left(x\right)y_1 + P_{22}\left(x\right)y_2 + \ldots + P_{2n}\left(x\right)y_n + f_2\left(x\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = P_{n1}\left(x\right)y_1 + P_{n2}\left(x\right)y_2 + \ldots + P_{nn}\left(x\right)y_n + f_n\left(x\right). \end{cases}$$

Если функции $f_1\left(x\right),\ f_2\left(x\right),\ \ldots,\ f_n\left(x\right)$ тождественно равны нулю, то линейная система называется ***однородной***, в противном случае – ***неоднородной***.

Одним из основных методов нахождения решения нормальных систем является ***метод исключения неизвестных***. С помощью этого метода данная система сводится к одному уравнению n-го порядка относительно одной неизвестной функции.

Пример 28. Найти общее решение нормальной системы

$$\begin{cases} y_1' = \cos x - y_2, \\ y_2' = 4\cos x - \sin x + 3y_1 - 4y_2. \end{cases}$$

Решение. Продифференцируем по x первое уравнение:

$$y_1'' = -\sin x - y_2'.$$

Подставляя вместо y_2' правую часть второго уравнения системы, получим

$$y_1'' = -4\cos x - 3y_1 + 4y_2.$$

Чтобы исключить из этого уравнения y_2, находим из первого уравнения системы

$$y_2 = \cos x - y_1';$$

следовательно,

$$y_1'' = -4\cos x - 3y_1 + 4\left(\cos x - y_1'\right) \quad \text{или} \quad y_1'' = -3y_1 - 4y_1'.$$

Перепишем полученное уравнение в виде

$$y_1'' + 4y_1' + 3y_1 = 0.$$

Это – линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Корнями соответствующего характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

являются $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -3$, а общим решением

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x},$$

где C_1, C_2- произвольные постоянные. Для нахождения y_2 используем соотношение

$$y_2 = \cos x - y_1',$$

отсюда

$$y_2 = \cos x + C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{-3x}.$$

Совокупность функций $y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$ и $y_2 = \cos x + C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{-3x}$ является общим решением данной нормальной системы уравнений.

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{11.18}$$

где a_{ij} $(i,\ j = 1,2,\ldots,n)$ – постоянные величины.

Рассмотрим однородную систему уравнений, т.е. систему, в которой все функции $f_k(x) \equiv 0$, $k = 1,2,\ldots,n$

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases} \tag{11.19}$$

Уравнение вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{11.20}$$

называется ***характеристическим***. Оно является уравнением n-й степени относительно λ и имеет n корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, которые называются ***характеристическими числами***. Каждому корню соответствует ненулевое решение системы (11.19), а ,следовательно, и частное решение данной системы:

$$y_{11} = p_{11}e^{\lambda_1 x},\ y_{21} = p_{21}e^{\lambda_1 x},\ \dots,\ y_{n1} = p_{n1}e^{\lambda_1 x};$$
$$y_{12} = p_{12}e^{\lambda_2 x},\ y_{22} = p_{22}e^{\lambda_2 x},\ \dots,\ y_{n2} = p_{n2}e^{\lambda_2 x},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_{1n} = p_{1n}e^{\lambda_n x},\ y_{2n} = p_{2n}e^{\lambda_n x},\ \dots,\ y_{nn} = p_{nn}e^{\lambda_n x}.$$

Различают три случая:

1. Все корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ уравнения (11.20) вещественны и различны. В этом случае общее решение системы (11.19) запишется в виде

$$y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{12} + \dots + C_n y_{1n},$$
$$y_2 = C_1 y_{21} + C_2 y_{22} + \dots + C_n y_{2n},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = C_1 y_{n1} + C_2 y_{n2} + \dots + C_n y_{nn}.$$

2. Корни характеристического уравнения (11.20) различны, но среди них имеются комплексные. В этом случае комплексные решения можно заменить вещественными, отделяя вещественные и мнимые части найденных функций.

3. Среди корней характеристического уравнения имеются кратные. Корню λ_1 кратности k соответствует решение вида

$$y_1 = P_1(x)e^{\lambda_1 x},\ y_2 = P_2(x)e^{\lambda_1 x},\ \dots,\ y_n = P_n(x)e^{\lambda_1 x},$$

где $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ - полиномы от x степени не выше $k-1$ (они могут вырождаться и в постоянные числа), причем среди коэффициентов всех этих полиномов k коэффициентов являются произвольными, а остальные выражаются через них.

Полагая поочередно один из этих произвольных коэффициентов равным единице, а остальные равными нулю, мы построим k частных решений.

Пример 29. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = 3y_1 + y_3, \\ y_3' = 3y_1 + y_2. \end{cases}$$

Решение. Ищем частное решение системы в виде

$$y_1 = p_1 e^{\lambda x},\ y_2 = p_2 e^{\lambda x},\ y_3 = p_3 e^{\lambda x}.$$

Подставляя эти функции и их производные в уравнения системы и сокращая на $e^{\lambda x}$, получаем систему

$$\begin{cases} -p_1\lambda + p_2 + p_3 = 0, \\ 3p_1 - p_2\lambda + p_3 = 0, \\ 3p_1 + p_2 - p_3\lambda. = 0. \end{cases}$$

Составляем характеристическое уравнение (11.20), соответствующее данной системе:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$-\lambda^3 + 7\lambda + 6 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$ вещественны и различны.

Найдем частное решение, соответствующее корню $\lambda_1 = -1$. Подставляем его в данную систему:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 0, \\ 3p_1 + p_2 + p_3 = 0, \\ 3p_1 + p_2 + p_3. = 0. \end{cases}$$

Полагая $p_3 = 1$, находим из первого и второго уравнения (третье совпадает со вторым) $p_1 = 0$, $p_2 = -1$. Таким образом, искомое частное решение $y_{11} = 0$, $y_{21} = -e^{-x}$, $y_{31} = e^{-x}$.

Аналогично найдем частное решение, соответствующее корню $\lambda_2 = -2$. Подставляем его в данную систему:

$$\begin{cases} 2p_1 + p_2 + p_3 = 0, \\ 3p_1 + 2p_2 + p_3 = 0, \\ 3p_1 + p_2 + 2p_3. = 0. \end{cases}$$

Задав $p_2 = 1$, из первых двух уравнений найдем $p_1 = -1$, $p_3 = -1$. Отсюда частное решение $y_{12} = -e^{-2x}$, $y_{22} = e^{-2x}$, $y_{32} = -e^{-2x}$.

Найдем частное решение, соответствующее корню $\lambda_3 = 3$. Подставляем его в данную систему:

$$\begin{cases} -3p_1 + p_2 + p_3 = 0, \\ 3p_1 - 3p_2 + p_3 = 0, \\ 3p_1 + p_2 - 3p_3. = 0. \end{cases}$$

Снова отбрасывая третье уравнение, полагая $p_3 = 3$ и решая систему из первых двух уравнений, получим $p_1 = 2$, $p_2 = 3$. Корню $\lambda_3 = 3$ соответствует решение $y_{13} = 2e^{3x}$, $y_{23} = 3e^{3x}$, $y_{33} = 3e^{3x}$.

Общее решение данной системы согласно п.1 имеет вид

$$y_1 = -C_2e^{-2x} + 2C_3e^{3x},\ y_2 = -C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 3C_3e^{3x},$$

$$y_3 = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 3C_3e^{3x}.$$

Пример 30. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 3y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение системы:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0;\quad (4-\lambda)^2 + 9 = 0,\quad 4-\lambda = \pm 3i,\quad \lambda_1 = 4+3i,\quad \lambda_2 = 4-3i.$$

Корни характеристического уравнения различны и среди них есть комплексные. Построим комплексное решение вида $y_1 = p_1e^{(4+3i)x}$, $y_2 = p_2e^{(4+3i)x}$, соответствующее характеристическому числу $\lambda_1 = 4+3i$. Числа p_1 и p_2 определяем из первого уравнения данной системы, подставляя в него y_1 и y_2 и сокращая на $e^{(4+3i)x}$:

$$-p_1i - p_2 = 0.$$

Полагая $p_1 = 1$, находим $p_2 = -i$, так что

$$y_1 = e^{(4+3i)x} = e^{4x}(\cos 3x + i\sin 3x),\quad y_2 = -ie^{(4+3i)x} = e^{4x}(\sin 3x - i\cos 3x).$$

Согласно п.2 отделим действительную и мнимую части корня $\lambda_1 = 4+3i$, получим два вещественных линейно независимых решения:

$$y_{11} = e^{4x}\cos 3x,\ y_{21} = e^{4x}\sin 3x,$$

$$y_{12} = e^{4x}\sin 3x,\ y_{22} = -e^{4x}\cos 3x.$$

Общим решением будет

$$y_1 = C_1y_{11} + C_2y_{12} = e^{4x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x),$$

$$y_2 = C_1y_{21} + C_2y_{22} = e^{4x}(C_1\sin 3x - C_2\cos 3x).$$

Пример 31. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = -y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1-\lambda)^2(2-\lambda)-1+(2-\lambda)-(1-\lambda)=0,$$

$$(1-\lambda)^2(2-\lambda)=0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2=\lambda_3=1,$$

т.е. среди корней есть кратные.

Найдем сначала частное решение вида

$$y_1 = p_1 e^{2x}, \qquad y_2 = p_2 e^{2x}, \qquad y_3 = p_3 e^{2x},$$

соответствующее простому характеристическому числу $\lambda_1 = 2$. Числа p_1, p_2, p_3 определяем из решения первых двух уравнений данной системы:

$$\begin{cases} -p_1 - p_2 + p_3 = 0, \\ p_1 - p_2 - p_3 = 0. \end{cases}$$

Полагая $p_3 = 1$, находим $p_2 = 0$, $p_1 = 1$, так что искомым частным решением будет $y_{11} = e^{2x}$, $y_{21} = 0$, $y_{31} = e^{2x}$.

Теперь построим два линейно независимых частных решения, соответствующих кратному корню $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Согласно п.3, ему отвечает решение вида $y_1 = (A_1 x + A_2)e^x$, $y_2 = (B_1 x + B_2)e^x$, $y_3 = (C_1 x + C_2)e^x$. Коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 определяются подстановкой решения в данную систему. Выполняя эту подстановку и сокращая на e^x, имеем:

$$\begin{cases} A_1 + A_1 x + A_2 = A_1 x + A_2 - (B_1 x + B_2) + C_1 x + C_2, \\ B_1 + B_1 x + B_2 = A_1 x + A_2 + B_1 x + B_2 - (C_1 x + C_2), \\ C_1 + C_1 x + C_2 = -(B_1 x + B_2) + 2(C_1 x + C_2). \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при x и свободные члены, получаем систему

$$\begin{cases} -B_1 + C_1 = 0, \\ -B_2 + C_2 = A_1, \\ A_1 - C_1 = 0, \\ A_2 - C_2 = B_1, \\ -B_1 + C_1 = 0, \\ -B_2 + C_2 = C_1, \end{cases}$$

откуда $B_1 = C_1$, $A_1 = C_1$, $C_2 = C_1 + B_2$, $A_2 = 2C_1 + B_2$, причем C_1 и B_2 произвольны. Полагая $C_1 = 0$, $B_2 = 1$, находим $B_1 = 0$, $A_1 = 0$, $C_2 = 1$, $A_2 = 1$. Получаем частное решение $y_{12} = e^x$, $y_{22} = e^x$, $y_{32} = e^x$.

Полагая $C_1 = 1$, $B_2 = 0$, находим $B_1 = 1$, $A_1 = 1$, $C_2 = 1$, $A_2 = 2$. Получаем частное решение $y_{13} = (x+2)e^x$, $y_{23} = xe^x$, $y_{32} = (x+1)e^x$.

Общим решением данной системы будет

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3(x+2)e^x,\; y_2 = C_2 e^x + C_3 x e^x,$$

$$y_3 = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3(x+1)e^x.$$

Чтобы найти общее решение неоднородной системы (11.18), достаточно знать общее решение соответствующей однородной системы (11.19) и одно частное решение неоднородной системы (11.18). Сумма этих решений дает общее решение системы (11.18).

Методом вариации постоянных (методом Лагранжа) можно построить общее решение неоднородной системы, исходя только из общего решения соответствующей однородной системы. Рассмотрим его на примере.

Пример 32. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2 + 2e^{-x}, \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 + e^{-x}. \end{cases}$$

Решение. Соответствующей однородной системой будет

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,\quad (-1-\lambda)(4-\lambda) + 6 = 0,\quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Построим частное решение вида $y_1 = p_1 e^x$, $y_2 = p_2 e^x$, соответствующее корню $\lambda_1 = 1$. Подставив его в данную систему, получим первое уравнение этой системы

$$-2p_1 - 2p_2 = 0;$$

положив $p_1 = 1$, находим $p_2 = -1$. Поэтому характеристическому числу $\lambda_1 = 1$ соответствует частное решение $y_{11} = e^x$, $y_{21} = -e^x$.

Аналогично находим частное решение, соответствующее характеристическому числу $\lambda_2 = 2$: $y_{12} = 2e^{2x}$, $y_{12} = 2e^{2x}$, $y_{22} = -3e^{2x}$.

Общим решение однородной системы будет

$$y_1 = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x},$$

$$y_2 = -C_1 e^x - 3C_2 e^{2x}.$$

Общее решение данной системы уравнений ищем в виде

$$y_1 = C_1(x)e^x + 2C_2(x)e^{2x},$$

$$y_2 = -C_1(x)e^x - 3C_2(x)e^{2x}.$$

Функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ находим из решения системы

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} = 2e^{-x}, \\ -C_1'(x)e^x - 3C_2'(x)e^{2x} = e^{-x}. \end{cases}$$

Получаем $C_1'(x) = 8e^{-2x}$, $C_2'(x) = -3e^{-3x}$. Поэтому

$$C_1(x) = -4e^{-2x} + C_1,\ C_2(x) = e^{-3x} + C_2.$$

Следовательно, общим решением исходной системы будет

$$y_1 = \left(-4e^{-2x} + C_1\right)e^x + 2\left(e^{-3x} + C_2\right)e^{2x} = -2e^{-x} + C_1e^x + 2C_2e^{2x},$$

$$y_2 = -\left(-4e^{-2x} + C_1\right)e^x - 3\left(e^{-3x} + C_2\right)e^{2x} = e^{-x} - C_1e^x - 3C_2e^{2x}.$$

11.5. Задачи

Доказать, что функция $y = y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $F(x,y,y') = 0$:

1. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $xy' = \left(1 - x^2\right)y$.

2. $y = 5e^{-2x} + \dfrac{e^x}{3}$, $y' + 2y = e^x$.

3. $y = x\sqrt{1 - x^2}$, $yy' = x - 2x^3$.

4. $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, $y'\sin x = y\ln y$.

5. $x^2 + 4xy - y^2 = 1$, $(x + 2y)dx + (2x - y)dy = 0$.

6. $y = \sqrt{x^2 - cx}$, $\left(x^2 + y^2\right)dx - 2xydy = 0$.

7. Выяснить, являются ли решениями дифференциального уравнения $(y - x)dx + xdy = 0$ следующие соотношения:

1) $x^2 - 2xy = 1$; 2) $y^2 - 2xy = 1$.

8. Зная общее решение $y = -x^3 + C$ дифференциального уравнения $y' = -3x^2$, найти и построить его интегральные кривые, проходящие через точки $A(0,0)$, $B(-1,2)$, $A(2,-5)$.

Составить дифференциальные уравнения семейства линий:

9. $y = Ce^{2x}$.

10. $x^2 + y^2 = C^2$.

11. $y = x^2 + Cx$.

12. $y = Cx + C^2$.

13. $y^2 = 2Cx$.

14. $y = \sqrt{1 - x^2} + C$.

15. $x^3 = C\left(x^2 - y^2\right)$. 16. $y = \sin Cx$. 17. $\ln\dfrac{x}{y} = 1 + Cy$.

Решить уравнения с разделяющимися переменными:

18. $\left(x + 2x^3\right)dx + \left(y + 2y^3\right)dy = 0$.

19. $\sin x \; dx + \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = 0$.

20. $(x+3)dy - (y+3)dx = 0$.

21. $y' = \dfrac{\sqrt{y^2+1}}{xy}$.

22. $\left(e^{x-y} - e^{-y}\right)dx + \left(e^{x+y} + e^x\right)dy = 0$.

23. $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(y - x^2 y\right)dy = 0$.

24. $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$.

25. $\ln(\cos y)dx + x\operatorname{tg} y dy = 0$.

Решить задачу Коши для уравнений с разделяющимися переменными:

26. $y' = y^2, \quad y(-1) = 1$.

27. $dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

28. $y' = y \cdot \cos x, \quad y(0) = 1$.

29. $xy' = \dfrac{y}{\ln x}, \quad y(e) = 1$.

30. $y'e^{-x} = x - 1, \; y(1) = -e$.

31. $\sin^2 x \cos^2 y dx + \cos^2 x \; dy = 0$, $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

32. $2y'\sqrt{x} = y, \quad y(4) = 1$.

33. $y' = (2y+1)\cdot \operatorname{ctg} x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Решить однородные дифференциальные уравнения:

34. $y' = 2 + \dfrac{y}{x}$.

35. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$.

36. $xy'\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) + x = y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

37. $xy' - y + x \; \operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$.

38. $2x^2y' - 4xy - y^2 = 0$.

39. $xy' + y = 2y(\ln y - \ln x)$.

40. $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0$.

41. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$.

Решить задачу Коши для однородных дифференциальных уравнений:

42. $xy' = y(3 + \ln y - \ln x), \; y(1) = \dfrac{1}{e}$.

43. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0, \; y(2) = 1$.

44. $(2x+8)dx+(3y-5x-11)dy=0$, $y(1)=1$.

Решить линейные уравнения:

45. $y'+\dfrac{x}{1-x^2}y=1$.

46. $(x^2+1)y'-xy=x^3+x$.

47. $y'\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x$, $y(0)=0$.

48. $xy'+y=e^x$.

49. $y'-y\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{1}{\cos x}$, $y(0)=0$.

50. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$.

Решить уравнения Бернулли:

51. $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$.

52. $xy'=y^2+xy$.

53. $xy'+y=y^2\ln x$, $y(1)=1$.

54. $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$.

Решить уравнения в полных дифференциалах:

55. $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$.

56. $\left(4-\dfrac{y^2}{x^2}\right)dx+\dfrac{2y}{x}dy=0$.

57. $(x\cos 2y+1)dx-x^2\sin 2y\,dy=0$.

58. $\left(x^2+y-ye^x\right)dx+\left(x+2y-e^x\right)dy=0$.

Решить уравнения, имеющие интегрирующий множитель, зависящий только от x или только от y:

59. $(y+\ln x)dx-xdy=0$.

60. $y^2dx+(xy-1)dy=0$.

Решить дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка:

61. $y'''=\dfrac{2}{x^3}$.

62. $y'''=e^{-\frac{x}{4}}$.

63. $y''=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x$.

64. $2xy'''y''=y''^2-1$.

65. $y''x\ln x=y'$.

66. $x^3y''+x^2y'=1$.

67. $yy''+y'^2=0$.

68. $yy''-y'^2=y^2y'$.

69. $y''y^3 = 1,\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\ y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$ 70. $y''' = y''^2.$

Решить линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами:

71. $y'' + 2y' + y = 0.$ 72. $y'' + 2y' - 8y = 0.$ 73. $y'' + 8y' = 0.$

74. $y'' + 25y = 0.$ 75. $y'' - 4y' + 4y = 0.$ 76. $y'' - 5y' + 4y = 0.$

77. $y'' + 2y' + 5y = 0.$ 78. $y'' - 2y' = 0.$ 79. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$

80. $y''' + 8y = 0.$ 81. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0.$ 82. $y^{IV} + 2y'' + y = 0.$

Решить неоднородные уравнения:

83. $y'' - 4y' + 3y = x - 1.$ 84. $y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1.$

85. $y'' - 2y = xe^{-x}.$ 86. $y'' - 9y' + 20y = x^2e^{4x}.$

87. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x.$ 88. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x.$

89. $y'' - 3y' = e^{3x} + 12x - 7.$ 90. $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x.$

91. $y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x}.$ 92. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x},\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0.$

Методом исключения неизвестных решить системы уравнений:

93. $\begin{cases} y_1' = y_2 + x, \\ y_2' = y_1 - x. \end{cases}$ 94. $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 2y_2 + 40e^x, \\ y_2' = y_1 - 6y_2 + 9e^{-x}. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

95. $\begin{cases} y_1' = 8y_2 - y_1, \\ y_2' = y_1 + y_2. \end{cases}$ 96. $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = 12y_1 - 4y_2 - 12y_3, \\ y_3' = -4y_1 + y_2 + 5y_3. \end{cases}$ 97. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2, \\ y_2' = y_1 - y_2. \end{cases}$

98. $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = 3y_2 - 2y_1. \end{cases}$ 99. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 - 3y_2. \end{cases}$

100. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_3, \\ y_2' = -6y_1 + 2y_2 + 6y_3, \\ y_3' = 4y_1 - y_2 - 4y_3. \end{cases}$

Методом вариации постоянных решить неоднородные системы уравнений:

101. $\begin{cases} y_1' = 2y_2 - 5y_1 + e^x, \\ y_2' = y_1 - 6y_2 + e^{-2x}. \end{cases}$

102. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + 1, \\ y_2' = y_2 - 4y_1 + x. \end{cases}$

Задание 11.1. Найти решение дифференциального уравнения:

1. а) $xy' = y$, $y(1) = 5$. б) $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.
2. а) $xy' = -y$, $y(1) = 3$. б) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.
3. а) $xy' = 2y$, $y(1) = 3$. б) $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy$.
4. а) $\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx} = 2$, $y(2) = 5$. б) $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy$.
5. а) $xy' = -2y$, $y(1) = 4$. б) $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$.
6. а) $\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx} = -2$, $y(2) = 1$. б) $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$.
7. а) $xy' = 4y$, $y(1) = 2$. б) $\left(e^{2x} + 5\right)dy + ye^{2x}dx = 0$.
8. а) $xy' = -3y$, $y(2) = 4$. б) $yy'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$
9. а) $xy' = \dfrac{y}{2}$, $y(9) = 5$. б) $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.
10. а) $xy' = -\dfrac{y}{3}$, $y(8) = 5$. б) $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$.
11. а) $xy' = xy$, $y(1) = 2$. б) $y\left(4+e^x\right)dy - e^xdx = 0$.
12. а) $xy' = -xy$, $y(1) = 3$. б) $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$.
13. а) $xy' = \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$. б) $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$.

14. а) $xy' = -\frac{y}{x}$, $y(1) = 1$. б) $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$

15. а) $\frac{x}{y}y' = \frac{x}{x-1}$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. б) $\left(e^x + 8\right)dy - ye^x dx = 0$.

16. а) $xy' = \frac{y}{\ln x}$, $y(e) = 1$. б) $\sqrt{5+y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0$.

17. а) $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x}$, $y(e) = 2$. б) $6xdx - ydy = x^2ydy - 3xy^2dx$.

18. а) $xy' = y^2$, $y(1) = 1$. б) $y\ln y + xy' = 0$.

19. а) $\frac{x}{y}y' = 2y$, $y(1) = 1$. б) $\left(1+e^x\right)y' = ye^x$.

20. а) $\frac{x}{y}y' = -y$, $y(1) = 1$. б) $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$.

21. а) $xy' = 2y^2$, $y(1) = 2$. б) $6xdx - 2ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$.

22. а) $\frac{x}{y}y' = 2$, $y(1) = 4$. б) $y\left(1+\ln y\right) + xy' = 0$.

23. а) $\frac{x}{y}y' = -2$, $y(1) = 5$. б) $\left(3+e^x\right)yy' = e^x$.

24. а) $\frac{x}{y}y' = \frac{1}{3}$, $y(1) = 1$. б) $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}\,yy' = 0$.

25 а) $\frac{x}{y}y' = -\frac{1}{2}$, $y(1) = 1$. б) $xdx - ydy = x^2ydy - xy^2dx$.

Задание 11.2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. а) $y' = 2\frac{y}{x} + 1$. б) $y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}$.

2. а) $y' = 3\frac{y}{x} + 2$. б) $y' = \frac{x+y-2}{2x-2}$.

3. а) $y' = 3\frac{y}{x} - 2$. б) $y' = \frac{3y-x-4}{3x+3}$.

4. а) $y' = 5\frac{y}{x} + 1$. б) $y' = \frac{2y-2}{x+y-2}$.

5. а) $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1$. б) $y' = \frac{x + y - 2}{3x - y - 2}$.

6. а) $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$. б) $y' = \frac{2x + y - 3}{x - 1}$.

7. а) $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 4$. б) $y' = \frac{x + 7y - 8}{9x - y - 8}$.

8. а) $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1$. б) $y' = \frac{x + 3y + 4}{3x - 6}$.

9. а) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} + 4$. б) $y' = \frac{3y + 3}{2x + y - 1}$.

10. а) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 3\frac{y}{x} + 4$. б) $y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}$.

11. а) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 5\frac{y}{x} + 9$. б) $y' = \frac{x - 2y + 3}{-2x - 2}$.

12. а) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 3\frac{y}{x} + 5$. б) $y' = \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}$.

13. а) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 3\frac{y}{x} + 8$. б) $y' = \frac{2x + 3y - 5}{5x - 5}$.

14. а) $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 2$. б) $y' = \frac{4y - 8}{3x + 2y - 7}$.

15. а) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} + 1$. б) $y' = \frac{x + 3y - 4}{5x - y - 4}$.

16. а) $xy' = -\frac{y^2}{x} + y$. б) $y' = \frac{y - 2x + 3}{x - 1}$.

17. а) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$. б) $y' = \frac{x + 2y - 3}{x - 1}$.

18. а) $2xyy' = y^2 - 4x^2$. б) $y' = \frac{3x + 2y - 1}{x + 1}$.

19. а) $x^2 y' = -\frac{y^3}{x} + xy$. б) $y' = \frac{5y + 5}{4x + 3y - 1}$.

20. а) $x^2 y' = 3y^2 + xy$. б) $y' = \frac{x + 4y - 5}{6x - y - 5}$.

21. а) $y' = -2\frac{y}{x} + 3$. б) $y' = \frac{x + y + 2}{x + 1}$.

22. а) $y' = -3\frac{y}{x} - 4$. б) $y' = \frac{2x + y - 3}{4x - 4}$.

23. а) $y' = -2\frac{y}{x} - 3$. б) $y' = \frac{2x + y - 3}{2x - 2}$.

24. а) $y' = 2\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 2$. б) $y' = \frac{y}{2x + 2y - 2}$.

25. а) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$. б) $y' = \frac{x + 5y - 6}{7x - y - 6}$.

Задание 11.3. Найти решение дифференциального уравнения:

1. а) $y' - \frac{y}{x} = x^3, \quad y(1) = 0$. б) $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

2. а) $y' - \frac{y}{x} = \sqrt{x}, \quad y(4) = 2$. б) $y' + y = xy^3$.

3. а) $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad y(1) = 1$. б) $y' = x^3 y^3 - xy$.

4. а) $y' + \frac{y}{x} = x, \quad y(-1) = 1$. б) $y' + xy = xy^3$.

5. а) $y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}, \quad y(4) = -1$. б) $y' + 2xy = 2x^3 y^3$.

6. а) $y' + \frac{y}{x} = e^x, \quad y(1) = 0$. б) $xy' + 2y = x^5 y^2$.

7. а) $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad y(1) = 0$. б) $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$.

8. а) $y' - 2xy = xe^{x^2}, \quad y(0) = -1$. б) $\left(1 - x^2\right) y' - xy = xy^2$.

9. а) $y' - 2xy = e^{x^2}, \quad y(-1) = 2e$. б) $y' - y = xy^2$.

10. а) $y' + 2xy = e^{-x^2}, \quad y(1) = 2e^{-1}$. б) $xy' - y = y^2$.

11. а) $y' + 2xy = x, \quad y(0) = 1$. б) $y' + \frac{y}{x + 1} + y^2 = 0$.

12. а) $y' + 2xy = 2x, \quad y(0) = -2$. б) $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$.

13. а) $y' + \frac{y}{x} = \cos x, \quad y(\pi) = 0$. б) $y' + 2y = e^x y^2$.

14. а) $y'-\dfrac{y}{x}=\ln x$, $y(e)=e$. б) $y'+y=xy^2$.

15. а) $y'-\dfrac{2y}{x}=x$, $y(1)=1$. б) $y'+4x^3y=4\left(x^3+1\right)e^{-4x}y^2$.

16. а) $y'-\dfrac{2y}{x}=1$, $y(2)=2$. б) $xy'-y=-y^2(\ln x+2)\ln x$.

17. а) $y'-\dfrac{2y}{x}=\sqrt[3]{x}$, $y(8)=-1$. б) $y'+xy=(1+x)e^{-x}y^2$.

18. а) $y'+\dfrac{2y}{x}=\sqrt{x}$, $y(4)=0$. б) $y'-9x^2y=\left(x^5+x^2\right)y^{\frac{2}{3}}$.

19. а) $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{\cos 2x}{x^2}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$. б) $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

20. а) $y'-2xy=-x$, $y(0)=-1$. б) $y'-\dfrac{2xy}{1+x^2}=\dfrac{4\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x$.

21. а) $y'-\dfrac{y}{x}=\sqrt[3]{x}$, $y(8)=1$. б) $yy'+y^2+4x(1+x)=0$.

22. а) $y'-\dfrac{y}{x}=x^2e^x$, $y(1)=1$. б) $2y'+y\cos x=y^{-1}\cos x(1+\sin x)$.

23. а) $y'-2xy=x$, $y(0)=1$. б) $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{y}$.

24. а) $y'-2xy=x^2e^{x^2}$, $y(1)=2e$. б) $3y^2y'+y^3=x+1$.

25. а) $y'+2xy=xe^{-x^2}$, $y(0)=2$. б) $3y^2y'+y^3+x=0$.

Задание 11.4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $3x^2e^ydx+\left(x^3e^y-1\right)dy=0$.

2. $\left(3x^2+\dfrac{2}{y}\cos\dfrac{2x}{y}\right)dx-\dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{2x}{y}dy=0$.

3. $\left(3x^2+4y^2\right)dx+\left(8xy+e^y\right)dy=0$.

4. $\left(2x-1+\dfrac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\dfrac{1}{x}\right)dy=0$.

5. $\left(y^2+\dfrac{y}{\cos^2 x}\right)dx+\left(2xy+\operatorname{tg}x\right)dy=0$.

6. $\left(3x^2y+2y+3\right)dx+\left(x^3+2x+3y^2\right)dy=0$.

7. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0$.

8. $\left[\sin 2x-2\cos\left(x+y\right)\right]dx-2\cos\left(x+y\right)dy=0$.

9. $\left(xy^2+\dfrac{x}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\dfrac{x^2}{y^3}\right)dy=0$.

10. $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx-\dfrac{2y}{x^3}dy=0$.

11. $\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}dx-\left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}+2y\right)dy=0$.

12. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$.

13. $xy^2dx+y\left(x^2+y^2\right)dy=0$.

14. $\dfrac{dx}{y}-\dfrac{x+y^2}{y^2}dy=0$.

15. $\dfrac{y}{x^2}dx-\dfrac{xy+1}{x}dy=0$.

16. $\left(xe^x+\dfrac{y}{x^2}\right)dx-\dfrac{dy}{x}=0$.

17. $\left(10xy-\dfrac{1}{\sin y}\right)dx+\left(5x^2+\dfrac{x\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3\right)dy=0$.

18. $\left(3x^3+6x^2y+3xy^2\right)dx+\left(2x^3+3x^2y\right)dy=0$.

19. $e^y dx+\left(\cos y+xe^y\right)dy=0$.

20. $\left(y^3+\cos x\right)dx+\left(3xy^2+e^y\right)dy=0$.

21. $xe^{y^2}dx+\left(x^2ye^{y^2}+\operatorname{tg}^2 y\right)dy=0$.

22. $\left(5xy^2-x^3\right)dx+\left(5x^2y-y\right)dy=0$.

23. $\left[\cos\left(x+y^2\right)+\sin x\right]dx+2y\cos\left(x+y^2\right)dy=0$.

24. $\left(x^2\text{-}4xy-2y^2\right)dx+\left(y^2-4xy-2x^2\right)dy=0$.

25. $\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0$.

Задание 11.5. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. а) $y'''=\sin 2x$. б) $y'''x\ln x=y''$. в) $2yy''=y'^2$.
2. а) $y''=xe^x$. б) $xy'''+y''=1$. в) $y''\operatorname{tg} y=2y'^2$.
3. а) $y'''=e^{2x}$. б) $2xy'''=y''$. в) $y''=2yy'$.
4. а) $y'''=\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$. б) $xy'''+y''=x+1$. в) $yy''+y'^2=1$.
5. а) $y''=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. б) $y''+\dfrac{2x}{x^2+1}y'=2x$. в) $yy''=y'^3$.
6. а) $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$. б) $x^2y''+xy'=1$. в) $yy''=y'^2+y^2y'$.
7. а) $x^2y''=2$. б) $y'''\operatorname{ctg}2x+2y''=0$. в) $\left(3y+4\right)y''\text{-}3y'^2=0$.
8. а) $y''=\cos^2 x$. б) $x^3y'''+x^2y''=1$. в) $y''=\dfrac{8}{y^3}$.

9. а) $y''=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x}$. б) $y'''\,\mathrm{tg}\,x=2y''$. в) $yy''+y'^3-y'^2=0$.

10. а) $y''=\dfrac{x}{(1+x)^3}$. б) $\left(1+x^2\right)y''+2xy'=12x^3$. в) $y''=\dfrac{6}{y^3}$.

11. а) $y''=\sin^2 2x$. б) $x^4y''+x^3y'=1$. в) $yy''+y'^2+1=0$.

12. а) $y''=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. б) $xy'''+2y''=0$. в) $(2y+3)\,y''-2y'^2=0$.

13. а) $y''=\left(e^x+e^{-x}\right)^2$. б) $\left(1+x^2\right)y''+2xy'=x^3$. в) $yy''-y'^2=0$.

14. а) $y''=1-e^{-\frac{x}{2}}$. б) $x^5y'''+x^4y''=1$. в) $yy''-y'^2=y^2\ln y$.

15. а) $y''=\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}$. б) $xy'''-y''+\dfrac{1}{x}=0$.
в) $y(1-\ln y)\,y''+(1+\ln y)\,y'^2=0$.

16. а) $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. б) $xy'''+y''+x=0$. в) $(1+y)\,y''=y'^2+y'$.

17. а) $y''=\dfrac{1}{\sin^2 x}$. б) $x^4y''+x^3y'=4$. в) $2yy''+y'^2+y'^4=0$.

18. а) $y''=\sin x\cos x$. б) $xy'''+y''+x=0$. в) $y''+2yy'^3=0$.

19. а) $y^{IV}=\dfrac{1}{x}$. б) $-xy'''+2y''=\dfrac{2}{x^2}$. в) $y''+\dfrac{2}{1-y}y'^2=0$.

20. а) $y''=\sqrt{x}(1-x)^2$. б) $y'''\,\mathrm{tg}\,5x=5y''$. в) $2yy''-3y'^2=4y^2$.

21. а) $y'''=\dfrac{6}{x^3}$. б) $xy'''+y''=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. в) $y^3y''=-1$.

22. а) $y'''=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. б) $x^3y'''+x^2y''=\sqrt{x}$. в) $y''-y=0$.

23. а) $y''=\dfrac{1}{\cos^2 2x}$. б) $\left(1-x^2\right)y''-xy'=2$. в) $(1+y)\,y''-5y'^2=0$.

24. а) $y''=2^x$. б) $(x+1)\,y'''+y''=x+1$. в) $3yy''+y'^2=0$.

25. а) $y'''=x-\dfrac{1}{x^3}$. б) $(1+\sin x)\,y'''=\cos x\quad y''$. в) $yy'+y'^2+yy''=0$.

Задание 11.6. Найти решение дифференциального уравнения:

1. а) $y''+2y'-8y=x^2+1$ б) $y''+\pi^2y=\dfrac{\pi^2}{\cos\pi x}$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$.

2. а) $y''-3y'=x-2$. б) $y''+3y'=\dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}$, $y(0)=\ln 4$, $y'(0)=3(1-\ln 2)$.

3. а) $y''-2y'+y=5e^x$. б) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

4. а) $y''+2y'-8y=xe^{4x}$. б) $y''-6y'+8y=\dfrac{4}{1+e^{-2x}}$, $y(0)=1+2\ln 2$, $y'(0)=6\ln 2$.

5. а) $y''-2y'-8y=7e^{4x}$. б) $y''-9y'+18y=\dfrac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

6. а) $y''-2y'-8y=-e^{-2x}$ б) $y''+\pi^2y=\dfrac{\pi^2}{\sin\pi x}$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$, $y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi^2}{2}$.

7. а) $y''+2y'=x^2+2$. б) $y''+\dfrac{y}{\pi^2}=\dfrac{1}{\pi^2\cos\left(\dfrac{x}{\pi}\right)}$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$.

8. а) $y''+2y'+y=-e^{-x}$.

б) $y''-3y'=\dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}$, $y(0)=4\ln 4$, $y'(0)=3(3\ln 4-1)$.

9. а) $y''-6y'+5y=2x^2-5$.

б) $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$, $y(0)=1+2\ln 2$, $y'(0)=3\ln 2$.

10. а) $y''+6y'+5y=x^2-3$.

б) $y''-6y'+8y=\dfrac{4}{2+e^{-2x}}$, $y(0)=1+3\ln 3$, $y'(0)=10\ln 3$.

11. а) $y''-6y'+8y=2xe^x$. б) $y''+6y'+8y=\dfrac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

12. а) $y''+6y'+8y=5e^{-4x}$. б) $y''-3y'+2y=\dfrac{e^x}{1+e^{-x}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

13. а) $y'' + 6y' + 8y = xe^{-2x}$. б) $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

14. а) $y'' + y = 5\cos x$. б) $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = \ln 9 - 1$.

15. а) $y'' + y = -\sin x$. б) $y'' + 4y' = 4\operatorname{ctg} 2x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$.

16. а) $y'' + y = \cos x - \sin x$.

б) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 8\ln 2$, $y'(0) = 14\ln 2$.

17. а) $y'' - y' = x + x^2 - x^3$. б) $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

18. а) $y'' - y' = -xe^x$. б) $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 3$, $y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2\pi$.

19. а) $y'' - y' = (1 - x)e^{2x}$. б) $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

20. а) $y'' + y' = (5 - x)e^x$. б) $y'' - 2y' = \dfrac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$, $y(0) = -\ln 4$, $y'(0) = 2 - \ln 4$.

21. а) $y'' - 4y' + 4y = -2e^{2x}$. б) $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$, $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = \dfrac{1}{2}$.

22. а) $y'' - 4y' + 4y = xe^{-x}$.

б) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2 + e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 5\ln 3$.

23. а) $y'' - 4y' + 8y = (1 + 2x)e^x$ б) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

24. а) $y'' + 4y' + 8y = 5 - x^3$. б) $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \pi$.

25. а) $y'' + y' + y = (x + 2)e^x$. б) $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Задание 11.7. Решить систему дифференциальных уравнений а) методом исключения неизвестных, б) методом Эйлера:

1. $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 3y_2, \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2, \\ y_2' = y_1 - 2y_2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2, \\ y_2' = 2y_1 - y_2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} y_1' = -4y_1 + 3y_2, \\ y_2' = 4y_1 - 3y_2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 2y_1 - 4y_2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + 4y_2, \\ y_2' = y_1 - 4y_2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + y_2, \\ y_2' = 5y_1 - y_2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + 5y_2, \\ y_2' = y_1 - 5y_2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 5y_2, \\ y_2' = 2y_1 - 5y_2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} y_1' = -3y_1 + 5y_2, \\ y_2' = 3y_1 - 5y_2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 2y_2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 3y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 3y_2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y_1' = -4y_1 + 5y_2, \\ y_2' = 4y_1 - 5y_2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 4y_2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} y_1' = -\dfrac{y_1}{2} + 7y_2, \\ y_2' = \dfrac{y_1}{2} - 7y_2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} y_1' = -4y_1 + y_2, \\ y_2' = 4y_1 - y_2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + 7y_2, \\ y_2' = y_1 - 7y_2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 7y_2, \\ y_2' = 2y_1 - 7y_2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + \dfrac{5}{2}y_2, \\ y_2' = y_1 - \dfrac{5}{2}y_2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + \dfrac{3}{2}y_2, \\ y_2' = y_1 - \dfrac{3}{2}y_2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2, \\ y_2' = 7y_1 - y_2. \end{cases}$

24. $\begin{cases} y_1' = -5y_1 + \dfrac{y_2}{2}, \\ y_2' = 5y_1 - \dfrac{y_2}{2}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 2y_1 - 2y_2. \end{cases}$

12. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

12.1. Двойной интеграл

Двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D называется предел интегральной суммы при стремлении к нулю наибольшего из диаметров[*] всех элементарных областей:

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\,\Delta S_i .$$

При вычислении двойного интеграла в декартовых координатах (тогда двойной интеграл, как правило, записывается в виде $\iint_D f(x,y)\,dxdy$) различают следующие два случая.

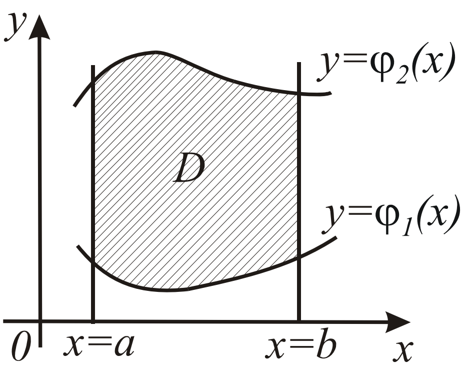


Рис. 12.1

1. Область интегрирования D ограничена слева и справа прямыми $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$, а снизу и сверху – непрерывными кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ и каждая из кривых пересекается вертикальной прямой только в одной точке (рис. 12.1). Такая область называется простой относительно оси Ox.

Тогда вычисление двойного интеграла сводится к вычислению двукратного интеграла по формуле

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy . \qquad (12.1)$$

Здесь внутренний интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ берется по переменной y при фиксированном, но произвольном значении x на отрезке $[a,b]$. В результате получается некоторая функция от x, которая затем интегрируется в пределах от a до b.

---

[*] *Диаметром области* называется наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области

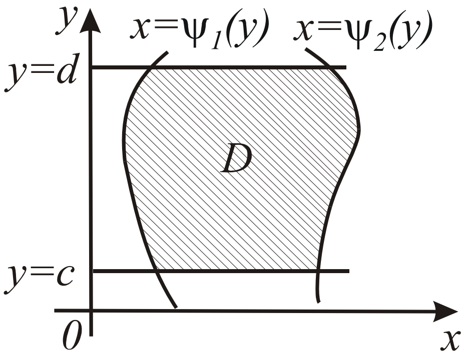


Рис. 12.2

2. Область интегрирования D ограничена снизу и сверху прямыми $y = c$ и $y = d$ ($c < d$), а слева и справа – непрерывными кривыми $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, где $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$, каждая из кривых пересекается с горизонтальной прямой только в одной точке (рис. 12.2). Такая область называется простой относительно оси Oy.

Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,, \qquad (12.2)$$

причем сначала вычисляется внутренний интеграл $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$, в котором y считается постоянным.

В более общем случае область интегрирования путем разбиения на части сводится к основным областям.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x + 2y)\,dxdy$ по области D, ограниченной параболой $y = \dfrac{x^2}{2}$ и прямыми $y = 3x$ $x = 1$ и $x = 2$ (рис. 12.3).

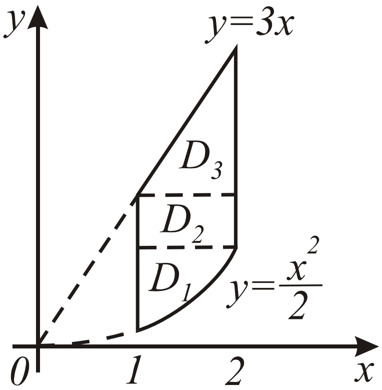


Рис. 12.3

Решение. В данном случае область D является простой как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy. Однако левая и правая границы области D составлены из двух участков, поэтому для вычисления интеграла по формуле (12.2) необходимо разбить область D на три подобласти: $D = D_1 + D_2 + D_3$ (рис. 12.3). В то же время нижняя и верхняя границы представлены каждая своим уравнением. Поэтому данный интеграл удобнее вычислять по формуле (12.1):

$$\iint\limits_D (x + 2y)\,dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{3x} (x + 2y)\,dy = \int\limits_1^2 \left(xy + y^2\right)\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{3x} dx =$$

$$=\int_1^2\left(3x^2-\frac{x^3}{2}+9x^2-\frac{x^4}{4}\right)dx=\left(4x^3-\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=4\cdot 8-4-2+\frac{1}{8}-\frac{8}{5}+\frac{1}{20}=\frac{983}{40}.$$

Пример 2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)dy.$$

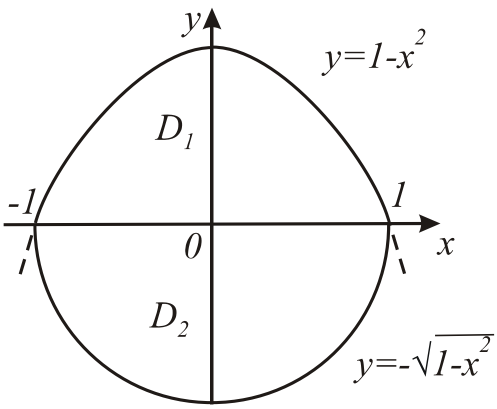


Рис. 12.4

Решение. Область интегрирования D ограничена линиями $x=-1$, $x=1$, $y=-\sqrt{1-x^2}$, $y=1-x^2$ (рис. 12.4). Изменим порядок интегрирования, для чего заданную область представим в виде двух подобластей D_1, ограниченную слева и справа ветвями параболы $x=\pm\sqrt{1-y}$ ($0\le y\le 1$), и D_2, ограниченную дугами окружности $x=\pm\sqrt{1-y^2}$ ($-1\le y\le 0$).

Тогда

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)dx+\int_{-1}^{0}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx.$$

Иногда вычисление двойных интегралов упрощается с помощью замены переменных. Замена переменных в двойном интеграле производится по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D^*}f\left[x(u,v),\ y(u,v)\right]\ |J|dudv, \qquad (12.3)$$

где D^* - область, в которую преобразуется область D при отображении $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$; $f\left[x(u,v),\ y(u,v)\right]$ - подынтегральная функция, преобразованная к новым координатам; $J\neq 0$ - ***якобиан*** функций $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$:

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

Часто используется частный случай замены переменных – ***полярные координаты***. При этом в качестве u и v берутся координаты ρ и φ, связанные с декартовыми формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi \qquad (0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi).$$

Формула замены в этом случае переменных принимает вид

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi, \qquad (12.4)$$

где D^* - область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат.

Пример 3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{D}(y-x)\,dxdy$, где D - область, ограниченная прямыми $y = x+1$, $y = x-3$, $y = \dfrac{7-x}{3}$, $y = \dfrac{15-x}{3}$ (рис. 12.5).

Решение. Непосредственное вычисление данного интеграла было бы затруднительным. Однако простая замена переменных

$$u = y - x, \quad v = y + \frac{x}{3}$$

позволяет значительно упростить решение. Прямые $y = x+1$ и $y = x-3$ в системе координат xOy переходят в прямые $u = 1$ и $u = 3$ на плоскости uOv; прямые же $y = \dfrac{7-x}{3}$ и $y = \dfrac{15-x}{3}$ переходят в прямые $v = \dfrac{7}{3}$ и $v = 5$. Следовательно, заданная область D преобразуется в прямоугольник D^* (рис. 12.6).

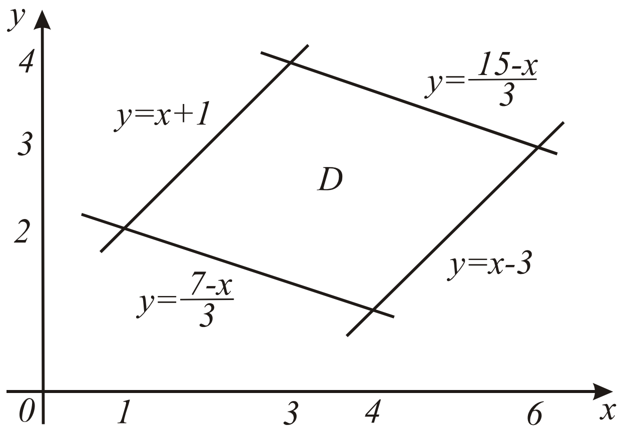


Рис. 12.5

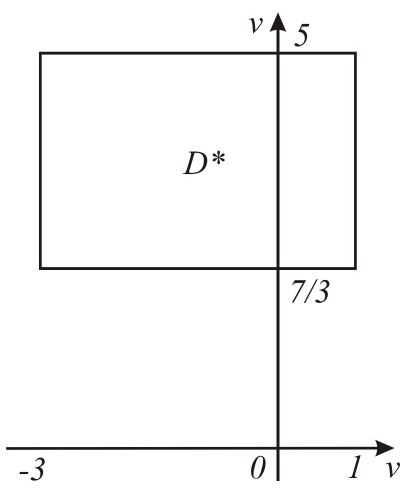


Рис. 12.6

Вычислим якобиан этого преобразования. Для этого выразим x и y через u и v:

$$x=-\frac{3}{4}(u-v),\ y=\frac{1}{4}(u+3v).$$

Следовательно,

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{vmatrix}=-\frac{9}{16}-\frac{3}{16}=-\frac{3}{4}.$$

По формуле (12.3) окончательно получаем

$$\iint_D (y-x)\,dxdy=\iint_{D^*}\left[\frac{1}{4}(u+3v)+\frac{3}{4}(u-v)\right]\left|-\frac{3}{4}\right|dudv=\iint_{D^*}\frac{3}{4}u\quad dudv=$$

$$=\int_{\frac{7}{3}}^{5}dv\int_{-3}^{1}\frac{3}{4}u\quad du=\frac{3}{4}\int_{\frac{7}{3}}^{5}\frac{u^2}{2}\Big|_{\frac{7}{3}}^{5}dv=\frac{3}{4}\int_{\frac{7}{3}}^{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{2}\right)dv=\frac{3}{4}(-4)v\Big|_{\frac{7}{3}}^{5}=-3\left(5-\frac{7}{3}\right)=-8.$$

Пример 4. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$, где область D - круг $x^2+y^2\le 9$.

Решение. Применив формулу (12.4), перейдем к полярным координатам:

$$\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy=\iint_D \sqrt{9-(\rho\cos\varphi)^2-(\rho\sin\varphi)^2}\quad \rho d\rho d\varphi=$$

$$=\iint_{D^*}\rho\quad\sqrt{9-\rho^2}\,d\rho d\varphi.$$

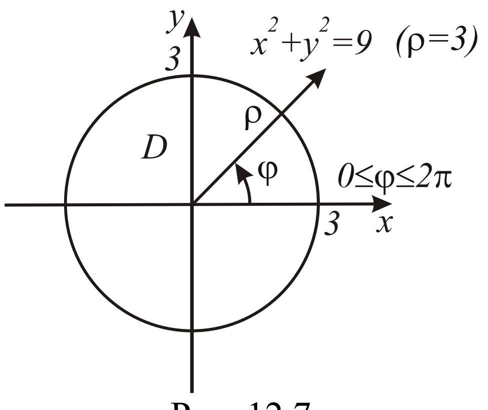


Рис. 12.7

Область D в полярной системе координат определяется неравенствами (рис. 12.7) $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le 3$. Таким образом, область D - круг – преобразуется в область D^* - прямоугольник. Поэтому имеем:

$$\iint_{D^*}\rho\sqrt{9-\rho^2}\,d\rho\quad d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\rho\sqrt{9-\rho^2}\,d\rho=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3\left(9-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(9-\rho^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\left(9-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\Big|_0^3=-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(0-27)\,d\varphi=9\varphi\Big|_0^{2\pi}=18\pi.$$

Для ***вычисления площади*** S плоской фигуры, ограниченной областью D в декартовых координатах используется формула $S = \iint\limits_D dxdy$, или, в полярных координатах $S = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi$.

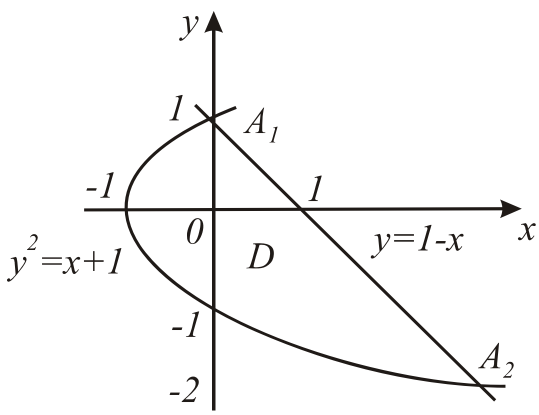


Рис.12.8

Пример 5. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями $y^2 = x + 1$, $x + y = 1$ (рис. 12.8).

Решение. Область D представляет собой фигуру, ограниченную слева параболой $y^2 = x + 1$, справа прямой $y = 1 - x$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = x + 1; \\ y = 1 - x, \end{cases}$$

находим точки их пересечения: $A_1(3,-2)$, $A_2(0,1)$. Следовательно, искомая площадь

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{1} dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y} dx = \int\limits_{-2}^{1} dy \cdot x\Big|_{y^2-1}^{1-y} = \int\limits_{-2}^{1} \left(2 - y - y^2\right) dy =$$

$$= \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 2 + 4 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = \frac{9}{2}.$$

Объем тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x,y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и сбоку цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости xOy область D, находится по формуле

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

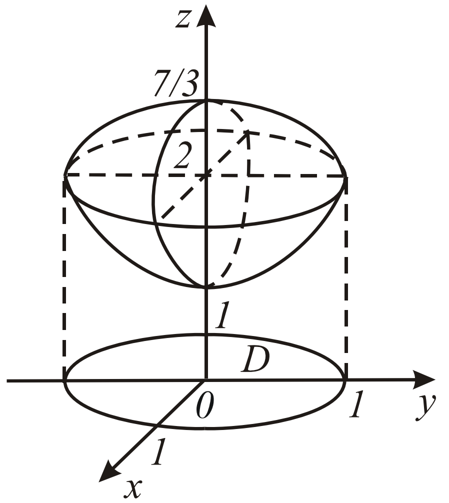


Рис. 12.9

Пример 6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$ и $x^2 + y^2 + 3z - 7 = 0$.

Решение. Данное тело ограничено двумя параболоидами (рис. 12.9). Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z + 1 = 0; \\ x^2 + y^2 + 3z - 7 = 0, \end{cases}$$

находим уравнение линии их пересечения: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$.

Искомый объем равен разности объемов двух цилиндрических тел с одним основанием (круг $x^2+y^2\le 1$) и ограниченных сверху соответственно поверхностями $z=1+x^2+y^2$ и $z=\frac{1}{3}\left(7\text{-}x^2-y^2\right)$:

$$V=V_2-V_1=\iint_D \frac{1}{3}\left(7-x^2-y^2\right)dxdy-\iint_D\left(1+x^2+y^2\right)dxdy .$$

Переходя к полярным координатам и пользуясь формулой (12.4), находим:

$$V=\frac{1}{3}\iint_{D^*}\left(7-\rho^2\right)\rho \; d\rho \; d\varphi-\iint_D\left(1+\rho^2\right)\rho \; d\rho \; d\varphi=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(7\rho-\rho^3\right)d\rho-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(\rho+\rho^3\right)d\rho=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi\left(7\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1-$$

$$-\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{4}\right)\varphi\Big|_0^{2\pi}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{13}{12}\cdot 2\pi-\frac{3}{4}\cdot 2\pi=\frac{2}{3}\pi .$$

Если гладкая поверхность задана уравнением $z=z(x,y)$, а ее проекция на плоскость xOy есть область D, в которой $z(x,y)$, $z'_x(x,y)$ и $z'_y(x,y)$ - непрерывные функции, то ***площадь поверхности*** вычисляется по формуле

$$S=\iint_D\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy .$$

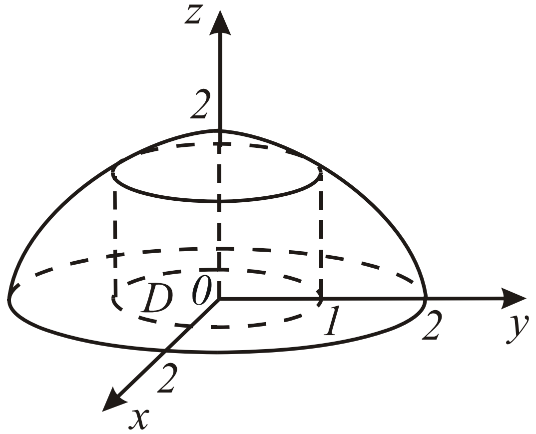


Рис. 12.10

Пример 7. Вычислить площадь части поверхности полусферы $x^2+y^2+z^2=4$ ($z\ge 0$), вырезанной цилиндром $x^2+y^2=1$ (рис. 12.10).

Решение. Уравнение поверхности имеет вид $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, область D есть круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=1$. Находим производные

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\; z'_y=-\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} .$$

Искомая площадь: $S=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}dxdy=2\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам. Уравнение окружности примет вид $\rho = 1$ при $0 \le \varphi \le 2\pi$. Следовательно,

$$S = 2\iint\limits_{D^*} \frac{\rho \ d\rho \ d\varphi}{\sqrt{4-\rho^2}} = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{\rho \ d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{d\left(4-\rho^2\right)}{\sqrt{4-\rho^2}} =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \ \ 2\left(4-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^1 = -2\int\limits_0^{2\pi}\left(\sqrt{3}-2\right)d\varphi = 2\left(2-\sqrt{3}\right) \ \varphi\Big|_0^{2\pi} = 4\pi\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Масса плоской пластинки D с переменной плотностью распределения массы $p = p\left(x, y\right)$ находится по формуле

$$m = \iint\limits_D p\left(x, y\right) dxdy.$$

В случае однородной пластинки $p = p_0 = const$.

Статические моменты области D относительно осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot p\left(x, y\right) dxdy \quad \text{и} \quad M_y = \iint\limits_D x \cdot p\left(x, y\right) dxdy;$$

а ***координаты центра тяжести*** – по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

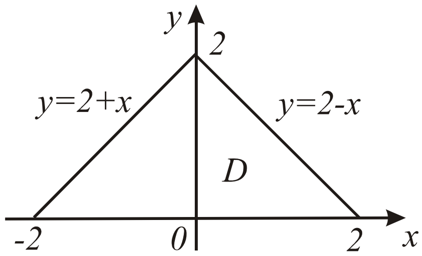


Рис. 12.11

Пример 8. Найти координаты центра тяжести равнобедренного треугольника, если плотность распределения массы равна $p\left(x, y\right) = y$ (рис. 12.11).

Решение. Находим массу и статические моменты:

$$m = \iint\limits_D p\left(x, y\right) dxdy = \iint\limits_D ydxdy =$$

$$= \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y-2}^{2-y} ydx = \int\limits_0^2 dy \ \ y \ \ x\Big|_{y-2}^{2-y} = \int\limits_0^2 y\left(4-2y\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y-2}^{2-y} ydx = \int\limits_0^2 dy \ \ y \ \ x\Big|_{y-2}^{2-y} = \int\limits_0^2 y\left(4-2y\right)dy = \left(2y^2 - 2\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3};$$

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot p\left(x, y\right) dxdy = \iint\limits_D y^2 dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y-2}^{2-y} y^2 dx = \int\limits_0^2 dy \ \ y^2 x\Big|_{y-2}^{2-y} =$$

$$=\int\limits_0^2 y^2\left(4-2y\right)dy=\left.\left(4\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{2}\right)\right|_0^2=\frac{32}{3}-8=\frac{8}{3};$$

$$M_y=\iint\limits_D x\cdot p\left(x,y\right)dxdy=\iint\limits_D x\cdot ydxdy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{y-2}^{2-y} x\cdot y\quad dx=\int\limits_0^2 dy\quad \left.y\frac{x^2}{2}\right|_{y-2}^{2-y}=0.$$

Отсюда координаты центра тяжести:

$$x_c=\frac{M_y}{m}=0;\ y_c=\frac{M_x}{m}=1.$$

Моменты инерции пластинки относительно осей Ox и Oy могут быть найдены по формулам

$$I_x=\iint\limits_D y^2\cdot p\left(x,y\right)dxdy \text{ и } I_y=\iint\limits_D x^2\cdot p\left(x,y\right)dxdy.$$

Момент инерции фигуры относительно начала координат – по формуле

$$I_0=I_x+I_y=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\cdot p\left(x,y\right)dxdy.$$

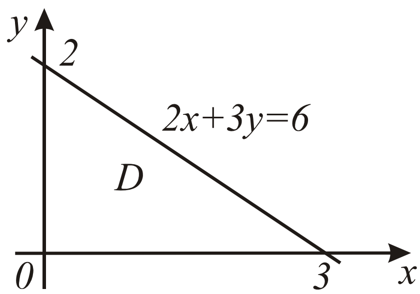


Рис.12.12

Пример 9. Найти моменты инерции относительно начала координат однородной фигуры, ограниченной линиями $2x+3y=6$, $x=0$, $y=0$ (рис. 12.12).

Решение. Момент инерции относительно начала координат равен

$$I_0=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=$$

$$=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{2-\frac{2x}{3}}\left(x^2+y^2\right)dy=\int\limits_0^3 dx\left.\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^{2-\frac{2x}{3}}=$$

$$=\int\limits_0^3\left[x^2\left(2-\frac{2x}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(2-\frac{2x}{3}\right)^3\right]dx=\left.\left[2\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}-\frac{1}{8}\left(2-\frac{2x}{3}\right)^4\right]\right|_0^3=$$

$$=18-\frac{27}{2}+2=\frac{13}{2}.$$

12.2. Тройной интеграл

Предел интегральной суммы при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех элементарных областей ΔV_i называется ***тройным интегралом*** от функции $f\left(x,y,z\right)$ по области V и обозначается следующим образом:

$$\iint\limits_V f(x,y,z)\,dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i .$$

Пусть область V определяется неравенствами $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ - непрерывные функции. Тогда тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ по области V вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz . \qquad (12.5)$$

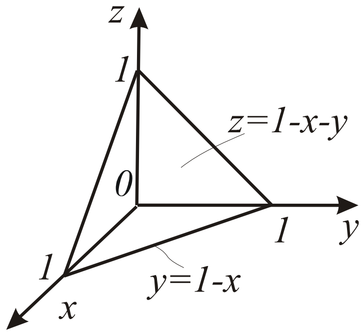


Рис. 12.13

Пример 10. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (x+y+z)\,dxdydz$, где V - пирамида, ограниченная плоскостью $x+y+z=1$ и координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ (рис. 12.13).

Решение. Область V проецируется на плоскость xOy в треугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $y=1-x$. По формуле (12.5) имеем

$$\iiint\limits_V (x+y+z)\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1-x-y} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \right) dy = \int_0^1 dx \left(-\frac{x^2}{2} y - x\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y}{2} \right)\Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} \right) dx = \left(\frac{x}{3} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} .$$

Замена переменных в тройном интеграле производится по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f\left[x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w) \right] |J|\,dudvdw ,$$

где V^* - область, в которую преобразовалась область V при отображении $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$; $f\left[x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w) \right]$ - подынтегральная функция, преобразованная к новым переменным u, v, w;

J - якобиан функций $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ по переменным u, v, w:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В частности, при переходе от прямоугольных координат x, y, z к ***цилиндрическим координатам*** ρ, φ, z (рис. 12.14), связанным с x, y, z формулами

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$ ($0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$),

якобиан преобразования $J = \rho$, поэтому

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\rho\ d\rho\ d\varphi\ dz. \qquad (12.6)$$

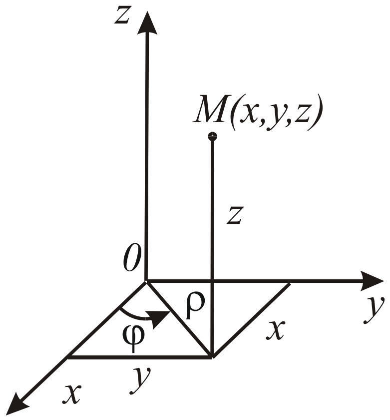


Рис. 12.14

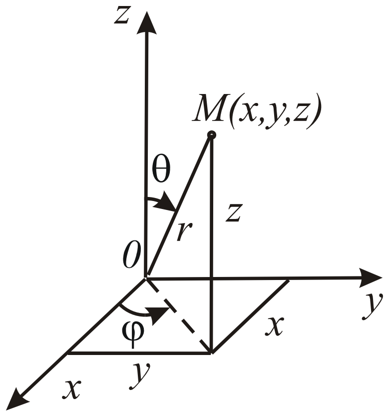


Рис. 12.15

При переходе от прямоугольных координат x, y, z к ***сферическим координатам*** ρ, φ, θ (рис. 12.15), связанным с x, y, z формулами

$$x = \rho\ \sin\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\ \sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\ \cos\theta$$

$$(0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi),$$

якобиан преобразования $J = \rho^2\sin\theta$, поэтому

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V^*} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\ d\rho\ d\varphi\ d\theta\ . \qquad (12.7)$$

Пример 11. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$, где область V ограничена параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 4$ (рис. 12.16).

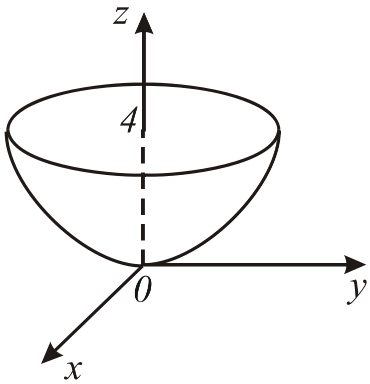


Рис. 12.16

Решение. Данная область V проецируется на плоскость xOy в круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 4$ (ее уравнение получается в результате исключения z из уравнений параболоида $z = x^2 + y^2$ и плоскости $z = 4$).

Тройной интеграл удобнее вычислять в цилиндрических координатах. Уравнение параболоида при этом запишется следующим образом: $z = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi$, т.е. $z = \rho^2$. В области V^* координаты ρ, φ и z изменяются так: $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\rho^2 \le z \le 4$; подынтегральная функция $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$. Таким образом, по формуле (12.6) находим

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz = \iiint\limits_{V^*} \rho^2 d\rho \ \ d\varphi \ \ dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 d\rho \int\limits_{\rho^2}^4 \rho^2 dz =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 \left(4 - \rho^2\right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(4\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5} \right)\Bigg|_0^2 = 2\pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = \frac{128}{15}\pi .$$

Пример 12. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \frac{x^2}{x^2 + y^2} dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$.

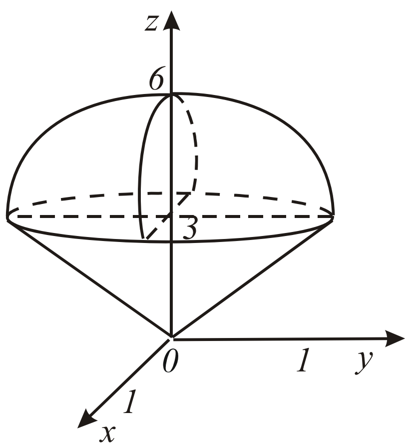


Рис. 12.17

Решение. Поскольку V - область, ограниченная верхней полусферой и конусом (рис. 12.17), удобно перейти к сферическим координатам. Уравнение полусферы при этом запишется как $\rho = 6$, а конуса - $\mathrm{tg}\,\theta = \sqrt{3}$. В области V^* координаты изменяются следующим образом:

$0 \le \rho \le 6$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$. Таким образом, по формуле (12.7) находим

$$\iiint\limits_V \frac{x^2}{x^2+y^2}dxdydz = \iiint\limits_{V^*} \cos^2\varphi \quad \rho^2 \sin\theta \quad d\rho \quad d\theta \quad d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int\limits_0^{6} \cos^2\varphi \quad \rho^2 \sin\theta \quad d\rho =$$

$$= \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^6 \cdot \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = 72 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 36\pi .$$

Объем тела, занимающего область V, определяется по формуле

$$V = \iiint\limits_V dxdydz .$$

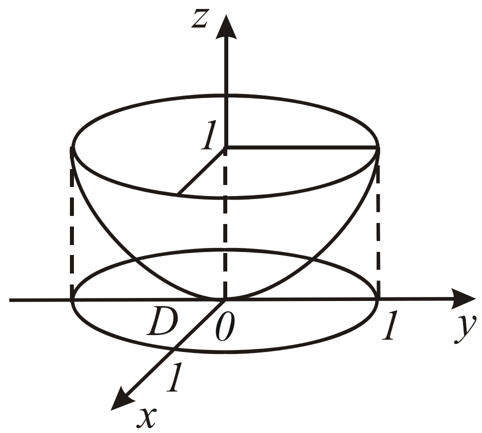


Рис. 12.18

Пример 13. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$.

Решение. Данное тело ограничено сверху плоскостью $z = 1$, снизу – параболоидом $z = x^2 + y^2$ (рис. 12.18). Объем тела находим, используя цилиндрические координаты:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_{V^*} \rho \quad d\rho \quad d\varphi dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho \quad d\rho \int\limits_{\rho^2}^1 dz == \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho \quad d\rho \quad z\Big|_{\rho^2}^1 =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho \quad \left(1-\rho^2\right) d\rho \quad = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 == \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)d\varphi = \frac{1}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Масса тела, занимающего область V, вычисляется по формуле

$$m = \iiint\limits_V p\left(x,y,z\right)dxdydz ,$$

где $p = p\left(x,y,z\right)$ - плотность тела.

Статические моменты тела относительно координатных плоскостей xOy, xOz, yOz вычисляются по формулам

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z \cdot p\left(x,y,z\right) \quad dxdydz , \qquad M_{xz} = \iiint\limits_V y \cdot p\left(x,y,z\right) \quad dxdydz ,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x \cdot p(x,y,z) \ \ dxdydz .$$

Координаты центра тяжести определяются по формулам

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Моменты инерции относительно координатных осей Ox, Oy, Oz; моменты инерции относительно координатных плоскостей xOy, xOz, yOz и момент инерции относительно начала координат вычисляются соответственно по формулам

$$I_x = \iiint\limits_V \left(z^2 + y^2\right) p(x,y,z) \ \ dxdydz, \qquad I_y = \iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right) p(x,y,z) \ \ dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) p(x,y,z) \ \ dxdydz;$$

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 p(x,y,z) \ \ dxdydz, \qquad I_{xz} = \iiint\limits_V y^2 p(x,y,z) \ \ dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 p(x,y,z) \ \ dxdydz;$$

$$I_0 = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) p(x,y,z) \ \ dxdydz .$$

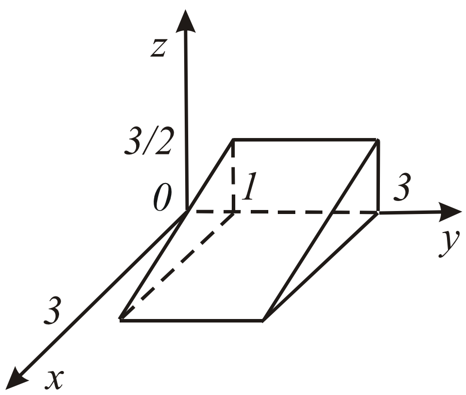


Рис. 12.19

Пример 14. Найти координаты центра тяжести однородного призматического тела, ограниченного плоскостями $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x + 2z = 3$ (рис. 12.19).

Решение. Найдем массу рассматриваемого тела:

$$m = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} dz =$$

$$= \int\limits_0^3 dx \int\limits_1^3 \frac{3-x}{2} dy = \int\limits_0^3 (3-x) dx = \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

Статические моменты:

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z \ \ dxdydz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} zdz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_1^3 dy \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{3-x}{2}} = \int\limits_0^3 dx \int\limits_1^3 \frac{(3-x)^2}{8} dy =$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^3 (3-x)^2\,dx = -\frac{(3-x)^3}{12}\Bigg|_0^3 = \frac{9}{4};$$

$$M_{xz}=\iiint\limits_V y\quad dxdydz=\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{3-x}{2}} ydz=\int_0^3 dx\int_1^3 y\frac{3-x}{2}dy=\int_0^3 dx\frac{3-x}{2}\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^3=$$

$$=\int_0^3 2(3-x)\,dx=-(3-x)^2\Big|_0^3=9;$$

$$M_{yz}=\iiint\limits_V x\quad dxdydz=\int_0^3 dx\int_1^3 dy\int_0^{\frac{3-x}{2}} xdz=\int_0^3 x(3-x)\,dx=\left(3\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{27}{2}-9=\frac{9}{2}.$$

Тогда координаты центра тяжести:

$$x_c=\frac{M_{yz}}{m}=1,\quad y_c=\frac{M_{xz}}{m}=2,\quad z_c=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{1}{2}.$$

12.3. Задачи

Начертить области интегрирования и изменить порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

1. $\int_2^4 dx\int_2^x f(x,y)\,dy$.

2. $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$.

3. $\int_{-6}^2 dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

4. $\int_0^{\frac{9}{16}} dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx+\int_{\frac{9}{16}}^{\frac{3}{4}} dy\int_y^{\frac{3}{4}} f(x,y)\,dx$.

5. $\int_0^1 dx\int_1^{2^x} f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_1^{\frac{2}{x}} f(x,y)\,dy$.

6. $\int\limits_{-6}^{-3} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{36-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-3}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y^2-12y}} f(x,y)\,dx$.

Вычислить двойные интегралы:

7. $\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^2 x \quad dx \int\limits_{0}^{1} y \quad dy$.

8. $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{x^3}^{x} (x-y)\,dy$.

Вычислить двойные интегралы по областям D, ограниченным указанными линиями:

9. $\iint\limits_{D} \cos(x+y)\,dxdy$, где D - область, ограниченная прямыми $x=0$, $y=\pi$ и $y=x$.

10. $\iint\limits_{D} \left(x^2+y\right)dxdy$, где D - область, ограниченная параболами $y=x^2$ и $y^2=x$.

11. $\iint\limits_{D} \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, где D - область, ограниченная прямыми $x=2$, $y=x$ и гиперболой $xy=1$.

12. $\iint\limits_{D} y\ln x\ dxdy$, где D - область, ограниченная линиями $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$.

Переходя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы:

13. $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где область D - круг $x^2+y^2 \le 4$.

14. $\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}$, где область D ограничена полуокружностью $y=\sqrt{1-x^2}$ и осью Ox.

15. $\iint\limits_{D} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, где область D ограничена линиями $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{9}$, $x^2+y^2=\pi^2$.

16. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где область D ограничена окружностью $x^2+y^2=4x$.

17. $\iint\limits_D y\ dxdy$, где область D ограничена линиями $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$, $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$.

18. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D \frac{y}{x}dxdy, \qquad D=\left\{1\le\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 2,\ y\ge 0,\ y\le\frac{2x}{3}\right\}.$$

Найти площади плоских фигур, ограниченных заданными линиями

19. $y=\dfrac{9}{x}$, $y=x$, $x=6$.

20. $x=y^2-2y$, $x+y=0$.

21. $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=25$, $y=x\sqrt{3}$, $x\ge 0$.

22. $x^2+y^2=3y$, $x^2+y^2=5y$, $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $x=0$.

С помощью двойного интеграла найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

23. Плоскостями координат, плоскостями $x=4$, $y=4$ и параболоидом вращения $z=x^2+y^2+1$.

24. Цилиндром $x=2y^2$ и плоскостями $x+2y+z=4$, $y=0$, $z=0$.

25. Плоскостями координат, плоскостью $x+y+z=4$ и цилиндром $x^2+y^2=8$.

26. Цилиндром $x^2+y^2=2x$, параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=0$.

Вычислить площадь:

27. Части плоскости $2x+3y+z=6$, находящейся в I октанте ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$).

28. Части поверхности $y=x^2+z^2$, вырезанной цилиндром $x^2+z^2=1$ и расположенной в I октанте.

Найти массу плоской пластинки с плотностью распределения массы $p(x,y)$, ограниченной заданными линиями:

29. $p(x,y)=x+y^2$, $x=0$, $y=1$, $y=\dfrac{x^2}{4}$ ($x\geq 0$).

30. $p(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$, $x=0$, $y=0$, $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$ ($x\geq 0$, $y\leq 0$).

Определить центр тяжести однородной пластинки, ограниченной заданными линиями:

31. $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=1$, $x=2$.

32. $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, $y=0$.

Вычислить моменты инерции фигуры, ограниченной заданными линиями, относительно осей Ox и Oy:

33. $x+y=2$, $x=2$, $y=2$.

34. $y=2\sqrt{x}$, $x+y=3$, $y=0$.

Вычислить тройные интегралы по областям V, ограниченным указанными поверхностями:

35. $\iiint\limits_V (x+y-z)dxdydz$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=2$.

36. $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$, $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

37. $\iiint\limits_V 4y^2ze^{xy}dxdydz$, $x=0$, $y=1$, $y=x$, $z=0$, $z=1$.

38. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

С помощью замены переменных вычислить тройные интегралы по областям V, ограниченным указанными поверхностями:

39. $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$, $z=2$.

40. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $z=0$, $z=3$.

41. $\iiint\limits_V \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$, $x^2+y^2=4y$, $z=4-x^2$, $z=0$.

42. $\iiint\limits_V z\ \ dxdydz$, часть шара $x^2+y^2+z^2=4$, находящаяся в I октанте.

43. $\iiint\limits_V \sqrt{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dxdydz$, $x^2+y^2+z^2=1$.

44. $\iiint\limits_V \dfrac{x^2}{x^2+y^2}dxdydz$, $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}$.

Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

45. $2x+3y+4z=12$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

46. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=x^2+y^2$.

47. $x^2+y^2=2x$, $z=0$, $4z=x^2+y^2$.

48. Найти массу куба $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2$, $0\le z\le 2$, если плотность в точке $p(x,y,z)=x+y+z$.

Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного заданными поверхностями:

49. $x+y=1$, $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

50. $z=4-x^2-y^2$, $z=1$, $x=0$, $y=0$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$).

51. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $x=0$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $x+z=2$.

52. Найти моменты инерции относительно координатных осей и начала координат однородной пирамиды, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Задание 12.1. Начертить области интегрирования и изменить порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

1. а) $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy$. б) $\int_{-1}^{0} dx \int_0^{x+1} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$.

2. а) $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}+1}^{7-x} f(x,y)dy$. б) $\int_{-2}^{0} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy + \int_0^2 dx \int_{2x}^{4} f(x,y)dy$.

3. а) $\int_0^6 dx \int_{\frac{x^2}{6}-1}^{x-1} f(x,y)dy$. б) $\int_{-1}^{0} dx \int_0^{1-x^2} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$.

4. а) $\int_0^2 dy \int_{4-2y^2}^{4-y^2} f(x,y)dx$. б) $\int_{-1}^{0} dx \int_0^{e^x} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$.

5. а) $\int_0^1 dx \int_{x^4}^{x^2} f(x,y)dy$. б) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$.

6. а) $\int_0^1 dy \int_0^{2y-y^2} f(x,y)dx$. б) $\int_{-2}^{0} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$.

7. а) $\int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} f(x,y)dx$. б) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} f(x,y)dy$.

8. а) $\int_0^2 dx \int_0^{(x-1)^2} f(x,y)dy$. б) $\int_{-1}^{0} dy \int_0^{y+1} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y)dx$.

9. а) $\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$. б) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{2-x^2} f(x,y)dy$.

10. а) $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x,y)\,dy$. б) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{e^x} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{e^{-x}} f(x,y)\,dy$.

11. а) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)\,dy$. б) $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{y+2} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x,y)\,dx$.

12. а) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy$. б) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{4} f(x,y)\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y^2}^{4} f(x,y)\,dx$.

13. а) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)\,dx$. б) $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{0}^{2+x} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$.

14. а) $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{1} f(x,y)\,dx$. б) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)\,dy + \int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{0}^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\,dy$.

15. а) $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dy$. б) $\int\limits_{3}^{7} dy \int\limits_{\frac{9}{y}}^{3} f(x,y)\,dx + \int\limits_{7}^{9} dy \int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x,y)\,dx$.

16. а) $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{1} f(x,y)\,dx$. б) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,y)\,dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

17. а) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy$. б) $\int\limits_{0}^{16} dy \int\limits_{-\frac{y}{4}}^{0} f(x,y)\,dx + \int\limits_{16}^{32} dy \int\limits_{-\sqrt{32-y}}^{0} f(x,y)\,dx$.

18. а) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{(x-1)^2}^{\sqrt{5-x^2}} f(x,y)\,dy$. б) $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{0}^{x+2} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

19. а) $\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$. б) $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{0}^{4-x} f(x,y)\,dy$.

20. а) $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)\,dy$. б) $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx$.

21. а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$. б) $\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_0^{x+2} f(x,y)dy + \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$.

22. а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{(1-x)^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$. б) $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

23. а) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$. б) $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-1-x}^0 f(x,y)dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-1}^0 f(x,y)dy$.

24. а) $\int\limits_{-3}^3 dy \int\limits_{y^2}^9 f(x,y)dx$. б) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$.

25. а) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$. б) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^0 f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^0 f(x,y)dx$.

Задание 12.2. Вычислить двойные интегралы по областям D, ограниченным указанными линиями. Область D изобразить на чертеже:

1.а) $\iint\limits_D \left(4x^2y^2 - 12x^3y^2\right)dxdy$, $y = 2x$, $y = 0$, $x = 1$.

б) $\iint\limits_D (2x + y)dxdy$, $x = y^2 - 4$, $x = 5$, $y = -3$, $y = 3$.

2.а) $\iint\limits_D \left(x^2 + 2xy\right)dxdy$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $2y = 3x$.

б) $\iint\limits_D \left(2x^2y + x^3y^2\right)dxdy$, $y = x^2$, $y = -x$, $x = 1$.

3.а) $\iint\limits_D (2x - y)dxdy$, $x = 1$, $x = 2$, $y = x$, $y = x^2$.

б) $\iint\limits_D \left(x^2y^2 - x^3 + y\right)dxdy$, $y = x^2$, $y = -\sqrt{x}$, $x = 2$.

4.а) $\iint\limits_D xy \; dxdy$, $x = 1$, $x = 2$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$.

б) $\iint\limits_D \left(xy + 2x^2y^2 - 5\right)dxdy$, $y = -x^2$, $y = x$, $x = 1$.

5.а) $\iint\limits_D (x + 2y)dxdy$, $y = -1$, $y = 1$, $x = 0$, $x = y^2$.

б) $\iint\limits_D \left(2x^2y^2-4x^3y\right)dxdy$, $y=\sqrt{x}$, $y=-x^2$, $x=2$.

6.а) $\iint\limits_D \frac{y}{x}dxdy$, $x=4$, $x=6$, $y=x$, $y=2x$.

б) $\iint\limits_D \left(x^2y^2+2xy^3\right)dxdy$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-\sqrt{x}$, $x=1$.

7.а) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, $x=1$, $x=3$, $y=\frac{1}{x}$, $y=x$.

б) $\iint\limits_D \left(x-3xy^2\right)dxdy$, $y=x$, $y=\sqrt[3]{x}$ ($x\geq 0$).

8.а) $\iint\limits_D \left(x^2y-xy^2\right)dxdy$, $y=x$, $y=x^2$.

б) $\iint\limits_D e^x dxdy$, $y=3$, $y=4$, $x=0$, $x=\ln y$.

9.а) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, $x=3$, $x=4$, $y=1$, $y=2$.

б) $\iint\limits_D (5xy+x+1)dxdy$, $y=2x$, $y=x^3$ ($x\geq 0$).

10. а) $\iint\limits_D xy\ \ dxdy$, $y=0$, $y=1-x^2$.

б) $\iint\limits_D \left(6xy+y^2-1\right)dxdy$, $y=2x$, $y=3x$, $x=4$.

11. а) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, $x=0$, $y=0$, $x+y=3$.

б) $\iint\limits_D (x-2y)dxdy$, $x+y=1$, $x=-1$, $y=-2$.

12. а) $\iint\limits_D (x+y+1)dxdy$, $x+y=1$, $x=-2$, $y=-1$.

б) $\iint\limits_D x\sqrt{y}\ \ dxdy$, $y=1$, $y=x$, $y=3x$.

13. а) $\iint\limits_D (3x-y)dxdy$, $y=2x$, $y=x$, $x=5$.

б) $\iint\limits_D \left(x^2+2xy\right)dxdy$, $y=0$, $y=1$, $y=x$, $y=x-1$.

14. а) $\iint\limits_D x\ \ dxdy$, $x=-1$, $x=2$, $y=x+2$, $y=x^2$.

б) $\iint\limits_D (3y-x+1)dxdy$, $y=x^2$, $y=4$.

15. а) $\iint\limits_D (3xy+y+1)dxdy$, $y^2=x$, $x=1$.

б) $\iint\limits_D x^3 dxdy$, $x=0$, $y=x$, $y=2-x^2$.

16. а) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, $x=2$, $y=x$, $y=\frac{1}{x}$.

б) $\iint\limits_D (xy-4y+5)dxdy$, $y=1-x^2$, $y=0$.

17. а) $\iint\limits_D \frac{x^3}{y}dxdy$, $y=4$, $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{4}$ $(x\geq 0)$.

б) $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, $y=x^2$, $y=2-x$.

18. а) $\iint\limits_D y\ \ dxdy$, $x=0$, $y=0$, $y=\sqrt{9-x^2}$.

б) $\iint\limits_D (2x-y+9)dxdy$, $y=2-x^2$, $y=x$.

19. а) $\iint\limits_D x^2 dxdy$, $y=\ln x$, $x+y=1$, $x=e$.

б) $\iint\limits_D x\ \ dxdy$, $y=x$, $y=\frac{x}{4}$, $x+2y=6$.

20. а) $\iint\limits_D \left(x-\frac{x}{y}\right)dxdy$, $y=1$, $x=1$, $y=e^x$.

б) $\iint\limits_D y\ \ dxdy$, $y=\sqrt{x}$, $y=-x$, $x-y=2$.

21. а) $\iint\limits_D (2x+y-1)dxdy$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=x^2$.

б) $\iint\limits_D \frac{x}{y^2}dxdy$, $y=x$, $y=9x$, $y=\frac{1}{x}$.

22. а) $\iint\limits_D xy^2 dxdy$, $x=0$, $x=1$, $y=x^2$, $y=x$.

б) $\iint\limits_D (xy - 4y + 5)\,dxdy$, $x + y = 2$, $x = 1$, $y = 0$.

23. а) $\iint\limits_D \frac{1}{(x+y)^2}dxdy$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 3$, $y = 4$.

б) $\iint\limits_D (x - 2y)\,dxdy$, $y = 3 - x^2$, $y = 2x$.

24. а) $\iint\limits_D \frac{x^2}{1 + y^2}dxdy$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$.

б) $\iint\limits_D y \ \ln x \ \ dxdy$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$.

25. а) $\iint\limits_D (x^2 y - xy^2)\,dxdy$, $y = 2x$, $y = x$, $x = 1$.

б) $\iint\limits_D (xy + 1)\,dxdy$, $y = x^2 - 3$, $y = -2x$.

Задание 12.3. Вычислить двойные интегралы по областям D, ограниченным указанными линиями, с помощью перехода к полярным координатам. Сделать чертеж области D:

1.а) $\iint\limits_D xy \ \ dxdy$, $x^2 + y^2 \le 9$, $y \ge 0$.

б) $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$, $x^2 + y^2 \le 9$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

2.а) $\iint\limits_D y \ \ dxdy$, $x^2 + y^2 \le 1$, $x \le 0$, $y \ge 0$.

б) $\iint\limits_D xy \ \ dxdy$, $x^2 + y^2 \le 4$, $x \ge 0$.

3.а) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x^2 + y^2 \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 4$.

б) $\iint\limits_D (x^2 - 2y^2)\,dxdy$, $x^2 + y^2 \le 1$, $x \le 0$.

4.а) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2 + 1}$, $x^2 + y^2 \le 1$, $y \ge 0$.

б) $\iint\limits_D (2x^2 + 2y^2 - xy^2)\,dxdy$, $x^2 + y^2 \le 1$, $y \le 0$.

5.а) $\iint\limits_D x^2 y \quad dxdy$, $\quad x^2+y^2 \le 1, \quad y \le x$.

б) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, $\quad x^2+y^2 \le 4x$.

6.а) $\iint\limits_D \left(x+xy^2\right)dxdy$, $\quad x^2+y^2 \le 1, \quad x \le y$.

б) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, $\quad x^2+y^2 \le 1, \quad y \ge x\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \quad y \le x\sqrt{3}$.

7.а) $\iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$, $\quad x^2+y^2 \le 4$.

б) $\iint\limits_D \left(x^2-xy\right)dxdy$, $\quad x^2+y^2 \le 4, \quad y \le -x$.

8.а) $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $\quad x^2+y^2 \ge \pi^2, \quad x^2+y^2 \le 4\pi^2$.

б) $\iint\limits_D \left(4x-5x^2y\right)dxdy$, $\quad x^2+y^2 \le 9, \quad x \ge -y$.

9.а) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad x^2+y^2 \ge 1, \quad x^2+y^2 \le 4$.

б) $\iint\limits_D \left(3x^2-y^3\right)dxdy$, $\quad x^2+y^2 \le 9, \quad x^2+y^2 \ge 1$.

10. а) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $\quad x^2+y^2 \le 9, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$.

б) $\iint\limits_D \left(x^3+xy^2\right)dxdy$, $\quad x^2+y^2 \le 9, \quad x^2+y^2 \ge 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$.

11. а) $\iint\limits_D xdxdy$, $\quad x^2+y^2 \le 1, \quad x \ge 0, \quad y \le 0$.

б) $\iint\limits_D \left(x^2y-y^3\right)dxdy$, $\quad x^2+y^2 \le 9, \quad x^2+y^2 \ge 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$.

12. а) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{x^2+y^2+4}$, $\quad x^2+y^2 \le 4, \quad x \ge 0$.

б) $\iint\limits_D \left(x+3xy\right)dxdy$, $\quad x^2+y^2 \le 4, \quad x^2+y^2 \ge 1, \quad x \le 0$.

13. а) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, $\quad x^2+y^2 \le 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$.

б) $\iint\limits_D \left(2xy - y^2\right)dxdy, \quad x^2 + y^2 \le 9, \quad x^2 + y^2 \ge 4, \quad x \le 0.$

14. а) $\iint\limits_D xy^2 dxdy, \quad x^2 + y^2 \le 4, \quad x^2 + y^2 \ge 1, \quad x \le y.$

б) $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy, \quad x^2 + y^2 \le x.$

15. а) $\iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy, \quad x^2 + y^2 \le 25.$

б) $\iint\limits_D \left(x + 2y\right)dxdy, \quad x^2 + y^2 \le 9, \quad x^2 + y^2 \ge 4, \quad y \le x.$

16. а) $\iint\limits_D \frac{\ln\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2} dxdy, \quad x^2 + y^2 \le e, \quad x^2 + y^2 \ge 1.$

б) $\iint\limits_D \left(y^3 - x^2\right)dxdy, \quad x^2 + y^2 \le 25, \quad y \le -x.$

17. а) $\iint\limits_D \left(y^2 + x^3\right)dxdy, \quad x^2 + y^2 \le 9, \quad y \ge -x.$

б) $\iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdy, \quad x^2 + y^2 \le 2x.$

18. а) $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x} dxdy, \quad x^2 + y^2 \le 9, \quad x^2 + y^2 \ge 1, \quad y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \le x\sqrt{3}.$

б) $\iint\limits_D x^2 y \;\; dxdy, \quad x^2 + y^2 \le 9, \quad x^2 + y^2 \ge 1, \quad y \le -x.$

19. а) $\iint\limits_D \left(2y - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dxdy, \quad x^2 + y^2 \le 9, \quad x^2 + y^2 \ge 3.$

б) $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy, \quad x^2 + y^2 \le 4y.$

20. а) $\iint\limits_D \left[\sin\left(x^2 + y^2\right) - xy^3\right]dxdy, \quad x^2 + y^2 \le 4.$

б) $\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2 + y^2} dxdy, \; x^2 + y^2 \le 9x.$

21. а) $\iint\limits_D xy \;\; dxdy, \quad x^2 + y^2 \le 9, \quad x^2 + y^2 \ge 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$

б) $\iint\limits_D \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)dxdy, \quad x^2 + y^2 \le 4.$

22. а) $\iint\limits_D \cos\left(x^2+y^2\right)dxdy$, $x^2+y^2\le 9$.

б) $\iint\limits_D \left(x+2xy\right)dxdy$, $x^2+y^2\le 4$, $x\ge 0$, $y\le 0$.

23. а) $\iint\limits_D \left(2x^2-y^2\right)dxdy$, $x^2+y^2\le 9$, $x\le 0$.

б) $\iint\limits_D x\ \ dxdy$, $x^2+y^2\le 6y$, $x^2+y^2\le 8y$, $x\ge 0$, $y\le x$.

24. а) $\iint\limits_D \left(x^2+xy\right)dxdy$, $x^2+y^2\le 1$, $y\ge x$.

б) $\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, $x^2+y^2\le 4y$, $x^2+y^2\le 8y$.

25. а) $\iint\limits_D \left(x^3-y^2\right)dxdy$, $x^2+y^2\le 1$, $y\ge 0$.

б) $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy$, $x^2+y^2\le 4y$.

Задание 12.4. С помощью двойного интеграла вычислить площадь области D, ограниченной указанными линиями; сделать чертеж:

1. $y=\ln x$, $y=-1$, $x=e$.
2. $y=e^{-x}$, $y=1$, $x=e$.
3. $y=\frac{1}{x}$, $y=e^x$, $x=-2$, $x=-1$.
4. $y=x^2$, $y=2\sqrt[3]{x}$.
5. $y=x^2$, $x+y=2$.
6. $y=2-x^2$, $y=x$.
7. $y=2-x^2$, $y=-x$.
8. $x^2+y^2\le 4$, $y\le\sqrt{3}x$, $y\ge x$.
9. $x^2+y^2\le 9$, $x^2+y^2\ge 1$, $y\ge 0$, $y\le x$.
10. $x^2+y^2\le 4$, $y\le x\sqrt{3}$, $y\ge\frac{x}{\sqrt{3}}$.
11. $y\le\sin x$, $y\ge\sin^2 x$, $0\le x\le\pi$.
12. $y\le\frac{2}{1+x^2}$, $y\ge 1$.
13. $xy\ge 1$, $x+y\le 4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.
14. $xy\ge 1$, $x+y\le 6$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.
15. $y=x^2$, $y=2-x^2$
16. $y=\ln x$, $y=0$, $x=\frac{1}{e}$.
17. $y=e^x$, $y=1$, $x=-1$.

18. $y = x^3$, $y = 2\sqrt[3]{x}$ $(x \ge 0)$.

19. $y = \cos x$, $y = 0$ $(|x| \le \dfrac{\pi}{2})$.

20. $y = \cos x$, $y = \cos^3 x$ $(|x| \le \dfrac{\pi}{2})$.

21. $y = \sin x$, $y = \sin^2 x$ $(|x| \le \dfrac{\pi}{2})$.

22. $y = \sin x$, $y = \sin^2 x$ $(0 \le x \le \pi)$.

23. $y = x^3$, $y = 2\sqrt[3]{x}$, $y = 2\sqrt[3]{x}$.

24. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$.

25. $y = x^3$, $y = 2\sqrt[3]{x}$, $x = e^{-2}$.

Задание 12.5. С помощью двойного интеграла вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

1. $3x + 2y + z - 6 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
2. $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$.
3. $z = x^2 + y^2$, $x + y = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
4. $x^2 + y^2 = 1$, $x + y = 3$, $z = 0$.
5. $z = 1 - x^2 - 4y^2$, $z = 0$.
6. $x = \sqrt{y}$, $x = 2\sqrt{y}$, $z = 1 - y$, $z = 0$.
7. $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.
8. $x^2 + y^2 = 9$, $z = 5x$, $z = 0$.
9. $z = 1 + x + y$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
10. $x + y + z = 5$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
11. $z = x^2 - y^2$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.
12. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.
13. $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.
14. $2z = 2 + x^2 + y^2$, $z = 4 - x^2 - y^2$.
15. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.
16. $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 6 - x$, $z = 0$.

17. $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $z=x+y+1$, $z=0$.

18. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=4$, $z=0$.

19. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=0$.

20. $y=6\text{-}\dfrac{3x}{2}$, $y=6-3x$, $y=0$, $z=6-x-y$, $z=0$.

21. $z=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$, $x^2+y^2=9$, $z=0$.

22. $x^2+y^2=4$, $z=xy$, $z=0$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$).

23. $z=x^2$, $z=0$, $x+y=5$, $x-2y=2$ ($y\ge 0$).

24. $x+y+z=1$, $3x+y=1$, $3x+2y=2$ ($y\ge 0$, $z\ge 0$).

25. $x+y=1$, $z=x^2+y^2$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$).

Задание 12.6. Вычислить площадь:

1. Части параболоида $z=x^2+y^2$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=4$.
2. Части плоскости $6x+3y+2z=12$, лежащей в I октанте.
3. Части плоскости $x+y+z=6$, отсекаемой плоскостями $x=0$, $y=0$, $x=3$, $y=3$.
4. Поверхности цилиндра , отсеченной плоскостями $y=\dfrac{x}{2}$, $y=2x$, $x=2\sqrt{2}$.
5. Части плоскости $x+y+z=4$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=4$.
6. Части параболоида $2z=x^2+y^2$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=1$.
7. Поверхности цилиндра $z=2\sqrt{x}$, вырезанной цилиндром $y^2=4x$ и плоскостью $x=1$.
8. Части цилиндра $x^2+z^2=9$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=9$ ($z\ge 0$).
9. Части параболоида $2z=x^2+y^2$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=3$.
10. Части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.
11. Части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2y$ ($z\ge 0$).

12. Поверхности $z = xy$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 8$.

13. Части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ($z \ge 0$).

14. Поверхности конуса $z^2 = 2xy$, отсеченной плоскостями $x = 2$, $y = 2$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$).

15. Поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4x$.

16. Части параболоида $2z = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 8$.

17. Боковой поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, заключенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

18. Части параболоида $4z = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$, $y \le x$).

19. Части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, заключенной внутри конуса $x^2 + y^2 = z^2$ ($z \ge 0$).

20. Поверхности $z = xy$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

21. Части конуса $z^2 = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ ($z \ge 0$).

22. Части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 3x$ ($z \ge 0$).

23. Поверхности параболоида $2z = x^2 + y^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 3$.

24. Части плоскости $x + y + z = 6$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 9$.

25. Поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, расположенной внутри цилиндра $z^2 = 2x$ ($z \ge 0$).

Задание 12.7. Найти массу пластинки плотности $p(x, y)$, ограниченной заданными линиями:

1. $p(x, y) = x + 2$, $y = x^2$, $x + y = 2$, $y - x = 2$ ($x \ge 0$).
2. $p(x, y) = y$, $x = y$, $x - 3y = 1$, $y = 1$, $y = 3$.
3. $p(x, y) = x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 4y$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$).

4. $p(x,y)=y$, $y^2=4+x$, $y^2=4-x$ ($y\ge 0$).

5. $p(x,y)=x+y$, $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$).

6. $p(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$).

7. $p(x,y)=2x+y^2$, $x=4$, $y=0$, $y=\sqrt{x}$.

8. $p(x,y)=x^2+y$, $x=1$, $y=0$, $y=2\sqrt{x}$.

9. $p(x,y)=x^2+2y$, $x=0$, $y=4$, $y=x^2$ ($x\ge 0$).

10. $p(x,y)=\dfrac{2y-x}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=3$, $x^2+y^2=5$ ($x\le 0$, $y\ge 0$).

Найти момент инерции относительно начала координат однородной пластинки, занимающей область, ограниченную заданными линиями:

11. $x^2+y^2=9$, $x+y=0$, $x-y=0$ $(x\ge 0)$.

12. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=1$, $x+\dfrac{y}{4}=1$, $y=0$.

13. $y=\dfrac{x}{2}$, $x=2$, $y=2$.

Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, занимающей область, ограниченную заданными линиями:

14. $y=2x-1$, $y^2=x$, $y=0$.

15. $y=4-x^2$, $2x+y=4$.

16. $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=0$.

17. $y=\sin x$, $y=0$, $y=\pi$.

18. $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=1$, $x=2$.

19. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$).

20. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ ($y\ge 0$).

21. $2y=x^2$, $x+y=4$.

22. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$, $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2$, $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}$, $\dfrac{3x}{2}=\dfrac{y}{3}$.

23. $y=x^2$, $x=4$, $y=0$.

24. $x^2=20y$, $y^2=20x$.

25. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, $3x+2y=6$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$).

Задание 12.8. Вычислить тройные интегралы по областям V, ограниченным указанными поверхностями:

1. $\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$, $z = 4$.
2. $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1 - y$.
3. $\iiint\limits_V xz^2\,dxdydz$, $x = \sqrt{2y - y^2}$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 3$.
4. $\iiint\limits_V (2x + 3y - z)\,dxdydz$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$, $z = 0$, $z = 4$.
5. $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.
6. $\iiint\limits_V xy^2z^3\,dxdydz$, $x = 1$, $y = x$, $z = 0$, $z = xy$.
7. $\iiint\limits_V (x + y + z)\,dxdydz$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$, $z = 4$.
8. $\iiint\limits_V (z + 4)\,dxdydz$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 2$.
9. $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = y$.
10. $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
11. $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, $x = 1$, $x = z$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.
12. $\iiint\limits_V y^2\,dxdydz$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 2$, $y = -2$, $z = 3$, $z = -3$.
13. $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 2$, $y = -2$, $z = 0$, $z = 3$.
14. $\iiint\limits_V (x + y)\,dxdydz$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $z = -1$, $z = 2$.
15. $\iiint\limits_V (x + z)\,dxdydz$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 3$.
16. $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

17. $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, $z=0$, $z=\sqrt{xy}$, $x=1$, $y=1$.

18. $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, $x+y+z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

19. $\iiint\limits_V (x-2y)dxdydz$, $z=0$, $z=2$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

20. $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, $x=0$, $x=1$, $y=-1$, $y=1$, $z=0$, $z=x^2+y^2$.

21. $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, $z=xy$, $z=0$, $x=1$, $x=2$.

22. $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1-x^2-y^2$.

23. $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, $z=xy$, $z=0$, $x+y=1$.

24. $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, $x=0$, $x=1$, $y=2$, $y=-2$, $z=3$, $z=-3$.

25. $\iiint\limits_V x\,dxdydz$, $z=x^2+y^2$, $z=1$ ($x\geq 0$, $y\geq 0$).

Задание 12.9. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

1. $z=\dfrac{15}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\dfrac{17}{2}-x^2-y^2$.
2. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{255}}$.
3. $z=\sqrt{64-x^2-y^2}$, $z=1$, $x^2+y^2=60$ (внутри цилиндра).
4. $2z=x^2+y^2$, $4z=4-x^2-y^2$.
5. $x^2+y^2-z^2=0$, $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$ (внутри цилиндра).
6. $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2=2$.
7. $x^2+y^2-z^2=0$, $z=6-x^2-y^2$.
8. $z=x^2+y^2$, $z^2=x^2+y^2$.
9. $y=4-x^2$, $y=x^2+2$, $z=-1$, $z=2$.

10. $y^2 = \frac{x}{2}$, $x + 2y + z = 4$, $y = 0$, $z = 0$.

11. $x + y + z = 6$, $3x + 2y = 12$, $3x + y = 6$, $y = 0$, $z = 0$.

12. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $y = 0$, $z = \frac{x}{2}$, $z = x$.

13. $x^2 + y^2 = z + 1$, $z = 3$.

14. $x^2 + y^2 = 9 - 2z$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ (вне цилиндра).

15. $3z = 10 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

16. $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$.

17. $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = 2y$, $z = 0$.

18. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z \geq 0$ (внутри цилиндра).

19. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $z^2 = x^2 + y^2$.

20. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z$ (внутри параболоида).

21. $x = y^2 + z^2$, $x = 1$.

22. $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$.

23. $x^2 + y^2 - z = 1$, $z = 0$.

24. $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$, $x = -1$, $x = 2$.

25. $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$.

Задание 12.10. Найти координаты центра тяжести однородного тела, занимающей область, ограниченную заданными поверхностями:

1. $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
2. $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$.
3. $2z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$.
4. $x^2 = 4z$, $y^2 = 4x$, $x = 1$, $z = 0$.
5. $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

6. $x+y=1,\ z=x^2+y^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

7. $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=2,\ y=4,\ x+y+z=8.$

8. $z=\dfrac{y^2}{2},\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ 2x+3y-12=0.$

9. $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ z=0,\ x+z=6.$

10. $z=x^2+y^2,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

Найти момент инерции относительно оси z однородного тела, ограниченного заданными поверхностями:

11. $x=0,\ y=0,\ y=2,\ z=0,\ x+z=2.$

12. $x+y+z=\sqrt{2},\ x^2+y^2=1,\ z=0.$

Найти момент инерции относительно оси x однородного тела, ограниченного заданными поверхностями:

13. $x^2+y^2+z^2=4.$

Найти массу тела с объемной плотностью $p(x,y,z)$, ограниченного заданными поверхностями:

14. $p(x,y,z)=x+y+z,\ x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=2,\ z=0,\ z=2.$

15. $p(x,y,z)=x^2+y^2,\ x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=3.$

16. $p(x,y,z)=2y^2e^{xy},\ x=0,\ y=1,\ y=x,\ z=0,\ z=1.$

17. $p(x,y,z)=y^2e^{-xy},\ x=0,\ y=-2,\ y=4x,\ z=0,\ z=1.$

18. $p(x,y,z)=y^2e^{\frac{xy}{2}},\ x=0,\ y=2,\ y=2x,\ z=0,\ z=-1.$

19. $p(x,y,z)=\dfrac{5}{4}\left(x^2+y^2\right),\quad 64\left(x^2+y^2\right)=z^2,\quad x^2+y^2=4,\quad y=0,\quad z=0$ ($y\geq 0,\ z\geq 0$).

20. $p(x,y,z)=10x,\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=2z,\ z=0$ ($x\geq 0,\ y\geq 0$).

21. $p(x,y,z)=\dfrac{5}{6}\left(x^2+y^2\right),\ 36\left(x^2+y^2\right)=z^2,\ x^2+y^2=1$ ($x\geq 0,\ z\geq 0$).

22. $p(x,y,z)=5x,\ x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=8z,\ z=0$ ($x\geq 0,\ y\geq 0$).

23. $p(x,y,z)=4z$, $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=1$, $x=0$ ($x\geq 0$, $z\geq 0$).

24. $p(x,y,z)=2z$, $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2=4$ ($z\geq 0$).

25. $p(x,y,z)=28xz$, $x^2+y^2=\dfrac{4}{25}z^2$, $x^2+y^2=\dfrac{2}{5}z$ ($x\geq 0$, $y\geq 0$).

13. РЯДЫ

13.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1) ***Числовым рядом*** называется выражение $U_1 + U_2 + ... + U_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$, где $U_1, U_2, ..., U_n$ - числовая последовательность. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ называется ***сходящимся***, если существует $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, где S_n - частичная сумма, S - сумма ряда.

Необходимый признак сходимости: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится, то предел его общего члена при $n\to\infty$ равен нулю: $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$. Обратное утверждение неверно. Если этот предел не равен 0, то ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

1. Признак сравнения.

Если даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ (1.1) и $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ (1.2), общие члены которых удовлетворяют соотношению $U_n \le V_n$, то из сходимости ряда (1.2) следует сходимость ряда (1.1) и из расходимости ряда (1.1) следует расходимость ряда (1.2).

На практике используется ***предельный признак сравнения.***

Если существует $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n}$ конечный, отличный от нуля, то оба ряда либо сходятся, либо расходятся одновременно.

В качестве образцового ряда берут ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, который при $p \le 1$ расходится, а при $p > 1$ - сходится.

2. *Признак Даламбера.*

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ существует $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = q$, то при $q < 1$ ряд сходится, при $q > 1$ - расходится, при $q = 1$ - неопределенность.

3. *Радикальный признак.*

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ - расходится, при $q=1$ - неопределенность.

4. ***Интегральный признак сходимости.***

Если существует функция *f(x),* для которой *f(n)=Un*, где *Un*- общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, то данный ряд и интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

5. Признак сходимости знакочередующегося ряда.

Если члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n$ удовлетворяют условиям:

$U_1 > U_2 > U_3 > ... > U_n > ...$

2) $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$,

то ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена U_1, то есть $0 < S < U_1$.

Если в знакочередующемся ряде ограничить сумму n членами, то ошибка, совершаемая при замене суммы ряда S на частичную сумму S_n, не превосходит абсолютной величины первого из отброшенных членов.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n^2+2n+1}{(2n+1)(n^2-2)}$.

Решение. Проверим выполнение необходимого признака $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+2n+1}{(2n+1)(n^2-2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(6+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{(2n+1)n^2\left(1-\frac{2}{n^2}\right)} = 0.$$

Признак выполняется. Требуется продолжить исследования по достаточным признакам. Применим предельный признак сравнения. В качестве известного ряда возьмем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится, так как $p=1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(6n^2+2n+1)n}{(2n+1)(n^2-2)} = 3 \neq 0,$$

значит исследуемый ряд расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$.

Решение. Проверка выполнения необходимого признака потребует громоздких вычислений (применение формулы Стирлинга), поэтому применим один из достаточных признаков. Если в общем члене ряда содержится факториал, то лучше применить признак Даламбера.

$$U_n=\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!};$$

$$U_{n+1}=\frac{2^{n+2}[(n+1)^3+1]}{(n+2)!}=\frac{2^{n+2}(n^3+3n^2+3n+2)}{(n+2)!};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}(n^3+3n^2+3n+2)(n+1)!}{(n+2)!\cdot 2^{n+1}(n^3+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n^3+3n^2+3n+2)}{(n+2)(n^3+1)}=0<1.$$

Ряд сходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$.

Решение. По необходимому признаку получаем:

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}\right]^{n^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2}=0.$$

Из общего члена ряда легко извлечь корень n-ой степени, поэтому применим радикальный признак Коши:

$$\sqrt[n]{U_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}}=\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n\left(1-\frac{3}{2n}\right)}\right]^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{2n}\right)^{n}}=$$

$$=0\cdot\frac{e}{e^{-\frac{3}{2}}}=0<1$$

Ряд сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$.

Решение. Необходимый признак:

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'_n}{(n^3)'_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{3n^2}=0.$$

Применим интегральный признак.

$$\int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx=\int_2^{\infty}x^{-3}\ln x dx=\begin{bmatrix}U=\ln x; dU=\frac{1}{x}dx\\ dV=x^{-3}dx; V=-\frac{1}{2x^2}\end{bmatrix}=\left(-\frac{\ln x}{2x^2}\right)\Bigg|_2^{\infty}+\int_2^{\infty}\frac{dx}{2x^3}=$$

$$=\left(-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}\right)\Bigg|_2^{\infty}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}\right)\Bigg|_2^{b}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln b}{2b^2}-\frac{1}{4b^2}+\frac{\ln 2}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 4}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{(\ln b)'_b}{(b^2)'_b}-\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^2}+\left(\frac{\ln 2}{8}+\frac{1}{16}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{\frac{1}{b}}{2b}-\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^2}+\left(\frac{\ln 2}{8}+\frac{1}{16}\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(2\ln 2+1\right),$$

несобственный интеграл сходится, значит и ряд сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n^2-2}}{\sqrt[6]{3n^5-7}}$.

Решение. Необходимый признак:

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n^2-2}}{\sqrt[6]{3n^5-7}}=\sin\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2-2}}{\sqrt[6]{3n^5-7}}=\sin\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n^4}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}}}{\sqrt[6]{n^5}\cdot\sqrt[6]{3-\frac{7}{n^5}}}=$$

$$=\sin\frac{1}{\sqrt[6]{3}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}=0$$

Для исследования ряда применим предельный признак сравнения дважды.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\sqrt[3]{n^2-2}}{\sqrt[6]{3n^5-7}}}{\frac{\sqrt[3]{n^2-2}}{\sqrt[6]{3n^5-7}}}=1\neq 0$$ - (по первому замечательному пределу),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{W_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{n^2-2}}{\sqrt[6]{3n^5-7}}}{\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[6]{n^5}}}=\frac{1}{\sqrt[6]{3}}\neq 0\,,\qquad \text{где}$$

$W_n=\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[6]{n^5}}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{n}}=\dfrac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$ - ряд Дирихле, $p=\dfrac{1}{6}<1$. Все ряды расходятся.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

Решение. По признаку Лейбница для знакочередующегося ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\left|U_n\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}=0\ ,\quad \text{ряд сходится.}$$

Исследуем ряд на абсолютную сходимость по признаку сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n+1}{n(n+1)}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)n}{n(n+1)}=2\neq 0\,.$$

Ряд абсолютно расходится, т.к. гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ - расходится.

Знакопеременный ряд - условно сходящийся.

13.2. Функциональные ряды

Область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$, где $U_n(x)$, $n=1,2,3\ldots$ - функции одной переменой, есть совокупность значений переменной x, при которых ряд сходится. Сумма ряда в области сходимости является некоторой функцией от x : $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$, для x из области сходимости.

Область сходимости определяется решением неравенства на основе достаточных признаков Даламбера или радикального признака :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|<1;\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|U_n(x)\right|}<1\,.$$

Принадлежность концов интервала к области сходимости определяется на основе исследования числовых рядов, получающихся после подстановки значений этих концов в функциональный ряд.

В частном случае, если функциональный ряд представляет собой степенной ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, область сходимости по приведенным формулам определяется:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^{n+1}}\right| = |x-x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,\ \textit{или}\ \ |x-x_0| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1\ ,\ \textit{или}\ \ |x-x_0| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\ .$$

Здесь $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,\ R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, где R – радиус сходимости.

Если функция $f(x)$ в точке a непрерывна вместе со своими производными, то в окрестности точки $x=a$ справедлива формула (ряд) Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$= f(a) + f^{/}(a)(x-a) + \frac{f^{//}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{///}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots\ .$$

При $a=0$ ряд Тейлора преобразуется в ряд Маклорена :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f^{/}(0)x + \frac{f^{//}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{///}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots\ .$$

Таблица рядов Маклорена для некоторых функций.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < \infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(-\infty < x < \infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(-\infty < x < \infty);$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$$

$$(-1 < x \le 1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

$$(-1 < x \le 1);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(-1 < x \le 1);$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(-\infty < x < \infty);$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(-\infty < x < \infty).$$

В скобках указаны интервалы сходимости рядов.

Разложение функций в ряд Тейлора позволяет с любой степенью точности приближенно вычислить значение функции в точке, пределы, определенный интеграл, найти частное решение дифференциального уравнения (задачу Коши) и другие.

Пример 7. Найти область сходимости ряда $\sum_{4=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(3n-2)5^n}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^{n+1}(3n-2)5^n}{(3n+1)5^{n+1}(x+2)^n}\right| = \frac{1}{5}|x+2|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n-2}{3n+1}\right| = \frac{1}{5}|x+2| < 1;$$

$$|x+2| < 5; \quad -7 < x < 3.$$

Исследуем ряд на концах интервала (подставляем значения концов в функциональный ряд):

$$x = -7, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{(3n-2)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n-2} \quad .$$

Этот знакочередующийся ряд сходится , т.к. $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{3n-2} = 0$, и члены ряда, взятые по абсолютной величине , убывают, поэтому значение $x = -7$ входит в область сходимости ряда.

$$x = 3 \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(3n-2)5^n} = \sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{3n-2} \quad .$$

Данный ряд с положительными членами расходится по признаку сравнения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-2} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

где $V_n = \frac{1}{n}$ – общий член расходящегося гармонического ряда . Значит, точка $x = 3$ не входит в область сходимости ряда.

Ответ: $-7 \leq x < 3$.

Пример 8. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-5)^{2n}}{\sqrt{2n-3}}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}(x-5)^{2(n+1)}\sqrt{2n-3}}{\sqrt{2(n+1)-3}\cdot 3^n(x-5)^{2n}}\right| = \left|3(x-5)^2\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{2n-3}}{\sqrt{2n-1}}\right| < 1 \;;$$

$$(x-5)^2 < \frac{1}{3}; \qquad 5-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < 5+\frac{1}{\sqrt{3}} \;.$$

Исследуем ряд на концах интервала.

При подстановке в функциональный ряд обеих концов интервала образуется один и тот же числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-3}}$.

Этот ряд расходится по признаку сравнения его с расходящимся рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \;;\; V_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \;;\; p = \frac{1}{2} < 1 \;.$$

Значит область сходимости функционального ряда: $5-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < 5+\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 9. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3}{(n^3+2)}\cdot\frac{1}{(3x^2+10x+9)^n}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2(n+1)^3(n^3+2)(3x^2+10x+9)^n}{\left[(n+1)^3+2\right]\cdot(3x^2+10x+9)^{n+1}\cdot 2n^3}\right| =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3}{n^3}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3+2}{(n+1)^3+2}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(3x^2+10x+9)^n}{(3x^2+10x+9)^{n+1}}\right| = \frac{1}{3x^2+10x+9} < 1 \;,$$

$$3x^2+10x+9 > 1; \qquad 3x^2+10x+8 > 0; \qquad x < -2 \;; \qquad x > -\frac{4}{3} \;.$$

При подстановке в функциональный ряд обеих концов интервала образуется один и тот же числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3}{n^3+2}$, который расходится согласно необходимому признаку сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty}U_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3}{n^3+2} = 2 \neq 0$.

Таким образом, область сходимости ряда: $x \in (-\infty,-2)\cup\left(-\frac{4}{3},+\infty\right)$.

Пример 10. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0.5} \sin\sqrt{x}dx$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

$$\int\limits_0^{0.5} \sin\sqrt{x}dx = \left[\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \ldots; u = \sqrt{x} \right] =$$

$$= \int\limits_0^{0.5} \left(\sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{x})^5}{5!} - \frac{(\sqrt{x})^7}{7!} + \ldots \right) dx = \int\limits_0^{0.5} \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3!}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5!}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7!}x^{\frac{7}{2}} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5\cdot 3!}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7\cdot 5!}x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{9\cdot 7!}x^{\frac{9}{2}} + \ldots \right) \Bigg|_0^{0.5} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{0.5^3} - \frac{1}{15}\sqrt{0.5^5} + \frac{1}{420}\sqrt{0.5^7} - \ldots = 0.2357 - 0.0118 \approx 0.22390 \quad .$$

Пример11. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{8-3x}}$ в ряд Тейлора по степеням x.

Решение. Определим коэффициенты ряда Тейлора по степеням x для функции:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{8-3x}} = (8-3x)^{-\frac{1}{3}} \quad .$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{8-3x}}, \qquad y(0) = \frac{1}{2},$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{(8-3x)^4}}, \qquad y'(0) = \frac{1}{2^4},$$

$$y'' = \frac{4}{\sqrt[3]{(8-3x)^7}}, \qquad y''(0) = \frac{4}{2^7},$$

$$y''' = 4\cdot 7\cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(8-3x)^{10}}}, \qquad y'''(0) = \frac{4\cdot 7}{2^{10}},$$

… … … … … … … … … … … … … … … …

$$y^{(n)}=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{\sqrt[3]{(8-3x)^{3n+1}}}\ ,\qquad\qquad y^{(n)}(0)=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2^{3n+1}}\ .$$

Тогда:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8-3x}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}x+\frac{1\cdot 4}{2^7}x^2+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{2^{10}}x^3+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2^{3n+1}}x^n$$

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt[3]{8-3x}}=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2^4}x^3+\frac{1\cdot 4}{2^7}x^4+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{2^{10}}x^5+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2^{3n+1}}x^{n+2}\ .$$

Пример 12. С помощью рядов решить дифференциальное уравнение:

$$y''+xy'+y=0;\qquad y(0)=0;\qquad y'(0)=1\ .$$

Решение. Решение дифференциального уравнения находится в виде ряда Тейлора:

$$y(x)=y(a)+\frac{y'(a)}{1!}(x-a)+\frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots,$$

где точка $x=a$ определяется из начальных условий (в приведенном примере $x=0$).

Значения функции и ее производных для ряда Тейлора находятся из начальных условий непосредственно для первых членов и для остальных членов ряда путем последовательного дифференцирования исходного дифференциального уравнения, разрешенного относительно старшей производной и вычисленной в точке $x=a$. Для тех значений x, для которых получившийся ряд сходится, он представляет решение дифференциального уравнения.

В нашем примере:

$y(a)=y(0)=0$,

$y'(a)=y'(0)=1$,

$y''=-xy'-y$, $\qquad y''(0)=0$,

$y'''=-(x'y'+xy'')-y'=-y'-xy''-y'=-2y'-xy''$, $\qquad y'''(0)=-2$,

$y^{(4)}=-2y''-y''-xy'''=-3y''-xy'''$, $\qquad y^{(4)}(0)=0$,

$y^{(5)}=-3y'''-y'''-xy^{(4)}=-4y'''-xy^{(4)}$, $\qquad y^{(5)}(0)=2\cdot 4$,

$$y^{(6)} = -4y^{(4)} - y^{(4)} - xy^{(5)} = -5y^{(4)} - xy^{(5)}, \qquad y^{(6)}(0) = 2 \cdot 4,$$
$$y^{(7)} = -6y^{(5)} - xy^{(6)}, \qquad y^{(7)}(0) = -2 \cdot 4 \cdot 6 .$$

Видна закономерность:

$$y^{(n)} = -(n-1)y^{(n-2)} - xy^{(n-1)} \quad ;$$
$$y^{(2n)}(0) = 0; \qquad y^{(2n+1)}(0) = (-1)^n 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n \ .$$

Подставим все значения в ряд :

$$y(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{2 \cdot 4}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{7!}x^7 + \ldots +$$
$$+(-1)^n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots$$

Выполним преобразования:

$$y(x) = x - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \ldots +$$
$$+(-1)^n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n(2n+1)}x^{2n+1} + \ldots \quad .$$

$$y(x) = x - \frac{x^3}{1 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} + \ldots \quad .$$

Определим радиус сходимости этого ряда:

$$C_n = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}; \qquad C_{n+1} = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)(2n+3)}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)(2n+3)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}(2n+3) = \infty$$

Значит полученное решение справедливо для всех x.

13.3. Ряды Фурье и интегралы Фурье

Если на интервале $[-\pi,\pi]$ функция $f(t)$ удовлетворяет условию Дирихле: функция непрерывна с конечным числом экстремумов или имеет конечное число точек разрыва первого рода - то ряд Фурье этой функции сходится в точках непрерывности к самой функции $f(t)$, а в точках разрыва первого рода - к полусумме левого и правого пределов функции $f(t)$.

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),\qquad \text{где}\quad n=1,2,3,\dots\ ,$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\ ;\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt\,;\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ntdt\,.$$

Если функция *f(t)* периодична с периодом 2π, удовлетворяет условию Дирихле, то ряд Фурье данной функции сходится к ней для любого *t*. То же самое относится и к случаям, если функция *f(t)* периодична с периодом *T* или *2l*. Соответствующие формулы имеют вид:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2\pi}{T}nt+b_n\sin\frac{2\pi}{T}nt),$$

где $$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt\,;\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos\frac{2\pi}{T}ntdt\,;\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin\frac{2\pi}{T}ntdt\ .$$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{\pi}{l}nt+b_n\sin\frac{\pi}{l}nt),$$

где $$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)dt\ ;\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}ntdt\,;\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi}{l}ntdt\ .$$

Если функция *f(t)* четная, то $b_n=0$; если нечетная $a_0=a_n=0$ и ряд Фурье упрощается.

Если *f(t)* задана на полуинтервале, то ее можно разложить в ряд Фурье по косинусам или синусам, продлив функцию соответственно четным или нечетным образом на весь период.

Если рядом Фурье представлялась функция $f(t)$ периодическая или заданная на периоде и удовлетворяющая условиям Дирихле на этом периоде, то ***интегралом Фурье*** представляется функция $f(x)$ непериодическая, к которой предъявляются два условия:

1) должна быть кусочно-гладкая, т.е. должна быть на некотором интервале непрерывной и иметь непрерывную производную во всех точках этого интервала , за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых функция имеет разрыв 1 рода (это аналог условия Дирихле);

2) должна быть абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т.е. должен быть сходящимся $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=A\neq\infty.$ На электротехническом языке

это означает одиночный импульс тока или напряжения, имеющий начало и конец.

Тогда функция $f(x)$ представляется несколькими видами интеграла Фурье:

a) $$f(x)=\int\limits_0^\infty\left[A(\alpha)\cos\ \alpha x+B(\alpha)\sin\ \alpha x\right]\,d\alpha,$$

где $$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_\infty^\infty f(t)\cos\ \alpha\ t\ dt,\ B(\alpha)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\sin\ \alpha\ t\ dt\ .$$

Здесь $f(x)$ и $f(t)$ - одна и та же функция с аргументами x и t. В частных случаях $f(x)$ может быть четной и нечетной.

Если $f(x)$ - чётная, то $B(\alpha)=0,$ и тогда

$$f(x)=\int\limits_0^\infty A(\alpha)\cos\alpha\ x\ dx,\quad \text{где}\quad A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(t)\cos\ \alpha\ t\ dt.$$

Иногда вводят функцию $F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \int\limits_{0.}^\infty f(t)\cos\ \alpha\ t\ dt,$

тогда $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \int\limits_0^\infty F(\alpha)\cos\ \alpha\ x\ d\alpha.$ В этом случае функцию $F(\alpha)$ называют ***косинус- преобразованием Фурье.***

Если $f(x)$ - -нечетная, то $A(\alpha)=0$ и тогда

$$f(x)=\int\limits_0^\infty B(\alpha)\sin\ \alpha\ x\ d\alpha;\qquad B(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(t)\sin\ \alpha\ tdt.$$

Если ввести функцию

$\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(t)\sin\alpha\ tdt$ - ***синус-преобразование Фурье***,

то $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \Phi(\alpha)\sin\alpha\ x\ d\alpha.$.

b) Второй вид интеграла Фурье :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\alpha\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\ \cos\alpha\ (t-x)\ dt\ .$$

c) Третий вид интеграла Фурье – в комплексной форме – здесь не рассматривается.

Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье значит:

Вид а) - найти функцию $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ или $F(\alpha)$ или $\Phi(\alpha)$ и подставить в соответствующую формулу.

Вид b) - посчитать внутренний интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)dt$ и подставить в формулу.

Пример 13. Разложить функцию $f(t)=\dfrac{t}{2}$ в ряд Фурье на интервале $(-\pi,\pi)$.

Решение. Продолжим функцию периодическим образом с периодом 2π (рис. 13.1.).

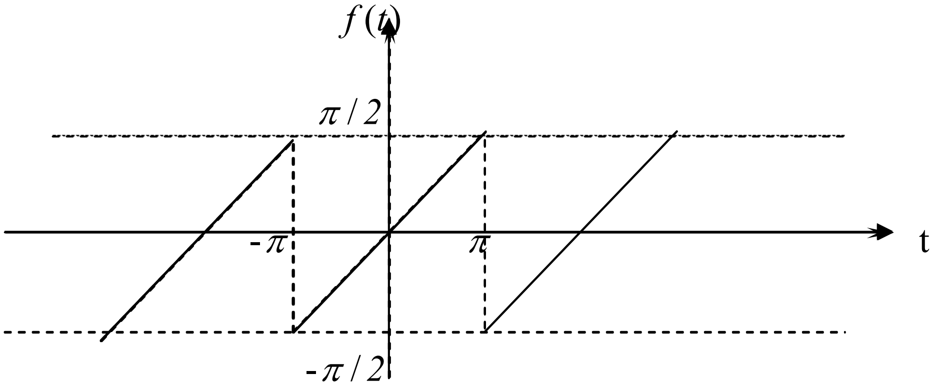


Рис. 13.1.

Функция $f(t)=\dfrac{t}{2}$ нечетная, поэтому коэффициенты $a_0=a_n=0$.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{t}{2}\sin ntdt=\begin{vmatrix} U=t; & dV=\sin ntdt \\ dU=dt; & V=-\dfrac{1}{n}\cos nt \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{t}{n}\cos nt\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\cos ntdt\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nt\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{n}\cos n\pi=\frac{1}{n}(-1)(-1)^n=\frac{1}{n}(-1)^{n+1}$$

Ряд Фурье: $\dfrac{t}{2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\sin nt=\dfrac{\sin t}{1}-\dfrac{\sin 2t}{2}+\dfrac{\sin 3t}{3}-\dfrac{\sin 4t}{4}+\ldots$.

Равенство справедливо всюду, кроме точек разрыва (на концах интервала), где ряд сходится к 0, т.к. сумма ряда равна :

$$\frac{\lim\limits_{t\to(2\pi+1)\pi-0} f(t) + \lim\limits_{t\to(2\pi-1)\pi+0} f(t)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{2} = 0 .$$

Пример 14 . Разложить в ряд Фурье функцию $f(t) = \left(\frac{t^2}{3} - 1\right)$ на интервале (π, π).

Решение. Продолжим функцию периодическим образом с периодом 2π (рис.13.2.)

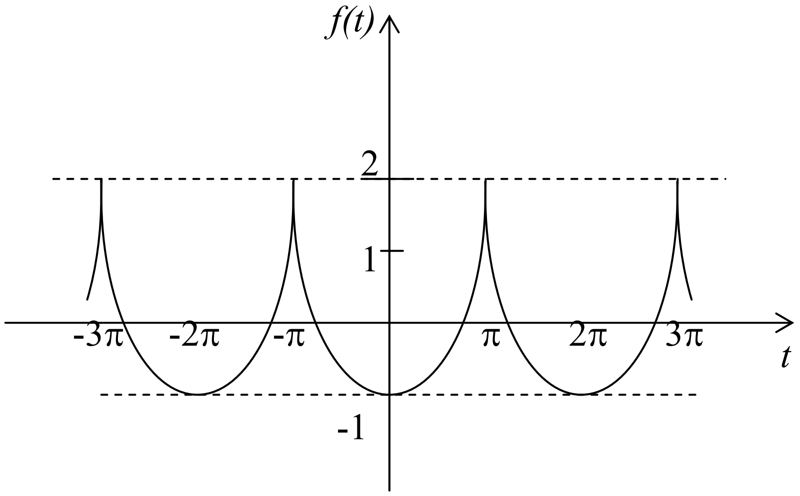


Рис. 13.2.

Функция $f(t) = \frac{t^2}{3} - 1$ четная, поэтому коэффициент $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{3} - 1\right)dt = \frac{2}{\pi}\left(\frac{t^3}{9} - t\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{9} - \pi\right) = 2\left(\frac{\pi^2}{9} - 1\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{3} - 1\right)\cos ntdt = \begin{bmatrix} U = \frac{t^2}{3} - 1; & dV = \cos ntdt \\ dU = \frac{2}{3}tdt; & V = -\frac{1}{n}\cos nt \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{t^2}{3} - 1\right)\frac{1}{n}\sin nt\Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{3n}\int_0^{\pi} t\sin ntdt\right) = \begin{bmatrix} U = t; & dV = \sin ntdt \\ dU = dt; & V = -\frac{1}{n}\cos nt \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{4}{3n\pi}\left(-\frac{t}{n}\cos nt\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos ntdt\right) = \frac{4\pi}{3n^2\pi}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\sin nt\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3n^2}(-1)^n \quad .$$

Ряд Фурье:

$$\frac{t^2}{3}-1=\frac{\pi^2}{9}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3n^2}(-1)^n\cos nt=\frac{\pi^2}{9}-1-\frac{4}{3}\left(\frac{\cos t}{1^2}-\frac{\cos 2t}{2^2}+\frac{\cos 3t}{3^2}-\dots\right).$$

Пример 15. Разложить в ряд Фурье функцию $f(t)=\begin{cases} t, -\pi\le t\le 0\\ 2t, 0<t\le\pi\end{cases}$.

Решение. Продолжим функцию периодическим способом с периодом 2π (рис. 13.3.)

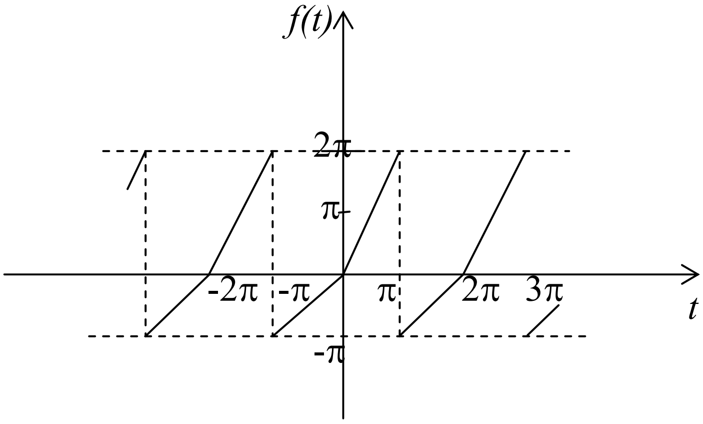


Рис.13.3.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}tdt+\int_{0}^{\pi}2tdt\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{t^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{0}+t^2\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2\right)=\frac{\pi}{2}\quad.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}t\cos ntdt+\int_{0}^{\pi}2t\cos ntdt\right)=\begin{bmatrix}U=t; & dV=\cos ntdt\\ dU=dt; & V=\frac{1}{n}\sin nt\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{t}{n}\sin nt\bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n^2}\cos nt\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2t}{n}\sin nt\bigg|_0^{\pi}+\frac{2}{n^2}\cos nt\bigg|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}\cos n\pi\right)+\left(\frac{2}{n^2}\cos n\pi-\frac{2}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\Big(1-(-1)^n\Big)+\frac{2}{n^2}((-1)^n-1)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi\ \ n^2}(1-(-1)^n-2+2(-1)^n)=\frac{1}{\pi\ \ n^2}((-1)^n-1)=$$

$$=\begin{cases} 0, n=2k \\ -\dfrac{2}{\pi n^2}; n=2k+1 \end{cases} \qquad a_{2k+1}=-\frac{2}{\pi(2k+1)^2}; \qquad k=0,1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} t\sin nt dt+\int_{0}^{\pi} 2t\sin nt dt\right)=\begin{bmatrix} U=t; & dV=\sin nt dt \\ dU=dt; & V=-\dfrac{1}{n}\cos nt \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{t}{n}\cos nt\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n^2}\sin nt\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2t}{n}\cos nt\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{n^2}\sin nt\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi\right)=\frac{3\pi}{\pi\ n}(-1)^{n+1}$$

Ряд Фурье:

$$f(t)=\frac{\pi}{4}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[-\frac{2}{\pi(2k+1)^2}\cos(2k+1)t\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}(-1)^{n+1}\sin nt=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2}+\frac{\cos 3t}{3^2}+\frac{\cos 5t}{5^2}+\dots\right)+3\left(\frac{\sin t}{1}-\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 3t}{3}-\dots\right) .$$

Пример 16. Разложить функцию $f(t)=t$ на интервале $(0;\pi)$ в ряд косинусов.

Решение. Чтобы в разложении были только косинусы, необходимо иметь четную функцию, поэтому продолжим функцию $f(t)=t$ на интервале $(0;\pi)$ четным, периодическим образом (рис. 13.4.) .

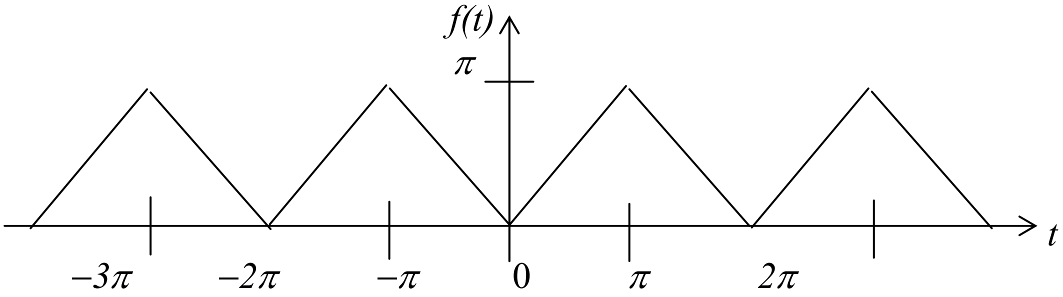


Рис. 13.4.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\ \ dt = \frac{2}{\pi}\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(\pi^2 - 0) = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos n\ t\ \ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos\ n\ t\ \ dt = \begin{vmatrix} U = t & dV = \cos\ n\ t\ \ dt \\ dU = dt & V = \frac{1}{n}\sin\ n\ t \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{t}{n}\sin\ n\ t\right]\Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin\ n\ t\ \ dt = \frac{2}{\pi n^2}\cos\ n\ t\ \Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - \cos 0) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & n = 2k-1,\ \ k = 1,2,3,... \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

$$f(t) = t = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\right)\cos(2k-1)t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + ...\right)$$

Чтобы разложить ту же функцию $f(t) = t$ на интервале $(0,\pi)$ в ряд синусов, нужно продолжить эту функцию нечетным, периодическим образом (рис.13.5.).

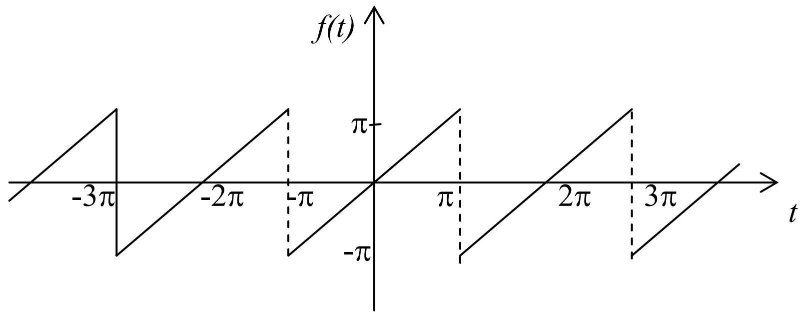


Рис. 13.5.

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin\ n\ t\ \ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin\ n\ t\ \ dt = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{t}{n}\cos nt + \frac{1}{n^2}\sin nt\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\pi\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\ .$$

$$f(t)=t=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\ nt = \sum_{n=8}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin\ nt = 2\left(\frac{\sin t}{1}-\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 3t}{3}-\frac{\sin 4t}{4}+\ldots\right).$$

Еще раз обратим внимание на то, что указанные в примерах функции раскладываются в соответствующий ряд Фурье только в указанных интервалах. За пределами интервалов этого разложения нет.

Если интервалы заданы $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ или $(-l,l)$, то разложение в ряд Фурье производят по приведенным выше формулам.

Пример 17. Найти косинус-преобразование Фурье и написать интеграл Фурье для функции: $f(x)=\begin{cases}\cos\ 2x, & |x|\le\frac{\pi}{2}\\ 0\ , & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ (рис.13.6).

Решение. Построим график функции (рис. 13.6.)

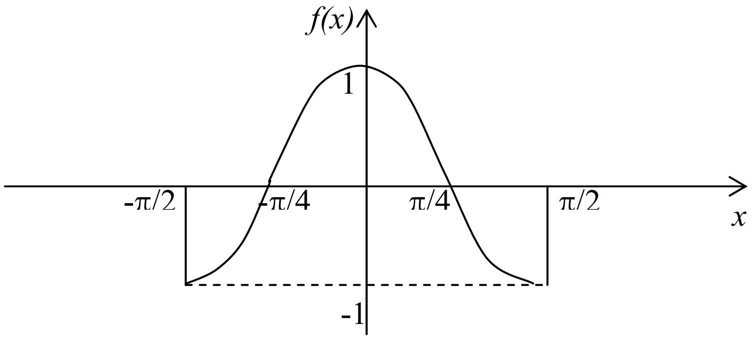


Рис.13.6.

Проверим функцию $f(x)$ на абсолютную интегрируемость:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\ 2x\ dx=\frac{1}{2}\sin\ 2x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{1}{2}\big(\sin\ \pi\ -\ \sin\ (-\pi)\big)=0\ .$$

Несобственный интеграл существует и конечен, значит $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси.

Найдем косинус-преобразование :

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi/2}\cos 2t\cos\alpha t dt\ +\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\pi/2}^{\infty}0\cdot\cos\alpha t dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left[\cos\ t(2-\alpha)+\cos\ t(2+\alpha)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\frac{1}{2-\alpha}\sin t(2-\alpha)+\frac{1}{2+\alpha}\sin t(2+\alpha)\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2-\alpha}\sin(\pi-\frac{\pi\alpha}{2})+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2+\alpha}\sin(\pi+\frac{\pi\alpha}{2})=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2-\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2+\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\left(\frac{1}{2-\alpha}-\frac{1}{2+\alpha}\right)=\frac{2\alpha\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\sqrt{2\pi}\ (4-\alpha^2)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\alpha}{4-\alpha^2}\cdot\sin\frac{\pi\alpha}{2}\ .$$

Интеграл Фурье для функции:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F(\alpha)\cos\alpha x d\alpha=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\alpha}{4-\alpha^2}\ \sin\frac{\lambda\alpha}{2}\cos\alpha x d\alpha=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\alpha}{4-\alpha^2}\ \sin\frac{\lambda\alpha}{2}\cos\alpha x d\alpha\ .$$

Задание 13.1 . Исследовать на сходимость числовые ряды (для знакочередующихся рядов провести исследование на абсолютную и условную сходимость).

1.

а) $\frac{1}{3}+\frac{3}{6}+\frac{5}{9}+\frac{7}{12}+\dots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n-1}}{\sqrt{n^5+2n^2-3}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3-n}{2^n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{n^2}$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln^3 n}}{n}$

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}}{(n+2)!(2n-1)}$

2.

а) $\frac{2}{6}+\frac{6}{9}+\frac{10}{12}+\frac{14}{15}+\dots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{9n-4}}{\sqrt[3]{4n^5+9n}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(4n^2-1)}{(n+1)!}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+3}{7n-1}\right)^{n^2}$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\ln^2 n}}{n}$

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{4n+5}{3n+1}\right)^{3n+5}$

3.

а) $\frac{6}{2}+\frac{8}{7}+\frac{10}{12}+\frac{12}{17}+\dots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{(2n+1)\sqrt{n+3}}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}(4n^4+2n^2-1)}{(3n)!}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\ln^2 n}}{n}$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3 4^n}{(n+3)!}$

4.

а) $\frac{1}{10}+\frac{7}{14}+\frac{13}{18}+\frac{20}{22}+\dots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^5+4}}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n^2-2n+1)3^n}{(3n-1)!}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n+7}{9n-3}\right)^{n}$

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^9 n}$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{5n-6}{3n+14}\right)^{3n+4}$

5.

а) $\frac{6}{4}+\frac{9}{10}+\frac{12}{16}+\frac{15}{22}+\dots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^5+4}\cdot(n-1)}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!(2n^3-1)}{10^n}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)^n}{(n+5)!}$

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{\ln^6 n}}{n}$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+4)6^n}{(n+7)!}$

6.

а) $\frac{6}{9}+\frac{9}{11}+\frac{12}{13}+\frac{15}{15}+\dots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n^{10}+1}}{(5n^3+4n)\sqrt{n}}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)!11^n}{(3n+1)!(6n^3+n)}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+12}{4n+9}\right)^{n^2}$

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln^4 n}}$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{8n-5}{6n+8}\right)^{3n}$

7.

а) $\dfrac{2}{8}+\dfrac{5}{10}+\dfrac{8}{12}+\dfrac{11}{14}+\ldots$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{9n+1}}{\sqrt{n^5+n^3}}$

в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(6n)!(3n^5-n^3)}{21^n}$

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n^{n+4}}$

д) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\ln^7 n}}{n}$

е) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{9^n(2n+5)}{(n+3)!}$

8.

а) $\dfrac{2}{14}+\dfrac{11}{19}+\dfrac{20}{24}+\dfrac{29}{29}+\ldots$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+4}{(2n+1)\sqrt{n^3+1}}$

в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(3n-1)!}{(3n+1)!(2n^4-3n^2)}$

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n-2}{7n+3}\right)^{n^2}$

д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{\ln^7 n}}{n}$

е) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n^2+9)4^n}{(n+8)!}$

9.

а) $\dfrac{3}{9}+\dfrac{11}{16}+\dfrac{19}{23}+\dfrac{27}{30}+\ldots$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4n^2}{\sqrt{n^9+36}}$

в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{41^n(5n^7+n^2-1)}{(4n-3)!}$

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+5}}{(n+8)!}$

д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^4(n+1)}$

е) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{7n-4}{5n+9}\right)^{3n+8}$

10.

а) $\dfrac{1}{7}+\dfrac{4}{11}+\dfrac{7}{15}+\dfrac{10}{19}+\ldots$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+2}{\sqrt[3]{n^9+3n^2}}$

в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)!5^n}{(3n)!(2n^5-3n+1)}$

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+9}{5n-9}\right)^{n^2}$

д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^4(n+1)}{n+1}$

е) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n(3n+8)}{(n+4)!}$

11.

а) $\frac{5}{2}+\frac{8}{9}+\frac{11}{16}+\frac{14}{23}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{9n+1}}{\sqrt[3]{12n^{10}+3n}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6n^3-2n-1)(4n-3)!}{(4n)!\ \cdot 7^n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)!}{(n+7)^n}$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ \sqrt[5]{\ln^7 n}}$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{5n+6}{2n+9}\right)^{3n+2}$

12.

а) $\frac{3}{7}+\frac{8}{13}+\frac{13}{17}+\frac{18}{21}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n-7}{(n+6)\ \sqrt[3]{n^2+1}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(7n^2-2n+3)}{(6n^3-7n)(n+9)!}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n+5}{6n-4}\right)^{n^2}$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{\ln^2 n}}{n}$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2\, 3^n}{(n+5)!}$

13.

а) $\frac{5}{8}+\frac{11}{15}+\frac{17}{22}+\frac{23}{29}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n-5}{\sqrt[3]{n^{12}+3n^7}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-3)!(3n^3-3)}{23^n(2n^2-8)}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(n+6)!}$

д) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ \sqrt{\ln^9 n}}$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{3n+1}{6n-4}\right)^{2n+1}$

14.

а) $\frac{4}{8}+\frac{7}{10}+\frac{10}{12}+\frac{13}{14}+\ldots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{3n^6-4n^2}}{4n^2+5n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^6-4n^3+1)(3n-2)!}{5^n(4n^3-1)}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+11}{3n+7}\right)^{n^2}$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\ln^5 n}}{n}$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{3n}}{(n+1)!(2n-1)}$

15.

а) $\frac{1}{3}+\frac{6}{9}+\frac{11}{15}+\frac{16}{21}+\dots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{9n^2+25}}{\sqrt{3n^5+6n^3}}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9^n(7n-6)!}{(3n^7-4n^2-1)}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n^{n+5}}$

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ \ln^{11} n}$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{7n-5}{2n+9}\right)^{2n+7}$

16.

а) $\frac{5}{3}+\frac{8}{7}+\frac{11}{11}+\frac{14}{15}+\dots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{3n^9-2n+1}}{\sqrt[3]{2n^{13}-4n^3+9}}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(7n^3+2n-9)8^n}{(10n-9)!}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8n+4}{8n-3}\right)^{n^2}$

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\ln^2(n+1)}}{n+1}$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^2 7^n}{(n+8)!}$

17.

а) $\frac{2}{5}+\frac{5}{9}+\frac{8}{13}+\frac{11}{17}+\dots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n^2-1)\sqrt[3]{3n^2-3}}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)!(4n^3-2n+3)}{11^n}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)^n}{(n+6)!}$

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ \sqrt[6]{\ln^5 n}}$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+15}{7n-4}\right)^{2n+6}$

18.

а) $\frac{1}{5}+\frac{4}{7}+\frac{7}{9}+\frac{10}{11}+\dots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n^3-3n^2+1)}{\sqrt[5]{n^{25}-n^{13}+3}}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n^5+2n^3-1)81^n}{(2n-1)!}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+11}{3n+8}\right)^{n^2}$

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{\ln n}}{n}$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{6^n}{(n+2)!(3n+1)}$

19.

а) $\frac{1}{5}+\frac{4}{9}+\frac{7}{13}+\frac{10}{17}+\dots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n^6+n^2-1}}{3n^3-4n^2+2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-4)!7^n}{(2n)!(3n^7-4n^2+1)}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+6)!}{n^{n+2}}$

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{11}n}$

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{7n-6}{4n+19}\right)^{3n+2}$

20.

а) $\frac{1}{7}+\frac{5}{10}+\frac{9}{13}+\frac{13}{16}+\dots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\sqrt{n}+1}{(n+3)\sqrt[3]{n^6+3n^2}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!(5n^4-3n^2+8)}{(n+4)!27^n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8n-3}{8n+5}\right)^{n^2}$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\ln^5 n}}{n}$

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3n+1}{6n-4}\right)^{2n+1}$

21.

а) $\frac{5}{2}+\frac{7}{7}+\frac{9}{12}+\frac{11}{17}+\dots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^3+4n^2+1}{\sqrt{3n^7+25}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+7)!(2n^3+n-4)}{5^n(3n^4-n+6)}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+5}}{(n+2)!}$

д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{\ln^7 n}}$

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{3n}}{(n+1)!(2n-1)}$

22.

а) $\frac{1}{10}+\frac{6}{14}+\frac{11}{18}+\frac{16}{22}+\dots$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^4+3n^3+9n^2+1}{\sqrt[4]{n^{16}+3n^9-1}}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)!(4n^5-n+1)}{6^n(3n^3-n+3)}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+3}{4n-3}\right)^{n^2}$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{\ln^3 n}}{n}$

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n(4n-3)}{(n+6)!}$

23.

а) $\frac{7}{4}+\frac{10}{10}+\frac{13}{16}+\frac{16}{22}+\ldots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3-4n^2+3}{\sqrt[3]{n^{21}-2n^{12}+3n^2}}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{16^n(8n^3-4n^2-3)}{(4n-3)!}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+7)!}{(n+9)^n}$

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln^7 n}}$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{6n+8}{3n+5}\right)^{4n-3}$

24.

а) $\frac{5}{9}+\frac{8}{11}+\frac{11}{13}+\frac{14}{15}+\ldots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt[3]{n}+4}{(n^2-4)\sqrt[3]{3n^3-2n^2+4}}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+11)!(4n^2+1)}{3^n(3n^4-2n+9)}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)!}{n^{n+3}}$

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{\ln^9 n}}{n}$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{5n+6}{2n+9}\right)^{3n+2}$

25.

а) $\frac{4}{8}+\frac{11}{17}+\frac{18}{26}+\frac{25}{35}+\ldots$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n^3+3n^2+4)}{\sqrt{3n^8+n^3-49}}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{17^n(8n^4-9n+3)}{(2n-1)!(3n^2-4)}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{4n+5}\right)^{n^2}$

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^5 n}$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2 3^n}{(n+5)!}$

Задание 13.2. Найти область сходимости рядов:

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^4+1)^2}(x-3)^n$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n(x^2-6x+13)^n}$

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3}{2n+3}(x+3)^{2n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n^2}\sin^{3n} x$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)5^n}(x-4)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n 3^{\frac{n}{x-1}}$

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}\left(x^2-4x+6\right)^n$

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(n+3)^2 2^{n-1}}(x+7)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}8^n n^2\sin^{3n}x$

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}(x-2)^{2n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n(x^2-5x+10)^n}$

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{n+8}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}\sin^{2n}(2x)$

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(x+e)}{n+e}$

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(2n-1)4^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n^2+1)}$

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\operatorname{tg}^{2n}x$

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-\frac{n}{\cos x}}$

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(5n-8)^3}(x-2)^{3n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2(x^2+2)^n}$

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{3^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}\sin^4(3x)$

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}4^{\frac{n}{x-2}}$

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)3^n}(x+6)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2-5x+11\right)^n}{5^n(n^2+5)}$

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(3n+1)^3}(x-4)^{2n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\sin^{2n}x$

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n+3)^{2n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{2^n n^2}$

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\left(x^2-2x+3\right)^n}$

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\operatorname{tg}^n(2x)$

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n\sin x}$

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+1)3^n}(x+4)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2+1\right)^n}{2^n(n+1)}$

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}(x+1)^{2n-1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2\left(x^2-4x+5\right)^n}$

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-1)2^n}(x+3)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2-2x+2\right)^n}{2^n(n^2+2)}$

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(3n+1)^3}(x-1)^{3n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n}}\operatorname{tg}^n(2x)$

25. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+3)!}(x+4)^{2n+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{n\sin x}$

Задание 13.3. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x.

1. $\frac{9}{20-x-x^2}$
2. $\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$
3. $\ln(1-x-6x^2)$
4. $2x\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-x$
5. $\frac{\operatorname{sh}2x}{x}-2$
6. $\frac{7}{12+x-x^2}$
7. $(x-1)\sin 2x$
8. $\frac{\operatorname{ch}3x-1}{x^2}$
9. $\frac{6}{8+2x-x^2}$
10. $\frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$
11. $(3+e^{-x})^2$
12. $\frac{\arcsin x}{x}-1$

13. $x^2\sqrt{4-3x}$

14. $\ln(1+2x-8x^2)$

15. $2x\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-x$

16. $(x-1)\operatorname{sh}x$

17. $\frac{5}{6+x-x^2}$

18. $x\sqrt[3]{27-2x}$

19. $\ln(1+x-12x^2)$

20. $\frac{\sin 3x}{x}-\cos 3x$

21. $\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$

22. $\frac{5}{6-x-x^2}$

23. $\sqrt[4]{16-5x}$

24. $(x-1)\operatorname{ch}x$

25. $(2-e^x)^2$

Задание 13.4. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

1. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$

2. $\int_0^{0,1}\sin(100x^2)dx$

3. $\int_0^{0,1}\frac{1-e^{-2x}}{x}dx$

4. $\int_0^{1}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx$

5. $\int_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$

6. $\int_0^{0,2}\sin(25x^2)dx$

7. $\int_0^{0,5}\cos(4x^2)dx$

8. $\int_0^{0,2}\frac{1-e^{-x}}{x}dx$

9. $\int_0^{0,4}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}dx$

10. $\int_0^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$

11. $\int_0^{0,4}\sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2dx$

12. $\int_0^{0,2}\cos(25x^2)dx$

13. $\int\limits_{0}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$

14. $\int\limits_{0}^{0,4} \frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x} dx$

15. $\int\limits_{0}^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$

16. $\int\limits_{0}^{0,4} e^{-\frac{3x^2}{4}} dx$

17. $\int\limits_{0}^{0,5} \sin(4x^2) dx$

18. $\int\limits_{0}^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$

19. $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

20. $\int\limits_{0}^{0,5} e^{-\frac{3x^2}{25}} dx$

21. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} \operatorname{arctg} 7x dx$

22. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} x\sin(5x^2) dx$

23. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{5}} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{x} dx$

24. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{1-\cos x^2}{x} dx$

25. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x} \cos x dx$

Задание 13.5. С помощью рядов решить дифференциальное уравнение.

1. $y' + y^2 = 1 + x$;
   $y(0) = 1$
2. $xy'' + y' + xy = 0$;
   $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$
3. $y' - y^3 = x^2$;
   $y(1) = 1$
4. $y'' = x + y^2$;
   $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$
5. $y' = x^2 + 2y^2$;
   $y(0) = 1$
6. $y' = x^2 y + y^3$;
   $y(0) = 1$
7. $y'' = \left(y'\right)^2 + xy$;
   $y(0) = 4$; $y'(0) = -2$
8. $y'' - xy = 0$;
   $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$
9. $y'' = (2x-1)y - 1$;
   $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$
10. $y' = x - \frac{1}{y}$;
   $y(0) = 1$

11. $y^{/} - y^{2} = x(x+1)$;
$y(0) = 1$

12. $y^{/} + y^{2} = e^{x}$;
$y(0) = 0$

13. $y^{/} = x^{2} + y^{2} + 1$;
$y(0) = 5$

14. $y^{/} = e^{x} + y^{2}$;
$y(0) = 1$

15. $y^{/} = \sin x + y^{2}$;
$y(0) = 1$

16. $y^{//} - (1 + x^{2})y = 0$;
$y(0) = -2$; $y^{/}(0) = 2$

17. $y^{//} = xy^{/} + y + 1$;
$y(0) = 1$; $y^{/}(0) = 0$

18. $y^{//}(x^{2} + 1) - 2xy^{/} = 0$;
$y(0) = 1$; $y^{/}(0) = 3$

19. $y^{//} - xy^{/} = y^{2}$;
$y(0) = 1$; $y^{/}(0) = 2$

20. $y^{/} = (2y + 1)\,\mathrm{ctg}\,x$;
$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0,5$

21. $y^{/} = \dfrac{y^{2}}{x^{2}} - \dfrac{y}{x}$;
$y(-1) = 1$

22. $y^{/} = \cos x + y^{2}$;
$y(0) = 1$

23. $y^{//} = x^{2}y - y^{/}$;
$y(0) = 1$; $y^{/}(0) = 0$

24. $y^{//} - xy^{/} + y - 1 = 0$;
$y(0) = 0$; $y^{/}(0) = 0$

25. $x^{2}y^{/} = y^{2} + xy$;
$y(1) = 1$

Задание 13.6. Разложить функцию в ряд Фурье.

1. $f(x) = |x + 2|$; $(-\pi;\pi)$
2. $f(x) = x^{2} + 1$; $(-\pi;\pi)$
3. $f(x) = e^{ax}$; $(-l;l)$
4. $f(x) = 5x - 1$; $(-5;5)$
5. $f(x) = 3 - |x|$; $(-5;5)$
6. $f(x) = x - |x|$; $(-1;1)$
7. $f(x) = |1 - x|$; $(-\pi;\pi)$
8. $f(x) = 3 - x$; $(-\pi;\pi)$
9. $f(x) = x - 1$; $(-1;1)$
10. $f(x) = x^{2} + 2$; $(-2;2)$
11. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$; $(-\pi;\pi)$
12. $f(x) = 1 + |x|$; $(-1;1)$
13. $f(x) = |x|$; $(-\pi;\pi)$
14. $f(x) = |x| - 1$; $(-1;1)$

Разложить функцию в ряд косинусов.

15. $f(x)=\begin{cases} x,(0;1) \\ 1,(1;2) \end{cases}$

16. $f(x)=x+\dfrac{\pi}{4}$; $(0;\pi)$

17. $f(x)=\begin{cases} 1,\left(0;{}^{3}\!/_{2}\right) \\ -1,\left({}^{3}\!/_{2};3\right) \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} 0,(-l;0) \\ 3,(0,l) \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} 4,(0;2) \\ 2x,(2;4) \end{cases}$

20. $f(x)=\pi-x$; $(0;2\pi)$

Разложить функцию в ряд синусов.

21. $f(x)=x+\dfrac{\pi}{2}$; $(0;\pi)$

22. $f(x)=\begin{cases} 0,(0;2) \\ 3,(2;3) \end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} x,\left(0;1\right) \\ 0,\left(1;2\right) \end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases} 2x,\left(0;{}^{\pi}\!/_{2}\right) \\ 0,\left({}^{\pi}\!/_{2};\pi\right) \end{cases}$

25. $f(x)=x-2$; $(0;3)$

Задание 13.7. Представить интегралом Фурье.

1. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\cos x, & 0\le x\le\pi \\ 0, & x\ge\pi \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} 2, & -1\le x\le 2 \\ 0, & x\ge 2,\quad x\le -1 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & x\ge 0,\quad a\ge 0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} 2-x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & x\le 0,\quad x\ge 1 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} e^{x}; & |x|\le 1 \\ 0; & |x|>1 \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} f(x)=\{2x-1, & |x|\le\dfrac{1}{2} \\ 0, & |x|>\dfrac{1}{2} \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} x^{2}, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} |x+2|, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}\sin x; & |x|\le \pi \\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}3-|x|, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|\le 2 \\ 0, & |x|>2\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}e^{-3x}, & x\le 10 \\ 0, & x<0\end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2}, & |x|\le \pi \\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & 0\le x\le 1 \\ 0, & x>1,\ \ x<0\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}|1-x|, & |x|\le 1 \\ 0, & x>1\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases}x-1, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1\end{cases}$

Найти косинус-преобразование и написать интеграл Фурье для функций .

17. $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|\ge 1\end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1\end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases}|x|-1, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|\ge 1\end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

Найти синус-преобразование и написать интеграл Фурье для функции.

21. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|\ge 1\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}C, & 0<x\le C \\ -C, & -C<x<0 \\ 0, & |x|>C,\ \ C>0\end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1 \\ -1, & 0>x>-1 \\ 0, & |x|>1\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}x^3, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1\end{cases}$

Литература

1. Виноградов А.И., Олейник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Высшая школа. – М.: 2000.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Астрель. – М.: 2003.
3. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд – во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 392 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. III).
4. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд – во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 336 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. IV).
5. Власова Е.А. Ряды: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд – во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 408 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. IX).
6. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд – во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 408 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VIII).

Содержание